Συναρτησιακές ανισότητες
και
συγκέντρωση του μέτρου

Παντελής Σταυρακάκης

Διπλωματική Εργασία

Τμήμα Μαθηματικών
Πανεπιστήμιο Αθηνών
Αθήνα – 2009

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Ισοπεριμετρικές ανισότητες και συγκέντρωση του μέτρου

1.1 Συγκέντρωση του μέτρου

Έστω $(X, \mathcal{B}(X), d, \mu)$ ένας μετρικός χώρος πιθανότητας: ο (X, d) είναι μετρικός χώρος και το μ είναι ένα μέτρο πιθανότητας στη σ-άλγεβρα $\mathcal{B}(X)$ των Borel υποσυνόλων του (X, d). Για κάθε $A \in \mathcal{B}(X)$ και $t > 0$ ορίζουμε την t-*περιοχή* του A ως εξής:

$$A_t = \{x \in X : d(x, A) \leq t\}.$$

Ορισμός 1.1.1. *Η συνάρτηση συγκέντρωσης του* $(X, \mathcal{B}(X), d, \mu)$ *ορίζεται στο* $(0, \infty)$ *από την*

$$\alpha(X, t) := 1 - \inf\{\mu(A_t) : \mu(A) \geq 1/2\}.$$

Λέμε ότι υπάρχει «συγκέντρωση μέτρου» στο χώρο αν η $\alpha(X, t)$ φθίνει γρήγορα καθώς το $t \to \infty$ (για παράδειγμα, εκθετικά ως προς t). Πολλές από τις εφαρμογές της συγκέντρωσης του μέτρου βασίζονται στο εξής θεώρημα.

Θεώρημα 1.1.2. *Έστω* $(X, \mathcal{B}(X), d, \mu)$ *μετρικός χώρος πιθανότητας. Αν* $f : X \to \mathbb{R}$ *είναι μια συνάρτηση Lipschitz με σταθερά* 1, *δηλαδή αν* $|f(x) - f(y)| \leq d(x, y)$ *για κάθε* $x, y \in X$, *τότε*

$$\mu\left(\{x \in X : |f(x) - \mathrm{med}(f)| > t\}\right) \leq 2\alpha(X, t),$$

όπου $\mathrm{med}(f)$ *είναι ο μέσος Lévy της* f.

Σημείωση. Ο μέσος Lévy $\mathrm{med}(f)$ της f είναι ένας αριθμός για τον οποίο

$$\mu(\{f \geq \mathrm{med}(f)\}) \geq 1/2 \text{ και } \mu(\{f \leq \mathrm{med}(f)\}) \geq 1/2.$$

Απόδειξη του Θεωρήματος 1.1.2. Θέτουμε $A = \{x : f(x) \geq \mathrm{med}(f)\}$ και $B = \{x : f(x) \leq \mathrm{med}(f)\}$. Αν $y \in A_t$ τότε υπάρχει $x \in A$ με $d(x,y) \leq t$, οπότε

$$f(y) = f(y) - f(x) + f(x) \geq -d(y,x) + \mathrm{med}(f) \geq \mathrm{med}(f) - t$$

αφού η f είναι 1-Lipschitz. Ομοίως, αν $y \in B_t$ τότε υπάρχει $x \in B$ με $d(x,y) \leq t$, οπότε

$$f(y) = f(y) - f(x) + f(x) \leq d(y,x) + \mathrm{med}(f) \leq \mathrm{med}(f) + t.$$

Δηλαδή, αν $y \in A_t \cap B_t$ τότε $|f(x) - \mathrm{med}(f)| \leq t$. Με άλλα λόγια,

$$\{x \in X : |f(x) - \mathrm{med}(f)| > t\} \subseteq (A_t \cap B_t)^c = A_t^c \cup B_t^c.$$

Όμως, από τον ορισμό της συνάρτησης συγκέντρωσης έχουμε $\mu(A_t) \geq 1 - \alpha(X,t)$ και $\mu(B_t) \geq 1 - \alpha(X,t)$. Έπεται ότι

$$\mu\left(\{|f - \mathrm{med}(f)| > t\}\right) \leq (1 - \mu(A_t)) + (1 - \mu(B_t)) \leq 2\alpha(X,t).$$

□

Στην περίπτωση που η συνάρτηση συγκέντρωσης φθίνει πολύ γρήγορα, το Θεώρημα 1.1.2 δείχνει ότι οι 1-Lipschitz συνεχείς συναρτήσεις είναι «σχεδόν σταθερές» σε «σχεδόν ολόκληρο το χώρο». Ισχύει μάλιστα και το αντίστροφο.

Πρόταση 1.1.3. *Έστω $(X, \mathcal{B}(X), d, \mu)$ μετρικός χώρος πιθανότητας. Αν για κάποιο $t > 0$ και για κάθε 1-Lipschitz συνάρτηση $f : X \to \mathbb{R}$ έχουμε*

$$\mu\left(\{x \in X : |f(x) - \mathrm{med}(f)| > t\}\right) \leq \eta,$$

τότε $\alpha(X,t) \leq \eta$.

Απόδειξη. Έστω A Borel υποσύνολο του X με $\mu(A) \geq 1/2$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = d(x,A)$. Η f είναι 1-Lipschitz και $\mathrm{med}(f) = 0$ γιατί η f παίρνει μη αρνητικές τιμές και $\mu(\{x : f(x) = 0\}) \geq 1/2$. Από την υπόθεση παίρνουμε

$$\mu(\{x \in X : d(x,A) > t\}) \leq \eta,$$

δηλαδή $1 - \mu(A_t) \leq \eta$. Έπεται ότι $\alpha(X,t) \leq \eta$. □

Σκοπός αυτού του εισαγωγικού κεφαλαίου είναι να δείξει ότι η γνώση της λύσης του ισοπεριμετρικού προβλήματος στον $(X, \mathcal{B}(X), d, \mu)$ μας επιτρέπει να δώσουμε ακριβή εκτίμηση για τη συνάρτηση συγκέντρωσης του χώρου. Θα συζητήσουμε τα κλασικά παραδείγματα της Ευκλείδειας μοναδιαίας σφαίρας S^{n-1} στον $\mathbb{R}^n$, του μέτρου Gauss γ_n στον $\mathbb{R}^n$ και του διακριτού κύβου E_2^n.

1.2 Ισοπεριμετρική ανισότητα στη σφαίρα

Θεωρούμε τη μοναδιαία σφαίρα S^{n-1} στον $\mathbb{R}^n$, εφοδιασμένη με τη γεωδαισιακή μετρική ρ: η απόσταση $\rho(x,y)$ δύο σημείων $x,y \in S^{n-1}$ είναι η κυρτή γωνία xoy στο επίπεδο που ορίζεται από την αρχή των αξόνων o και τα x,y. Η S^{n-1} γίνεται χώρος πιθανότητας με το μοναδικό αναλλοίωτο ως προς ορθογώνιους μετασχηματισμούς μέτρο σ: για κάθε Borel σύνολο $A \subseteq S^{n-1}$ θέτουμε

$$\sigma(A) := \frac{|\tilde{A}|}{|B_2^n|},$$

όπου B_2^n είναι η μοναδιαία Ευκλείδεια μπάλα και

$$\tilde{A} := \{sx : x \in A \text{ και } 0 \leq s \leq 1\}.$$

Είναι εύκολο να δεί κανείς ότι αν $\rho(x,y) = \theta$ τότε

$$\|x-y\|_2 = 2\sin\frac{\theta}{2},$$

συνεπώς η γεωδαισιακή και η Ευκλείδεια απόσταση των $x,y \in S^{n-1}$ συγκρίνονται μέσω της

$$\frac{2}{\pi}\rho(x,y) \leq \|x-y\|_2 \leq \rho(x,y).$$

Το ισοπεριμετρικό πρόβλημα στη σφαίρα διατυπώνεται ως εξής:

> Δίνονται $\alpha \in (0,1)$ και $t > 0$. Ανάμεσα σε όλα τα Borel υποσύνολα A της σφαίρας για τα οποία $\sigma(A) = \alpha$, να βρεθούν εκείνα για τα οποία ελαχιστοποιείται η επιφάνεια $\sigma(A_t)$ της t-περιοχής του A.

Η απάντηση δίνεται από το ακόλουθο θεώρημα:

Ισοπεριμετρική ανισότητα στη σφαίρα. *Έστω $\alpha \in (0,1)$ και*

$$B(x,r) = \{y \in S^{n-1} : \rho(x,y) \leq r\}$$

μια μπάλα στην S^{n-1} με ακτίνα $r > 0$ που επιλέγεται ώστε $\sigma(B(x,r)) = \alpha$. Τότε, για κάθε $A \subseteq S^{n-1}$ με $\sigma(A) = \alpha$ και για κάθε $t > 0$ έχουμε

$$\sigma(A_t) \geq \sigma\big(B(x,r)_t\big) = \sigma\big(B(x,r+t)\big).$$

Δηλαδή, για οποιοδήποτε δοσμένο μέτρο α και οποιοδήποτε $t > 0$ οι μπάλες μέτρου α δίνουν τη λύση του ισοπεριμετρικού προβλήματος.

Η απόδειξη της ισοπεριμετρικής ανισότητας γίνεται με σφαιρική συμμετρικοποίηση και επαγωγή ως προς τη διάσταση. Ας θεωρήσουμε την ειδική περίπτωση $\alpha = 1/2$. Αν

$\sigma(A) = 1/2$ και $t > 0$, τότε μπορούμε να εκτιμήσουμε το μέγεθος του A_t χρησιμοποιώντας την ισοπεριμετρική ανισότητα:

$$\sigma(A_t) \geq \sigma\left(B\big(x, \frac{\pi}{2} + t\big)\right)$$

για κάθε $t > 0$ και $x \in S^{n-1}$. Εκτιμώντας από κάτω το δεξιό μέλος αυτής της ανισότητας οδηγούμαστε στο εξής:

Θεώρημα 1.2.1. *Έστω $A \subseteq S^{n+1}$ με $\sigma(A) = 1/2$ και έστω $t > 0$. Τότε,*

$$\sigma(A_t) \geq 1 - \sqrt{\pi/8}\exp(-t^2 n/2).$$

Παρατήρηση. Αυτό που έχει σημασία σε σχέση με την εκτίμηση του θεωρήματος 1.2.1 είναι ότι, όσο μικρό $t > 0$ κι αν διαλέξουμε, η ακολουθία $\exp(-t^2 n/2)$ τείνει στο 0 καθώς $n \to \infty$ και μάλιστα με πολύ ταχύ ρυθμό (εκθετικά ως προς n). Συνεπώς, το ποσοστό της σφαίρας που μένει έξω από την t-περιοχή οποιουδήποτε υποσυνόλου A της S^{n+1} με $\sigma(A) = 1/2$ είναι «σχεδόν μηδενικό» αν η διάσταση n είναι αρκετά μεγάλη.

Η απόδειξη του Θεωρήματος 1.2.1 βασίζεται πολύ ισχυρά στη σφαιρική ισοπεριμετρική ανισότητα. Για τις περισσότερες όμως εφαρμογές που έχουμε στο νού μας είναι αρκετή μια ανισότητα της μορφής

$$\sigma(A_t) \geq 1 - c_1 \exp(-c_2 t^2 n)$$

και όχι η ακριβής λύση του ισοπεριμετρικού προβλήματος. Θα δώσουμε μια απλή απόδειξη εκτίμησης «αυτού του τύπου» χωρίς να περάσουμε μέσα από την ισοπεριμετρική ανισότητα, χρησιμοποιώντας την ανισότητα Brunn-Minkowski.

Ορισμός 1.2.2. *Έστω A και B μη κενά υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$. Ορίζουμε*

$$A + B := \{a + b \mid a \in A,\, b \in B\}$$

και για κάθε $t \geq 0$,

$$tA = \{ta \mid a \in A\}.$$

Η ανισότητα Brunn-Minkowski συνδέει το άθροισμα Minkowski με τον όγκο $|\cdot|$ στον $\mathbb{R}^n$:

Θεώρημα 1.2.3 (ανισότητα Brunn-Minkowski). *Έστω K και T δύο μη κενά συμπαγή υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$. Τότε,*

$$|K + T|^{1/n} \geq |K|^{1/n} + |T|^{1/n}.$$

Παρατηρήσεις. Στην περίπτωση που τα K και T είναι κυρτά σώματα (κυρτά συμπαγή με μη κενό εσωτερικό), ισότητα στην ανισότητα Brunn-Minkowski μπορεί να ισχύει μόνο αν τα K και T είναι ομοιοθετικά (δηλαδή, αν $K = aT + x$ για κάποιον $a \geq 0$ και κάποιο $x \in \mathbb{R}^n$).

Η ανισότητα Brunn-Minkowski εκφράζει με μια έννοια το γεγονός ότι ο όγκος είναι **κοίλη** συνάρτηση ως προς την πρόσθεση κατά Minkowski. Για το λόγο αυτό συχνά γράφεται στην ακόλουθη μορφή: Αν K, T είναι μη κενά συμπαγή υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$ και $\lambda \in (0,1)$, τότε
$$|\lambda K + (1-\lambda)T|^{1/n} \geq \lambda |K|^{1/n} + (1-\lambda)|T|^{1/n}.$$

Χρησιμοποιώντας την τελευταία ανισότητα σε συνδυασμό με την ανισότητα αριθμητικού–γεωμετρικού μέσου, μπορούμε ακόμα να γράψουμε:
$$|\lambda K + (1-\lambda)T| \geq |K|^{\lambda}|T|^{1-\lambda}.$$

Λήμμα 1.2.4. *Θεωρούμε το ομοιόμορφο μέτρο πιθανότητας μ στην Ευκλείδεια μοναδιαία μπάλα B_2^n. Δηλαδή, $\mu(A) = |A|/|B_2^n|$ για κάθε Borel $A \subseteq B_2^n$. Αν $A, C \subseteq B_2^n$ συμπαγή, και*
$$d(A,C) := \min\{\|a-c\|_2 : a \in A, c \in C\} = \rho > 0,$$
τότε
$$\min\{\mu(A), \mu(C)\} \leq \exp(-\rho^2 n/8).$$

Απόδειξη. Θεωρούμε το σύνολο $\frac{A+C}{2}$. Από την ανισότητα Brunn–Minkowski παίρνουμε $\left|\frac{A+C}{2}\right| \geq \min\{|A|, |C|\}$. Συνεπώς,
$$\mu\left(\frac{A+C}{2}\right) \geq \min\{\mu(A), \mu(C)\}.$$

Από την άλλη πλευρά, αν $a \in A$ και $c \in C$, ο κανόνας του παραλληλογράμμου δίνει
$$\|a+c\|_2^2 = 2\|a\|_2^2 + 2\|c\|_2^2 - \|a-c\|_2^2 \leq 4 - \rho^2,$$
επομένως
$$\frac{A+C}{2} \subseteq \sqrt{1 - \frac{\rho^2}{4}}B_2^n.$$
Συνδυάζοντας τα παραπάνω βλέπουμε ότι
$$\min\big\{\mu(A), \mu(C)\big\} \leq \left(1 - \frac{\rho^2}{4}\right)^{n/2} \leq \exp(-\rho^2 n/8).$$
□

Απόδειξη του Θεωρήματος 1.2.1: Έστω $A \subseteq S^{n-1}$ με $\sigma(A) = 1/2$ και έστω $t > 0$. Θέτουμε $C = S^{n-1} \setminus A_t$ και θεωρούμε τα υποσύνολα
$$A_1 = \{\rho a : a \in A, \frac{1}{2} \leq \rho \leq 1\} \text{ και } C_1 = \{\rho a : a \in C, \frac{1}{2} \leq \rho \leq 1\}$$

της B_2^n. Εύκολα ελέγχουμε ότι

$$d(A_1, C_1) \geq \sin\frac{t}{2} \geq \frac{t}{\pi}.$$

Από το Λήμμα 1.2.4 συμπεραίνουμε ότι

$$|C_1| \leq \exp(-d^2 n/8)|B_2^n| \leq \exp\left(-t^2 n/(8\pi^2)\right)|B_2^n|.$$

Όμως, από τον ορισμό του σ έχουμε $|B_2^n|\sigma(C) = |\tilde{C}|$ και $|C_1| = (1-2^{-n})|\tilde{C}|$. Έπεται ότι

$$\sigma(A_t^c) = \sigma(C) \leq \frac{1}{1-2^{-n}} \exp\left(-t^2 n/(8\pi^2)\right).$$

Δηλαδή,

$$\sigma(A_t) \geq 1 - c_1 \exp(-c_2 t^2 n)$$

όπου $c_1 = 2$ και $c_2 = 1/(8\pi^2)$. Αυτή είναι η ανισότητα του Θεωρήματος 1.2.1 αν εξαιρέσουμε τις ακριβείς τιμές των σταθερών c_1 και c_2. □

1.3 Η ανισότητα Prékopa–Leindler

Η ανισότητα των Prékopa και Leindler είναι η γενίκευση της ανισότητας Brunn-Minkowski στο πλαίσιο των μετρήσιμων θετικών συναρτήσεων.

Θεώρημα 1.3.1. *Έστω $f, g, h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$ τρείς μετρήσιμες συναρτήσεις και $\lambda \in (0,1)$. Υποθέτουμε ότι οι f και g είναι ολοκληρώσιμες και ότι για κάθε $x, y \in \mathbb{R}^n$*

$$h(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq f(x)^\lambda g(y)^{1-\lambda}.$$

Τότε,

$$\int_{\mathbb{R}^n} h \geq \left(\int_{\mathbb{R}^n} f\right)^\lambda \left(\int_{\mathbb{R}^n} g\right)^{1-\lambda}.$$

Απόδειξη. Θα δείξουμε την ανισότητα με επαγωγή ως προς τη διάσταση n.

(α) $n = 1$: Μπορούμε να υποθέσουμε ότι οι f και g είναι συνεχείς και γνήσια θετικές. Ορίζουμε $x, y : (0,1) \to \mathbb{R}$ μέσω των

$$\int_{-\infty}^{x(t)} f = t\int f \quad , \quad \int_{-\infty}^{y(t)} g = t\int g.$$

Σύμφωνα με τις υποθέσεις μας οι x, y είναι παραγωγίσιμες, και για κάθε $t \in (0,1)$ έχουμε

$$x'(t) f(x(t)) = \int f \quad , \quad y'(t) g(y(t)) = \int g.$$

Ορίζουμε $z : (0,1) \to \mathbb{R}$ με

$$z(t) = \lambda x(t) + (1-\lambda) y(t).$$

Οι x και y είναι γνήσια αύξουσες. Επομένως, η z είναι κι αυτή γνήσια αύξουσα. Από την ανισότητα αριθμητικού-γεωμετρικού μέσου,

$$z'(t) = \lambda x'(t) + (1-\lambda) y'(t) \geq (x'(t))^{\lambda} (y'(t))^{1-\lambda}.$$

Μπορούμε λοιπόν να εκτιμήσουμε το ολοκλήρωμα της h κάνοντας την αλλαγή μεταβλητών $s = z(t)$:

$$\begin{aligned} \int h(s)ds &= \int_0^1 h(z(t)) z'(t) dt \\ &\geq \int_0^1 h(\lambda x(t) + (1-\lambda) y(t)) (x'(t))^{\lambda} (y'(t))^{1-\lambda} dt \\ &\geq \int_0^1 f^{\lambda}(x(t)) g^{1-\lambda}(y(t)) \left(\frac{\int f}{f(x(t))} \right)^{\lambda} \left(\frac{\int g}{g(y(t))} \right)^{1-\lambda} dt \\ &= \left(\int f \right)^{\lambda} \left(\int g \right)^{1-\lambda}. \end{aligned}$$

(β) *Επαγωγικό βήμα:* Υποθέτουμε ότι $n \geq 2$ και ότι το Θεώρημα έχει αποδειχθεί για $k \in \{1, \ldots, n-1\}$. Έστω f, g, h όπως στο Θεώρημα. Για κάθε $s \in \mathbb{R}$ ορίζουμε $h_s : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}^+$ με $h_s(w) = h(w,s)$, και με ανάλογο τρόπο ορίζουμε $f_s, g_s : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}^+$. Από την υπόθεση του θεωρήματος για τις f, g και h έπεται ότι, αν $x, y \in \mathbb{R}^{n-1}$ και $s_0, s_1 \in \mathbb{R}$ τότε

$$h_{\lambda s_1 + (1-\lambda) s_0}(\lambda x + (1-\lambda) y) \geq f_{s_1}(x)^{\lambda} g_{s_0}(y)^{1-\lambda},$$

και η επαγωγική υπόθεση μας δίνει

$$\begin{aligned} H(\lambda s_1 + (1-\lambda) s_0) &:= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} h_{\lambda s_1 + (1-\lambda) s_0} \\ &\geq \left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} f_{s_1} \right)^{\lambda} \left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} g_{s_0} \right)^{1-\lambda} =: F^{\lambda}(s_1) G^{1-\lambda}(s_0). \end{aligned}$$

Εφαρμόζοντας τώρα ξανά την επαγωγική υπόθεση για $n = 1$ στις συναρτήσεις F, G και H, παίρνουμε

$$\int h = \int_{\mathbb{R}} H \geq \left(\int_{\mathbb{R}} F \right)^{\lambda} \left(\int_{\mathbb{R}} G \right)^{1-\lambda} = \left(\int f \right)^{\lambda} \left(\int g \right)^{1-\lambda}.$$

□

Χρησιμοποιώντας την ανισότητα Prékopa–Leindler μπορούμε να αποδείξουμε την ανισότητα Brunn–Minkowski:

Απόδειξη του Θεωρήματος 1.2.3: Έστω K, T συμπαγή μη κενά υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$, και $\lambda \in (0,1)$. Ορίζουμε $f = \chi_K$, $g = \chi_T$, και $h = \chi_{\lambda K + (1-\lambda)T}$. Εύκολα ελέγχουμε ότι ικανοποιούνται οι υποθέσεις του θεωρήματος 1.3.1. Πράγματι, αν $x \notin K$ ή $y \notin T$ τότε

$$h(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq 0 = [f(x)]^{\lambda}[g(y)]^{1-\lambda},$$

ενώ αν $x \in K$ και $y \in T$ τότε $\lambda x + (1-\lambda)y \in \lambda K + (1-\lambda)T$, άρα

$$h(\lambda x + (1-\lambda)y) = 1 = [f(x)]^{\lambda}[g(y)]^{1-\lambda}.$$

Εφαρμόζοντας την ανισότητα Prékopa-Leindler παίρνουμε

$$(*) \qquad |\lambda K + (1-\lambda)T| = \int h \geq \left(\int f\right)^{\lambda}\left(\int g\right)^{1-\lambda} = |K|^{\lambda}|T|^{1-\lambda}.$$

Θεωρούμε τώρα K και T όπως στο Θεώρημα 1.3.1 (με $|K| > 0$ και $|T| > 0$, αλλιώς δεν έχουμε τίποτα να δείξουμε), και ορίζουμε

$$K_1 = |K|^{-1/n}K \quad , \quad T_1 = |T|^{-1/n}T \quad , \quad \lambda = \frac{|K|^{1/n}}{|K|^{1/n} + |T|^{1/n}}.$$

Τα K_1 και T_1 έχουν όγκο 1, οπότε από την $(*)$ παίρνουμε

$$(**) \qquad |\lambda K_1 + (1-\lambda)T_1| \geq 1.$$

Ομως,

$$\lambda K_1 + (1-\lambda)T_1 = \frac{K+T}{|K|^{1/n} + |T|^{1/n}},$$

επομένως η $(**)$ παίρνει την μορφή

$$|K+T| \geq \left(|K|^{1/n} + |T|^{1/n}\right)^n$$

και έπεται το ζητούμενο. □

1.4 Ισοπεριμετρική ανισότητα στο χώρο του Gauss

Σε αυτή την παράγραφο, ο χώρος πιθανότητας που θα μελετήσουμε είναι ο $\Omega = \mathbb{R}^n$ με την Ευκλείδεια μετρική $\|\cdot\|_2$ και το μέτρο πιθανότητας γ_n που έχει πυκνότητα την συνάρτηση

$$\gamma_n(x) = (2\pi)^{-n/2}e^{-\|x\|_2^2/2}.$$

Δηλαδή, αν A είναι ένα μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$, τότε

$$\gamma_n(A) = \mathrm{Prob}(x \in A) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_A e^{-\|x\|_2^2/2} dx.$$

Το γ_n ονομάζεται **μέτρο του Gauss** και ο χώρος πιθανότητας $\Gamma_n = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2, \gamma_n)$ **χώρος του Gauss**.

