Πιθανότητες ΙΙ (2008–09)

Πολυδιάστατες τυχαίες μεταβλητές – Ασκήσεις

1. Έστω X και Y συνεχείς τυχαίες μεταβλητές που έχουν από κοινού συνάρτηση κατανομής την F και από κοινού πυκνότητα την f. Βρείτε την από κοινού συνάρτηση κατανομής και την από κοινού πυκνότητα των τυχαίων μεταβλητών $W = X^2$ και $Z = Y^2$.

2. Έστω X και Y ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές ομοιόμορφα κατανεμημένες στο $(0, 1)$. Βρείτε τις

(α) $P(|X - Y| \leq 0.5)$,
(β) $P\left(\left|\frac{X}{Y} - 1\right| \leq 0.5\right)$,
(γ) $P(Y \geq X \mid Y \geq 0.5)$.

3. Υποθέτουμε ότι οι X και Y έχουν από κοινού πυκνότητα f που είναι ομοιόμορφη στο εσωτερικό του τριγώνου με κορυφές τα $(0, 0)$, $(2, 0)$, και $(1, 2)$. Βρείτε την $P(X \leq 1, Y \leq 1)$.

4. Υποθέτουμε ότι οι χρόνοι που χρειάζονται δύο φοιτητές για να λύσουν ένα πρόβλημα είναι ανεξάρτητοι και ακολουθούν εκθετική κατανομή με παράμετρο λ. Βρείτε την πιθανότητα ο πρώτος φοιτητής να χρειαστεί τουλάχιστον διπλάσιο χρόνο από τον δεύτερο για να λύσει το πρόβλημα.

5. Ορίζουμε $f(x, y) = c(y - x)^\alpha$, $0 \leq x < y \leq 1$, και $f(x, y) = 0$ αλλιώς.

(α) Για ποιές τιμές του α μπορούμε να επιλέξουμε c ώστε να κάνουμε την f πυκνότητα;
(β) Πως πρέπει να επιλέξουμε το c (όταν αυτό γίνεται) ώστε η f να γίνει πυκνότητα;
(γ) Βρείτε τις περιθώριες πυκνότητες της f.
(δ) Βρείτε την πυκνότητα της $Z = X + Y$.

6. Ορίζουμε $f(x, y) = ce^{-(x^2 - xy + 4y^2)/2}$, $-\infty < x, y < \infty$. Πώς πρέπει να επιλέξουμε το c ώστε η f να γίνει πυκνότητα; Βρείτε τις περιθώριες πυκνότητες της f.

7. Υποθέτουμε ότι οι X και Y είναι ανεξάρτητες και ομοιόμορφα κατανεμημένες στο (a, b). Βρείτε την πυκνότητα της $Z = |X - Y|$.

8. Έστω X και Y ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές με κανονικές πυκνότητες, τις $n(\mu_1, \sigma_1^2)$ και $n(\mu_2, \sigma_2^2)$. Βρείτε την πυκνότητα της $Z = X - Y$.

9. Έστω X και Y ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές που έχουν την κανονική πυκνότητα $n(0, \sigma^2)$. Δείξτε ότι η Y/X και η $Y/|X|$ έχουν πυκνότητα Cauchy. Βρείτε την πυκνότητα της $Z = |Y|/|X|$.

10. Έστω X και Y ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές με πυκνότητες γάμμα, τις $\Gamma(\alpha_1, \lambda)$ και $\Gamma(\alpha_2, \lambda)$ αντίστοιχα. Βρείτε την πυκνότητα της $Z = X/(X + Y)$. *Υπόδειξη:* Εκφράστε την Z συναρτήσει της Y/X.

11. Έστω Y μία διακριτή τυχαία μεταβλητή που ακολουθεί διωνυμική κατανομή με παραμέτρους n και p. Υποθέτουμε τώρα ότι το p μεταβάλλεται σαν μία τυχαία μεταβλητή Π που έχει πυκνότητα Βήτα με παραμέτρους α_1 και α_2. Βρείτε τη δεσμευμένη πυκνότητα της Π δεδομένου ότι $Y = y$.

12. Έστω ότι η Y ακολουθεί εκθετική κατανομή με παράμετρο λ. Υποθέτουμε ότι το λ μεταβάλλεται σαν μια τυχαία μεταβλητή Λ που έχει την πυκνότητα γάμμα $\Gamma(\alpha, \beta)$. Βρείτε την περιθώρια πυκνότητα της Y και τη δεσμευμένη πυκνότητα της Λ δεδομένου ότι $Y = y$.

