Κεφάλαιο 1

Πολυδιάστατες τυχαίες μεταβλητές

1.1 (4 Μαρτίου 2009)

Έστω $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ένας *χώρος πιθανότητας*. Το μη κενό σύνολο Ω είναι ο *δειγματικός χώρος*, η οικογένεια $\mathcal{A}$ υποσυνόλων του Ω είναι το *σ-πεδίο των ενδεχομένων στο* Ω και η συνάρτηση $\mathbb{P} : \mathcal{A} \to [0,1]$ είναι το *μέτρο πιθανοτητας* (αν $A \in \mathcal{A}$ σκεφτόμαστε την τιμή $\mathbb{P}(A)$ ως «την πιθανότητα να συμβεί το A»).

Σημείωση. Υπενθυμίζεται ότι στον ορισμό του χώρου πιθανότητας απαιτούμε τα εξής:

(i) Η οικογένεια $\mathcal{A}$ των ενδεχομένων έχει τη δομή του σ-πεδίου: περιέχει το Ω, είναι κλειστή ως προς συμπληρώματα και ως προς αριθμήσιμες ενώσεις. Με άλλα λόγια, (i) αν $A \in \mathcal{A}$ τότε $\Omega \setminus A \in \mathcal{A}$ και (ii) αν (A_n) είναι ακολουθία συνόλων στην $\mathcal{A}$ τότε το σύνολο $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$. Έπεται ότι η $\mathcal{A}$ περιέχει το $\emptyset$, είναι κλειστή ως προς αριθμήσιμες τομές κλπ.

(ii) Το μέτρο πιθανότητας $\mathbb{P}$ ικανοποιεί τις $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$, $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ και είναι αριθμήσιμα προσθετικό: αν (A_n) είναι ακολουθία ξένων συνόλων από την $\mathcal{A}$ τότε

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n).$$

Από την αριθμήσιμη προσθετικότητα έπεται η «συνέχεια» της $\mathbb{P}$ με την εξής έννοια: (i) αν (A_n) είναι αύξουσα ακολουθία στην $\mathcal{A}$ και $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, τότε $\mathbb{P}(A) = \lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n)$ και (ii) αν (A_n) είναι φθίνουσα ακολουθία στην $\mathcal{A}$ και $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$, τότε $\mathbb{P}(A) = \lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n)$.

1.1α΄ Πολυδιάστατες τυχαίες μεταβλητές

Τυχαία μεταβλητή είναι κάθε «μετρήσιμη» συνάρτηση $X : \Omega \to \mathbb{R}$. Αυτό σημαίνει ότι: για κάθε $x \in \mathbb{R}$ το σύνολο

$$\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\} = X^{-1}((-\infty, x])$$

ανήκει στην $\mathcal{A}$. Ο ορισμός αυτός γενικεύεται ως εξής:

Ορισμός 1.1.1 (τυχαίο διάνυσμα). Έστω $k \geq 2$. Μια συνάρτηση $X = (X_1, \ldots, X_k) : \Omega \to \mathbb{R}^k$ λέγεται **πολυδιάστατη τυχαία μεταβλητή** (ή τυχαίο διάνυσμα) αν για κάθε $x = (x_1, \ldots, x_k) \in \mathbb{R}^k$ το σύνολο

$$\{\omega \in \Omega : X_1(\omega) \leq x_1, \ldots, X_k(\omega) \leq x_k\} = X^{-1}((-\infty, x_1] \times \cdots \times (-\infty, x_k])$$

ανήκει στην $\mathcal{A}$.

Σημείωση. Αν $X = (X_1, \ldots, X_k)$ είναι ένα τυχαίο διάνυσμα, τότε κάθε $X_i : \Omega \to \mathbb{R}$ είναι (μονοδιάστατη) τυχαία μεταβλητή. Αυτό προκύπτει από την

$$X_i^{-1}((-\infty, x_i]) = X^{-1}(\mathbb{R} \times \cdots \times (-\infty, x_i] \times \cdots \times \mathbb{R}).$$

Αντίστροφα, αν κάθε X_i είναι τυχαία μεταβλητή, τότε η $X = (X_1, \ldots, X_k)$ είναι τυχαίο διάνυσμα. Αυτό προκύπτει από την

$$X^{-1}((-\infty, x_1] \times \cdots \times (-\infty, x_k]) = \bigcap_{i=1}^{k} X_i^{-1}((-\infty, x_i]).$$

Κάθε τυχαία μεταβλητή $X : \Omega \to \mathbb{R}$ επάγει ένα μέτρο πιθανότητας στο $\mathbb{R}$. Αν $a < b$ στο $\mathbb{R}$ ορίζουμε

$$\mathbb{P}_X((a,b]) = \mathbb{P}(\{\omega : a < X(\omega) \leq b\}) = \mathbb{P}(X^{-1}(a,b])).$$

Γενικότερα, για κάθε $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ (B στο Borel σ-πεδίο του $\mathbb{R}$, δηλαδή το μικρότερο σ-πεδίο του $\mathbb{R}$ που περιέχει όλα τα ημιανοικτά διαστήματα $(a,b]$) ορίζουμε

$$\mathbb{P}_X(B) = \mathbb{P}(X^{-1}(B)).$$

Η συνάρτηση $\mathbb{P}_X : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to [0,1]$ είναι μέτρο πιθανότητας και λέγεται **κατανομή πιθανότητας** της X. Ο ορισμός αυτός γενικεύεται ως εξής:

Ορισμός 1.1.2 (κατανομή πιθανότητας). Έστω $X = (X_1, \ldots, X_k) : \Omega \to \mathbb{R}^k$ μια πολυδιάστατη τυχαία μεταβλητή. Η **κατανομή πιθανότητας** της X είναι το μέτρο πιθανότητας $\mathbb{P}_X$ που ορίζεται στο Borel σ-πεδίο του $\mathbb{R}^k$ ως εξής: αν $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^k)$ τότε

$$\mathbb{P}_X(B) = \mathbb{P}(X^{-1}(B)).$$

Ειδικότερα, αν $a_i < b_i$ στο $\mathbb{R}$ τότε

$$\mathbb{P}_X((a_1,b_1] \times \cdots \times (a_k,b_k]) = \mathbb{P}(\{\omega : a_1 < X_1(\omega) \leq b_1, \ldots, a_k < X_k(\omega) \leq b_k\}).$$

Σημείωση. Πολύ συχνά, ιδιαίτερα στην περίπτωση των διακριτών τυχαίων μεταβλητών, η κατανομή πιθανότητας ορίζεται στο σύνολο τιμών $X(\Omega)$ της X: αυτό είναι υποσύνολο του $\mathbb{R}^k$ και για κάθε $B = X(\Omega) \cap B'$, όπου $B' \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^k)$, ορίζουμε

$$\mathbb{P}_X(B) = \mathbb{P}(X^{-1}(B)).$$

Με άλλα λόγια, τα μόνα υποσύνολα του $\mathbb{R}^k$ που μας «ενδιαφέρουν» είναι αυτά που περιέχονται στο $X(\Omega)$.