Το μέτρο του Gauss έχει δύο πολύ σημαντικές ιδιότητες: από τη μια πλευρά είναι μέτρο γινόμενο, πιό συγκεκριμένα $\gamma_n = \gamma_1 \otimes \cdots \otimes \gamma_1$. Από την άλλη πλευρά είναι αναλλοίωτο ως προς ορθογώνιους μετασχηματισμούς: αν $U \in O(n)$ και A είναι ένα Borel υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$, τότε

$$\begin{aligned} \gamma_n(U(A)) &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{U(A)} e^{-\|x\|_2^2/2} dx = \frac{|\det U|}{(2\pi)^{n/2}} \int_A e^{-\|Uy\|_2^2/2} dy \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_A e^{-\|y\|_2^2/2} dy = \gamma_n(A). \end{aligned}$$

Η ισοπεριμετρική ανισότητα στο χώρο του Gauss είναι η εξής.

Θεώρημα 1.4.1. *Έστω $\alpha \in (0,1)$, $\theta \in S^{n-1}$, και $H = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, \theta \rangle \leq \lambda\}$ ένας ημίχωρος του $\mathbb{R}^n$ με $\gamma_n(H) = \alpha$. Τότε, γιά κάθε $t > 0$ και κάθε Borel $A \subseteq \mathbb{R}^n$ με $\gamma_n(A) = \alpha$ ισχύει*

$$\gamma_n(A_t) \geq \gamma_n(H_t).$$

Πόρισμα 1.4.2. *Αν $\gamma_n(A) \geq 1/2$, τότε για κάθε $t > 0$*

$$1 - \gamma_n(A_t) \leq \frac{1}{2} \exp(-t^2/2).$$

Απόδειξη. Από το Θεώρημα 1.5.1 ξέρουμε ότι

$$1 - \gamma_n(A_t) \leq 1 - \gamma_n(H_t)$$

όπου H ημίχωρος μέτρου $1/2$. Αφού το γ_n είναι αναλλοίωτο ως προς ορθογώνιους μετασχηματισμούς, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $H = \{x \in \mathbb{R}^n : x_1 \leq 0\}$, οπότε ολοκληρώνοντας πρώτα ως προς $x_2, \ldots, x_n$ βλέπουμε ότι

$$1 - \gamma_n(H_t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_t^\infty e^{-s^2/2} ds.$$

Παραγωγίζοντας δείχνουμε ότι η συνάρτηση

$$F(x) = e^{x^2/2} \int_x^\infty e^{-s^2/2} ds$$

είναι φθίνουσα στο $[0, +\infty)$. Από την $F(t) \leq F(0)$ προκύπτει το συμπέρασμα. $\square$

Όπως και στην περίπτωση της σφαίρας, η απόδειξη της προσεγγιστικής ισοπεριμετρικής ανισότητας του πορίσματος 1.5.2 χρησιμοποιεί ισχυρά την ισοπεριμετρική ανισότητα του θεωρήματος 1.5.1. Μπορούμε όμως να αποδείξουμε απευθείας την προσεγγιστική ισοπεριμετρική ανισότητα γιά το χώρο του Gauss.

Θεώρημα 1.4.3. *Έστω A μη κενό Borel υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$. Τότε,*

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{d(x,A)^2/4} d\gamma_n(x) \leq \frac{1}{\gamma_n(A)},$$

όπου $d(x,A) = \inf\{\|x-y\|_2 : y \in A\}$. Επομένως, αν $\gamma_n(A) = 1/2$ τότε

$$1 - \gamma_n(A_t) \leq 2\exp(-t^2/4)$$

γιά κάθε $t > 0$.

Απόδειξη. Συμβολίζουμε με $\gamma_n(x)$ την συνάρτηση $(2\pi)^{-n/2}\exp(-\|x\|_2^2/2)$, και θεωρούμε τις συναρτήσεις

$$f(x) = e^{d(x,A)^2/4}\gamma_n(x) \ \ , \ \ g(x) = \chi_A(x)\gamma_n(x) \ \ , \ \ m(x) = \gamma_n(x).$$

Γιά κάθε $x \in \mathbb{R}^n$ και $y \in A$ έχουμε

$$\begin{aligned}
(2\pi)^n f(x)g(y) &= e^{d(x,A)^2/4}e^{-|x|^2/2}e^{-\|y\|_2^2/2} \\
&\leq \exp\left(\frac{\|x-y\|_2^2}{4} - \frac{\|x\|_2^2}{2} - \frac{\|y\|_2^2}{2}\right) \\
&= \exp\left(-\frac{\|x+y\|_2^2}{4}\right) \\
&= \left(\exp\left(-\frac{1}{2}\left\|\frac{x+y}{2}\right\|_2^2\right)\right)^2 \\
&= (2\pi)^n\left(m\left(\frac{x+y}{2}\right)\right)^2,
\end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε τον κανόνα του παραλληλογράμμου και την $d(x,A) \leq \|x-y\|_2$. Παρατηρώντας ότι $g(y) = 0$ αν $y \notin A$, βλέπουμε ότι οι f, g, m ικανοποιούν τις υποθέσεις της ανισότητας Prékopa-Leindler με $\lambda = 1/2$. Εφαρμόζουμε λοιπόν το Θεώρημα 1.3.1 και έχουμε

$$\left(\int e^{d(x,A)^2/4}\gamma_n(dx)\right)\gamma_n(A) = \left(\int f\right)\left(\int g\right) \leq \left(\int m\right)^2 = 1.$$

Αυτό αποδεικνύει τον πρώτο ισχυρισμό του θεωρήματος. Γιά τον δεύτερο, παρατηρούμε ότι αν $\gamma_n(A) = 1/2$ τότε

$$e^{t^2/4}\gamma_n(x : d(x,A) > t) \leq \int e^{d(x,A)^2/4}\gamma_n(dx) \leq \frac{1}{\gamma_n(A)} = 2.$$

Δηλαδή, $\gamma_n(A_t^c) \leq 2\exp(-t^2/4)$. □

1.5 Ανισότητα του Ehrhard

Ορισμός 1.5.1. Μια συνάρτηση $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$ λέγεται **λογαριθμικά κοίλη** αν, για κάθε $x, y \in \mathbb{R}^n$ και για κάθε $\lambda \in (0,1)$ ισχύει

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq [f(x)]^\lambda [f(y)]^{1-\lambda}.$$

Θεωρούμε την κλάση $\mathcal{M}_n$ όλων των Borel μέτρων πιθανότητας μ στον $\mathbb{R}^n$ που έχουν τη μορφή

$$\mu(A) = \int_A f_\mu(x)dx,$$

όπου $f_\mu : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$ άρτια, λογαριθμικά κοίλη συνάρτηση, με

$$\int_{\mathbb{R}^n} f_\mu(x)dx = 1.$$

Λέμε ότι η f_μ είναι η **πυκνότητα** του μ.

Παραδείγματα μέτρων στην $\mathcal{M}_n$. (α) Έστω K συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$, με όγκο $|K| = 1$. Ορίζουμε ένα μέτρο πιθανότητας μ_K στον $\mathbb{R}^n$, θέτοντας

$$\mu_K(A) = |K \cap A| = \int_A \chi_K(x)dx$$

για κάθε Borel $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Λόγω της κυρτότητας και της συμμετρίας του K, η χ_K είναι άρτια και λογαριθμικά κοίλη συνάρτηση, άρα $\mu_K \in \mathcal{M}_n$.
(β) Για κάθε $c > 0$, η συνάρτηση $f_c(x) = \exp(-c\|x\|_2^2)$ είναι άρτια και λογαριθμικά κοίλη στον $\mathbb{R}^n$: Παρατηρούμε ότι η Ευκλείδεια νόρμα είναι κυρτή συνάρτηση, και η $t \mapsto ct^2$ είναι επίσης κυρτή. Άρα η σύνθεσή τους

$$c\|x\|_2^2 = -\log f(x)$$

είναι μια άρτια, κυρτή συνάρτηση. Αυτό σημαίνει ότι, για κάθε $c > 0$, το μέτρο

$$\gamma_{n,c}(A) = \frac{1}{I(c)} \int_A \exp(-c\|x\|_2^2)dx$$

όπου $I(c) = \int_{\mathbb{R}^n} \exp(-c\|x\|_2^2)dx$, ανήκει στην κλάση $\mathcal{M}_n$.

Ορισμός 1.5.2. Ένα Borel μέτρο πιθανότητας μ στον $\mathbb{R}^n$ λέγεται άρτιο και λογαριθμικά κοίλο, αν για κάθε A, B μη κενά Borel υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$ και κάθε $\lambda \in (0,1)$, ισχύουν οι

$$\mu(-A) = \mu(A)$$

και

$$\mu(\lambda A + (1-\lambda)B) \geq [\mu(A)]^\lambda [\mu(B)]^{1-\lambda}.$$

Πρόταση 1.5.3. *Αν $\mu \in \mathcal{M}_n$, τότε το μ είναι άρτιο και λογαριθμικά κοίλο.*

Απόδειξη. Αφού $\mu \in \mathcal{M}_n$, υπάρχει $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$ άρτια και λογαριθμικά κοίλη συνάρτηση, ώστε
$$\mu(A) = \int_A f(x)dx.$$
Αφού η f είναι άρτια, παίρνουμε
$$\mu(-A) = \int_{-A} f(x)dx = \int_A f(-x)dx = \int_A f(x)dx = \mu(A),$$
δηλαδή το μ είναι άρτιο. Έστω $\lambda \in (0,1)$ και A, B μη κενά Borel υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$. Θέλουμε να δείξουμε ότι
$$\begin{aligned} \mu(\lambda A + (1-\lambda)B) &= \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{\lambda A+(1-\lambda)B}(x) f(x)dx \\ &\geq \left(\int_{\mathbb{R}^n} \chi_A(x) f(x)dx\right)^{\lambda} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \chi_B(x) f(x)dx\right)^{1-\lambda} \\ &= [\mu(A)]^{\lambda}[\mu(B)]^{1-\lambda}. \end{aligned}$$
Ορίζουμε $w(x) = \chi_A(x)f(x)$, $g(x) = \chi_B(x)f(x)$, και $h(x) = \chi_{\lambda A+(1-\lambda)B}(x)f(x)$. Θα δείξουμε ότι αυτή η τριάδα συναρτήσεων ικανοποιεί τις υποθέσεις της ανισότητας Prékopa–Leindler: για κάθε $x, y \in \mathbb{R}^n$,
$$h(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq [w(x)]^{\lambda}[g(y)]^{1-\lambda}.$$
Πράγματι, αν $x \notin A$ ή $y \notin B$, τότε το δεξιό μέλος γίνεται ίσο με μηδέν, οπότε δεν έχουμε τίποτα να αποδείξουμε. Αν πάλι $x \in A$ και $y \in B$, τότε $\lambda x + (1-\lambda)y \in \lambda A + (1-\lambda)B$, και η ανισότητα παίρνει τη μορφή
$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq [f(x)]^{\lambda}[g(y)]^{1-\lambda},$$
η οποία ισχύει, γιατί η f είναι λογαριθμικά κοίλη συνάρτηση.

Από την ανισότητα Prékopa–Leindler, συμπεραίνουμε ότι
$$\int_{\mathbb{R}^n} h(x)dx \geq \left(\int_{\mathbb{R}^n} w(x)dx\right)^{\lambda} \left(\int_{\mathbb{R}^n} g(x)dx\right)^{1-\lambda},$$
το οποίο είναι ακριβώς το ζητούμενο. □

Ειδικότερα, το μέτρο του Gauss γ_n είναι λογαριθμικά κοίλο. Δηλαδή, αν A, B είναι Borel υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$ και $\lambda \in (0,1)$, τότε
$$(*) \qquad \gamma_n(\lambda A + (1-\lambda)B) \geq [\gamma_n(A)]^{\lambda}[\gamma_n(B)]^{1-\lambda}.$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση κατανομής

$$\Phi(x) = \gamma_1((-\infty, x]) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2} dt.$$

Η $\Phi : \mathbb{R} \to (0,1)$ είναι γνησίως αύξουσα και επί. Η ανισότητα του Ehrhard είναι μια ισχυρότερη έκδοση της $(*)$:

Θεώρημα 1.5.4. *Αν A, B είναι Borel υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$ και $\lambda \in (0,1)$, τότε*

$$\Phi^{-1}(\gamma_n(\lambda A + (1-\lambda)B)) \geq \lambda \Phi^{-1}(\gamma_n(A)) + (1-\lambda)\Phi^{-1}(\gamma_n(B)).$$

□

Πρόταση 1.5.5. *Η ανισότητα του Ehrhard είναι ισχυρότερη από την $(*)$.*

Απόδειξη. Δείχνουμε πρώτα ότι η $\log \Phi$ είναι κοίλη. Πράγματι,

$$(\log \Phi)'(x) = \frac{\Phi'(x)}{\Phi(x)},$$

άρα

$$(\log \Phi)''(x) = \frac{\Phi''(x)\Phi(x) - [\Phi'(x)]^2}{\Phi^2(x)},$$

αρκεί επομένως να ελέγξουμε την $\Phi''(x)\Phi(x) \leq [\Phi'(x)]^2$, η οποία είναι ισοδύναμη με την

$$g(x) = e^{-x^2/2} + x \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2} dt \geq 0, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Παραγωγίζοντας την g, παίρνουμε

$$g'(x) = -xe^{-x^2/2} + xe^{-x^2/2} + \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2} dt > 0,$$

δηλαδή, η g είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. Από την άλλη πλευρά, χρησιμοποιώντας τον κανόνα του L'Hospital, βλέπουμε ότι $g(x) \to 0$ όταν $x \to -\infty$. Άρα, $g > 0$ και η $\log \Phi$ είναι κοίλη.

Έστω τώρα A, B Borel υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$ και $\lambda \in (0,1)$. Από την

$$\Phi^{-1}(\gamma_n(\lambda A + (1-\lambda)B)) \geq \lambda \Phi^{-1}(\gamma_n(A)) + (1-\lambda)\Phi^{-1}(\gamma_n(B)),$$

χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι η Φ είναι αύξουσα, παίρνουμε

$$\gamma_n(\lambda A + (1-\lambda)B) \geq \Phi(\lambda \Phi^{-1}(\gamma_n(A)) + (1-\lambda)\Phi^{-1}(\gamma_n(B))).$$

Όμως η Φ είναι λογαριθμικά κοίλη, άρα

$$\begin{aligned} \Phi(\lambda \Phi^{-1}(\gamma_n(A)) + (1-\lambda)\Phi^{-1}(\gamma_n(B))) &\geq [\Phi(\Phi^{-1}(\gamma_n(A))]^{\lambda}[\Phi(\Phi^{-1}(\gamma_n(B))]^{1-\lambda} \\ &= [\gamma_n(A)]^{\lambda}[\gamma_n(B)]^{1-\lambda}. \end{aligned}$$

Δηλαδή, ισχύει η $(*)$. □

1.6 Η ισοπεριμετρική ανισότητα στον E_2^n

Θεωρούμε το σύνολο $E_2^n = \{-1,1\}^n$, το οποίο ταυτίζουμε με το σύνολο των κορυφών του κύβου $Q_n = [-1,1]^n$ στον $\mathbb{R}^n$. Στο E_2^n ορίζουμε το ομοιόμορφο μέτρο πιθανότητας μ_n που δίνει μάζα 2^{-n} σε κάθε σημείο. Ο E_n γίνεται μετρικός χώρος με απόσταση την

$$d_n(x,y) = \frac{1}{n}\mathrm{card}\{i \leq n : x_i \neq y_i\} = \frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n}|x_i - y_i|.$$

Η t-περιοχή ενός $A \subseteq E_n$ είναι ως συνήθως το σύνολο $A_t = \{x \in E_n : d_n(x,A) \leq t\}$. Οι τιμές που μπορεί να πάρει η d_n είναι πεπερασμένες το πλήθος: $0, 1/n, 2/n, \ldots, 1$. Επομένως, αυτές είναι οι τιμές του t γιά τις οποίες η t-περιοχή του A παρουσιάζει ενδιαφέρον, με την έννοια ότι το A_t παραμένει αμετάβλητο όταν το t παίρνει τιμές σε ένα διάστημα της μορφής $[k/n, (k+1)/n)$.

Το ισοπεριμετρικό πρόβλημα είναι λοιπόν το εξής. Μας δίνουν έναν φυσικό $m = 1, 2, \ldots, 2^n$ και κάποιο $t = k/n$, $k = 1, \ldots, n$. Γιά ποιό σύνολο A με πλήθος στοιχείων m είναι η k/n-περιοχή του A η μικρότερη δυνατή; Η απάντηση είναι ότι το A θα πρέπει να έχει όσο το δυνατόν «λιγότερα κενά». Αν περιέχει μιά n-άδα $x = (x_1, \ldots, x_n)$, τότε θα πρέπει να περιέχει κατά σειρά προτεραιότητας και τις «γειτονικές» της n-άδες, αυτές δηλαδή που διαφέρουν από την x σε μία συντεταγμένη, δύο συντεταγμένες, κ.ο.κ. (εφόσον το πλήθος των στοιχείων του A επαρκεί). Αυτό, γιατί η παραμικρή επέκταση του A θα τις συμπεριλάβει ούτως ή άλλως. Τα πιό οικονομικά σύνολα είναι οι d_n-μπάλες (οι λεγόμενες Hamming μπάλες του E_2^n). Αποδεικνύεται η ακόλουθη ισοπεριμετρική ανισότητα γιά τον E_2^n.

Θεώρημα 1.6.1. *Έστω $A \subseteq E_2^n$ με $m = \sum_{k=0}^{l}\binom{n}{k}$ στοιχεία. Τότε, γιά κάθε $s = 1, \ldots, n-l$, έχουμε*

$$\mu_n(A_{s/n}) \geq \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{l+s}\binom{n}{k} = \mu_n(B(x, l/n)_{s/n}) = \mu_n(B(x,(l+s)/n))$$

όπου x τυχόν στοιχείο του E_2^n. □

Η ισοπεριμετρική αυτή ανισότητα οδηγεί σε μια προσεγγιστική ισοπεριμετρική ανισότητα για τον E_2^n.