13. Έστω $X_1, \ldots, X_n$ ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές που έχουν την ίδια κανονική πυκνότητα. Δείξτε ότι υπάρχουν σταθερές A_n και B_n ώστε η

$$\frac{X_1 + \ldots + X_n - A_n}{B_n}$$

να έχει την ίδια πυκνότητα με την X_1.

14. Έστω X_1, X_2, X_3 ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές ομοιόμορφα κατανεμημένες στο $(0, 1)$. Βρείτε την πυκνότητα της τυχαίας μεταβλητής $Y = X_1 + X_2 + X_3$. Βρείτε την $P(X_1 + X_2 + X_3 \leq 2)$.

15. Έστω ότι η X_1 επιλέγεται ομοιόμορφα στο $(0, 1)$, η X_2 επιλέγεται ομοιόμορφα στο $(0, X_1)$, και η X_3 επιλέγεται ομοιόμορφα στο $(0, X_2)$. Βρείτε την από κοινού πυκνότητα των X_1, X_2, X_3 και την περιθώρια πυκνότητα της X_3.

16. Έστω $U_1, \ldots, U_n$ ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές, καθεμία από τις οποίες έχει εκθετική πυκνότητα με παράμετρο λ. Βρείτε τη συνάρτηση πυκνότητας της $X_1 = \min(U_1, \ldots, U_n)$.

17. Έστω X και Y ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές που ακολουθούν τις κατανομές $\chi^2(m)$ και $\chi^2(n)$ αντίστοιχα. Βρείτε την πυκνότητα της $Z = X/(X+Y)$. *Υπόδειξη:* Χρησιμοποιήστε το αποτέλεσμα της Άσκησης 10.

18. (α) Έστω X και Y ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές, καθεμία από τις οποίες έχει εκθετική πυκνότητα με παράμετρο λ. Βρείτε τη δεσμευμένη πυκνότητα της X δεδομένου ότι $Z = X + Y = z$.

(β) Το ίδιο ερώτημα, με την υπόθεση ότι οι X και Y είναι ομοιόμορφα κατανεμημένες στο $(0, c)$.

19. Έστω U και V ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές, καθεμία από τις οποίες έχει την τυπική κανονική πυκνότητα. Θέτουμε $Z = \rho U + \sqrt{1-\rho^2}V$, όπου $-1 < \rho < 1$.
(α) Βρείτε την πυκνότητα της Z.
(β) Βρείτε την από κοινού πυκνότητα των U και Z.
(γ) Βρείτε την από κοινού πυκνότητα των $X = \mu_1 + \sigma_1 U$ και $Y = \mu_2 + \sigma_2 Z$, όπου $\sigma_1 > 0$ και $\sigma_2 > 0$. Αυτή η πυκνότητα είναι γνωστή σαν *διδιάστατη κανονική* πυκνότητα.
(δ) Βρείτε τη δεσμευμένη πυκνότητα της Y δεδομένου ότι $X = x$.

20. Έστω X και Y θετικές συνεχείς τυχαίες μεταβλητές που έχουν από κοινού πυκνότητα την f. Θέτουμε $W = Y/X$ και $Z = X + Y$. Βρείτε την από κοινού πυκνότητα των W και Z συναρτήσει της f. *Υπόδειξη:* Χρησιμοποιήστε την Εξίσωση (45).

21. Έστω X και Y ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές που έχουν τις πυκνότητες γάμμα $\Gamma(\alpha_1, \lambda)$ και $\Gamma(\alpha_2, \lambda)$ αντίστοιχα. Δείξτε ότι οι Y/X και $X + Y$ είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές.

22. Έστω R και Θ ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές εκ των οποίων η R έχει την πυκνότητα Rayleigh

$$f_R(r) = \begin{cases} \sigma^{-2} r e^{-r^2/2\sigma^2} & , r \geq 0 \\ 0 & , r < 0 \end{cases}$$

και η Θ είναι ομοιόμορφα κατανεμημένη στο $(-\pi, \pi)$. Δείξτε ότι οι $X = R\cos\Theta$ και $Y = R\sin\Theta$ είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές και έχουν την κανονική πυκνότητα $n(0, \sigma^2)$.