Παραδείγματα 1.1.3. Συζητήθηκαν τα εξής παραδείγματα:

(i) Έστω $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ χώρος πιθανότητας και $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$ με $\mathbb{P}(A_1) = p_1$, $\mathbb{P}(A_2) = p_2$ και $\mathbb{P}(A_1 \cap A_2) = p_{12}$. Θεωρούμε την τυχαία μεταβλητή $X : \Omega \to \mathbb{R}^2$ με

$$\begin{aligned} X(\omega) &= (0,0) \text{ αν } \omega \notin A_1, \omega \notin A_2 \\ X(\omega) &= (0,1) \text{ αν } \omega \notin A_1, \omega \in A_2 \\ X(\omega) &= (1,0) \text{ αν } \omega \in A_1, \omega \notin A_2 \\ X(\omega) &= (1,1) \text{ αν } \omega \in A_1, \omega \in A_2. \end{aligned}$$

Εδώ, $X(\Omega) = \{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)\}$ και η κατανομή πιθανότητας ορίζεται στα 16 υποσύνολα του $X(\Omega)$. Για παράδειγμα,

$$\mathbb{P}_X(\{(0,0),(0,1)\}) = \mathbb{P}(\{\omega : \omega \notin A_1\}) = 1 - p_1.$$

(ii) Αν $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ είναι ο μοναδιαίος δίσκος και το «πείραμα» που μας ενδιαφέρει είναι η ρίψη βέλους προς το Ω τότε για κάθε Borel $B \subseteq \Omega$ έχουμε

$$\mathbb{P}_X(B) = \mathbb{P}(B) = \frac{\varepsilon(B)}{\varepsilon(\Omega)} = \frac{1}{\pi} \iint_B dxdy$$

όπου $\varepsilon(A)$ είναι το εμβαδόν του A. Αυτό γιατί θεωρούμε όλα τα «στοιχειώδη υποσύνολα» του Ω ισοπίθανα. Η κατανομή πιθανότητας είναι η ομοιόμορφη. Για παράδειγμα, αν $B_r = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq r^2\}$, $0 \leq r \leq 1$, τότε

$$\mathbb{P}(B_r) = \frac{1}{\pi} \iint_{B_r} dxdy = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^r t dt d\theta = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{r^2}{2} d\theta = \frac{1}{\pi} \cdot \pi r^2 = r^2.$$

1.1β′ Συνάρτηση κατανομής

Ορισμός 1.1.4 (συνάρτηση κατανομής). Η **συνάρτηση κατανομής** του τυχαίου διανύσματος $X = (X_1, \ldots, X_k)$ είναι η συνάρτηση $F_X : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ που ορίζεται ως εξής: αν $x = (x_1, \ldots, x_k) \in \mathbb{R}^k$ τότε

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X_1 \leq x_1, \ldots, X_k \leq x_k) := \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : X_1(\omega) \leq x_1, \ldots, X_k(\omega) \leq x_k\}).$$

Η συνάρτηση κατανομής F_X του τυχαίου διανύσματος X προσδιορίζει την κατανομή πιθανότητας του X. Για παράδειγμα, στην περίπτωση $k = 2$, η πιθανότητα $\mathbb{P}(R)$ οποιουδήποτε ορθογωνίου R περιγράφεται μέσω της F_X:

Θεώρημα 1.1.5. *Έστω $(X, Y) : \Omega \to \mathbb{R}^2$ τυχαίο διάνυσμα και $F = F_{(X,Y)}$ η συνάρτηση κατανομής του. Αν $a < b$ και $\gamma < \delta$ τότε*

$$\mathbb{P}(a < X \leq b, \gamma < Y \leq \delta) = F(b, \delta) - F(a, \delta) - F(b, \gamma) + F(a, \gamma).$$

Για την απόδειξη γράφουμε

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(a < X \leq b, \gamma < Y \leq \delta) &= \mathbb{P}(X \leq b, \gamma < Y \leq \delta) - \mathbb{P}(X \leq a, \gamma < Y \leq \delta) \\ &= \mathbb{P}(X \leq b, Y \leq \delta) - \mathbb{P}(X \leq b, Y \leq \gamma) \\ &\quad -\mathbb{P}(X \leq a, Y \leq \delta) + \mathbb{P}(X \leq a, Y \leq \gamma) \\ &= F(b, \delta) - F(a, \delta) - F(b, \gamma) + F(a, \gamma). \end{aligned}$$

Αντίστοιχο αποτέλεσμα ισχύει για k-διάστατες τυχαίες μεταβλητές. Οι βασικές ιδιότητες της συνάρτησης κατανομής ενός διδιάστατου τυχαίου διανύσματος περιγράφονται στο επόμενο θεώρημα:

Θεώρημα 1.1.6 ($k = 2$). *Έστω $(X, Y) : \Omega \to \mathbb{R}^2$ τυχαίο διάνυσμα και $F = F_{(X,Y)}$ η συνάρτηση κατανομής του. Τότε, ισχύουν τα ακόλουθα:*

(i) *Για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$, $0 \leq F(x, y) \leq 1$.*

(ii) *Η F είναι αύξουσα ως προς κάθε μεταβλητή:*
   1. *Αν $x_1 < x_2$ τότε $F(x_1, y) \leq F(x_2, y)$ για κάθε $y \in \mathbb{R}$.*
   2. *Αν $y_1 < y_2$ τότε $F(x, y_1) \leq F(x, y_2)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.*

(iii) *Αν $x_1 < x_2$ και $y_1 < y_2$ τότε*

$$F(x_2, y_2) - F(x_1, y_2) - F(x_2, y_1) + F(x_1, y_1) \geq 0.$$

(iv) *Η F είναι συνεχής από δεξιά ως προς κάθε μεταβλητή: αν $x_n \downarrow x$ τότε $\lim_{n\to\infty} F(x_n, x) = F(x, y)$ και αν $y_n \downarrow y$ τότε $\lim_{n\to\infty} F(x, y_n) = F(x, y)$.*

(v) *Ισχύουν οι οριακές συνθήκες*

$$F(-\infty, y) = \lim_{x\to-\infty} F(x, y) = 0, \ F(x, -\infty) = \lim_{y\to-\infty} F(x, y) = 0$$

και

$$\begin{aligned} F(x, +\infty) &= \lim_{y\to+\infty} F(x, y) = F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x) \\ F(+\infty, y) &= \lim_{x\to+\infty} F(x, y) = F_Y(y) = \mathbb{P}(Y \leq y), \end{aligned}$$

όπου F_X, F_Y οι συναρτήσεις κατανομής των X, Y.

Η απόδειξη είναι απλή. Για το (i) παρατηρήστε ότι οι τιμές της F είναι τιμές της $\mathbb{P}$ (δηλαδή, πιθανότητες). Για το (ii) παρατηρήστε ότι, για παράδειγμα, αν $x_1 < x_2$ τότε $\{X \leq x_1, Y \leq y\} \subseteq \{X \leq x_2, Y \leq y\}$ για κάθε $y \in \mathbb{R}$. Η ιδιότητα (iii) προκύπτει άμεσα από την ισότητα του προηγούμενου θεωρήματος και το γεγονός ότι η πιθανότητα είναι πάντα μη αρνητική. Για το (iv) παρατηρήστε ότι η ακολουθία ενδεχομένων $A_n = \{X \leq x_n, Y \leq y\}$ είναι φθίνουσα και η τομή τους είναι το ενδεχόμενο $A = \{X \leq x, Y \leq y\}$, συνεπώς, $\mathbb{P}(A) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n)$. Οι οριακές συνθήκες προκύπτουν ανάλογα (από τη συνέχεια της $\mathbb{P}$ ως προς μονότονες ακολουθίες ενδεχομένων).