Πόρισμα 1.6.2. *Αν $\mu_n(A) \geq 1/2$ και $t > 0$, τότε*

$$\mu_n(A_t^c) \leq \frac{1}{2}\exp(-2t^2 n).$$

Το πόρισμα 1.6.2 ερμηνεύεται ως εξής: για να εκτιμήσουμε το $\mu_n(A_t)$ αρκεί να θέσουμε $l = n/2$ και $s = tn$ στο θεώρημα 1.6.1. Τότε βλέπουμε ότι

$$\mu_n(A_t^c) \leq \frac{1}{2^n}\sum_{j=(\frac{1}{2}+t)n}^{n}\binom{n}{j},$$

το οποίο φθίνει εκθετικά στο 0 καθώς $n \to \infty$, γιατί οι «ακραίοι» διωνυμικοί συντελεστές είναι πολύ μικροί σε σύγκριση με τους «μεσαίους» όταν το n είναι μεγάλο.

Δεν θα αποδείξουμε το θεώρημα 1.6.1 (η απόδειξη είναι συνδυαστική και γίνεται με επαγωγή ως προς n). Περιγράφουμε μια δεύτερη απευθείας απόδειξη της «προσεγγιστικής ισοπεριμετρικής ανισότητας» του πορίσματος 1.6.2, η οποία βασίζεται στο ακόλουθο θεώρημα του Talagrand.

Θεώρημα 1.6.3. *Έστω A μη κενό υποσύνολο του E_2^n. Θεωρούμε την κυρτή θήκη* $\mathrm{conv}(A)$ *και γιά κάθε $x \in E_2^n$ ορίζουμε*

$$\phi_A(x) = \min\{\|x-y\|_2 : y \in \mathrm{conv}(A)\}.$$

Τότε, ισχύει η ανισότητα

$$\int_{E_2^n} \exp(\phi_A^2(x)/8)d\mu_n(x) \leq \frac{1}{\mu_n(A)}.$$

Έστω A μη κενό υποσύνολο του E_2^n. Η συνάρτηση ϕ_A του θεωρήματος 1.6.3 και η συνάρτηση απόστασης από το A

$$d_n(x,A) = \min\left\{\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^n |x_i - y_i| : y \in A\right\}$$

συγκρίνονται σύμφωνα με το επόμενο λήμμα.

Λήμμα 1.6.4. *Γιά κάθε μη κενό $A \subseteq E_2^n$ έχουμε*

$$2\sqrt{n}d_n(x,A) \leq \phi_A(x), \quad x \in E_2^n.$$

Απόδειξη. Έστω $x \in E_2^n$. Γιά κάθε $y \in A$ ισχύει

$$\langle x-y, x\rangle = \sum_{i=1}^n x_i(x_i - y_i) = 2nd_n(x,y) \geq 2nd_n(x,A).$$

Έπεται ότι γιά κάθε $y \in \mathrm{conv}(A)$

$$\sqrt{n}\|x-y\|_2 \geq \langle x-y, x\rangle \geq 2nd_n(x,A).$$

Αυτό αποδεικνύει το λήμμα. □

Συνδυάζοντας τα δύο παραπάνω λήμματα δείχνουμε την προσεγγιστική ισοπεριμετρική ανισότητα γιά τον E_2^n:

Θεώρημα 1.6.5. *Έστω $A \subseteq E_2^n$ με $\mu_n(A) = 1/2$. Τότε, γιά κάθε $t > 0$ έχουμε*

$$\mu_n(A_t) \geq 1 - 2\exp(-t^2n/2).$$

Απόδειξη. Αν $x \notin A_t$, τότε $d_n(x, A) \geq t$ και το Λήμμα 1.6.4 δείχνει ότι $\phi_A(x) \geq 2t\sqrt{n}$.
Ομως, από το Θεώρημα 1.6.3 έχουμε

$$e^{t^2 n/2}\mu_n(x : \phi_A(x) \geq 2t\sqrt{n}) \leq \int_{E_2^n} \exp(\phi_A^2(x)/8)d\mu_n(x) \leq \frac{1}{\mu_n(A)} = 2,$$

το οποίο σημαίνει ότι

$$\mu_n(A_t^c) \leq \mu_n(x : \phi_A(x) \geq 2t\sqrt{n}) \leq 2\exp(-t^2 n/2).$$

□

Κεφάλαιο 2

Ισοπεριμετρική ανισότητα στο χώρο του Gauss

2.1 Ισοπεριμετρική ανισότητα στο διακριτό κύβο

Θεωρούμε την οικογένεια $\mathcal{J}$ των συναρτήσεων $J : [0,1] \to [0,\infty)$ που ικανοποιούν τα εξής:

- $J(0) = J(1) = 0$.
- Για κάθε $a, b \in [0,1]$,

$$(*) \qquad J\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{2}\sqrt{J(a)^2 + \left|\frac{a-b}{2}\right|^2} + \frac{1}{2}\sqrt{J(b)^2 + \left|\frac{a-b}{2}\right|^2}.$$

Είναι σαφές ότι, αν η οικογένεια $\mathcal{J}$ είναι μη κενή, τότε η συνάρτηση $I := \sup\{J : J \in \mathcal{J}\}$ ανήκει κι αυτή στην $\mathcal{J}$. Το ερώτημα να βρεθεί η «μέγιστη συνάρτηση» της κλάσης $\mathcal{J}$ είναι το κλειδί για τη λύση του ισοπεριμετρικού προβλήματος στο διακριτό κύβο E_2^n. Όπως θα δούμε, μια κατάλληλη συναρτησιακή ανισότητα περιέχει σαν οριακή περίπτωση τη γνωστή ισοπεριμετρική ανισότητα στο χώρο του Gauss.

Για $x \in [-\infty, +\infty]$ θέτουμε

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\big(-x^2/2\big) \quad \text{και} \quad \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-u^2/2} du.$$

Η Φ είναι γνησίως αύξουσα, από το $[-\infty, +\infty]$ επί του $[0,1]$. Θεωρούμε την αντίστροφη συνάρτηση $\Phi^{-1} : [0,1] \to [-\infty, +\infty]$.

Πρόταση 2.1.1. *Η συνάρτηση $I = \phi \circ \Phi^{-1} : [0,1] \to [0,\infty)$ είναι μεγιστική ανάμεσα σε όλες τις συναρτήσεις της οικογένειας $\mathcal{J}$.*

Η απόδειξη της Πρότασης θα δοθεί στο τέλος αυτής της Παραγράφου.

Ορισμός 2.1.2. Συμβολίζουμε με E_2^n τον διακριτό κύβο, τον οποίο θεωρούμε εφοδιασμένο με το ομοιόμορφο μέτρο πιθανότητας μ_n. Αν $f : E_2^n \to \mathbb{R}$, τότε το (διακριτό) ανάδελτα της f ορίζεται ως εξής:

$$\nabla f(x) = \left(\frac{f(x) - f(s_1(x))}{2}, \dots, \frac{f(x) - f(s_n(x))}{2} \right),$$

όπου $s_i(x) = (x_1, \dots, -x_i, \dots, x_n)$, $i = 1, \dots, n$ είναι τα n γειτονικά σημεία του x. Το μέτρο του $\nabla f(x)$ ορίζεται φυσιολογικά:

$$|\nabla f(x)| = \frac{1}{2} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |f(x) - f(s_i(x))|^2}.$$

Λήμμα 2.1.3. *Έστω $J \in \mathcal{J}$. Αν $f : E_2^1 := \{-1, 1\} \to [0,1]$, τότε*

$$J(\mathbb{E} f) \leq \mathbb{E}\left(\sqrt{J(f)^2 + |\nabla f|^2} \right).$$

Απόδειξη. Θέτουμε $a = f(-1)$ και $b = f(1)$. Τότε, $a, b \in [0,1]$ και $\mathbb{E} f = \frac{a+b}{2}$. Επίσης,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left(\sqrt{J(f)^2 + |\nabla f|^2} \right) &= \frac{1}{2}\sqrt{J(f(-1))^2 + |\nabla f(-1)|^2} + \frac{1}{2}\sqrt{J(f(1))^2 + |\nabla f(1)|^2} \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{J(a)^2 + \left|\frac{a-b}{2}\right|^2} + \frac{1}{2}\sqrt{J(b)^2 + \left|\frac{a-b}{2}\right|^2}, \end{aligned}$$

αφού $|\nabla f(-1)| = |\nabla f(1)| = \left|\frac{a-b}{2}\right|$. Από την $J \in \mathcal{J}$ έπεται το Λήμμα. □

Θεώρημα 2.1.4. *Έστω $J \in \mathcal{J}$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και για κάθε $f : E_2^n \to [0,1]$ ισχύει*

$$J(\mathbb{E} f) \leq \mathbb{E}\left(\sqrt{J(f)^2 + |\nabla f|^2} \right).$$

Απόδειξη. Με επαγωγή ως προς n. Στο Λήμμα 2.1.3 εξετάσαμε την περίπτωση $n = 1$, οπότε μένει να αιτιολογήσουμε το επαγωγικό βήμα. Έστω $f : E_2^{n+1} \to [0,1]$. Αν $\mu_{n+1} = \mu_n \otimes \mu_1$ είναι το ομοιόμορφο μέτρο πιθανότητας στον E_2^{n+1}, έχουμε

$$\mathbb{E}_{n+1}(f) = \frac{\mathbb{E}_n(f_0) + \mathbb{E}_n(f_1)}{2},$$

όπου οι $f_0, f_1 : E_2^n \to [0,1]$ ορίζονται ως εξής:

$$f_0(x) = f(x, 1) \quad \text{και} \quad f_1(x) = f(x, -1).$$

Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned}|\nabla f(x,1)|^2 &= \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{n}|f(x,1)-f(s_i(x),1)|^2+\frac{1}{4}|f(x,1)-f(x,-1)|^2\\ &= |\nabla f_0(x)|^2+\left|\frac{f_0(x)-f_1(x)}{2}\right|^2\end{aligned}$$

και, όμοια,

$$|\nabla f(x,-1)|^2=|\nabla f_1(x)|^2+\left|\frac{f_0(x)-f_1(x)}{2}\right|^2.$$

Άρα,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_{n+1}:=\mathbb{E}_{n+1}\left(\sqrt{J(f)^2+|\nabla f|^2}\right) &= \frac{1}{2}\mathbb{E}_n\left(\sqrt{J(f_0)^2+|\nabla f_0|^2+\left|\frac{f_0-f_1}{2}\right|^2}\right)\\ &\quad+\frac{1}{2}\mathbb{E}_n\left(\sqrt{J(f_1)^2+|\nabla f_1|^2+\left|\frac{f_0-f_1}{2}\right|^2}\right).\end{aligned}$$

Θέτουμε

$$u_0=\left(J(f_0)^2+|\nabla f_0|^2\right)^{1/2},\quad u_1=\left(J(f_1)^2+|\nabla f_1|^2\right)^{1/2}\quad \text{και}\quad v=\frac{f_0-f_1}{2},$$

και χρησιμοποιώντας την ανισότητα

$$\int\sqrt{u^2+v^2}\geq\sqrt{\left(\int u\right)^2+\left(\int v\right)^2}$$

γράφουμε

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_{n+1} &= \frac{1}{2}\mathbb{E}_n\left(\sqrt{u_0^2+v^2}\right)+\frac{1}{2}\mathbb{E}_n\left(\sqrt{u_1^2+v^2}\right)\\ &\geq \frac{1}{2}\sqrt{(\mathbb{E}_n(u_0))^2+(\mathbb{E}_n(v))^2)}+\frac{1}{2}\sqrt{(\mathbb{E}_n(u_1))^2+(\mathbb{E}_n(v))^2}.\end{aligned}$$

Από την επαγωγική υπόθεση,

$$\mathbb{E}_n(u_0)=\mathbb{E}_n\sqrt{J(f_0)^2+|\nabla f_0|^2}\geq J(\mathbb{E}_n(f_0))$$

και

$$\mathbb{E}_n(u_1)=\mathbb{E}_n\sqrt{J(f_1)^2+|\nabla f_1|^2}\geq J(\mathbb{E}_n(f_1)).$$

Επίσης,

$$\mathbb{E}_n(v) = \frac{\mathbb{E}_n(f_0) - \mathbb{E}_n(f_1)}{2}.$$

Αν λοιπόν θέσουμε $a = \mathbb{E}_n(f_0)$ και $b = \mathbb{E}_n(f_1)$, τότε

$$\mathbb{E}_{n+1} \geq \frac{1}{2}\sqrt{J(a)^2 + \left|\frac{a-b}{2}\right|^2} + \frac{1}{2}\sqrt{J(b)^2 + \left|\frac{a-b}{2}\right|^2} \geq J\left(\frac{a+b}{2}\right).$$

Δηλαδή,

$$\mathbb{E}_{n+1} := \mathbb{E}_{n+1}\left(\sqrt{J(f)^2 + |\nabla f|^2}\right) \geq J(\mathbb{E}_{n+1}(f))$$

αφού $\mathbb{E}_{n+1}(f) = \frac{a+b}{2}$. □

2.2 Ισοπεριμετρική ανισότητα στο χώρο του Gauss

Σε αυτή την παράγραφο, χρησιμοποιώντας τη συναρτησιακή ανισότητα της προηγούμενης παραγράφου και το κεντρικό οριακό θεώρημα, αποδεικνύουμε την ισοπεριμετρική ανισότητα στο χώρο του Gauss.

Πρόταση 2.2.1. *Έστω $f : \mathbb{R}^n \to [0,1]$ μια C^2-συνάρτηση με φραγμένες μερικές παραγώγους πρώτης και δεύτερης τάξης. Για κάθε $k \in \mathbb{N}$ ορίζουμε $f_k : \mathbb{R}^n \times \cdots \times \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{nk} \to [0,1]$ με*

$$f_k(x_1, \ldots, x_k) = f\left(\frac{x_1 + \cdots + x_k}{\sqrt{k}}\right).$$

Τότε,

$$\int_{E_2^{nk}} \sqrt{I(f_k) + |\nabla f_k|^2}\, d\mu_{nk} \longrightarrow \int_{\mathbb{R}^n} \sqrt{I(f)^2 + |\nabla f|^2}\, d\gamma_n,$$

όταν $k \to \infty$.

Απόδειξη. Για κάθε $k \in \mathbb{N}$ θεωρούμε την $g_k : E_2^{nk} \to \mathbb{R}^n$ με $g(x_1, \ldots, x_k) = \frac{1}{\sqrt{k}}(x_1 + \cdots + x_k)$ και το επαγόμενο μέτρο τ_k στην Borel σ-άλγεβρα του $\mathbb{R}^n$. Δηλαδή,

$$\tau_k(A) = \mu_{nk}(g_k^{-1}(A))$$

για κάθε Borel υποσύνολο A του $\mathbb{R}^n$. Τότε,

$$\int_{E_2^{nk}} f_k\, d\mu_{nk} = \int_{\mathbb{R}^n} f\, d\tau_k.$$

Ισχυρισμός. Για κάθε Borel υποσύνολο B του $\mathbb{R}^n$,

$$\lim_{k\to\infty} \tau_k(B) = \gamma_n(B).$$

Απόδειξη του ισχυρισμού. Έχουμε

$$\tau_k(B) = \mu_{nk}\left(\left\{(x_1,\dots,x_k)\in E_2^{nk} : \frac{x_1+\cdots+x_k}{\sqrt{k}}\in A\right\}\right).$$

Αν $B=(-\infty,a_1]\times\cdots\times(-\infty,a_n]$, τότε

$$\begin{aligned}\tau_k(B) &= \mu_{nk}\left(\bigcap_{j=1}^{n}\left\{(x_1,\dots,x_k)\in E_2^{nk} : \frac{(x_1+\cdots+x_k)_j}{\sqrt{k}}\leq a_j\right\}\right)\\ &= \prod_{j=1}^{n}\mu_k\left(\frac{x_{1j}+\cdots+x_{kj}}{\sqrt{k}}\leq a_j\right).\end{aligned}$$

Από το κεντρικό οριακό θεώρημα,

$$\lim_{k\to\infty}\mu_k\left(\frac{x_{1j}+\cdots+x_{kj}}{\sqrt{k}}\leq a_j\right)=\gamma_1((-\infty,a_j]).$$

Άρα,

$$\lim_{k\to\infty}\tau_k(B)=\prod_{j=1}^{n}\gamma_1((-\infty,a_j])=\gamma_n(B).$$

Αφού η Borel σ-άλγεβρα του $\mathbb{R}^n$ παράγεται από την οικογένεια των συνόλων της μορφής $B=(-\infty,a_1]\times\cdots\times(-\infty,a_n]$, έπεται ο ισχυρισμός. □

Έστω τώρα $(x_1,\dots,x_k)\in E_2^{nk}$. Συμβολίζουμε με $s_j(x_i)$ το διάνυσμα που διαφέρει (κατά το πρόσημο) από το x_i στην j-θέση, και θέτουμε

$$u=\frac{x_1+\cdots+x_k}{\sqrt{k}}\quad\text{και}\quad v_{ij}=\frac{x_1+\cdots+s_j(x_i)+\cdots+x_k}{\sqrt{k}}.$$

Από το θεώρημα Taylor, χρησιμοποιώντας και την υπόθεση ότι η f έχει φραγμένες μερικές παραγώγους δεύτερης τάξης, παίρνουμε

$$f(v_{ij})=f(u)+\partial_j f(u)\frac{2}{\sqrt{k}}+O\left(\frac{1}{k}\right)$$

για κάθε $i\leq k$ και $j\leq n$. Αν τώρα θέσουμε $\gamma_j=\partial_j f(u)$, $j=1,\dots,n$, έχουμε

$$\begin{aligned}|\nabla f_k(x_1,\dots,x_k)|^2 &= \frac{1}{4}\sum_{i,j}|f(v_{ij})-f(u)|^2\\ &= \frac{1}{4}\sum_{i,j}\left|\frac{2\gamma_j}{\sqrt{k}}+O\left(\frac{1}{k}\right)\right|^2\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{k}{4}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{4}{k}\gamma_j^2+\gamma_j O(1/k^{3/2})+O(1/k^2)\right)\\
&= \sum_{j=1}^{n}\gamma_j^2+O(1/\sqrt{k})\sum_{j=1}^{n}\gamma_j+O(1/k)\\
&= |\nabla f(u)|^2+O(1/\sqrt{k})\\
&= \left|\nabla f\left(\frac{x_1+\cdots+x_k}{\sqrt{k}}\right)\right|^2+O(1/\sqrt{k}),
\end{aligned}
$$

όπου χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι η f έχει φραγμένες μερικές παραγώγους πρώτης τάξης. Από την παραπάνω ανισότητα έπεται ότι

$$
\int_{E_2^{nk}}\sqrt{I(f_k)+|\nabla f_k|^2}\,d\mu_{nk}\longrightarrow\int_{\mathbb{R}^n}\sqrt{I(f)^2+|\nabla f|^2}\,d\gamma_n,
$$

καθώς το $k\to\infty$.

Συνδυάζοντας το θεώρημα 2.2.1 με το θεώρημα 2.1.4 έχουμε:

Θεώρημα 2.2.2. *Έστω $I=\varphi\circ\Phi^{-1}$. Τότε για κάθε τοπικά Lipschitz συνάρτηση $f:\mathbb{R}^n\to[0,1]$,*

$$
I(\mathbb{E}f)\leq\mathbb{E}(\sqrt{I(f)^2+|\nabla f|^2}),
$$

όπου $\mathbb{E}f$ η μέση τιμή της συνάρτησης f ως προς το μέτρο Gauss γ_n.

Από την ανισότητα $\sqrt{a^2+b^2}\leq|a|+|b|$ και από το θεώρημα 2.2.2 προκύπτει άμεσα το εξής:

Πόρισμα 2.2.3. *Για κάθε τοπικά Lipschitz συνάρτηση $f:\mathbb{R}^n\to[0,1]$ ισχύει*

$$
I(\mathbb{E}f)-\mathbb{E}(I(f))\leq\mathbb{E}(|\nabla f|).
$$

Μποτούμε τώρα να αποδείξουμε την ισοπεριμετρική ανισότητα για το γ_n.

Θεώρημα 2.2.4. *Για κάθε $A\subset\mathbb{R}^n$, Borel μετρήσιμο,*

$$
\gamma_n^+(A)\geq I(\gamma_n(A)),
$$

όπου

$$
\gamma_n^+(A)=\liminf_{r\to 0}\frac{\gamma_n(A_r)-\gamma(A)}{r},
$$

το μέτρο της επιφάνειας του A κατά Minkowski και $A_r=\{x\in\mathbb{R}^n:\ d(x,A)<r\}$, η $r-$γειτονιά του A.