Αντίστοιχο αποτέλεσμα ισχύει για k-διάστατες τυχαίες μεταβλητές.

Παραδείγματα 1.1.7. Περιγράψαμε τη συνάρτηση κατανομής των εξής τυχαίων διανυσμάτων:

(i) Ρίχνουμε δύο ζάρια και καταγράφουμε το διατεταγμένο ζεύγος των ενδείξεών τους. Εδώ, $\Omega = \{(i,j) : 1 \leq i, j, \leq 6\}$. Θεωρούμε το τυχαίο διάνυσμα (X,Y), όπου $X(i,j) = 1$ αν $2 \mid i+j$ και 0 αλλιώς, $Y(i,j) = 1$ αν $3 \mid i+j$ και 0 αλλιώς.

(ii) Θεωρούμε το ορθογώνιο $R = [a,b] \times [\gamma, \delta]$ με το ομοιόμορφο μέτρο πιθανότητας: αν B είναι Borel υποσύνολο του R τότε

$$\mathbb{P} = \frac{\varepsilon(B)}{\varepsilon(R)} = \frac{1}{(b-a)(\delta-\gamma)} \iint_B dxdy.$$

Σαν τυχαίο διάνυσμα, θεωρούμε τις $X(x,y) = x$, $Y(x,y) = y$.

Είδαμε επίσης ότι η συνάρτηση $F(x,y) = 1$ αν $x+y \geq 0$ και $F(x,y) = 0$ αν $x+y < 0$, δεν είναι συνάρτηση κατανομής κάποιου τυχαίου διανύσματος, παρόλο που ικανοποιεί τις συνθήκες (i), (ii) και (iv) του προηγούμενου θεωρήματος. Μπορούμε να βρούμε $x_1 < x_2$ και $y_1 < y_2$ ώστε

$$F(x_2,y_2) - F(x_1,y_2) - F(x_2,y_1) + F(x_1,y_1) < 0.$$

1.2 (9 Μαρτίου 2009)

1.2α΄ Διακριτά τυχαία διανύσματα

Μια τυχαία μεταβλητή (X,Y) λέγεται **διακριτή** αν υπάρχει πεπερασμένο ή αριθμήσιμο σύνολο

$$S = \{(x_i, y_j) : i, j \geq 0\} \subseteq \mathbb{R}^2$$

ώστε

$$\mathbb{P}(\{\omega : (X(\omega), Y(\omega)) \notin S\}) = 0.$$

Ισοδύναμα,

$$\sum_j \sum_i \mathbb{P}(X = x_i, Y = y_j) = 1.$$

Το S είναι ο *φορέας* του (X,Y).

Ορισμός 1.2.1 (συνάρτηση πιθανότητας). Έστω (X,Y) διακριτή τυχαία μεταβλητή με φορέα το S. Η **συνάρτηση πιθανότητας** της (X,Y) ορίζεται ως εξής:

$$f(x_i, y_j) = \mathbb{P}(X = x_i, Y = y_j)$$

και $f(x,y) = 0$ αν $(x,y) \notin S$. Παρατηρήστε ότι

$$\sum_j \sum_i f(x_i, y_j) = 1.$$

Σημείωση. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\sum_j f(x_i, y_j) > 0$ για κάθε i: αν για κάποιο i_0 ίσχυε $\sum_j f(x_{i_0}, y_j) = 0$, αυτό θα σήμαινε ότι $\mathbb{P}(X = x_{i_0}, Y = y_j) = 0$ για κάθε j και θα μπορούσαμε να αφαιρέσουμε όλα τα σημεία (x_{i_0}, y_j) από το S. Όμοια, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\sum_i f(x_i, y_j) > 0$ για κάθε j.

Η συνάρτηση κατανομής F του διακριτού τυχαίου διανύσματος (X,Y) υπολογίζεται μέσω της συνάρτησης πιθανότητας f. Έστω $x, y \in \mathbb{R}$. Θέτουμε $I_x = \{i : x_i \leq x\}$ και $J_y = \{j : y_j \leq y\}$. Τότε,

$$F(x,y) = \sum_{j \in J_y} \sum_{i \in I_x} f(x_i, y_j).$$

Αντίστροφα, η συνάρτηση πιθανότητας προσδιορίζεται από τη συνάρτηση κατανομής: για κάθε $(x_i, y_j) \in S$ ισχύει

$$f(x_i, y_j) = F(x_i, y_j) - F(x_i^-, y_j) - F(x_i, y_j^-) + F(x_i^-, y_j^-),$$

όπου $F(x^-, y) = \lim_{t\to x^-} F(t, y)$ κλπ.

Στην ειδική περίπτωση που $x_0 < x_1 < \cdots < x_i < x_{i+1} < \cdots$ και $y_0 < y_1 < \cdots < y_j < y_{j+1} < \cdots$, αν $x_r \leq x < x_{r+1}$ και $y_s \leq y < y_{s+1}$ έχουμε

$$F(x,y) = \sum_{j=0}^{s}\sum_{i=0}^{r} f(x_i, y_j)$$

και, αντίστροφα,

$$f(x_i, y_j) = F(x_i, y_j) - F(x_{i-1}, y_j) - F(x_i, y_{j-1}) + F(x_{i-1}, y_{j-1})$$

για κάθε $i, j \geq 1$ (αντίστοιχες σχέσεις ισχύουν αν $i = 0$ ή $j = 0$).

Ορισμός 1.2.2 (περιθώριες συναρτήσεις πιθανότητας). Έστω (X, Y) διακριτή τυχαία μεταβλητή με φορέα το S. Η **περιθώρια συνάρτηση πιθανότητας της** X είναι η συνάρτηση $f_X : \mathbb{R} \to [0, 1]$ που ορίζεται ως εξής:

$$f_X(x_i) = \sum_j f(x_i, y_j),\ i \geq 0$$

και $f_X(x) = 0$ αλλιώς. Παρατηρούμε ότι

$$\mathbb{P}(X = x_i) = \mathbb{P}\left(\bigcup_j \{X = x_i, Y = y_j\}\right) = \sum_j \mathbb{P}(X = x_i, Y = y_j) = \sum_j f(x_i, y_j) = f_X(x_i)$$

για κάθε i, και $\mathbb{P}(X = x) = 0 = f_X(x)$ αλλιώς. Δηλαδή,

$$f_X(x) = \mathbb{P}(X = x),\ \ x \in \mathbb{R}.$$

Όμοια, η **περιθώρια συνάρτηση πιθανότητας της** Y είναι η συνάρτηση $f_Y : \mathbb{R} \to [0, 1]$ που ορίζεται ως εξής:

$$f_Y(y_j) = \sum_i f(x_i, y_j),\ j \geq 0$$

και $f_Y(y) = 0$ αλλιώς. Παρατηρούμε ότι

$$f_Y(y) = \mathbb{P}(Y = y),\ \ y \in \mathbb{R}.$$

Τα παραπάνω γενικεύονται στην περίπτωση που έχουμε ένα k-διάστατο διακριτό τυχαίο διάνυσμα, $k > 2$.

Παράδειγμα 1.2.3. Συζητήθηκε ξανά το παράδειγμα στο οποίο ρίχνουμε δύο ζάρια, καταγράφουμε το διατεταγμένο ζεύγος (i, j) των ενδείξεών τους και θεωρούμε το τυχαίο διάνυσμα (X, Y), όπου $X(i, j) = 1$ αν $2 \mid i + j$ και 0 αλλιώς, $Y(i, j) = 1$ αν $3 \mid i + j$ και 0 αλλιώς. Εδώ,

$$S = \{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)\}.$$

Βρήκαμε τη συνάρτηση πιθανότητας $f(x, y)$, όπου $x, y \in \{0, 1\}$, και τις περιθώριες συναρτήσεις πιθανότητας f_X, f_Y.