Απόδειξη. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$f_r(x) = \max\left\{1 - \frac{1}{r}\mathrm{dist}(x, A_r), 0\right\}.$$

Για την f_r ισχύει ότι $\chi_{A_r} \leq f_r \leq \chi_{A_{2r}}$, οπότε

$$\gamma_n(A_r) \leq \mathbb{E}f_r \leq \gamma_n(A_{2r}).$$

Επίσης $I(f_r) = 0$ στο $A_r \cup \overline{A_{2r}}^c$, αφού $f_r(x) = 1$ στο A_r και $f_r(x) = 0$ στο $\overline{A_{2r}}^c$. Έτσι,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(I(f_r)) &= \int_{A_{2r}\setminus A_r} I(f_r)\, d\gamma_n \leq \int_{A_{2r}\setminus A_r} d\gamma_n \\ &= \gamma_n(A_{2r}) - \gamma_n(A_r) \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(|\nabla f_r|) &= \int_{A_{2r}\setminus A_r} |\nabla f_r|\, d\gamma_n \leq \frac{1}{r}\left(\gamma_n(A_{2r}) - \gamma_n(A_r)\right) \\ &= 2\frac{\gamma_n(A_{2r}) - \gamma_n(A_r)}{2r} - \frac{\gamma_n(A_r) - \gamma_n(A)}{r}, \end{aligned}$$

αφού $|\nabla f_r| \leq 1/r$ στο A_{2r} και $|\nabla f_r| = 0$ στο A_r. Εφαρμόζοντας λοιπόν την ανισότητα

$$I(\mathbb{E}f) - \mathbb{E}(I(f)) \leq \mathbb{E}(|\nabla f|)$$

για την f_r και αφήνοντας το $r \to 0$, παίρνουμε

$$I(\gamma_n) - 0 \leq 2\gamma_n^+(A) - \gamma_n^+(A) = \gamma_n^+(A).$$

□

2.3 Η συνάρτηση $I = \varphi \circ \Phi^{-1}$

Θα δείξουμε ότι η $I = \varphi \circ \Phi^{-1}$ είναι η μεγαλύτερη συνάρτηση που ικανοποιεί την ανισότητα

$$I\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{2}\sqrt{I(a)^2 + \left|\frac{a-b}{2}\right|^2} + \frac{1}{2}\sqrt{I(b)^2 + \left|\frac{a-b}{2}\right|^2},$$

για όλα τα $a, b \in [0,1]$. Έστω $c \in (0,1)$. Θέτουμε $\Delta(c) = \big(-\min(c, 1-c), \min(c, 1-c)\big)$ και ορίζουμε $g_c : \Delta(c) \to \mathbb{R}$ με $g_c(x) = I(c+x)^2 + x^2$. Αν $c = \frac{a+b}{2}$ και $x = \frac{a-b}{2}$, αρκεί να δείξουμε ότι

$$2\sqrt{g(0)} \leq \sqrt{g(x)} + \sqrt{g(-x)}.$$

Παρατηρήστε ότι $a, b \in (0,1)$ αν και μόνο αν $x \in \Delta(c)$. Υψώνοντας στο τετράγωνο την παραπάνω ανισότητα παίρνουμε

$$4g(0) - \big(g(x) + g(-x)\big) \leq 2\sqrt{g(x)}\sqrt{g(-x)}$$

ή, ισοδύναμα,

$$16g(0)^2 - 8g(0)\big(g(x) + g(-x)\big) \leq 4g(x)g(-x)$$

ή, ισοδύναμα,

$$16g(0)^2 + \big(g(x) - g(-x)\big)^2 \leq 8g(0)\big(g(x) + g(-x)\big).$$

Όμως, $g(0) = I(c)^2$ και αν θέσουμε $h(x) = g(x) - g(0) = I(c+x)^2 + x^2 - I(c)^2$, τότε έχουμε

$$16I(c)^4 + \big(h(x) - h(-x)\big)^2 \leq 8I(c)^2\big(h(x) + h(-x) + 2I(c)^2\big),$$

δηλαδή ζητάμε την

$$(*) \qquad \big(h(x) - h(-x)\big)^2 \leq 8I(c)^2\big(h(x) + h(-x)\big).$$

Λήμμα 2.3.1. (α) $II'' = -1$ *και* (β) *η* $(I')^2$ *είναι κυρτή.*

Απόδειξη. (α) Αποδεικνύεται εύκολα με πράξεις αν παρατηρήσουμε ότι $\varphi'(x) = -x\varphi'(x)$.
(β) Είναι $(I'^2)' = 2I'I'' = -2I'/I$, οπότε

$$(I'^2)'' = -2\frac{I'' - I'^2}{I^2} = 2\,\frac{1 + I'^2}{I^2} \geq 0.$$

□

Λήμμα 2.3.2. *Η συνάρτηση* $R(x) = h(x) + h(-x) - 2I'(c)^2x^2$ *είναι κυρτή στο* $\Delta(c)$.

Απόδειξη. Είναι $R'(x) = 2I(c+x)I'(c+x) - 2I(c-x)I'(c-x) + 4x - 4I'(c)^2x$ και η $R''(x) = 4\left[\frac{I'(c+x)^2 + I'(c-x)^2}{2} - I'(c)^2\right]$ είναι μη αρνητική αφού η $(I')^2$ είναι κυρτή και $c = \frac{c+x}{2} + \frac{c-x}{2}$, οπότε $I'(c)^2 \leq I'(\frac{c+x}{2})^2 + I'(\frac{c-x}{2})^2$. □

Εφόσον η R είναι άρτια, από το προηγούμενο λήμμα έπεται ότι $R(x) \geq R(0)$ για κάθε $x \in \Delta(c)$, οπότε

$$h(x) + h(-x) \geq 2I'(c)^2x^2.$$

Έτσι, η $(*)$ θα προκύψει από την ισχυρότερη ανισότητα

$$(**) \qquad \big(h(x) - h(-x)\big)^2 \leq 16I(c)^2I'(c)^2x^2.$$

Επομένως, αρκεί να δείξουμε ότι

$$\left|\frac{h(x) - h(-x)}{x}\right| \leq 4I(c)|I'(c)|.$$

Η I είναι συμμετρική γύρω από το $1/2$. Πράγματι, αν $\Phi^{-1}(1/2+c) = y$ τότε $\Phi(y) = 1/2+c$ και $1 - \Phi(y) = \Phi(-y) = 1/2 - c$, οπότε $y = -\Phi(1/2 - c)$. Άρα

$$I\big(\frac{1}{2} + c\big) = \varphi(y) = I\big(\frac{1}{2} - c\big) \text{ και } I(1-c) = I(c),$$

οπότε $|I'(1-c)| = |I'(c)|$ και

$$|I((1-c)+x)^2 - I((1-c)-x)^2| = |I(c-x)^2 - I(c+x)^2|.$$

Υποθέτουμε ότι $0 < c \leq 1/2$ λόγω συμμετρίας, και ότι $x > 0$ αφού η $\frac{h(x)-h(-x)}{x}$ είναι άρτια. Επίσης, επειδή η I είναι αύξουσα στο $[0, 1/2]$ και φθίνουσα στο $[1/2, 1]$ έχουμε ότι $I(c+x) \geq I(c-x)$ αν και μόνο αν $1-(c+x) \geq c-x$, δηλαδή, αν και μόνο αν $0 < c \leq \frac{1}{2}$. Άρα τελικά αρκεί να δείξουμε ότι

$$\frac{I(c+x)^2 - I(c-x)^2}{x} \leq 4I(c)I'(c)$$

όταν $0 < x < c \leq \frac{1}{2}$. Θέτουμε $u(x) = I(c+x)^2 - I(c-x)^2$. Χρησιμοποιώντας το λήμμα 2.3.1 έχουμε ότι $u''(x) = 2[I'(c+x)^2 - I(c-x)^2] \leq 0$, άρα η u είναι κοίλη στο $(0, c]$. Ισοδύναμα η συνάρτηση

$$\frac{u(x)}{x} = \int_0^1 u'(xt)\,dt$$

είναι φθίνουσα στο $(0, c]$, οπότε

$$\frac{u(x)}{x} \leq \lim_{x \to 0^-} \frac{u(x)}{x} = 4I'(c)I(c)$$

και η απόδειξη είναι πλήρης.

Το γεγονός ότι η I είναι η μεγαλύτερη συνάρτηση στην κλάση $\mathcal{J}$ προκύπτει από το γεγονός ότι αν A είναι ημίχωρος, τότε $\gamma_n^+(A) = I(\gamma_n(A))$. Πράγματι, αν $0 < p < 1$, τότε υπάρχει $a \in (-\infty, +\infty)$ τέτοιο ώστε $\Phi(a) = p$. Τότε, επιλέγοντας τον ημίχωρο $A = \{x \in \mathbb{R}^n : \ x_1 \leq a\}$ έχουμε ότι $p = \Phi(a) = \gamma_n(A)$, οπότε

$$\begin{aligned} \gamma_n^+(A) &= \lim_{r \to 0} \frac{\gamma_n(A_r) - \gamma_n(A)}{r} = \lim_{r \to 0} \frac{\Phi(a+r) - \Phi(a)}{r} \\ &= \varphi(a) = \varphi(\Phi^{-1}(p)) \\ &= \varphi(\Phi^{-1}(\gamma_n(A))) = I(\gamma_n(A)). \end{aligned}$$

Τότε αν πάρουμε μία συνάρτηση $J \in \mathcal{J}$ και $p \in [0, 1]$, $\gamma_n(A) = p$ για κάποιο ημίχωρο A, οπότε

$$J(p) = J(\gamma_n(A)) \leq \gamma_n^+(A) = I(p).$$

□

Κεφάλαιο 3

Υπερσυσταλτότητα και λογαριθμική ανισότητα Sobolev

3.1 Υπερσυσταλτότητα

3.1α′ Η ανισότητα της Bonami

Θεώρημα 3.1.1. *Για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ και $1 < p < \infty$ ορίζουμε*

$$F_p(x,y) = \left(\frac{1}{2}|x + r_p y|^p + \frac{1}{2}|x - r_p y|^p\right)^{1/p},$$

όπου

$$r_p := \frac{1}{\sqrt{p-1}}.$$

Τότε, η $F_p(x,y)$ είναι φθίνουσα συνάρτηση του p στο $(1, \infty)$.

Απόδειξη. Έστω $x, y \in \mathbb{R}$ και $1 < p < q < \infty$. Η ανισότητα $F_q(x,y) \leq F_p(x,y)$ είναι ομογενής, οπότε μπορούμε να υποθέσουμε ότι $x = 1$. Διακρίνουμε τρεις περιπτώσεις:

(α) Υποθέτουμε πρώτα ότι $1 < p < q \leq 2$ και ότι $0 \leq |r_p y| \leq 1$. Χρησιμοποιώντας το διωνυμικό θεώρημα βλέπουμε ότι

$$\frac{1}{2}|1 + r_q y|^q + \frac{1}{2}|1 - r_q y|^q = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \binom{q}{2k} \left(\frac{y^2}{q-1}\right)^k.$$

Χρησιμοποιώντας την ανισότητα $(1+x)^\alpha \leq 1 + \alpha x$ (η οποία ισχύει για $0 < \alpha \leq 1$ και $x \geq 0$) με $\alpha = p/q$, παίρνουμε

$$\left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \binom{q}{2k} \left(\frac{y^2}{q-1}\right)^k\right)^{p/q} \leq 1 + \frac{p}{q} \sum_{k=1}^{\infty} \binom{q}{2k} \left(\frac{y^2}{q-1}\right)^k.$$

Έπεται ότι

$$\begin{aligned} F_q(1,y) &= \left(1+\sum_{k=1}^{\infty}\binom{q}{2k}\left(\frac{y^2}{q-1}\right)^k\right)^{1/q} \\ &\leq \left(1+\frac{p}{q}\sum_{k=1}^{\infty}\binom{q}{2k}\left(\frac{y^2}{q-1}\right)^k\right)^{1/p}. \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} \frac{p}{q}\binom{q}{2k}\left(\frac{1}{q-1}\right)^k &= \frac{p}{q}\,\frac{q(q-1)\cdots(q-2k+1)}{(2k)!\,(q-1)^k} \\ &= \frac{p(q-2)\cdots(q-2k+1)}{(2k)!\,(q-1)^{k-1}} \\ &= \frac{p(2-q)\cdots(2k-1-q)}{(2k)!\,(q-1)^{k-1}} \\ &\leq \frac{p(2-p)\cdots(2k-1-p)}{(2k)!\,(p-1)^{k-1}} \\ &= \binom{p}{2k}\left(\frac{1}{p-1}\right)^k. \end{aligned}$$

[Παρατηρήστε ότι $(q-2)\cdots(q-2k+1)=(2-q)\cdots(2k-1-q)$ γιατί το πλήθος των όρων στο γινόμενο είναι άρτιο, και ότι $\frac{(2-q)\cdots(2k-1-q)}{(q-1)^{k-1}} \leq \frac{(2-p)\cdots(2k-1-p)}{(p-1)^{k-1}}$ γιατί $p<q$.] Επιστρέφοντας στην εκτίμηση για την $F_q(x,y)$ παίρνουμε

$$\begin{aligned} F_q(1,y) &\leq \left(1+\frac{p}{q}\sum_{k=1}^{\infty}\binom{q}{2k}\left(\frac{y^2}{q-1}\right)^k\right)^{1/p} \\ &\leq \left(1+\sum_{k=1}^{\infty}\binom{p}{2k}\left(\frac{y^2}{p-1}\right)^k\right)^{1/p} \\ &= F_p(1,y). \end{aligned}$$

(β) Υποθέτουμε τώρα ότι $1<p<q\leq 2$ και ότι $|r_p y|\geq 1$. Θέτουμε $\lambda = r_q/r_p$ και $\mu = 1/|r_p y|$. Γράφουμε

$$\begin{aligned} F_q(1,y) &= \left(\frac{1}{2}|1+\lambda r_p y|^q+\frac{1}{2}|1-\lambda r_p y|^q\right)^{1/q} \\ &= \frac{1}{\mu}\left(\frac{1}{2}|\lambda+\mu|^q+\frac{1}{2}|\lambda-\mu|^q\right)^{1/q}. \end{aligned}$$

Παρατηρήστε ότι $0 < \lambda, \mu \leq 1$. Άρα, $|\lambda - \mu| \leq 1 - \lambda\mu$ και $\lambda + \mu \leq 1 + \lambda\mu$. Μπορούμε λοιπόν να γράψουμε

$$F_q(1, y) \leq \frac{1}{\mu}\left(\frac{1}{2}|1 + \lambda\mu|^q + \frac{1}{2}|1 - \lambda\mu|^q\right)^{1/q}.$$

Έχουμε $\lambda\mu = r_q z$, όπου $z = \frac{1}{r_p|r_p y|}$ και $|r_p z| = \frac{1}{|r_p y|} \leq 1$. Από το (α) συμπεραίνουμε ότι

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\mu}\left(\frac{1}{2}|1 + \lambda\mu|^q + \frac{1}{2}|1 - \lambda\mu|^q\right)^{1/q} &= \frac{1}{\mu}\left(\frac{1}{2}|1 + r_q z|^q + \frac{1}{2}|1 - r_q z|^q\right)^{1/q} \\
&\leq \frac{1}{\mu}\left(\frac{1}{2}|1 + r_p z|^p + \frac{1}{2}|1 - r_p z|^p\right)^{1/p} \\
&= \frac{1}{\mu}\left(\frac{1}{2}|1 + \mu|^p + \frac{1}{2}|1 - \mu|^p\right)^{1/p} \\
&= \left(\frac{1}{2}\left|1 + \frac{1}{\mu}\right|^p + \frac{1}{2}\left|1 - \frac{1}{\mu}\right|^p\right)^{1/p} \\
&= \left(\frac{1}{2}\,|1 + r_p y|^p + \frac{1}{2}\,|1 - r_p y|^p\right)^{1/p} \\
&= F_p(1, y).
\end{aligned}$$

Δηλαδή,

$$F_q(1, y) \leq F_p(1, y).$$

(γ) Τέλος, υποθέτουμε ότι $2 \leq p < q < \infty$. Θα χρησιμοποιήσουμε δυϊσμό. Θεωρούμε τους συζυγείς εκθέτες p' και q' των p και q. Παρατηρήστε ότι $1 < q' < p' \leq 2$. Αν $\lambda = r_{p'}/r_{q'} = \frac{\sqrt{q'-1}}{\sqrt{p'-1}}$ και αν $\kappa(1, 1) = \kappa(-1, -1) = 1 + \lambda$ και $\kappa(1, -1) = \kappa(-1, 1) = 1 - \lambda$, τότε τα (α) και (β) δείχνουν ότι για τον τελεστή $T : L^{q'}(E_2^1) \to L^{p'}(E_2^1)$, $1 < p' < q' \leq 2$, που ορίζεται μέσω της

$$T(f)(\epsilon) = \int_{E_2^1} \kappa(\epsilon, \zeta) f(\zeta)\, d\zeta,$$

ισχύει η ανισότητα

$$\|T(f)\|_{p'} \leq \|f\|_{q'}.$$

Η κ είναι συμμετρική στον $E_2^1 \times E_2^1$, άρα $T^* = T$, όπου $T^* : L^p(E_2^1) \to L^q(E_2^1)$ είναι ο συζυγής τελεστής του T. Από την $\|T^*\| = \|T\|$ έπεται ότι

$$\|T(f)\|_q \leq \|f\|_p$$

για κάθε $f : E_2^1 \to \mathbb{R}$. Παρατηρώντας ότι

$$\frac{q'-1}{p'-1} = \frac{p-1}{q-1}$$

έχουμε το ζητούμενο. □

Η ανισότητα του Θεωρήματος 3.1.1 επεκτείνεται εύκολα στην περίπτωση που τα x, y είναι διανύσματα σε έναν χώρο με νόρμα.

Θεώρημα 3.1.2. *Έστω $(X, \|\cdot\|)$ ένας χώρος με νόρμα. Για κάθε $x, y \in X$ και $1 < p < \infty$ ορίζουμε*

$$F_p(x,y) = \left(\frac{1}{2}\|x + r_p y\|^p + \frac{1}{2}\|x - r_p y\|^p\right)^{1/p},$$

όπου

$$r_p := \frac{1}{\sqrt{p-1}}.$$

Τότε, η $F_p(x,y)$ είναι φθίνουσα συνάρτηση του p στο $(1,\infty)$.

Θα χρειαστούμε το εξής Λήμμα.

Λήμμα 3.1.3. *Έστω $(X, \|\cdot\|)$ ένας χώρος με νόρμα. Αν $x, z \in X$ και $-1 \leq \lambda < 1$, τότε*

$$\|x + \lambda z\| \leq \frac{1}{2}\big(\|x+z\| + \|x-z\|\big) + \frac{\lambda}{2}\big(\|x+z\| - \|x-z\|\big).$$

Απόδειξη. Γράφουμε

$$x + \lambda z = \left(\frac{1+\lambda}{2}\right)(x+z) + \left(\frac{1-\lambda}{2}\right)(x-z),$$

οπότε

$$\begin{aligned}\|x+\lambda z\| &\leq \left(\frac{1+\lambda}{2}\right)\|x+z\| + \left(\frac{1-\lambda}{2}\right)\|x-z\| \\ &= \frac{1}{2}\big(\|x+z\| + \|x-z\|\big) + \frac{\lambda}{2}\big(\|x+z\| - \|x-z\|\big).\end{aligned}$$

□

Απόδειξη του Θεωρήματος 3.1.2. Έστω $1 < p < q < \infty$. Θέτουμε $u = x + r_p y$, $v = x - r_p y$ και $\lambda = r_q/r_p$. Παρατηρήστε ότι $0 < \lambda < 1$, οπότε το λήμμα μας δίνει

$$\begin{aligned}\|x + \lambda r_p y\| &\leq \frac{1}{2}\big(\|x + r_p y\| + \|x - r_p y\|\big) + \frac{\lambda}{2}\big(\|x + r_p y\| - \|x - r_p y\|\big) \\ &= \frac{1}{2}\big(\|u\| + \|v\|\big) + \frac{\lambda}{2}\big(\|u\| - \|v\|\big)\end{aligned}$$

και, εντελώς ανάλογα,

$$\|x - \lambda r_p y\| \leq \frac{1}{2}\big(\|u\| + \|v\|\big) - \frac{\lambda}{2}\big(\|u\| - \|v\|\big).$$

Μπορούμε λοιπόν να γράψουμε

$$\left(\frac{1}{2}\|x+r_q y\|^q+\frac{1}{2}\|x-r_q y\|^q\right)^{1/q}=\left(\frac{1}{2}\|x+\lambda r_p y\|^q+\frac{1}{2}\|x-\lambda r_p y\|^q\right)^{1/q}$$

$$\begin{aligned}
&\leq\left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}(\|u\|+\|v\|)+\frac{\lambda}{2}(\|u\|-\|v\|)\right)^q+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}(\|u\|+\|v\|)-\frac{\lambda}{2}(\|u\|-\|v\|)\right)^q\right)^{1/q}\\
&\leq\left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}(\|u\|+\|v\|)+\frac{1}{2}(\|u\|-\|v\|)\right)^p+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}(\|u\|+\|v\|)-\frac{1}{2}(\|u\|-\|v\|)\right)^p\right)^{1/p}\\
&=\left(\frac{1}{2}\|u\|^p+\frac{1}{2}\|v\|^p\right)^{1/p}\\
&=\left(\frac{1}{2}\|x+r_p y\|^p+\frac{1}{2}\|x-r_p y\|^p\right)^{1/p},
\end{aligned}$$

όπου, για την δεύτερη ανισότητα, χρησιμοποιήσαμε το Θεώρημα 3.1.1 με $x=\frac{\|u\|+\|v\|}{2}$ και $y=\frac{1}{2r_p}\big(\|u\|-\|v\|\big)$. □

Ορισμός 3.1.4. *Έστω $(\Omega,\mathcal{A},\mu)$ χώρος μέτρου πιθανότητας, $(X,\|\cdot\|_X)$ χώρος με νόρμα και $f:\Omega\to X$. Τότε ορίζεται η νόρμα*

$$\|f\|_{L^p(X)}=\left(\int_\Omega\|f(\omega)\|_X^p\,d\mu(\omega)\right)^{1/p}.$$

Ορισμός 3.1.5. Έστω $E_2^n=\{-1,1\}^n$ ο διακριτός κύβος. Τότε, για κάθε υποσύνολο $A\subseteq\{1,\ldots,n\}$, ορίζουμε τις συναρτήσεις

$$w_A(\varepsilon)=\prod_{i\in A}\varepsilon_i,$$

όπου $\varepsilon=(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n)\in E_2^n$. Συμφωνούμε ότι $w_\emptyset\equiv 1$. Οι συναρτήσεις w_A καλούνται συναρτήσεις Walsh. Παρατηρήστε ότι $w_{\{i\}}(\varepsilon)=\varepsilon_i$.

Θεώρημα 3.1.6. *Έστω $1<p<q<\infty$ και έστω $\{x_A : A\subseteq\{1,\ldots,N\}\}$ μια οικογένεια διανυσμάτων σε έναν χώρο με νόρμα $(X,\|\cdot\|)$. Τότε,*

$$\left\|\sum_A r_q^{|A|}w_A x_A\right\|_{L^q(X)}\leq\left\|\sum_A r_p^{|A|}w_A x_A\right\|_{L^p(X)},$$

όπου w_A είναι οι συναρτήσεις Walsh.

Απόδειξη. Με επαγωγή ως προς N. Για $N=1$ το ζητούμενο είναι ακριβώς η ανισότητα που αποδείξαμε στο Θεώρημα 3.1.1 (θεωρούμε $x_{\emptyset}=x$, $x_{\{1\}}=y$ και $w_{\{1\}}(-1)=1$, $w_{\{1\}}(1)=1$.)

Υποθέτουμε ότι το αποτέλεσμα ισχύει για $k=N-1$ και γράφουμε $E_2^N=E_2^{N-1}\times E_2^1$, $\mu_N=\mu_{N-1}\times\mu_{\{N\}}$. Γράφουμε $\mathcal{P}(N-1)$ για το σύνολο των υποσυνόλων του $\{1,\dots,N-1\}$ και $\mathcal{P}(N)$ για το σύνολο των υποσυνόλων του $\{1,\dots,N\}$. Για κάθε $B\in\mathcal{P}(N-1)$ ορίζουμε $B^+=B\cup\{N\}$. Με αυτό τον συμβολισμό, $\mathcal{P}(N)=\mathcal{P}(N-1)\cup\{B^+ : B\in\mathcal{P}(N-1)\}$. Γράφουμε

$$\sum_A r_p^{|A|}w_A(\omega)x_A=u_p(\varepsilon)+\varepsilon_N(\eta)r_pv_p(\varepsilon),$$

όπου $\varepsilon\in E_2^{N-1}$, $\eta\in E_2^{\{N\}}=\{-1,+1\}$ και $\omega=(\varepsilon,\eta)\in E_2^N$. Ορίζουμε

$$u_p=\sum_{B\in\mathcal{P}(N-1)}r_p^{|B|}w_Bx_B\quad\text{και}\quad v_p=\sum_{B\in\mathcal{P}(N-1)}r_p^{|B|}w_Bx_{B^+}.$$

Εντελώς ανάλογα,

$$\sum_A r_q^{|A|}w_Ax_A=u_q+\varepsilon_Nr_qv_q,$$

όπου

$$u_q=\sum_{B\in\mathcal{P}(N-1)}r_q^{|B|}w_Bx_B\quad\text{και}\quad v_q=\sum_{B\in\mathcal{P}(N-1)}r_q^{|B|}w_Bx_{B^+}.$$

Επόμένως αρκεί να δείξουμε ότι

$$\|u_q+r_q\varepsilon_Nv_q\|_{L^q}\leq\|u_p+r_p\varepsilon_Nv_p\|_{L^p}.$$

Από την επαγωγική μας υπόθεση ισχύει

$$\begin{aligned}
\|u_q+r_q\varepsilon_Nv_q\|_{L^q} &= \big(\mathbb{E}_{N-1}(\|u_q+r_q\varepsilon_Nv_q\|^q)\big)^{1/q}\\
&= \left(\mathbb{E}_{N-1}\|\sum_{B\in\mathcal{P}(N-1)}r_q^{|B|}w_B(x_B+\varepsilon_Nr_qx_{B^+})\|^q\right)^{1/q}\\
&\leq \left(\mathbb{E}_{N-1}\|\sum_{B\in\mathcal{P}(N-1)}r_p^{|B|}w_B(x_B+\varepsilon_Nr_qx_{B^+})\|^p\right)^{1/p}\\
&= \big(\mathbb{E}_{N-1}\|u_q+r_q\varepsilon_Nv_p\|^p\big)^{1/p}.
\end{aligned}$$

Σε αυτό το σημείο θα χρησιμοποιήσουμε την παρακάτω ανισότητα: Αν $(\Omega_1,\mathcal{A}_1,\mu_1)$, $(\Omega_2,\mathcal{A}_2,\mu_2)$ είναι χώροι μέτρου, $f:\Omega_1\times\Omega_2\to[0,+\infty]$, και $0<p\leq q<+\infty$, τότε

$$\left(\int_{\Omega_1}\left(\int_{\Omega_2}f(x,y)^p\,d\mu(y)\right)^{q/p}d\mu_1(x)\right)^{1/q}\leq\left(\int_{\Omega_2}\left(\int_{\Omega_1}f(x,y)^q\,d\mu_1(x)\right)^{p/q}d\mu_2(y)\right)^{1/p}.$$

Άρα αν $\varepsilon \in E_2^{N-1}, \eta \in \{-1,+1\}$, τότε

$$\begin{aligned}
\|u_q(\varepsilon)+\varepsilon_N(\eta)r_q v_q(\varepsilon)\|_{L^q} &= \Big(\mathbb{E}_{\{N\}}(\mathbb{E}_{N-1}\|u_q(\varepsilon)+\varepsilon_N(\eta)r_q v_q(\varepsilon)\|^q)\Big)^{1/q}\\
&\leq \Big(\mathbb{E}_{\{\mathbb{N}\}}(\mathbb{E}_{N-1}\|u_p(\varepsilon)+\varepsilon_N(\eta)r_q v_p(\varepsilon)\|^p)^{q/p}\Big)^{1/q}\\
&\leq \Big(\mathbb{E}_{N-1}(\mathbb{E}_{\{N\}}\|u_p(\varepsilon)+\varepsilon_N(\eta)r_q v_p(\varepsilon)\|^q)^{p/q}\Big)^{1/p}\\
&\leq \Big(\mathbb{E}_{N-1}\,\mathbb{E}_{\{N\}}\|u_p(\varepsilon)+\varepsilon_N(\eta)r_p v_p(\varepsilon)\|^p\Big)^{1/p}\\
&= \Big(\mathbb{E}_{N}\|u_p(\varepsilon)+\varepsilon_N(\eta)r_p v_p(\varepsilon)\|^p\Big)^{1/p}\\
&= \Big\|\sum_{A\in\mathcal{P}(N)} r_p^{|A|} w_A x_A\Big\|_{L^p}
\end{aligned}$$

όπου η τελευταία ανισότητα προέκυψε από την περίπτωση $k=1$. □

3.1β΄ Η ανισότητα του Kahane

Σαν μια πρώτη εφαρμογή του θεωρήματος 3.1.6 αποδεικνύουμε μια διανυσματική έκδοση της ανισότητας του Kahane (η οποία αντιστοιχεί στην περίπτωση $k=1$ του επόμενου θεωρήματος). Γράφουμε W_n για το σύνολο των συναρτήσεων Walsh w_A με $|A|=n$ και $H_n(X)$ για την κλειστή θήκη του υπόχωρου του X που παράγουν τα διανύσματα της μορφής $w_A x_A$, όπου $w_A \in W_n$ και $x_A \in X$.

Θεώρημα 3.1.7. *Έστω $(x_k)_{k=1}^m$ ακολουθία στο χώρο Banach X και έστω $(w_{A_k})_{k=1}^m$ ακολουθία διακεκριμένων στοιχείων του W_n. Αν $1<p<q$ τότε*

$$\Big\|\sum_{k=1}^m w_{A_k}x_k\Big\|_{L^q(X)} \leq \left(\frac{q-1}{p-1}\right)^{n/2}\Big\|\sum_{k=1}^m w_{A_k}x_k\Big\|_{L^p(X)}.$$

Συνεπώς, ο $H_n(X)$ εμφυτεύεται ισομορφικά στον L_p για κάθε $1<p<\infty$. Ειδικότερα, ο $H_1(X)$ εμφυτεύεται ισομετρικά στον $L_{\exp^2}(X)$ και ο $H_2(X)$ εμφυτεύεται ισομορφικά στον $L_{\exp}(X)$.

Απόδειξη. Ο πρώτος ισχυρισμός είναι άμεση συνέπεια του θεωρήματος 3.1.6.

Για τον δεύτερο, έστω $S_m=\sum_{k=1}^m \varepsilon_k x_k$ που ικανοποιεί την $\|S_m\|_2 \leq \frac{1}{2\sqrt{e}}$. Τότε, χρησιμοποιώντας την $j^j \leq e^j j!$, βλέπουμε ότι

$$\mathbb{E}\left(e^{\|S_m\|^2}\right)=\sum_{j=0}^\infty \frac{1}{j!}\mathbb{E}\left(\|S_m\|^{2j}\right) \leq \sum_{j=0}^\infty \frac{(2j)^j}{2^{2j}e^j j!} \leq \sum_{j=0}^\infty \frac{1}{2^j}=2.$$

Έπεται ότι ο $H_1(X)$ εμφυτεύεται ισομορφικά στον $L_{\exp^2}(X)$.

Όμοια, αν $T_m = \sum_{k=1}^m w_{A_k} x_k$ με $|A_k| = 2$ για κάθε k και $\|T_m\| \leq 1/e$, τότε

$$\mathbb{E}\left(e^{\|T_m\|}\right) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!}\mathbb{E}\left(\|T_m\|^j\right) \leq \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(j)^j}{e^j j!} \leq \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{2^j} = 2,$$

δηλαδή ο $H_2(X)$ εμφυτεύεται ισομορφικά στον $L_{\exp}(X)$. □

Στη μονοδιάστατη περίπτωση έχουμε το ακόλουθο πόρισμα.

Πόρισμα 3.1.8. *Ο* $\mathrm{span}(\{H_k : k \leq n\})$ *εμφυτεύεται ισομορφικά στον* L_p *για κάθε* $1 < p < \infty$.

Απόδειξη. Οι υπόχωροι H_k είναι ορθογώνιοι, άρα, αν $f = f_0 + f_1 + \cdots + f_n$ τότε για κάθε $q > 2$ έχουμε

$$\begin{aligned} \|f\|_q &\leq \sum_{i=0}^n \|f_i\|_q \leq \sum_{i=0}^n (q-1)^{i/2}\|f_i\|_2 \\ &\leq \left(\sum_{i=0}^n (q-1)^i\right)^{1/2} \left(\sum_{i=0}^n \|f_i\|_2^2\right)^{1/2} \\ &\leq \sqrt{\frac{(q-1)^{n+1}}{q-2}}\,\|f\|_2. \end{aligned}$$

Έπεται το ζητούμενο. □

Κλείνουμε αυτή την παράγραφο με ένα θεώρημα των Latala και Oleszkiewicz το οποίο δίνει την καλύτερη σταθερά στην ανισότητα του Kahane για τη σύγκριση της $L^1(X)$ και της $L^2(X)$ νόρμας αθροισμάτων Rademacher.

Θεώρημα 3.1.9. *Θέτουμε* $S_m = \sum_{i=1}^m \varepsilon_i x_i$, *όπου* $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m$ *είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές Rademacher και* $x_1, \ldots, x_m$ *διανύσματα σε ένα χώρο* X *με νόρμα. Τότε,*

$$\|S_m\|_{L^2(X)} \leq \sqrt{2}\,\|S_m\|_{L^1(X)}.$$

Απόδειξη. Οι συναρτήσεις Walsh σχηματίζουν ορθοκανονική βάση στον $L^2(E_2^m)$. Συνεπώς, για κάθε $f : E_2^m \to \mathbb{R}$,

$$f = \sum_A \widehat{f}_A w_A = \mathbb{E}(f) + \sum_{i=1}^m \widehat{f}_i \varepsilon_i + \sum_{|A|\geq 2} \widehat{f}_A w_A$$

και

$$\|f\|_2^2 = \langle f, f\rangle = \sum_A \widehat{f}_A^2.$$

Για κάθε $\varepsilon = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m) \in E_2^m$, οι «γείτονες» του ε είναι εκείνα τα $\zeta = (\zeta_1, \ldots, \zeta_m) \in E_2^m$ για τα οποία

$$|\{i \leq m : \varepsilon_i \neq \zeta_i\}| = 1.$$

Αν τα ε, ζ είναι γείτονες, γράφουμε $\varepsilon \sim \zeta$.

Θεωρούμε την *διακριτή Λαπλασιανή* $L(f)$ της f, η οποία ορίζεται από την

$$L(f)(\varepsilon) = \frac{1}{2} \sum_{\zeta \sim \varepsilon} [f(\zeta) - f(\varepsilon)].$$

Θεωρούμε επίσης την *ενέργεια* $E(f)$ της f, η οποία ορίζεται από την

$$E(f) = -\langle f, L(f) \rangle.$$

Παρατηρούμε ότι: αν $\zeta \sim \varepsilon$ και $\zeta_i \neq \varepsilon_i$ τότε $w_A(\zeta) = w_A(\varepsilon)$ αν $i \notin A$ και $w_A(\zeta) = -w_A(\varepsilon)$ αν $i \in A$. Έπεται ότι

$$L(w_A) = -|A| w_A,$$

δηλαδή οι συναρτήσεις Walsh είναι ιδιοσυναρτήσεις της διακριτής Λαπλασιανής. Αντικαθιστώντας, παίρνουμε

$$-L(f) = \sum_{i=1}^{m} \widehat{f}_i \varepsilon_i + \sum_{|A| \geq 2} |A| \widehat{f}_A w_A,$$

οπότε

$$E(f) = \sum_{i=1}^{m} \widehat{f}_i^2 + \sum_{|A| \geq 2} |A| \widehat{f}_A^2.$$

Έπεται ότι

$$\begin{aligned} 2\|f\|_2^2 &= 2(\mathbb{E}(f))^2 + 2\sum_{i=1}^{m} \widehat{f}_i^2 + 2\sum_{|A| \geq 2} \widehat{f}_A^2 \\ &\leq E(f) + 2(\mathbb{E}(f))^2 + \sum_{i=1}^{m} \widehat{f}_i^2. \end{aligned}$$

Θεωρούμε τώρα τον E_2^m σαν υποσύνολο του $\mathbb{R}^m$ και ορίζουμε

$$F(t) = \|t_1 x_1 + \cdots + t_m x_m\|.$$

Αν $f = F|_{E_2^m}$ τότε

$$f(\varepsilon) = \|S_m(\varepsilon)\|, \quad \langle f, f \rangle = \|S_m\|_{L^2(X)}^2, \quad \mathbb{E}(f) = \|S_m\|_{L^1(X)}.$$

Η f είναι άρτια συνάρτηση, άρα $\widehat{f_i} = 0$ για κάθε $i = 1, \dots, m$. Επίσης, η F είναι κυρτή και θετικά ομογενής, άρα

$$\frac{1}{m} \sum_{\zeta \sim \varepsilon} f(\zeta) \geq F\left(\frac{1}{m} \sum_{\zeta \sim \varepsilon} \zeta\right) = F\left(\frac{(m-2)\varepsilon}{m}\right) = \frac{m-2}{m} f(\varepsilon).$$

Έπεται ότι

$$-L(f)(\varepsilon) \leq \frac{1}{2}(mf(\varepsilon) - (m-2)f(\varepsilon)) = f(\varepsilon).$$

Τότε,

$$E(f) = \langle f, -L(f) \rangle \leq \|f\|_2^2,$$

άρα

$$2\|f\|_2^2 \leq \|f\|_2^2 + 2(\mathbb{E}(f))^2.$$

Αυτό αποδεικνύει την

$$\|S_m\|_{L^2(X)} \leq \sqrt{2}\, \|S_m\|_{L^1(X)}$$

που είναι ο ισχυρισμός του θεωρήματος. □

3.2 Λογαριθμική ανισότητα Sobolev στο διακριτό κύβο

Ορισμός 3.2.1. Γράφουμε $C(E_2^n)$ για το χώρο όλων των συναρτήσεων $f : E_2^n \to \mathbb{R}$. Για κάθε $t \geq 0$ θεωρούμε τον τελεστή $P_t : C(E_2^n) \to C(E_2^n)$ με

$$P_t(f) = (e^{tL})(f) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{t^j L^j(f)}{j!},$$

όπου $L^j = L \circ \cdots \circ L$ (j φορές). Παρατηρούμε ότι, για κάθε $A \subseteq \{1, \dots, n\}$,

$$L^j(w_A) = (-1)^j |A|^j w_A$$

(αυτό προκύπτει επαγωγικά από την $L(w_A) = -|A| w_A$). Συνεπώς,

$$P_t(w_A) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j t^j |A|^j w_A}{j!} = (e^{-t|A|})(w_A).$$

Τώρα, άμεση εφαρμογή του θεωρήματος 3.1.6 μας δίνει το εξής:

Θεώρημα 3.2.2 (υπερσυσταλτότητα στο διακριτό κύβο). *Έστω $1 < p < \infty$ και $t \geq 0$. Θέτουμε*

$$q(t) = 1 + (p-1)e^{2t}.$$

Τότε, για κάθε $f : E_2^m \to \mathbb{R}$,

$$\|P_t(f)\|_{q(t)} \leq \|f\|_p.$$

Απόδειξη. Παρατηρούμε ότι αν $f = \sum_A \hat{f}_a w_A$, τότε

$$\begin{aligned} P_t f = \sum_A \hat{f}_A e^{-t|A|} w_A &= \sum_A r_p^{|A|} e^{-t|A|} w_A \frac{\hat{f}_A}{r_p^{|A|}} \\ &= \sum_A r_{q(t)}^{|A|} e^{-t|A|} w_A \frac{\hat{f}_A}{r_p^{|A|}}, \end{aligned}$$

αφού $r_{q(t)} = e^{-t|A|} r_p^{|A|}$. Άρα από την γενικευμένη ανισότητα της Bonami (θεώρημα 3.1.6) έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \|P_t f\|_{q(t)} &= \left\| \sum_A r^{q(t)} w_A \frac{\hat{f}_A}{r_p^{|A|}} \right\|_{q(t)} \\ &\leq \left\| \sum_A r_p^{|A|} w_A \frac{\hat{f}_A}{r_p^{|A|}} \right\|_p = \|f\|_p. \end{aligned}$$

□

Ορισμός 3.2.3 (εντροπία). *Έστω $f : E_2^m \to \mathbb{R}^+$. Η εντροπία* $\mathrm{Ent}(f)$ *της f ορίζεται από την*

$$\mathrm{Ent}(f) = \mathbb{E}\,(f \ln f) - \|f\|_1 \ln \|f\|_1.$$

Παρατηρήσεις 3.2.4. (α) Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση $x \mapsto x \ln x$, $x \geq 0$ (συμφωνούμε ότι η τιμή της στο 0 είναι ίση με το $\lim_{x \to 0^+} x \ln x = 0$) είναι γνησίως κυρτή. Από την ανισότητα του Jensen βλέπουμε ότι $\mathrm{Ent}(f) \geq 0$ με ισότητα αν και μόνο αν η f είναι σταθερή.
(β) Αν $\|f\|_1 = 1$ τότε $\mathrm{Ent}(f) = \mathbb{E}\,(f \ln f)$. Επίσης, για κάθε $r > 0$,

$$\mathrm{Ent}(rf) = r\mathrm{Ent}(f).$$

(γ) Γενικά, αν ν είναι ένα μέτρο πιθανότητας στον E_2^m τότε η εντροπία του ν είναι η ποσότητα

$$\mathrm{Ent}(\nu) = -\sum_{\varepsilon \in E_2^m} \nu(\{\varepsilon\}) \log_2 \nu(\{\varepsilon\}).$$

Αν θεωρήσουμε το ομοιόμορφο μέτρο πιθανότητας $\mathbb{P}_m$ στον E_2^m έχουμε $\mathrm{Ent}(\mathbb{P}_m) = m$ και

$$\mathrm{Ent}(\nu) \leq \mathrm{Ent}(\mathbb{P}_m)$$

για κάθε άλλο μέτρο πιθανότητας στον E_2^m. Κάθε $f : E_2^m \to \mathbb{R}^+$ με $\|f\|_1 = 1$ επάγει ένα μέτρο πιθανότητας ν_f στον E_2^m μέσω της $\nu_f(\{\varepsilon\}) = f(\varepsilon)/2^m$. Τότε, η εντροπία $\mathrm{ent}(f)$ του ν_f με την έννοια της θεωρίας πληροφορίας ισούται με

$$\mathrm{ent}(\nu_f) = -\sum_{\varepsilon \in E_2^m} \frac{f(\varepsilon)}{2^m} \log_2 \left(\frac{f(\varepsilon)}{2^m} \right) = m - \frac{\mathrm{Ent}(f)}{\ln 2}.$$

Δηλαδή, η $\mathrm{Ent}(f)$ είναι μια *σχετική εντροπία* που μετράει πόσο απέχει η εντροπία του ν_f από τη μέγιστη δυνατή εντροπία m.

Θεώρημα 3.2.5 (λογαριθμική ανισότητα Sobolev). *Για κάθε $f : E_2^m \to \mathbb{R}$ ισχύει η ανισότητα*

$$\mathrm{Ent}(f^2) \leq 2E(f),$$

όπου $E(f) = -\langle L(f), f\rangle = -\mathbb{E}\,(fL(f))$ είναι η ενέργεια της f.