1.2β′ Συνεχή τυχαία διανύσματα

Μια τυχαία μεταβλητή (X, Y) λέγεται **συνεχής** αν υπάρχει μη αρνητική ολοκληρώσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^+$ ώστε: αν $a < b$ και $\gamma < \delta$, τότε

$$(*) \qquad \mathbb{P}(a < X \leq b, \gamma < Y \leq \delta) = \int_a^b \int_\gamma^\delta f(x, y)\, dxdy.$$

Αφήνοντας τα $a, \gamma \to -\infty$ και τα $b, \delta \to +\infty$ βλέπουμε ότι

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, dxdy = 1.$$

Η f είναι η **συνάρτηση πυκνότητας** της (X, Y).

Σημείωση. Από την $(*)$ έπεται ότι, γενικότερα, αν B είναι ένα Borel υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$ τότε

$$\mathbb{P}(\,(X,Y) \in B\,) = \mathbb{P}(\{\omega : (X(\omega), Y(\omega)) \in B\}) = \iint_B f(x,y)\,dxdy.$$

Η συνάρτηση κατανομής F του συνεχούς τυχαίου διανύσματος (X, Y) υπολογίζεται μέσω της συνάρτησης πιθανότητας. Για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$,

$$F(x,y) = \int_{-\infty}^{y} \int_{-\infty}^{x} f(t,s)\,dtds.$$

Αντίστροφα, αν η συνάρτηση πιθανότητας $f(x, y)$ είναι συνεχής στο σημείο (x_0, y_0) τότε

$$f(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}(x_0, y_0).$$

Στη συνέχεια συζητήσαμε με ποιόν τρόπο μπορούμε να ορίσουμε πυκνότητες f_X και f_Y για τις X και Y αντίστοιχα, μέσω της συνάρτησης πυκνότητας της (X, Y): Ζητάμε μια συνάρτηση g ώστε

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} g(t)dt.$$

Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} F_X(x) &= \lim_{y\to\infty} F(x,y) = \lim_{y\to\infty} \int_{-\infty}^{y} \int_{-\infty}^{x} f(t,s)\,dtds \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{x} f(t,s)\,dtds = \int_{-\infty}^{x} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t,s)\,ds \right] dt, \end{aligned}$$

αν λοιπόν ορίσουμε

$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t,s)\,ds$$

έχουμε το ζητούμενο. Οδηγούμαστε έτσι στον εξής ορισμό:

Ορισμός 1.2.4 (περιθώριες συναρτήσεις πυκνότητας). Έστω (X, Y) συνεχής τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση πυκνότητας την f. Η **περιθώρια συνάρτηση πυκνότητας της** X είναι η συνάρτηση

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Αποδεικνύεται ότι το ολοκλήρωμα στο δεξιό μέλος είναι καλά ορισμένο (για όλες «σχεδόν» τις τιμές του x, με την έννοια της θεωρίας μέτρου). Στα παραδείγματα που μελετάμε στο μάθημα, αυτό ισχύει για όλες τις τιμές του x. Παρατηρούμε ότι $f_X(x) \ge 0$ και

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dydx = 1.$$

Όμοια, η **περιθώρια συνάρτηση πυκνότητας της** Y είναι η συνάρτηση

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx, \quad y \in \mathbb{R}.$$

Με αυτούς τους ορισμούς,

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt \text{ και } F_Y(y) = \mathbb{P}(Y \le y) = \int_{-\infty}^{y} f_Y(s)\,ds$$

για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$.

Τα παραπάνω γενικεύονται στην περίπτωση που έχουμε μια k-διάστατη συνεχή τυχαία μεταβλητή, $k > 2$.

Παράδειγμα 1.2.5. Αν B είναι ένα Borel υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$ με εμβαδόν $\varepsilon(B) > 0$, τότε ένα τυχαίο διάνυσμα (X, Y) είναι *ομοιόμορφα κατανεμημένο* στο B αν έχει συνάρτηση πυκνότητας την $f(x,y) = \frac{1}{\varepsilon(B)}$ όταν $(x,y) \in B$ και $f(x,y) = 0$ αλλιώς. Πράγματι, τότε, για κάθε Borel $C \subseteq B$ έχουμε

$$\mathbb{P}(\,(X,Y) \in C\,) = \frac{\varepsilon(C)}{\varepsilon(B)} = \iint_C \frac{1}{\varepsilon(B)}\,dxdy = \iint_C f(x,y)\,dxdy.$$

Στην περίπτωση που $B = [a,b] \times [\gamma, \delta]$ έχουμε

$$f(x,y) = \frac{1}{(b-a)(\delta-\gamma)}, \qquad (x,y) \in B.$$

Βρήκαμε τις περιθώριες συναρτήσεις πιθανότητας $f_X(x) = \frac{1}{b-a}$ $(a \le x \le b)$ και $f_Y(y) = \frac{1}{\delta-\gamma}$ $(\gamma \le y \le \delta)$.

Ασκήσεις 1.2.6. Συζητήθηκαν οι εξής ασκήσεις:

1. Ρίχνουμε δύο ζάρια: έστω X η ένδειξη του πρώτου ζαριού και Y η μεγαλύτερη από τις δύο ενδείξεις. Να βρεθούν: η συνάρτηση πιθανότητας της διδιάστατης τυχαίας μεταβλητής (X, Y) και οι περιθώριες συναρτήσεις πιθανότητας $f_X(x)$, $f_Y(y)$.
2. Αν η συνάρτηση πυκνότητας της (X, Y) είναι η

$$f(x,y) = cx(x-y), \quad 0 < x < 2,\ -x < y < x$$

(και $f(x,y) = 0$ αλλιώς), να προσδιοριστεί η τιμή της σταθεράς c και να βρεθούν οι περιθώριες συναρτήσεις πυκνότητας $f_X(x)$, $f_Y(y)$.

1.3 (11 Μαρτίου 2009)

1.3α΄ Διακριτή περίπτωση

Έστω (X, Y) διακριτή τυχαία μεταβλητή με φορέα το σύνολο

$$S = \{(x_i, y_j) : i, j \ge 0\} \subseteq \mathbb{R}^2.$$

Σταθεροποιούμε y_j και θέλουμε να ορίσουμε τη δεσμευμένη συνάρτηση πιθανότητας $f_{X|Y}(\cdot \mid y_j)$ έτσι ώστε, για κάθε x,

$$f_{X|Y}(x \mid y_j) = \mathbb{P}(X = x \mid Y = y_j).$$

Γνωρίζουμε ότι $\mathbb{P}(Y = y_j) = f_Y(y_j) > 0$. Συνεπώς,

$$\mathbb{P}(X = x \mid Y = y_j) = \frac{\mathbb{P}(X = x, Y = y_j)}{\mathbb{P}(Y = y_j)} = \frac{f(x, y_j)}{f_Y(y_j)}.$$

Αν $x \notin \{x_i : i \ge 0\}$ η τελευταία ποσότητα μηδενίζεται.