Απόδειξη. Παίρνουμε $p = 2$ και, για κάθε $t \geq 0$, θεωρούμε τον $q(t) = 1 + e^{2t}$. Από την $P_t(w_A) = (e^{-t|A|})(w_A)$ βλέπουμε ότι

$$\frac{dP_t(w_A)}{dt} = -|A|(e^{-t|A|})(w_A) = (L \circ P_t)(w_A),$$

άρα

$$\frac{dP_t(f)}{dt} = (L \circ P_t)(f)$$

για κάθε $f : E_2^m \to \mathbb{R}$. Ας υποθέσουμε ότι $\|f\|_2 = 1$. Από το θεώρημα 3.2.2 έχουμε

$$\|P_t(f)\|_{q(t)} \leq 1,$$

δηλαδή

$$\frac{d}{dt}\left(\mathbb{E}\left[(P_t(f))^{q(t)}\right]\right) \leq 0$$

στο σημείο $t = 0$. Όμως,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\,(P_t(f))^{q(t)} &= [P_t(f)]^{q(t)}\,\frac{d}{dt}\left(\ln[P_t(f)]^{q(t)}\right)\\
&= [P_t(f)]^{q(t)}\,\frac{d}{dt}\,(q(t)\ln(P_t(f)))\\
&= [P_t(f)]^{q(t)}\,q'(t)\ln(P_t(f)) + [P_t(f)]^{q(t)-1}q(t)(L\circ P_t)(f)\\
&= 2e^{2t}[P_t(f)]^{q(t)}\,\ln(P_t(f)) + (1+e^{2t})[P_t(f)]^{q(t)-1}(L\circ P_t)(f).
\end{aligned}$$

Παίρνοντας μέση τιμή στην παραπάνω ανισότητα και θέτοντας $t = 0$ βλέπουμε ότι

$$\mathrm{Ent}(f^2) - 2E(f) = \mathbb{E}\,(f^2\ln(f^2)) + 2\mathbb{E}\,(fL(f)) \leq 0.$$

Αυτό αποδεικνύει το θεώρημα. □

3.3 Μέτρο του Gauss και πολυώνυμα Hermite

Η τυπική κανονική κατανομή στον $\mathbb{R}^n$ είναι το Borel μέτρο πιθανότητας γ_n που ορίζεται από την

$$\gamma_n(B) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int_B \exp(-\|x\|_2^2)dx,$$

για κάθε Borel υποσύνολο B του $\mathbb{R}^n$, όπου $\|\cdot\|_2$ είναι η Ευκλείδεια νόρμα. Αν θέσουμε $g_i(x) = x_i$, όπου $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, τότε η n–άδα $(g_1, \ldots, g_n)$ είναι μια ακολουθία ανεξάρτητων τυπικών κανονικών τυχαίων μεταβλητών στο χώρο πιθανότητας $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), \gamma_n)$.

Ορισμός 3.3.1 (πολυώνυμα Hermite). Για κάθε $m = 0, 1, 2, \ldots$ το m–οστό πολυώνυμο Hermite ορίζεται από την

$$h_m(x) = (-1)^m e^{x^2/2} \left(\frac{d}{dx}\right)^m \left(e^{-x^2/2}\right).$$

Πρόταση 3.3.2. *Η ακολουθία $\{h_m : m \geq 0\}$ των πολυωνύμων Hermite ικανοποιεί την αναδρομική σχέση*

$$h_m(x) = \left(x - \frac{d}{dx}\right)(h_{m-1}(x)) = \left(x - \frac{d}{dx}\right)^m (1), \quad m = 1, 2, \ldots$$

Κάθε h_m είναι μονικό πολυώνυμο βαθμού m, η ακολουθία $\{h_m : m \geq 0\}$ είναι ορθογώνια στον $L^2(\gamma_1)$ και

$$\|h_m\|_2 = \sqrt{m!}, \quad m \geq 0.$$

Απόδειξη. Παραγωγίζοντας τη σχέση ορισμού του h_{m-1} βλέπουμε ότι

$$\frac{dh_{m-1}}{dx}(x) = xh_{m-1}(x) - h_m(x) = \left(x - \frac{d}{dx}\right)(h_{m-1}(x)).$$

Από αυτήν την ισότητα προκύπτουν, με επαγωγή, η δεύτερη ισότητα και το γεγονός ότι κάθε h_m είναι μονικό πολυώνυμο βαθμού m.

Έστω $m \leq k$. Ολοκληρώνοντας κατά παράγοντες m φορές, βλέπουμε ότι

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} x^m h_k(x)\, d\gamma_1(x) &= \frac{(-1)^k}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x^m \left(\frac{d}{dx}\right)^k \left(e^{-x^2/2}\right) dx \\ &= \frac{(-1)^{k-m} m!}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{d}{dx}\right)^{k-m} \left(e^{-x^2/2}\right) dx. \end{aligned}$$

Το τελευταίο ολοκλήρωμα ισούται με 0 αν $m < k$ και με $m!$ αν $m = k$.

Τώρα, έπεται άμεσα ότι το h_k είναι ορθογώνιο προς κάθε πολυώνυμο βαθμού $m < k$. Ειδικότερα, αν $m \neq k$ τότε

$$\langle h_m, h_k \rangle := \int_{-\infty}^{\infty} h_m(x) h_k(x)\, d\gamma_1(x) = 0.$$

Επίσης,

$$\|h_m\|_2^2 = \langle h_m, x^m \rangle + \langle h_m, h_m - x^m \rangle = m! + 0 = m!,$$

δηλαδή $\|h_m\|_2 = \sqrt{m!}$ για κάθε $m \geq 0$. □

Πρόταση 3.3.3. *Η ακολουθία των πολυωνύμων Hermite ικανοποιεί τα παρακάτω:*

(i) *Για κάθε* $m \geq 0$,

$$h_m(x) = i^m e^{x^2/2} \int_{-\infty}^{\infty} u^m e^{-iux} d\gamma_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (x+iy)^m e^{-y^2/2} dy.$$

(ii) *Για κάθε* $m \geq 1$,

$$\frac{dh_m}{dx}(x) = m h_{m-1}(x).$$

(iii) *Αν* $m \neq k$ *τότε*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dh_m}{dx}(x) \, \frac{dh_k}{dx}(x) \, d\gamma_1(x) = 0$$

και, για κάθε $m \geq 1$,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{dh_m}{dx}(x) \right)^2 d\gamma_1(x) = m(m!).$$

Απόδειξη. Η πρώτη ισότητα της (i) προκύπτει με διαδοχική εφαρμογή του τελεστή $x - \frac{d}{dx}$ στην ισότητα $1 = e^{x^2/2} \int_{\mathbb{R}} e^{-iux} d\gamma_1(u)$, ενώ η δεύτερη προκύπτει αν κάνουμε την αλλαγή μεταβλητής $y = u + ix$ και εφαρμόσουμε κατάλληλα το θεώρημα του Cauchy. Η ii προκύπτει με παραγώγιση της σχέσης (i). Η iii προκύπτει από την (ii) και την πρόταση 3.3.2. □

Πρόταση 3.3.4. *Για κάθε* $0 < p < \infty$, *οι πολυωνυμικές συναρτήσεις είναι πυκνές στον* $L^p(\gamma_1)$.

Απόδειξη. Για κάθε $s \in \mathbb{N}$ ορίζουμε

$$e_s(\lambda x) = \sum_{j=0}^{s} \frac{(\lambda x)^j}{j!}.$$

Παρατηρούμε ότι $e_s(\lambda x) \to e^{\lambda x}$ κατά σημείο και

$$|e^{\lambda x} - e_s(\lambda x)|^p = \left| \sum_{j=s+1}^{\infty} \frac{(\lambda x)^j}{j!} \right|^p \leq e^{p|\lambda x|}.$$

Εύκολα ελέγχουμε ότι

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{p|\lambda x|} d\gamma_1(x) < \infty$$

οπότε, από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |e^{\lambda x} - e_s(\lambda x)|^p d\gamma_1(x) \to 0$$

όταν το $s \to \infty$. Δηλαδή, $\|e^{\lambda x} - e_s(\lambda x)\|_p \to 0$.

Έστω $Z_p(\gamma_1)$ η κλειστή θήκη του υπόχωρου που παράγουν οι πολυωνυμικές συναρτήσεις στον $L^p(\gamma_1)$. Υποθέτουμε πρώτα ότι $1 \leq p < \infty$ και ότι υπάρχει $f \in L^p(\gamma_1) \setminus Z_p(\gamma_1)$. Από το θεώρημα Hahn–Banach, υπάρχει $g \in L^q(\gamma_1)$ (όπου q ο συζυγής εκθέτης του p) ώστε

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x)\, d\gamma_1(x) = 1$$

και

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x)g(x)\, d\gamma_1(x) = 0$$

για κάθε πολυωνυμική συνάρτηση q. Από την προηγούμενη παρατήρηση,

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{\lambda x} g(x)\, d\gamma_1(x) = 0$$

για κάθε λ, απ' όπου έπεται ότι

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda x} g(x) e^{-x^2/2} dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda x} g(x)\, d\gamma_1(x) = 0$$

για κάθε λ. Αυτό αποδεικνύει ότι ο μετασχηματισμός Fourier της $g(x)e^{-x^2/2}$ είναι ταυτοτικά μηδενικός, άρα $g \equiv 0$. Έτσι, καταλήγουμε σε άτοπο.

Τέλος, χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι ο $L^1(\gamma_1)$ είναι πυκνός στον $L^p(\gamma_1)$, $0 < p < 1$, συμπεραίνουμε ότι οι πολυωνυμικές συναρτήσεις είναι πυκνές στον $L^p(\gamma_1)$ για κάθε $p > 0$. $\square$

Πόρισμα 3.3.5. *Για κάθε $m \geq 0$ ορίζουμε $\tilde{h}_m = h_m/\sqrt{m!}$. Τότε, η κανονικοποιημένη ακολουθία πολυωνύμων Hermite $\{\tilde{h}_m : m \geq 0\}$ είναι ορθοκανονική βάση για τον $L^2(\gamma_1)$.* $\square$

3.4 Κεντρικό οριακό θεώρημα

Σκοπός μας είναι να αποδείξουμε την υπερσυσταλτική ανισότητα και τη λογαριθμική ανισότητα Sobolev στο χώρο του Gauss, χρησιμοποιώντας το κεντρικό οριακό θεώρημα για να «περάσουμε» από τον διακριτό κύβο E_2^n στο πλαίσιο που μας ενδιαφέρει.

Πριν διατυπώσουμε το κεντρικό οριακό θεώρημα στη μορφή που θα χρησιμοποιήσουμε, δίνουμε έναν ορισμό:

Ορισμός 3.4.1 (πολυωνυμική αύξηση). Λέμε ότι η συνάρτηση $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ έχει **πολυωνυμική αύξηση** αν υπάρχουν $C > 0$ και $N \in \mathbb{N}$ ώστε

$$|f(x)| \leq C\left(1 + |x|^N\right)$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Θεώρημα 3.4.2 (κεντρικό οριακό θεώρημα). *Έστω* $(\varepsilon_i)_{i\in\mathbb{N}}$ *ακολουθία ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών Rademacher. Για κάθε* $n\in\mathbb{N}$ *ορίζουμε*

$$C_n = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i.$$

Έστω ξ *τυπική κανονική τυχαία μεταβλητή, με μέση τιμή* $\mu = 0$ *και διασπορά* $\sigma^2 = 1$. *Τότε,*

$$\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}(C_n\leq t) = \mathbb{P}(\xi\leq t)$$

για κάθε $t\in\mathbb{R}$. *Επιπλέον, για κάθε συνεχή συνάρτηση* g *με πολυωνυμική αύξηση ισχύει*

$$\lim_{n\to\infty}\mathbb{E}\,[g(C_n)] = \mathbb{E}\,[g(\xi)].$$

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι $n = 2m$ και θέτουμε $t_j = \frac{j}{\sqrt{2m}}$. Παρατηρούμε ότι η C_{2m} παίρνει τις τιμές t_{2j}, $-m\leq j\leq m$, με πιθανότητα

$$\mathbb{P}(C_{2m} = t_{2j}) = \frac{1}{2^{2m}}\binom{2m}{m+j}.$$

Θεωρούμε τα διαστήματα $I_{2j} = (t_{2j-1}, t_{2j+1}]$, $-m\leq j\leq m$ και ορίζουμε τυχαία μεταβλητή D_{2m} με πυκνότητα

$$p_{2m}(t) = \sqrt{\frac{m}{2}}\,\frac{1}{2^{2m}}\binom{2m}{m+j},\quad \text{αν } t\in I_{2j}$$

και $p_{2m}(t) = 0$ αλλιώς. Τότε,

$$\mathbb{P}(C_{2m}\in I_{2j}) = \mathbb{P}(D_{2m}\in I_{2j}),\quad -m\leq j\leq m.$$

Γνωρίζουμε ότι η C_{2m} είναι υποκανονική: ακριβέστερα, ισχύει η ανισότητα

$$\mathbb{P}(|C_{2m}| > R)\leq 2e^{-R^2}$$

για κάθε $R>0$. Αν σταθεροποιήσουμε $R>0$ και υποθέσουμε ότι υπάρχει j_0 με $|j_0|\leq m$ ώστε $R+1\in I_{2j_0}$, τότε

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(D_{2m} > R+1) &= \sum_{j>j_0}\mathbb{P}(D_{2m}\in I_{2j}) + \mathbb{P}(D_{2m}\in I_{2j_0}\cap[R+1,\infty))\\ &\leq \sum_{j>j_0}\mathbb{P}(C_{2m}\in I_{2j}) + \mathbb{P}(C_{2m}\in I_{2j_0})\\ &\leq \mathbb{P}(C_{2m} > R)\end{aligned}$$

αν $m\geq 2$ (αφού, τότε, τα διαστήματα I_{2j} έχουν μήκος μικρότερο ή ίσο από 1). Έπεται ότι

$$\mathbb{P}(|D_{2m}| > R+1)\leq 2e^{-R^2}$$

για κάθε $R > 0$, δηλαδή η D_{2m} είναι επίσης υποκανονική.

Έστω τώρα g συνεχής συνάρτηση με πολυωνυμική αύξηση. Θεωρούμε τυχόν $\varepsilon > 0$.

Ισχυρισμός. Υπάρχει $R > 0$ ώστε

$$\int_{\{|C_{2m}|>R\}} |g(C_{2m}| \, d\mathbb{P} < \frac{\varepsilon}{3} \text{ και } \int_{\{|D_{2m}>R|\}} |g(D_{2m}| \, d\mathbb{P} < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Απόδειξη του ισχυρισμού. Έχουμε, για $R > 1$,

$$\begin{aligned}
\int_{\{|C_{2m}|>R\}} |g(C_{2m})| \, d\mathbb{P} &\leq C \int_{\{|C_{2m}|>R\}} (1 + |C_{2m}|^N) \, d\mathbb{P} \\
&\leq 2C \int_{\{|C_{2m}|>R\}} |C_{2m}|^N \, d\mathbb{P} \\
&= 2C \int_{\{|C_{2m}|>R\}} \int_0^\infty N x^{N-1} \chi_{[0,|C_{2m}|]}(x) \, dx \, d\mathbb{P} \\
&= 2C \int_0^\infty \int_{\{|C_{2m}|>R\}} N x^{N-1} \chi_{[0,|C_{2m}|]}(x) \, d\mathbb{P} \, dx \\
&= 2C \int_0^\infty N x^{N-1} \mathbb{P}(|C_{2m}| > \max\{x, R\}) \, dx \\
&= 2C \int_0^R N x^{N-1} \mathbb{P}(|C_{2m}| > \max\{x, R\}) \, dx \\
&\quad + 2C \int_R^\infty N x^{N-1} \mathbb{P}(|C_{2m}| > \max\{x, R\}) \, dx \\
&\leq 4CR^N e^{-R^2} + 4C \int_R^\infty N x^{N-1} e^{-x^2} dx.
\end{aligned}$$

Η τελευταία ποσότητα τείνει στο 0 όταν το R τείνει στο άπειρο, άρα μπορούμε να βρούμε R που να ικανοποιεί τον ισχυρισμό. Για την D_{2m} χρησιμοποιούμε ανάλογο επιχείρημα. □

Ισχυρισμός. Από την ομοιόμορφη συνέχεια της g στο $[-R, R]$ έπεται ότι υπάρχει $m_0 \in \mathbb{N}$ ώστε, για κάθε $m \geq m_0$,

$$A(R) := \left| \int_{\{|C_{2m}| \leq R\}} g(C_{2m}) \, d\mathbb{P} - \int_{\{|D_{2m}| \leq R\}} g(D_{2m}) \, d\mathbb{P} \right| \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

Απόδειξη του ισχυρισμού. Έστω $j \in [-m, m]$. Παρατηρούμε ότι

$$\int_{C_{2m} \in I_{2j}} g(C_{2m}) \, d\mathbb{P} = g(t_{2j}) \mathbb{P}(C_{2m} \in I_{2j}) = \frac{1}{2^{2m}} \binom{2m}{m+j} g(t_{2j})$$

και

$$\int_{D_{2m}\in I_{2j}} g(D_{2m})\,d\mathbb{P} = \int_{I_{2j}} g(x)p_{2m}(x)\,dx = \frac{1}{2^{2m}}\binom{2m}{m+j}\frac{1}{|I_{2j}|}\int_{I_{2j}} g(x)\,dx.$$

Άρα,

$$\begin{aligned}\left|\int_{C_{2m}\in I_{2j}} g(C_{2m})\,d\mathbb{P} - \int_{D_{2m}\in I_{2j}} g(D_{2m})\,d\mathbb{P}\right| &= \frac{1}{2^{2m}}\binom{2m}{m+j}\left|g(t_{2j}) - \frac{1}{|I_{2j}|}\int_{I_{2j}} g(x)\,dx\right| \\ &\le \frac{1}{2^{2m}}\binom{2m}{m+j}\frac{1}{|I_{2j}|}\int_{I_{2j}} |g(t_{2j}) - g(x)|\,dx.\end{aligned}$$

Αν επιλέξουμε m_0 αρκετά μεγάλο τότε για κάθε $m \ge m_0$ έχουμε $[-R,R] \subseteq [t_{-2m-1}, t_{2m+1}]$ και $|g(y)-g(z)| < \frac{\varepsilon}{3}$ αν τα y,z ανήκουν στο ίδιο υποδιάστημα I_{2j}. Τότε, από τα παραπάνω βλέπουμε ότι

$$\begin{aligned}A(R) &\le \sum_{j=-m}^{m}\left|\int_{I_{2j}} g(C_{2m})\,d\mathbb{P} - \int_{I_{2j}} g(D_{2m})\,d\mathbb{P}\right| \\ &\le \sum_{j=-m}^{m}\frac{1}{2^{2m}}\binom{2m}{m+j}\frac{1}{|I_{2j}|}\int_{I_{2j}} |g(t_{2j}) - g(x)|\,dx \\ &\le \frac{\varepsilon}{3}\sum_{j=-m}^{m}\frac{1}{2^{2m}}\binom{2m}{m+j} \\ &= \frac{\varepsilon}{3}.\end{aligned}$$

Άμεση συνέπεια του τελευταίου ισχυρισμού είναι ότι:

$$\mathbb{E}\left[g(C_{2m})\right] - \mathbb{E}\left[g(D_{2m})\right] \to 0$$

και

$$\mathbb{P}(C_{2m} \le t) - \mathbb{P}(D_{2m} \le t) \to 0$$

για κάθε $t \in \mathbb{R}$, όταν το $m \to \infty$. Μπορούμε λοιπόν, για την απόδειξη του θεωρήματος, να αντικαταστήσουμε τις τυχαίες μεταβλητές C_{2m} με τις D_{2m}.

Ισχυρισμός. Για κάθε $t \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{m\to\infty} p_{2m}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-t^2/2}.$$

Απόδειξη του ισχυρισμού. Παρατηρούμε πρώτα ότι, από τον τύπο του Stirling,

$$p_{2m}(0) = \sqrt{\frac{m}{2}}\,\frac{(2m)!}{2^{2m}(m!)^2} \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

όταν το $m \to \infty$. Έστω $t > 0$. Αν $m \geq 2t^2$ τότε $t \in I_{2j_t}$ για κάποιο j_t με $|j_t| \leq \frac{m}{2}$. Γράφουμε

$$\begin{aligned} p_{2m}(t) &= p_{2m}(0)\,\frac{(m-1)\cdots(m-j_t)}{(m+1)\cdots(m+j_t)} \\ &= p_{2m}(0)\,\frac{\left(1-\frac{1}{m}\right)\cdots\left(1-\frac{j_t}{m}\right)}{\left(1+\frac{1}{m}\right)\cdots\left(1+\frac{j_t}{m}\right)}. \end{aligned}$$

Θέτουμε

$$r_{2m}(t) = \ln\left(\prod_{i=1}^{j_t}\frac{1-\frac{i}{m}}{1+\frac{i}{m}}\right) = \sum_{i=1}^{j_t}\ln\left(1-\frac{i}{m}\right) - \sum_{i=1}^{j_t}\ln\left(1+\frac{i}{m}\right).$$

Χρησιμοποιώντας την ανισότητα $|\ln(1+x)-x| \leq x^2$ για $|x| < 1/2$, βλέπουμε ότι, αν το m είναι αρκετά μεγάλο,

$$\left| r_{2m}(t) + \frac{j_t(j_t+1)}{m}\right| \leq \frac{j_t(j_t+1)(2j_t+1)}{3m^2}.$$

Από την $t \in I_{2j_t}$ ελέγχουμε αμέσως ότι

$$\lim_{m\to\infty}\frac{j_t^2}{m} = \frac{t^2}{2},$$

άρα

$$\lim_{m\to\infty} r_{2m}(t) = -\frac{t^2}{2}.$$

Τώρα, είναι φανερό ότι $\lim\limits_{m\to\infty} p_{2m}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-t^2/2}$, και εντελώς όμοια βλέπουμε ότι το ίδιο ισχύει στην περίπτωση $t < 0$. $\square$

Για να ολοκληρώσουμε την απόδειξη του θεωρήματος, παρατηρούμε ότι η p_{2m} είναι φθίνουσα στο $[0,\infty)$, άρα η ακολουθία συναρτήσεων $(p_{2m})_{m\in\mathbb{N}}$ είναι ομοιόμορφα φραγμένη. Επίσης, αν $t \geq 3$ και $m \geq 2$ τότε, από την ανισότητα του Markov,

$$\begin{aligned} \frac{|t|}{2}\,p_{2m}(t) &\leq \int_{\{|t|/2\leq D_{2m}\leq |t|\}} p_{2m}(s)\,ds \leq \mathbb{P}(D_{2m} > |t|/2) \\ &\leq 2\exp\left(-\frac{(|t|/2-1)^2}{2}\right). \end{aligned}$$

Δηλαδή,

$$p_{2m}(t) \leq \frac{4}{3}\exp\left(-\frac{(|t|/2-1)^2}{2}\right).$$

Μπορούμε λοιπόν να εφαρμόσουμε το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης: για κάθε συνεχή συνάρτηση g με πολυωνυμική αύξηση,

$$\mathbb{E}\left[g(D_m)\right] = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)p_{2m}(t)\,dt \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{-t^2/2}dt = \mathbb{E}\left[g(\xi)\right].$$

Επίσης, για κάθε $t \in \mathbb{R}$,

$$\mathbb{P}\left(D_{2m} \leq t\right) = \int_{-\infty}^{t} p_{2m}(s)\,ds \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{t} e^{-s^2/2}ds = \mathbb{P}\left(\xi \leq t\right).$$

Έχουμε δηλαδή τον ισχυρισμό του θεωρήματος. □

3.5 Υπερσυσταλτότητα στο χώρο του Gauss

Έστω $f : E_2^m \to \mathbb{R}$. Για κάθε $\sigma \in S_m$ (μετάθεση του $\{1,\ldots,m\}$) ορίζουμε $f_\sigma : E_2^m \to \mathbb{R}$ με

$$f_\sigma(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_m) = f(\varepsilon_{\sigma(1)},\ldots,\varepsilon_{\sigma(m)}).$$

Θεωρούμε τον χώρο

$$SL^2(E_2^n) = \{f \in L^2(E_2^m) : \ f = f_\sigma, \text{ για κάθε } \sigma \in S_m\}.$$

Έστω $f \in SL^2(E_2^m)$ και $f = \sum_A t_A w_A$. Παρατηρούμε ότι αν $A, B \subset \{1,2,\ldots,m\}$ με ίδιο πληθάριθμο τότε $t_A = t_B$. Πράγματι, αν $\varepsilon \in E_2^m$ τότε $w_A(\varepsilon) = w_B(\sigma(\varepsilon))$ για κάποια μετάθεση σ. Τότε θα είναι

$$\begin{aligned} t_A &= \frac{1}{2^m}\sum_{\varepsilon\in E_2^m} f(\varepsilon)w_A(\varepsilon) = \frac{1}{2^m}\sum_{\varepsilon\in E_2^m} f(\varepsilon)w_B(\sigma(\varepsilon)) \\ &= \frac{1}{2^m}\sum_{\eta\in E_2^m} f(\sigma^{-1}(\eta))w_B(\eta) = \frac{1}{2^m}\sum_{\eta\in E_2^m} f(\eta)w_B(\eta) = t_B, \end{aligned}$$

οπότε η f γράφεται

$$\begin{aligned} f(\varepsilon) &= \sum_A t_A w_A(\varepsilon) = \sum_{k=0}^{m}\left(\sum_{|A|=k} w_A(\varepsilon)\right)t_k \\ &= \sum_{k=0}^{m} S_k^{(m)}(\varepsilon)\rho_k, \end{aligned}$$

όπου

$$S_k^{(m)} = \frac{1}{\binom{m}{k}^{1/2}}\sum_{|A|=k} w_A$$

και $\rho_k = \binom{m}{k}^{1/2} t_k$, τα οποία πήραμε έτσι ώστε $\|S_k^{(m)}\|_2 = 1$, για κάθε $k = 0, 1, \ldots$. Άρα το σύνολο
$$\{S_0^{(m)}, S_1^{(m)}, \ldots, S_m^{(m)}\}$$
αποτελεί ορθοκανονική βάση του $SL^2(E_2^n)$. Αν θέσουμε
$$C_m^j = (S_1^{(m)})^j = \left(\frac{1}{\sqrt{m}} \sum_{i=1}^m \varepsilon_i\right)^j,$$
παρατηρούμε ότι $\mathrm{span}(\{S_0^{(m)}, \ldots, S_j^{(m)}\}) = \mathrm{span}(\{1, C_m, \ldots, C_m^j\})$, επομένως το σύνολο $\{1, C_m, \ldots, C_m^m\}$ αποτελεί επίσης βάση του χώρου $SL^2(E_2^m)$. Τότε, ορίζουμε τον άνω τριγωνικό πίνακα $H^{(m)} = (h_{i,j}^m)$ που ικανοποιεί τις $S_i^{(m)} = \sum_{j=0}^i h_{i,j}^{(m)} C_m^j = h_i^{(m)}(C_m)$.

Πρόταση 3.5.1. *Αν $1 < p < \infty$, $x_0, x_1, \ldots, x_N \in (E, \|\cdot\|)$ και $m \geq N$ τότε*
$$\left\|\sum_{k=0}^N r_q^k h_k(C_m) x_k\right\|_{L^q} \leq \left\|\sum_{k=0}^N r_p^k h_k(C_m) x_k\right\|_{L^p}$$

Απόδειξη. Εφαρμόζουμε το θεώρημα 3.1.6, θεωρώντας για κάθε υποσύνολο $A \subset \{1, \ldots, N\}$ με $|A| = k$ τα $y_A = \binom{m}{k}^{-1/2} w_A$, οπότε
$$\begin{aligned}\sum_A r_q^{|A|} w_A y_A &= \sum_{k=0}^N \sum_{|A|=k} r_q^k w_A \binom{m}{k}^{-1/2} x_k = \sum_{k=0}^N r_q^k \left(\binom{m}{k}^{-1/2} \sum_{|A|=k} w_A\right) x_k \\ &= \sum_{k=0}^N r_q^k h_k^{(m)}(C_m) x_k.\end{aligned}$$
Έτσι παίρνουμε την ανισότητα
$$\left\|\sum_{k=0}^N r_q^k h_k(C_m) x_k\right\|_{L^q} \leq \left\|\sum_{k=1}^N r_p^N h_k(C_m) x_k\right\|_{L^p}$$
□

Θα δείξουμε τώρα ότι τα πολυώνυμα $h_k^{(m)}$ συγκλίνουν κατά σημείο στα πολυώνυμα Hermite $\tilde{h}_k$.

Πρόταση 3.5.2. *Ισχύει $h_{k,j}^{(m)} \to \tilde{h}_{k,j}$, καθώς το $m \to \infty$, όπου $\tilde{h}_{k,j}$ είναι ο συντελεστής του x^j στο πολυώνυμο Hermite βαθμού k.*

Απόδειξη. Θα το δείξουμε με επαγωγή. Υποθέτουμε ότι το συμπέρασμα ισχύει για όλα τα $\ell < k$. Θα χρησιμοποιήσουμε την ανισότητα του Khintchine: για κάθε $0 < p < \infty$

υπάρχουν σταθερές A_p και B_p ώστε, αν $a_1, \dots, a_N$ είναι πραγματικοί αριθμοί και $\epsilon_1, \dots, \epsilon_N$ είναι τυχαίες μεταβλητές Rademacher, τότε

$$A_p \|s_N\|_p \le \sigma \le B_p \|s_N\|_p,$$

όπου $s_N = \sum_{n=1}^N a_n \epsilon_n$ και $\sigma^2 = \|s_N\|_2^2 = \sum_{n=1}^N a_n^2$. Από την ανισότητα του Kintchine υπάρχει σταθερά $M_k > 0$ τέτοια ώστε

$$\mathbb{E}\left(|C_m|^k (1 + |C_m|^k)\right) \le M_k,$$

για κάθε $m \in \mathbb{N}$. Πράγματι, αν εφαρμόσουμε την ανισότητα του Kintchine για την $s_m = \frac{1}{\sqrt{m}} \sum_{k=1}^m \epsilon_k = C_m$, παίρνουμε τις εκτιμήσεις

$$\mathbb{E}(|C_m|^k) = \|s_m\|_k^k \le A_k^{-k} \text{ και } \mathbb{E}(|C_m|^{2k}) = \|s_m\|_{2k}^{2k} \le A_{2k}^{-2k},$$

αφού $\sigma^2 = 1$. Από την επαγωγική υπόθεση έχουμε ότι για τυχόν $\varepsilon > 0$, υπάρχει $n_\ell \in \mathbb{N}$, ώστε για κάθε $n \ge n_\ell$ και για κάθε $\ell < k$,

$$|h_\ell^{(m)}(x) - \tilde{h}_\ell(x)| \le \max_{0 \le j \le \ell} \{1,\ |x|^j\} \sum_{j=0}^{\ell} |h_{\ell,j}^{(m)} - \tilde{h}_{\ell,j}| \le \frac{\varepsilon}{M_k}(1 + |x|^k)$$

Επίσης, ισχύει

$$h_k^{(m)}(x) = x^k - \sum_{\ell=0}^{k-1} \mathbb{E}(C_m^k h_\ell^{(m)}(C_m)) h_\ell^{(m)}(x).$$

Πράγματι, οι συναρτήσεις

$$S_\ell^{(m)} = h_\ell^{(m)}(C_m) = \sum_{j=0}^{\ell} h_{\ell,j}^{(m)} C_m^j$$

αποτελούν ορθοκανονική βάση, οπότε

$$C_m^k = \sum_{\ell=0}^{k} \left\langle C_m^k, h_\ell^{(m)}(C_m) \right\rangle h_\ell^{(m)}(C_m) = h_k^{(m)}(C_m) + \sum_{\ell=0}^{k-1} \left\langle C_m^k, h_\ell^{(m)}(C_m) \right\rangle h_\ell^{(m)}(C_m),$$

και αντίστοιχα

$$h_k^{(m)}(x) = x^k - \sum_{\ell=0}^{k-1} \mathbb{E}(C_m^k h_\ell^{(m)}(C_m)) h_\ell^{(m)}(x).$$

Άρα, υπάρχει $n_\ell \in \mathbb{N}$, ώστε για κάθε $n \ge n_\ell$,

$$\left|\mathbb{E}\left(C_m^k (h_\ell^{(m)}(C_m) - \tilde{h}_\ell(C_m))\right)\right| \le \mathbb{E}|C_m|^k |h_\ell^{(m)}(C_m) - \tilde{h}_\ell(C_m)|$$

$$
\begin{aligned}
&\le \mathbb{E}\left(\varepsilon \frac{1+|C_m|^k}{M_k}|C_m|^k\right) \\
&\le \frac{\varepsilon}{M_k}\mathbb{E}\left(|C_m|^k(1+|C_m|^k)\right) \\
&\le \varepsilon.
\end{aligned}
$$

Αυτό δείχνει ότι

$$\mathbb{E}(C_m^k \tilde{h}_\ell(C_m)) - \mathbb{E}(C_m^k h_\ell^{(m)}(C_m)) \to 0,$$

καθώς το $m \to +\infty$. Εφαρμόζοντας το κεντρικό οριακό θεώρημα του De Moivre για την συνάρτηση $g(x) = x^k \tilde{h}_\ell(x)$ έχουμε ότι

$$\mathbb{E}(C_m^k \tilde{h}_\ell(C_m)) \to \mathbb{E}(\xi^k \tilde{h}_\ell(\xi)),$$

καθώς το $n \to \infty$, επομένως

$$\mathbb{E}(C_m^k h_\ell^{(m)}(C_m)) \to \mathbb{E}(\xi^k \tilde{h}_\ell(\xi)),$$

καθώς το $n \to \infty$. Συνεπώς,

$$h_k^{(m)}(x) \to x^k - \sum_{\ell=0}^{k-1} \mathbb{E}(\xi^k \tilde{h}_\ell(\xi))\tilde{h}_\ell(x) = \tilde{h}_k(x)$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$. □

Απο την πρόταση 3.5.2 παίρνουμε το ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 3.5.3. *Αν $1 < q < p < \infty$ και $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_N \in \mathbb{R}$ τότε*

$$\left\| \sum_{n=0}^N r_q^n \beta_n \tilde{h}_n \right\|_{L^q(\gamma_1)} \le \left\| \sum_{n=0}^N r_p^n \beta_n \tilde{h}_n \right\|_{L^p(\gamma_1)},$$

όπου $r_q = 1/\sqrt{q-1}$ και $r_p = 1/\sqrt{p-1}$.

Απόδειξη. Όπως στην απόδειξη της προηγούμενης πρότασης, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n \ge n_0$ ισχύει

$$\left| \left| \sum_{n=0}^N r_p^n \beta_n h_n^{(m)}(x) \right|^p - \left| \sum_{n=0}^N r_p^n \beta_n \tilde{h}_n(x) \right|^p \right| \le \varepsilon(1+|x|^{Np})$$

από το οποίο προκύπτει ότι

$$\left\| \sum_{n=0}^N r_p^n \beta_n h_n^{(m)}(C_m) \right\|_{L^p} - \left\| \sum_{n=0}^N r_p^n \beta_n \tilde{h}_n(C_m) \right\|_{L^p} \to 0,$$

καθώς το $m \to +\infty$. Επίσης, από το κεντρικό οριακό θεώρημα του De Moivre ισχύει

$$\left\| \sum_{n=0}^{N} r_p^n \beta_n \tilde{h}_n(C_m) \right\|_{L^p} \to \left\| \sum_{n=0}^{N} r_P^n \beta_n \tilde{h}_n(\xi) \right\|_{L^p},$$

επομένως η ανισότητα προκύπτει από την πρόταση 3.5.1. □

Από την παραπάνω ανισότητα εξάγουμε ανισότητα υπερσυσταλτότητας.

Πόρισμα 3.5.4. *Αν $(P_t)_{t\geq 0}$ είναι η ημιομάδα Ornstein–Uhlenbeck, $1 < p < \infty$, $q(t) = 1 + (p-1)e^{2t}$ και $f \in L^p$, τότε $P_t f \in L^{q(t)}$ και $\|P_t f\|_{L^{q(t)}} \leq \|f\|_{L^p}$.* □

3.6 Λογαριθμική ανισότητα Sobolev στο χώρο του Gauss

Σε αυτή την παράγραφο θα δείξουμε πώς περνάμε την λογαριθμική ανισότητα Sobolev από τον διακριτό κύβο στο χώρο του Gauss μέσω του κεντρικού οριακού θεωρήματος του De Moivre. Θεωρούμε την ημιομάδα Ornstein–Uhlenbeck $(P_t)_{t\geq 0}$, που δρα στον $L^2(\gamma_1)$, τον γεννήτορα L της ημιομάδας και γράφουμε $D(L)$ για το πεδίο ορισμού του L. Παρατηρούμε ότι

$$\frac{P_t\tilde{h}_n - \tilde{h}_n}{t} = \frac{e^{-nt}-1}{t}\tilde{h}_n \to -n\tilde{h}_n,$$

καθώς το $t \to 0$, οπότε $\tilde{h}_n \in D(L)$ και $L(\tilde{h}_n) = -n\tilde{h}_n$. Θέτουμε τώρα

$$D = \left\{ f \in L^2(\gamma_1) : \ f = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \tilde{h}_n \text{ και } \sum_{n=0}^{\infty} n^2 f_n^2 < +\infty \right\}.$$

Θα δείξουμε ότι $D = D(L)$. Αν $f \in D$, τότε

$$\begin{aligned} \left\| \frac{P_t f - f}{t} \right\|_2^2 &= \left\langle \frac{P_t f - f}{t}, \frac{P_t f - f}{t} \right\rangle \\ &= \left\langle \sum_{n=0}^{\infty} f_n \frac{e^{-nt}-1}{t}\tilde{h}_n, \sum_{m=0}^{\infty} f_m \frac{e^{-mt}-1}{t}\tilde{h}_m \right\rangle \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} f_n^2 \left(\frac{e^{-nt}-1}{t} \right)^2 \\ &\leq \sum_{n=0}^{\infty} n^2 f_n^2 < +\infty, \end{aligned}$$

αφού $\left(\frac{e^{-nt}-1}{t}\right)^2 < n^2$ (από το θεώρημα μέσης τιμής για τη συνάρτηση $g_n(t) = e^{-nt}$). Άρα, $\frac{P_t f - f}{t} \in L^2(\gamma_1)$, για κάθε $t > 0$, οπότε από το γενικευμένο θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης έχουμε ότι $\lim_{t\to 0} \frac{P_t f - f}{t} \in L^2(\gamma_1)$, δηλαδή $f \in D(L)$. Αντίστροφα αν $f \in D(L)$, τότε

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{P_t f - f}{t}, \tilde{h}_n \right\rangle &= \left\langle \sum_{m=0}^{\infty} f_m \left(\frac{e^{-mt}-1}{t} \right) \tilde{h}_m, \tilde{h}_n \right\rangle \\ &= f_n \frac{e^{-nt}-1}{t} \to -n f_n = \langle L(f), \tilde{h}_n \rangle, \end{aligned}$$

καθώς το $t \to 0$, οπότε $L(f) = -\sum_{n=0}^{\infty} n f_n \tilde{h}_n$, άρα τελικά $D = D(L)$. Τότε

$$E(f) = -\langle f, L(f) \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} n f_n^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{df}{dx} \right)^2 d\gamma_1,$$

όπου $\frac{df}{dx} = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n} f_n \tilde{h}_n$ η παράγωγος της f.

Έστω E_2^m ο διακριτός κύβος, L_m ο γεννήτορας της ημιομάδας Ornstein–Uhlenbeck που δρα στον χώρο $SL^2(E_2^m)$, που συμπίπτει με την διακριτή Λαπλασιανή της $f(C_m)$, και E_m, Ent_m, η ενέργεια και η εντροπία αντίστοιχα της $f(C_m)$.

Πρόταση 3.6.1. *Αν f είναι συνεχής συνάρτηση πολυωνυμικής αύξησης, η οποία ανήκει στο $D(L)$, τότε*

$$\mathrm{Ent}_m(f(C_m)^2) \to \mathrm{Ent}(f^2),$$

καθώς το $m \to \infty$.

Απόδειξη. Αφού οι f^2, $f^2 \log f^2$ είναι πολυωνυμικής αύξησης, από το κεντριακό οριακό θεώρημα του De Moivre έπεται ότι

$$\mathbb{E}(f(C_m)^2) \to \mathbb{E}(f(\xi)^2) = \int_{\mathbb{R}} f^2 \, d\gamma_1$$

και

$$\mathbb{E}\left(f(C_m)^2 \log f(C_m)^2\right) \to \mathbb{E}\left(f(\xi)^2 \log f(\xi)^2\right) = \int_{\mathbb{R}} f^2 \log f^2 \, d\gamma_1,$$

καθώς το $m \to \infty$. □

Θεώρημα 3.6.2. *Έστω $f \in L^2(\gamma_1)$, διαφορίσιμη με ομοιόμορφα συνεχή παράγωγο f'. Τότε $E_m(f(C_m)) \to E(f)$.*

Απόδειξη. Από τις υποθέσεις προκύπτει ότι $f' \in L^2(\gamma_1)$, αφού $|f'(x)| \le a|x| + b$ για κάποιους $a, b \in \mathbb{R}$, οπότε

$$E(f) = \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{df}{dx} \right)^2 d\gamma_1 < +\infty.$$

Θα αποδείξουμε το θεώρημα μόνο για άρτιες τιμές του m. Η απόδειξη για τις περιττές τιμές του m είναι ανάλογη. Σταθεροποιούμε $m = 2n$ και $C_{2n}(\varepsilon) = t_{2k}$. Τότε

$$L_m(f(C_m)) = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m}\left(f(C_m(s_j(\varepsilon))) - f(C_m(\varepsilon))\right).$$

Πράγματι, παρατηρούμε ότι αφού $C_{2n} = t_{2k}$, τότε $n+k$ θέσεις έχουν 1 και $n-k$ θέσεις έχουν -1. Αν η j–συντεταγμένη έχει -1, τότε $C_{2n}(s_j(\varepsilon)) = \frac{t_{2k}+2}{\sqrt{2n}} = t_{2k+2}$, ενώ αν είναι 1, τότε $C_{2n}(s_j(\varepsilon)) = t_{2k-2}$. Τότε

$$L_m(f(C_m))(\varepsilon) = \frac{1}{2}\left((n+k)f(t_{2k-2}) + (n-k)f(t_{2k+2}) - 2nf(t_{2k})\right).$$

Είναι

$$\begin{aligned} -E_m &= \langle f(C_m), L_m(f(C_m))\rangle = \mathbb{E}\left(f(C_m)L_m(f(C_m))\right) \\ &= \frac{1}{2^m}\sum_{\varepsilon\in E_2^m} f(C_m(\varepsilon))L_m(f(C_m))(\varepsilon). \end{aligned}$$

Κάθε ε στον κύβο E_2^m έχει $n+k$ συντεταγμένες ίσες με 1 και $n-k$ συντεταγμένες ίσες με -1, όπου $k = -n, \ldots, n$.