Ορισμός 1.3.1. Η συνάρτηση

$$f_{X|Y}(x \mid y_j) = \frac{f(x, y_j)}{f_Y(y_j)}$$

είναι η **δεσμευμένη συνάρτηση πιθανότητας της X δεδομένου ότι $Y = y_j$**. Εντελώς, ανάλογα, η συνάρτηση

$$f_{Y|X}(y \mid x_i) = \frac{f(x_i, y)}{f_X(x_i)}$$

είναι η **δεσμευμένη συνάρτηση πιθανότητας της Y δεδομένου ότι $X = x_i$**.

Σημείωση. Η δεσμευμένη συνάρτηση κατανομής της X δεδομένου ότι $Y = y_j$ δίνεται από την

$$F_{X|Y}(x \mid y_j) = \sum_{\{i : x_i \le x\}} f_{X|Y}(x_i \mid y_j) = \sum_{\{i : x_i \le x\}} \frac{f(x_i, y_j)}{f_Y(y_j)}.$$

Αντίστοιχα, η δεσμευμένη συνάρτηση κατανομής της Y δεδομένου ότι $X = x_i$ δίνεται από την

$$F_{Y|X}(y \mid x_i) = \sum_{\{j : y_j \le y\}} f_{Y|X}(y_j \mid x_i) = \sum_{\{j : y_j \le y\}} \frac{f(x_i, y_j)}{f_X(x_i)}.$$

1.3β′ Συνεχής περίπτωση

Έστω (X, Y) διδιάστατη συνεχής τυχαία μεταβλητή. Τότε, $P(X = x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, συνεπώς η πιθανότητα $\mathbb{P}(Y = y \mid X = x)$ είναι αόριστη. Για να ορίσουμε δεσμευμένη πυκνότητα της Y δεδομένου ότι $X = x$ χρησιμοποιούμε την ισότητα στην οποία καταλήξαμε στη διακριτή περίπτωση.

Ορισμός 1.3.2. Η **δεσμευμένη πυκνότητα** $f_{Y|X}(\cdot \mid x)$ ορίζεται ως εξής:

$$f_{Y|X}(y \mid x) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)}, \text{ αν } 0 < f_X(x) < \infty$$

και $f_{Y|X}(y \mid x) = 0$ αλλιώς. Παρατηρήστε ότι, σαν συνάρτηση του y, η $f_{Y|X}(y \mid x)$ είναι συνάρτηση πυκνότητας αν $0 < f_X(x) < \infty$: ισχύει

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_{Y|X}(y \mid x)\, dy = \frac{1}{f_X(x)} \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\, dy = 1.$$

Αιτιολόγηση του ορισμού. Η βασική χρήση των δεσμευμένων πυκνοτήτων βρίσκεται στον υπολογισμό των δεσμευμένων πιθανοτήτων. Θέλουμε να ορίσουμε την

$$\mathbb{P}(a \leq Y \leq b \mid X = x)$$

για κάθε $a < b$. Δεδομένου ότι $\mathbb{P}(X = x) = 0$, ένας τρόπος θα ήταν να θέσουμε

$$\mathbb{P}(a \leq Y \leq b \mid X = x) = \lim_{\delta \to 0^+} P(a \leq Y \leq b \mid x - \delta \leq X \leq x + \delta).$$

Παρατηρούμε ότι το δεξιό μέλος γράφεται στη μορφή

$$\lim_{\delta \to 0^+} \frac{\int_{x-\delta}^{x+\delta} \left(\int_a^b f(u,y) dy \right) du}{\int_{x-\delta}^{x+\delta} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(u,y) dy \right) du} = \lim_{\delta \to 0^+} \frac{\frac{1}{2\delta} \int_{x-\delta}^{x+\delta} \left(\int_a^b f(u,y) dy \right) du}{\frac{1}{2\delta} \int_{x-\delta}^{x+\delta} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(u,y) dy \right) du}.$$

Με την υπόθεση ότι η

$$u \mapsto \int_a^b f(u,y) dy$$

είναι συνεχής στο $u = x$, συμπεραίνουμε ότι

$$\lim_{\delta \to 0^+} \frac{1}{2\delta} \int_{x-\delta}^{x+\delta} \left(\int_a^b f(u,y) dy \right) du = \int_a^b f(x,y) dy.$$

Όμοια, με την υπόθεση ότι η f_X είναι συνεχής στο x, συμπεραίνουμε ότι

$$\lim_{\delta \to 0^+} \frac{1}{2\delta} \int_{x-\delta}^{x+\delta} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(u,y) dy \right) du = f_X(x).$$

Αν υποθέσουμε επίσης ότι $f_X(x) \neq 0$, καταλήγουμε στην

$$\mathbb{P}(a \leq Y \leq b \mid X = x) = \int_a^b \frac{f(x,y)}{f_X(x)}\, dy.$$

Δηλαδή, η συνάρτηση $y \mapsto \frac{f(x,y)}{f_X(x)}$ είναι, φυσιολογικά, η «πυκνότητα της Y δεδομένου ότι $X = x$». Έτσι, οδηγούμαστε στον ορισμό 1.3.2.

Ορισμός 1.3.3. Για κάθε $a < b$ ορίζουμε

$$\mathbb{P}(a \leq Y \leq b \mid X = x) = \int_a^b f_{Y|X}(y \mid x) dy.$$

Εντελώς ανάλογα ορίζεται η δεσμευμένη πυκνότητα της X δεδομένου ότι $Y = y$. Θέτουμε

$$f_{X|Y}(x \mid y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)}, \text{ αν } 0 < f_Y(y) < \infty$$

και $f_{X|Y}(x \mid y) = 0$ αλλιώς.

Σημείωση. Από τον ορισμό των δεσμευμένων συναρτήσεων πυκνότητας έπονται άμεσα οι

$$f(x,y) = f_X(x) f_{Y|X}(y \mid x) = f_Y(y) f_{X|Y}(x \mid y), \qquad x, y \in \mathbb{R}.$$

Η *δεσμευμένη συνάρτηση κατανομής* $F_{Y|X}(\cdot \mid x)$ ορίζεται ως εξής: για κάθε $y \in \mathbb{R}$,

$$F_{Y|X}(y \mid x) = \mathbb{P}(Y \leq y \mid X = x) = \int_{-\infty}^{y} f_{Y|X}(t \mid x)\, dt = \frac{1}{f_X(x)} \int_{-\infty}^{y} f(x,t)\, dt.$$

Παρατηρήστε ότι

$$F_{Y|X}(y \mid x) = \frac{1}{F_X'(x)} \frac{\partial F}{\partial x}(x,y).$$

Παραδείγματα 1.3.4. Συζητήθηκαν τα εξής παραδείγματα:

1. Έχουμε μια κληρωτίδα που περιέχει 21 κλήρους αριθμημένους από 1 μέχρι 21 και εξάγουμε τυχαία έναν κλήρο. Εδώ, $\Omega = \{1, 2, \ldots, 21\}$. Θεωρούμε το τυχαίο διάνυσμα (X, Y), όπου: $X(\omega) = 1$ αν $2 \mid \omega$ και $X(\omega) = 0$ αλλιώς, $Y(\omega) = 1$ αν $3 \mid \omega$ και $Y(\omega) = 0$ αλλιώς. Υπολογίστηκαν οι $f_{(X,Y)}, f_X, f_Y, f_{Y|X}, f_{X|Y}$.

2. Έστω (X, Y) η διδιάστατη συνεχής τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση πυκνότητας την

$$f(x,y) = 8xy, \qquad 0 \leq x \leq y \leq 1.$$

Υπολογίστηκαν οι περιθώριες συναρτήσεις πυκνότητας f_X, f_Y και οι δεσμευμένες συναρτήσεις πυκνότητας $f_{Y|X}, f_{X|Y}$.

Άσκηση 1.3.5. Συζητήθηκε η εξής άσκηση: Έστω (X, Y) διδιάστατη συνεχής τυχαία μεταβλητή, ομοιόμορφα κατανεμημένη στο τρίγωνο

$$T = \{(x,y) : 0 \leq x \leq \theta, 0 \leq y \leq \theta, 0 \leq x + y \leq \theta\}$$

όπου $\theta > 0$. Η συνάρτηση πυκνότητας της (X, Y) δίνεται από την $f(x,y) = \frac{2}{\theta^2}$, $(x,y) \in T$ (και $f(x,y) = 0$ αλλιώς). Υπολογίστηκαν: η συνάρτηση κατανομής $F(x,y)$, η περιθώρια συνάρτηση κατανόμής $F_X(x)$, οι περιθώριες συναρτήσεις πυκνότητας f_X, f_Y και οι δεσμευμένες συναρτήσεις πυκνότητας $f_{X|Y}, f_{Y|X}$.

1.4 (16 Μαρτίου 2009)

Το ενδεχόμενο A είναι ανεξάρτητο από το ενδεχόμενο B (όπου $\mathbb{P}(B) > 0$) αν $\mathbb{P}(A \mid B) = \mathbb{P}(A)$. Από τον ορισμό της δεσμευμένης πιθανότητας έπεται ότι $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$. Η τελευταία ισότητα είναι συμμετρική ως προς A, B και αληθεύει τετριμμένα αν $\mathbb{P}(A) = 0$ ή $\mathbb{P}(B) = 0$. Λέμε λοιπόν ότι τα A και B είναι ανεξάρτητα αν

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B).$$

Οι τυχαίες μεταβλητές X και Y θα πρέπει λογικά να θεωρούνται ανεξάρτητες αν, για κάθε ζεύγος Borel συνόλων $U, V \subseteq \mathbb{R}$, ισχύει

$$\mathbb{P}(X \in U, Y \in V) = \mathbb{P}(X \in U)\, \mathbb{P}(Y \in V).$$

Ειδικότερα, αν $a < b$ και $\gamma < \delta$ τότε

$$\mathbb{P}(a < X \leq b, \gamma < Y \leq \delta) = \mathbb{P}(a < X \leq b)\, \mathbb{P}(\gamma < Y \leq \delta). \tag{1}$$

Δεν είναι δύσκολο να αποδειχθεί ότι αυτή η ασθενέστερη συνθήκη είναι ισοδύναμη με την προηγούμενη. Αφήνοντας τα $a, \gamma \to -\infty$ οδηγούμαστε στην

$$F(b,\delta) = F_X(b) F_Y(\delta). \tag{2}$$

Αν θυμηθούμε την

$$\mathbb{P}(a < X \leq b, \gamma < Y \leq \delta) = F(b,\delta) - F(a,\delta) - F(b,\gamma) + F(a,\gamma),$$

βλέπουμε ότι η (1) προκύπτει άμεσα από την (2). Παίρνουμε λοιπόν αυτή την τελευταία σχέση ως ορισμό της ανεξαρτησίας των X και Y.

Ορισμός 1.4.1. Οι τυχαίες μεταβλητές X και Y λέγονται **ανεξάρτητες** αν

$$F_{(X,Y)}(x,y) = F_X(x) F_Y(y)$$

για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$.

Θεώρημα 1.4.2. (α) *Έστω X, Y διακριτές τυχαίες μεταβλητές με τιμές x_i, $i \geq 0$ και y_j, $j \geq 0$ αντίστοιχα. Οι X και Y είναι ανεξάρτητες αν και μόνο αν*

$$f(x_i, y_j) = f_X(x_i) f_Y(y_j), \quad i, j \geq 0.$$

(β) *Έστω X, Y συνεχείς τυχαίες μεταβλητές. Οι X και Y είναι ανεξάρτητες αν και μόνο αν*

$$f(x,y) = f_X(x) f_Y(y), \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

Για την απόδειξη, στην περίπτωση των διακριτών τυχαίων μεταβλητών παρατηρήστε πρώτα ότι αν οι X και Y είναι ανεξάρτητες τότε

$$f(x_i, y_j) = \mathbb{P}(X = x_i, Y = y_j) = \mathbb{P}(X = x_i)\mathbb{P}(Y = y_j) = f_X(x_i) f_Y(y_j).$$

Αντίστροφα, αν ισχύει η παραπάνω ισότητα, για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$\begin{aligned}
F(x,y) &= \sum_{\{i:\, x_i \leq x\}} \sum_{\{j:\, y_j \leq y\}} f(x_i, y_j) \\
&= \sum_{\{i:\, x_i \leq x\}} \sum_{\{j:\, y_j \leq y\}} f_X(x_i) f_Y(y_j) \\
&= \left(\sum_{\{i:\, x_i \leq x\}} f_X(x_i) \right) \left(\sum_{\{j:\, y_j \leq y\}} f_Y(y_j) \right) \\
&= F_X(x) F_Y(y).
\end{aligned}$$

Στην περίπτωση των συνεχών τυχαίων μεταβλητών, παρατηρήστε ότι «σχεδόν παντού» οι F, F_X, F_Y είναι παραγωγίσιμες και, από την

$$F(x,y) = F_X(x) F_Y(y)$$

έχουμε

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = f_X(x) F_Y(y)$$

και

$$f(x,y) = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}(x,y) = f_X(x) f_Y(y).$$

Αντίστροφα, αν ισχύει η παραπάνω ισότητα, για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$\begin{aligned}
F(x,y) &= \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f(x,y)\, dy dx \\
&= \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f_X(x) f_Y(y)\, dy dx \\
&= \left(\int_{-\infty}^{x} f_X(x)\, dx \right) \left(\int_{-\infty}^{y} f_Y(y)\, dy \right) \\
&= F_X(x) F_Y(y).
\end{aligned}$$

Παραδείγματα 1.4.3. 1. Μια κληρωτίδα περιέχει k λαχνούς της σειράς α′, r λαχνούς της σειράς β′ και s λαχνούς της σειράς γ′. Επιλέγουμε τυχαία χωρίς επανάθεση n λαχνούς και θεωρούμε το τυχαίο διάνυσμα (X, Y) όπου X ο αριθμός των λαχνών της σειράς α′ και Y ο αριθμός των λαχνών της σειράς β′ που επιλέγονται. Υπολογίστηκαν: η από κοινού συνάρτηση πιθανότητας των X και Y και οι περιθώριες συναρτήσεις πιθανότητας f_X και f_Y. Οι X και Y δεν είναι ανεξάρτητες.

2. Θεωρούμε το τυχαίο διάνυσμα (X, Y) με συνάρτηση πυκνότητας

$$f(x,y) = xye^{-(x^2+y^2)/2}, \quad x, y > 0.$$

Υπολογίστηκαν οι περιθώριες πυκνότητες f_X, f_Y. Από την ισότητα $f(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$ $(x, y \in \mathbb{R})$ είδαμε ότι οι X και Y είναι ανεξάρτητες.

Θεώρημα 1.4.4. (α) *Έστω X, Y διακριτές τυχαίες μεταβλητές με τιμές x_i, $i \geq 0$ και y_j, $j \geq 0$ αντίστοιχα. Οι X και Y είναι ανεξάρτητες αν και μόνο αν υπάρχουν συναρτήσεις $g(x_i)$, $h(y_j)$ ώστε*

$$f(x_i, y_j) = g(x_i)h(y_j), \quad i, j \geq 0.$$

(β) *Έστω X, Y συνεχείς τυχαίες μεταβλητές. Οι X και Y είναι ανεξάρτητες αν και μόνο αν υπάρχουν συναρτήσεις $g(x)$, $h(y)$ ώστε*

$$f(x,y) = g(x)h(y), \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

Η μία κατεύθυνση είναι, και στις δύο περιπτώσεις, προφανής: αν οι X και Y είναι ανεξάρτητες, παίρνουμε $g = f_X$ και $h = f_Y$.

Για την άλλη κατεύθυνση, δίνουμε την απόδειξη μόνο στη διακριτή περίπτωση (στη συνεχή περίπτωση χρησιμοποιούμε το ίδιο ουσιαστικά επιχείρημα): για κάθε i έχουμε

$$f_X(x_i) = \sum_j f(x_i, y_j) = \sum_j g(x_i)h(y_j) = \alpha g(x_i)$$

όπου

$$\alpha = \sum_j h(y_j).$$

Όμοια, για κάθε j έχουμε

$$f_Y(y_j) = \sum_i f(x_i, y_j) = \sum_i g(x_i)h(y_j) = \beta h(y_j)$$

όπου

$$\beta = \sum_i g(x_i).$$

Από την άλλη πλευρά,

$$\alpha\beta = \left(\sum_i g(x_i)\right)\left(\sum_j h(y_j)\right) = \sum_{i,j} g(x_i)h(y_j) = \sum_{i,j} f(x_i, y_j) = 1.$$

Συνεπώς, για κάθε i, j ισχύει

$$f(x_i, y_j) = \alpha\beta g(x_i)h(y_j) = (\alpha g(x_i))(\beta h(y_j)) = f_X(x_i)f_Y(y_j)$$

το οποίο δείχνει ότι οι X και Y είναι ανεξάρτητες.

Σημείωση. Στο τελευταίο παράδειγμα είναι προφανές ότι $f(x,y) = g(x)h(y)$, όπου $g(x) = xe^{-x^2/2}$, $x > 0$ (και $g(x) = 0$ αλλιώς) και $h(y) = ye^{-y^2/2}$, $y > 0$ (και $h(y) = 0$ αλλιώς). Αυτό αρκεί για να πούμε ότι οι X και Y είναι ανεξάρτητες.

Παράδειγμα 1.4.5. Συζητήθηκε το εξής παράδειγμα: Δύο σημεία X και Y επιλέγονται ανεξάρτητα από τα διαστήματα $[0, \theta]$ και $[\theta, 2\theta]$ αντίστοιχα (όπου $\theta > 0$). Υπολογίστηκε η πιθανότητα

$$\mathbb{P}(|X - Y| \leq \theta/2)$$

(η απόσταση των X και Y να είναι μικρότερη ή ίση του $\theta/2$).

Θεώρημα 1.4.6. *Έστω X και Y ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές. Αν οι $g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι Borel μετρήσιμες τότε οι τυχαίες μεταβλητές $g(X)$ και $h(Y)$ είναι ανεξάρτητες.*

Η απόδειξη είναι άμεση: ελέγχουμε ότι, αν $z, w \in \mathbb{R}$ τότε

$$\mathbb{P}(g(X) \leq z,\, h(Y) \leq w) = \mathbb{P}(g(X) \leq z)\, \mathbb{P}(h(Y) \leq w).$$

Έχουμε $g(X) \leq z$ αν και μόνο αν $X \in g^{-1}((-\infty, z])$ και $h(Y) \leq w$ αν και μόνο αν $Y \in h^{-1}((-\infty, w])$. Τα σύνολα $U = g^{-1}((-\infty, z])$ και $V = h^{-1}((-\infty, w])$ είναι Borel υποσύνολα του $\mathbb{R}$ (αυτό ακριβώς σημαίνει η υπόθεση ότι οι g, h είναι Borel μετρήσιμες). Από την ανεξαρτησία των X και Y παίρνουμε

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(g(X) \leq z, h(Y) \leq w) &= \mathbb{P}(X \in U, Y \in V) \\
&= \mathbb{P}(X \in U)\, \mathbb{P}(Y \in V) \\
&= \mathbb{P}(X \in g^{-1}((-\infty, z]))\, \mathbb{P}(Y \in h^{-1}((-\infty, w])) \\
&= \mathbb{P}(g(X) \leq z)\, \mathbb{P}(h(Y) \leq w).
\end{aligned}$$

Παράδειγμα 1.4.7 (Το μοντέλο του Herschell). Θεωρούμε βολές προς ένα στόχο που βρίσκεται στην αρχή των αξόνων του επιπέδου και το τυχαίο διάνυσμα (X, Y) όπου X η οριζόντια απόκλιση και Y η κατακόρυφη απόκλιση της βολής από το στόχο. Υποθέτουμε ότι οι X, Y είναι ανεξάρτητες συνεχείς τυχαίες μεταβλητές και ικανοποιούν την ακόλουθη συνθήκη: η από κοινού συνάρτηση πυκνότητας των X και Y εξαρτάται μόνο από την απόσταση από την αρχή των αξόνων. Δηλαδή,

$$f(x, y) = g\big(\sqrt{x^2 + y^2}\big)$$

όπου $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ συνεχής συνάρτηση. Οι υποθέσεις αυτές είναι αρκετές για να προσδιορίσουμε (ουσιαστικά) την f.

1. Από την ανεξαρτησία των X και Y έχουμε

$$f_X(x) f_Y(y) = g\big(\sqrt{x^2 + y^2}\big)$$

για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$.

2. Θέτοντας $y = 0$ παίρνουμε $f_X(x) \cdot f_Y(0) = g(|x|)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αυτό σημαίνει ότι $f_Y(0) > 0$ (είναι μη αρνητικό και αν ήταν ίσο με μηδέν τότε η g θα ήταν ταυτοτικά μηδενική, άρα η f θα ήταν ταυτοτικά μηδενική, άτοπο αφού η f έχει ολοκλήρωμα ίσο με 1). Επίσης, $f_X(-x) = f_X(x) = g(|x|)/f_Y(0)$. Δηλαδή, η f_X είναι άρτια.

Όμοια, θέτοντας $x = 0$ παίρνουμε $f_Y(y) \cdot f_X(0) = g(|y|)$ για κάθε $y \in \mathbb{R}$ και συμπεραίνουμε ότι $f_X(0) > 0$ και η f_Y είναι άρτια.

3. Ολοκληρώνοντας τις δύο προηγούμενες ισότητες ως προς x και y παίρνουμε

$$f_X(0) = f_Y(0) = a = 2\int_0^\infty g(r)\, dr.$$

4. Επιστρέφοντας στις ισότητες $a f_X(x) = g(|x|) = a f_Y(x)$ βλέπουμε ότι

$$f_X \equiv f_Y.$$

Δηλαδή, οι περιθώριες πυκνότητες f_X και f_Y ταυτίζονται. Θέτουμε $f = f_X = f_Y$.

5. Ορίζουμε $h(t) = \log\left(\frac{f(t)}{a}\right)$, $t \in \mathbb{R}$. Τότε,

$$h\big(\sqrt{t^2 + s^2}\big) = h(t) + h(s), \quad t, s \in \mathbb{R}.$$

Πράγματι,

$$\begin{aligned}
h(t) + h(s) &= \log\left(\frac{f(t)f(s)}{a^2}\right) = \log\left(\frac{g\big(\sqrt{t^2+s^2}\big)}{a \cdot a}\right) \\
&= \log\left(\frac{f\big(\sqrt{t^2+s^2}\big)}{a}\right) = h\big(\sqrt{t^2+s^2}\big).
\end{aligned}$$

6. Επαγωγικά βλέπουμε ότι

$$h\left(\sqrt{t_1^2+\cdots+t_N^2}\right)=\sum_{i=1}^{N}h(t_i).$$

Θέτοντας $N=k^2$ και $t_1=\cdots=t_N=t$, παίρνουμε

$$h(kt)=k^2h(t),\quad k\in\mathbb{N},\, t\in\mathbb{R}.$$

Αν στη θέση του t βάλουμε το t/n (όπου $n\in\mathbb{N}$) βλέπουμε ότι

$$h\left(\frac{k}{n}t\right)=k^2h\left(\frac{t}{n}\right).$$

Όμως,

$$h(t)=h\left(n\cdot\frac{t}{n}\right)=n^2h\left(\frac{t}{n}\right).$$

Συνεπώς,

$$h\left(\frac{k}{n}t\right)=\frac{k^2}{n^2}h(t).$$

Με άλλα λόγια, $h(qt)=q^2h(t)$ για κάθε $q\in\mathbb{Q}^+$ και κάθε $t\in\mathbb{R}$. Θέτοντας $t=1$ έχουμε

$$h(q)=h(1)\cdot q^2$$

για κάθε $q\in\mathbb{Q}$ (η h είναι άρτια). Λόγω συνέχειας, καταλήγουμε στην

$$h(x)=h(1)x^2,\quad x\in\mathbb{R}.$$

7. Από τον ορισμό της h συμπεραίνουμε ότι

$$f(t)=ae^{h(1)x^2}.$$

Αναγκαστικά, $h(1)<0$ (η f είναι ολοκληρώσιμη). Άρα, υπάρχει $\sigma>0$ ώστε $h(1)=-1/(2\sigma^2)$. Αφού το ολοκλήρωμα της f ισούται με 1, η ισότητα

$$1=a\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2/(2\sigma^2)}dx=a\cdot\sigma\sqrt{2\pi}$$

μας δίνει

$$a=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}.$$

8. Καταλήγουμε λοιπόν στο εξής: υπάρχει σταθερά $\sigma>0$ ώστε

$$f_X(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)\quad\text{και}\quad f_Y(y)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{y^2}{2\sigma^2}\right).$$

Η συνάρτηση πυκνότητας του τυχαίου διανύσματος (X,Y) είναι η

$$f(x,y)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}\right),\quad x,y\in\mathbb{R}.$$

1.5 (27 Μαρτίου 2009)

Συζητήθηκαν οι παρακάτω ασκήσεις:

1. Η τυχαία μεταβλητή Y ακολουθεί κατανομή Poisson με παράμετρο λ και η δεσμευμένη συνάρτηση πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής X δεδομένου ότι $Y=y$ είναι διωνυμική με παραμέτρους (y,p). Να προσδιοριστεί η συνάρτηση πιθανότητας της X.

2. Ο χρόνος ζωής T ενός σωματιδίου είναι τυχαία μεταβλητή της οποίας η κατανομή εξαρτάται από μια παράμετρο S. Η παράμετρος αυτή χαρακτηρίζει τον τύπο του σωματιδίου. Υποθέτουμε ότι

ένας πληθυσμός αποτελείται από σωματίδια διαφόρων τύπων και η κατανομή των σωματιδίων με παράμετρο S έχει πυκνότητα $f_S(s) = \lambda e^{-\lambda s}$, $s > 0$ (όπου $\lambda > 0$). Αν η κατανομή του χρόνου ζωής T για δεδομένη παράμετρο s έχει πυκνότητα $f_{T|S}(t \mid s) = se^{-st}$, $t > 0$, να προσδιοριστεί η $f_T(t)$.

3. Δίνεται η διδιάστατη τυχαία μεταβλητή (X, Y) με συνάρτηση πυκνότητας την

$$f(x,y) = \lambda x e^{-x(\lambda+y)}, \quad x, y > 0$$

(όπου $\lambda > 0$). Να προσδιοριστούν οι περιθώριες συναρτήσεις πυκνότητας και οι δεσμευμένες συναρτήσεις πυκνότητας.

4. Υποθέτουμε ότι η από κοινού συνάρτηση πυκνότητας της τιμής X ενός αγαθού και των πωλήσεών του Y δίνεται από την

$$f(x,y) = \lambda x e^{-xy}, \quad 0 < x < \theta + \frac{1}{\lambda},\ y > 0$$

(όπου $\theta > 0$, $0 < \lambda < 1$). Να προσδιοριστούν: (α) η περιθώρια συνάρτηση πυκνότητας της τιμής X του αγαθού, (β) η δεσμευμένη συνάρτηση πυκνότητας των πωλήσεων Y δεδομένου ότι $X = x$.

5. Υποθέτουμε ότι για την διδιάστατη τυχαία μεταβλητή (X, Y) ισχύουν οι

$$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad x > 0$$

και

$$f_{Y|X}(y \mid x) = e^{-\theta x}\frac{(\theta x)^y}{y!}, \quad y = 0, 1, 2, \ldots$$

(όπου $\lambda, \theta > 0$). Να προσδιοριστούν: η συνάρτηση πιθανότητας $f_Y(y)$ και η δεσμευμένη συνάρτηση πυκνότητας $f_{X|Y}(x \mid y)$.

6. Δίνεται η διδιάστατη τυχαία μεταβλητή (X, Y) με συνάρτηση πυκνότητας την

$$f(x,y) = 2, \quad 0 \le x \le y \le 1.$$

Να προσδιοριστούν οι περιθώριες συναρτήσεις πυκνότητας f_X, f_Y και οι πιθανότητες $\mathbb{P}(X > 1/2)$, $\mathbb{P}(Y \le 1/3)$, $\mathbb{P}(X > 1/2 \mid Y \le 1/3)$. Να εξεταστεί αν οι X και Y είναι ανεξάρτητες.

7. Δίνεται η διδιάστατη τυχαία μεταβλητή (X, Y) με συνάρτηση πυκνότητας την

$$f(x,y) = \frac{1}{\pi}, \quad \text{αν } x^2 + y^2 \le 1$$

και $f(x,y) = 0$ αλλιώς. Να προσδιοριστούν: η συνάρτηση πυκνότητας $f_X(x)$ και η συνάρτηση κατανομής $F_X(x)$. Να εξεταστεί αν οι X και Y είναι ανεξάρτητες.

8. Θεωρούμε n ρίψεις ενός νομίσματος και την διδιάστατη τυχαία μεταβλητή (X, Y), όπου X ο αριθμός των κεφαλών στην πρώτη ρίψη και Y ο συνολικός αριθμός των κεφαλών. Να υπολογιστούν: η από κοινού και οι περιθώριες συναρτήσεις πιθανότητας των X και Y, και η από κοινού συνάρτηση κατανομής των X και Y.