Λήμμα 3.6.3. *Για κάθε $|k| \leq n$ θέτουμε A_k το υποσύνολο των $\varepsilon \in E_2^m$ που έχουν $n+k$ συντεταγμένες ίσες με 1 και $n-k$ συντεταγμένες ίσες με -1. Τότε, τα A_k αποτελούν διαμέριση του E_2^m, $|A_k| = \binom{2n}{n+k}$ και για κάθε $\varepsilon, \eta \in A_k$ και $f \in SL^2(E_2^m)$ ισχύει $f(\varepsilon) = f(\eta)$.*

Απόδειξη. Οι δύο πρώτοι ισχυρισμοί είναι προφανείς. Για τον τρίτο παρατηρούμε ότι αν $\varepsilon, \eta \in A_k$, μπορούμε να βρούμε μετάθεση $\sigma \in S_m$ ώστε $\varepsilon = \sigma(\eta)$, οπότε για κάποια συνάρτηση $f \in SL^2(E_2^m)$ θα ισχύει $f(\varepsilon) = f(\sigma(\eta)) = f(\eta)$. □

Αφού $f(C_m) \in E_2^m$, έχουμε

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(f(C_m)L_m(f(C_m))) &= \frac{1}{2^m}\sum_{\varepsilon\in E_2^m} f(C_m(\varepsilon))L_m(f(C_m))(\varepsilon) \\ &= \frac{1}{2^m}\sum_{k=-n}^{n}\left(\sum_{\varepsilon\in A_k} f(C_m(\varepsilon))L_m(f(C_m))(\varepsilon)\right) \\ &= \frac{1}{2^m}\sum_{k=-n}^{n}\Big[\binom{2n}{n+k}f(t_{2k})\frac{1}{2}\big((n+k)f(t_{2k-2}) \\ &\quad +(n-k)f(t_{2k+2}) - 2nf(t_{2k})\big)\Big] \\ &= \frac{1}{2}\sum_{k=-n}^{n} f(t_{2k})\big((n+k)f(t_{2k-2}) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\quad +(n-k)f(t_{2k+2}) - 2nf(t_{2k})\big)\mathbb{P}(C_m = t_{2k}) \\
&= \frac{1}{2}(J_1 + J_2),
\end{aligned}
$$

όπου

$$J_1 = \sum_k \big((n-k)f(t_{2k})(f(t_{2k+2}) - f(t_{2k}))\big)\mathbb{P}(C_m = t_{2k})$$

και

$$J_2 = \sum_k \big((n+k)f(t_{2k})(f(t_{2k-2}) - f(t_{2k}))\big)\mathbb{P}(C_m = t_{2k})$$

(προσθαφαιρέσαμε τους όρους $kf(t_{2k})^2$). Μπορούμε να γράψουμε το J_2 στη μορφή

$$J_2 = -\sum_k \big((m+k+1)f(t_{2k+2})(f(t_{2k+2}) - f(t_{2k}))\big)\mathbb{P}(C_m = t_{2k}),$$

οπότε

$$
\begin{aligned}
\langle f(C_m), L_m(f(C_m))\rangle &= \frac{1}{2}\sum_k \big((n-k)f(t_{2k})(f(t_{2k+2}) - f(t_{2k}))\big)\mathbb{P}(C_m = t_{2k}) \\
&- \frac{1}{2}\sum_k \big((n-k)f(t_{2k+2})(f(t_{2k+2}) - f(t_{2k}))\big)\mathbb{P}(C_m = t_{2k}) \\
&= -\frac{1}{2}\sum_k (n-k)\big(f(t_{2k+2}) - f(t_{2k})\big)^2\mathbb{P}(C_m = t_{2k}).
\end{aligned}
$$

Παρατηρούμε ότι $t_{2k+2} - t_{2k} = \sqrt{\frac{2}{n}}$, άρα $(t_{2k+2} - t_{2k})^2 = 2/n$. Συνεπώς,

$$\langle f(C_m), L_m(f(C_m))\rangle = -\sum_k \left(\frac{n-k}{n}\right)\left(\frac{f(t_{2k+2}) - f(t_{2k})}{t_{2k+2} - t_{2k}}\right)^2 \mathbb{P}(C_m = t_{2k}).$$

Έστω $\varepsilon > 0$. Υπάρχει $\delta > 0$ ώστε: αν $0 < |h| < \delta$ τότε

$$\left|\frac{f(x+h) - f(x)}{h} - f'(x)\right| < \epsilon,$$

άρα

$$
\begin{aligned}
\left|\frac{f(x+h) - f(x)}{h} + f'(x)\right| &= \left|\frac{f(x+h) - f(x)}{h} - f'(x) + 2f'(x)\right| \\
&\leq \left|\frac{f(x+h) - f(x)}{h} - f'(x)\right| + 2|f'(x)| \\
&< \varepsilon + 2|f'(x)|,
\end{aligned}
$$

οπότε
$$\left|\frac{(f(x+h)-f(x))^2}{h^2}-(f'(x))^2\right|\leq\varepsilon(\varepsilon+2)|f'(x)|).$$
Είναι
$$\begin{aligned}
&\left|\langle f(C_m),L_m(f(C_m))\rangle+\mathbb{E}\left((f'(C_m))^2\right)\right|\\
=&\left|-\sum_{k=-n}^{n}\left(\frac{n-k}{n}\right)\left(\frac{f(t_{2k+2})-f(t_{2k})}{t_{2k+2}-t_{2k}}\right)^2\mathbb{P}(C_m=t_{2k})+\sum_{k=-n}^{n}\left(f'(t_{2k})\right)^2\mathbb{P}(C_m=t_{2k})\right|\\
\leq&\left|\sum_k\left(\frac{n-k}{n}\right)\left(\frac{f(t_{2k+2})-f(t_{2k})}{t_{2k+2}-t_{2k}}\right)^2\mathbb{P}(C_m=t_{2k})\right|\\
&+\sum_k\left|\left(\frac{f(t_{2k+2})-f(t_{2k})}{t_{2k+2}-t_{2k}}\right)^2-\left(f'(t_{2k})\right)^2\right|\mathbb{P}(C_m=t_{2k})\\
&+\sum_k\frac{|k|}{n}\left|\frac{f(t_{2k+2})-f(t_{2k})}{t_{2k+2}-t_{2k}}\right|^2\mathbb{P}(C_m=t_{2k}).
\end{aligned}$$
Το πρώτο άθροισμα, για αρκετά μεγάλο m, φράσσεται από
$$\varepsilon\big(\varepsilon+2\sum_k|f'(t_{2k})|\mathbb{P}(C_m=t_{2k})\big)=\varepsilon(\varepsilon+2\mathbb{E}(|f'(C_m)|)).$$
Το δεύτερο άθροισμα φράσσεται από
$$\begin{aligned}
\leq\quad&\sum_k\frac{|k|}{n}|f'(t_{2k})|^2\mathbb{P}(C_m=t_{2k})=\frac{1}{\sqrt{m}}\sum_k|t_{2k}||f'(t_{2k})|^2\mathbb{P}(C_m=t_{2k})\\
=\quad&\frac{1}{\sqrt{m}}\mathbb{E}(|C_m||f'(C_m)|^2)\to 0,
\end{aligned}$$
καθώς το $m\to\infty$, γιατί
$$\mathbb{E}(|C_m||f'(C_m)|^2)\to\mathbb{E}(|\xi||f'(\xi)|^2)$$
από το κεντρικό οριακό θεώρημα και άρα
$$\frac{1}{\sqrt{m}}\mathbb{E}(|C_m||f'(C_m)|^2)\to 0.$$
Επίσης $\mathbb{E}f'(C_m)^2\to\mathbb{E}f'(\xi)^2$, καθώς το $m\to\infty$, οπότε τελικά
$$|-E_m(f)+E(f)|\leq|-E_m+\mathbb{E}(f'(C_m)^2)|+|\mathbb{E}(f'(C_m)^2)-\mathbb{E}(f')^2|,$$
απ' όπου προκύπτει ότι $E_m(f)\to E(f)$, καθώς το $m\to\infty$. □

Πόρισμα 3.6.4. *Εστω $f\in L^2(\gamma_1)$ παραγωγίσιμη συνάρτηση με ομοιόμορφα συνεχή παράγωγο f'. Τότε,* $\mathrm{Ent}(f^2)\leq 2E(f)$.

3.7 Ανισότητα του Beckner

Ολοκληρώνουμε αυτό το κεφάλαιο με τη «μιγαδική έκδοση» της υπερσυσταλτικής ανισότητας.

Λήμμα 3.7.1 (λήμμα του Beckner). *Εστω $1 < p < 2$. Θέτουμε $s = \sqrt{p-1} = r_{p'}$ (παρατηρήστε ότι $0 < s < 1$). Για κάθε $a, b \in \mathbb{C}$ ισχύει η ανισότητα*

$$\|a + \varepsilon isb\|_{p'} \leq \|a + \varepsilon b\|_p.$$

Απόδειξη. Αν $a = 0$ η ανισότητα ισχύει προφανώς. Αν $a \neq 0$, επειδή η ανισότητα είναι ομογενής, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $a = 1$ και $b = c + id$. Τότε,

$$|1 + \varepsilon isb|^2 = |1 - \varepsilon sd|^2 + s^2c^2,$$

άρα

$$\|1 + isb\|_{p'}^2 = \| \, |1 + \varepsilon isb|^2 \|_{p'/2} = \|(1 - \varepsilon sd)^2 + s^2c^2\|_{p'/2} \leq \|(1 - \varepsilon sd)^2\|_{p'/2} + s^2c^2.$$

Από την ανισότητα της Bonami έπεται ότι

$$\|1 + isb\|_{p'}^2 \leq \|1 - \varepsilon d\|_2 + s^2c^2 = 1 + d^2 + s^2c^2 = \|1 + \varepsilon sc\|_2^2 + d^2$$

και, πάλι από την ανισότητα της Bonami,

$$\|1 + isb\|_{p'}^2 \leq \|1 + \varepsilon c\|_p^2 + d^2 = \|(1 + \varepsilon c)^2\|_{p/2}^2 + d^2.$$

Από την αντίστροφη ανισότητα Minkowski (για τον εκθέτη $p/2$) παίρνουμε τελικά

$$\|1 + isb\|_{p'}^2 \leq \|(1 + \varepsilon c)^2 + d^2\|_{p/2} = \|1 + \varepsilon b\|_p^2,$$

που είναι η ζητούμενη ανισότητα. □

Ακολουθώντας το δεύτερο μέρος της απόδειξης της ανισότητας της Bonami και την απόδειξη του θεωρήματος 3.5.1 παίρνουμε το ακόλουθο πόρισμα.

Θεώρημα 3.7.2 (ανισότητα του Beckner). *Εστω $1 < p < 2$ και $s = \sqrt{p-1}$.*

(i) *Για κάθε ακολουθία $\{z_A : A \subseteq \{1, \ldots, n\}\}$ μιγαδικών αριθμών,*

$$\left\| \sum_A (is)^{|A|} w_A z_A \right\|_{L^{p'}} \leq \left\| \sum_A w_A z_A \right\|_{L^p}.$$

(ii) *Εστω $f = \sum_{j=0}^n b_j h_j$ και $M_{is}(f) = \sum_{j=0}^n (is)^j b_j h_j$. Τότε,*

$$\|M_{is}(f)\|_{L^{p'}(\gamma_1)} \leq \|f\|_{L^p(\gamma_1)}.$$

Χρησιμοποιώντας αυτή την ανισότητα ο Beckner υπολόγισε τη βέλτιστη σταθερά στην ανισότητα Hausdorff–Young:

Θεώρημα 3.7.3. *Έστω $1 < p \leq 2$. Θέτουμε $a_p = p^{1/2p}$ και $a_q = q^{1/2q}$ όπου q ο συζυγής εκθέτης του p. Για κάθε $f \in L^p(\mathbb{R})$, ο μετασχηματισμός Fourier*

$$\mathcal{F}(f)(u) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i x u} f(x)\, dx$$

της f ικανοποιεί την

$$\|\mathcal{F}(f)\|_q \leq A_p \|f\|_p$$

όπου $A_p = a_p/a_q$. Η σταθερά A_p είναι βέλτιστη.

Απόδειξη. Αν θεωρήσουμε τη συνάρτηση $g(x) = e^{-\pi x^2}$, τότε $\mathcal{F}(g) = g$. Απλός υπολογισμός δείχνει ότι $\|g\|_p = 1/a_p$ και $\|\mathcal{F}(g)\|_q = \|g\|_q = 1/a_q$. Συνεπώς,

$$\|\mathcal{F}(g)\|_q = A_p \|g\|_p.$$

Αυτό αποδεικνύει ότι η σταθερά A_p είναι βέλτιστη, αν βέβαια αποδείξουμε ότι $\|\mathcal{F}(f)\|_q \leq A_p \|f\|_p$ για κάθε $f \in L^p(\mathbb{R})$.

Θα χρησιμοποιήσουμε το γεγονός ότι η απεικόνιση $J_p : L^p(\gamma_1) \to L^p(\mathbb{R})$ με

$$J_p(f)(x) = a_p e^{-\pi x^2} f(\sqrt{2\pi p}x)$$

είναι ισομετρία. Πράγματι,

$$\begin{aligned} \|J_p(f)\|_p^p &= \sqrt{p}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-p\pi x^2} |f(\sqrt{2\pi p}x)|^p dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2/2}|f(y)|^p dy \\ &= \|f\|_{L^p(\gamma_1)}^p. \end{aligned}$$

Θεωρούμε τον τελεστή $T_p : L^p(\gamma_1) \to L^q(\gamma_1)$ με $T_p = J_q^{-1} \circ \mathcal{F} \circ J_p$. Αν $f_n = J_p(h_n)$ τότε, από την $\frac{dh_n}{dx}(x) = xh_n(x) - h_{n+1}(x)$ βλέπουμε ότι

$$\frac{df_n}{dx}(x) = -2\pi x f_n(x) + \sqrt{2\pi p} a_p e^{-\pi x^2} \frac{dh_n}{dx}(\sqrt{2\pi p}x) = 2\pi(p-1)x f_n(x) - \sqrt{2\pi p} f_{n+1}(x).$$

Δηλαδή,

$$\sqrt{2\pi p} f_{n+1}(x) = 2\pi(p-1)x f_n(x) - \frac{df_n}{dx}(x).$$

Θέτουμε $v_n = \mathcal{F}(f_n)$. Χρησιμοποιούμε τα εξής: αν $m(x) = xf(x)$ τότε

$$\mathcal{F}(m)(u) = \frac{i}{2\pi}\frac{d\mathcal{F}(f)}{du}(u)$$

και αν $t(x) = 2\pi i u \mathcal{F}(f)(u)$ τότε

$$\mathcal{F}(t)(u) = 2\pi i \mathcal{F}(f)(u).$$

Έπεται ότι

$$\sqrt{2\pi p}v_{n+1}(u) = i(p-1)\frac{dv_n}{du}(u) - 2\pi i u v_n(u) = -i\left(2\pi u v_n(u) - (p-1)\frac{dv_n}{du}(u)\right).$$

Παρατηρούμε ότι $\sqrt{2\pi p}\sqrt{p-1} = (p-1)\sqrt{2\pi q}$ και πολλαπλασιάζοντας την προηγούμενη ισότητα με $\sqrt{q/p}$ παίρνουμε

$$\sqrt{2\pi q}v_{n+1}(u) = -i\sqrt{p-1}\left(2\pi(q-1)u v_n(u) - \frac{dv_n}{du}(u)\right).$$

Από την $f_0 = a_p e^{-\pi x^2}$ έχουμε

$$v_0(u) = a_p e^{-\pi u^2} = A_p f_0(u).$$

Συγκρίνοντας τις αναδρομικές σχέσεις που ικανοποιούν οι ακολουθίες (f_n) και (v_n) συμπεραίνουμε ότι

$$v_n = A_p(-is)^n J_q^{-1}(h_n)$$

δηλαδή,

$$T_p(h_n) = A_p(-is)^n h_n.$$

Άρα, $T_p = A_p M_{is}$ και από την ανισότητα του Beckner έχουμε

$$\|T_p : L^p(\gamma_1) \to L^q(\gamma_1)\| \leq A_p.$$

Τώρα, η

$$\|T_p : L^p(\mathbb{R}) \to L^q(\mathbb{R})\| \leq A_p$$

προκύπτει από το γεγονός ότι οι J_p και J_q είναι ισομετρίες. $\square$

Κεφάλαιο 4

Ημιομάδα Ornstein–Uhlenbeck

4.1 Ορισμός και βασικές ιδιότητες

Ορισμός 4.1.1. Η ημιομάδα Ornstein–Uhlenbeck ορίζεται στον $L^p(\gamma)$ ως εξής. Για κάθε $f \in L^p(\gamma)$ και για κάθε $t \geq 0$ ορίζουμε

$$(T_t f)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(e^{-t}x + \sqrt{1 - e^{-2t}}y)\, d\gamma(y).$$

Η $T_t f$ είναι καλά ορισμένη: χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι το γ είναι η εικόνα του $\gamma \otimes \gamma$ μέσω της

$$(x, y) \mapsto e^{-t}x + \sqrt{1 - e^{-2t}}y$$

και χρησιμοποιώντας το θεώρημα Fubini βλέπουμε ότι: αφού

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p d\gamma(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left| f\left(e^{-t}x + \sqrt{1 - e^{-2t}}y \right) \right|^p d\gamma(x) \right) d\gamma(y),$$

η συνάρτηση $T_t f$ ανήκει στον $L^p(\gamma)$ και

$$\|T_t f\|_{L^p(\gamma)} \leq \|f\|_{L^p(\gamma)}.$$

Δουλεύουμε στο χώρο $W^{2,1}(\gamma)$, ο οποίος είναι η πλήρωση του $C_0(\mathbb{R}^n)$ ως προς τη νόρμα Sobolev

$$\|f\|_{2,1} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^2 d\gamma(x) + \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla f(x)|^2 d\gamma(x) \right)^{1/2}.$$

Βασικές ιδιότητες, οι οποίες ελέγχονται άμεσα από τον ορισμό, είναι οι εξής:

(i) Για κάθε f,

$$T_0 f = f, \qquad T_{t+s} f = T_t(T_s f), \qquad T_\infty f = \lim_{t \to \infty} T_t f \equiv \int f\, d\gamma.$$

(ii) Για κάθε $t \geq 0$,

$$\int_{\mathbb{R}^n} T_t f \, d\gamma = \int_{\mathbb{R}^n} f \, d\gamma.$$

(iii) Για κάθε $t \geq 0$,

$$[T_t(fg)]^2 \leq T_t(f^2) \cdot T_t(g^2).$$

(iv) Αν $f \leq g$ τότε $T_t f \leq T_t g$.

(v) Για κάθε f, g και $a, b \in \mathbb{R}$, $T_t(af + bg) = aT_t(f) + bT_t(g)$. Επίσης, $T_t(1) \equiv 1$.

(vi) Αν ορίσουμε $T_t(g_1, \ldots, g_n) = (T_t(g_1), \ldots, T_t(g_n))$ τότε

$$\nabla T_t(f) = e^{-t} T_t(\nabla f).$$

Ορισμός 4.1.2. Ο γεννήτορας L της ημιομάδας ορίζεται στον $W^{2,2}(\gamma)$ από την

$$(Lf)(x) = \lim_{t \to 0} \frac{T_t f(x) - f(x)}{t}$$

και ικανοποιεί τις

$$\frac{d}{dt}(T_t f) = L T_t f = T_t L f$$

και

$$(Lf)(x) = \Delta f(x) - \langle x, \nabla f(x) \rangle.$$

Για την απόδειξη γράφουμε

$$\begin{aligned} L(T_t f) &= \frac{d}{dt}\left(\int_{\mathbb{R}^n} f(e^{-t}x + \sqrt{1 - e^{-2t}} y) \, d\gamma(y) \right) \\ &= -\int_{\mathbb{R}^n} \langle \nabla f(e^{-t}x + \sqrt{1 - e^{-2t}} y), e^{-t}x \rangle \, d\gamma(y) \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^n} \left\langle \nabla f(e^{-t}x + \sqrt{1 - e^{-2t}} y), \frac{e^{-2t}}{\sqrt{1 - e^{-2t}}} y \right\rangle \, d\gamma(y), \end{aligned}$$

και παίρνουμε $t \to 0^+$. Ο πρώτος όρος τείνει στο

$$-\int_{\mathbb{R}^n} \langle \nabla f(x), x \rangle \, d\gamma(y) = -\langle \nabla f(x), x \rangle,$$

ενώ ο δεύτερος γράφεται στη μορφή

$$-\int_{\mathbb{R}^n} \langle \nabla g_t(y), \nabla h(y) \rangle \, dy,$$

όπου

$$h(y) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} e^{-\|y\|_2^2/2} \quad \text{και} \quad g_t(y) = f(e^{-t}x + \sqrt{1-e^{-2t}}y),$$

άρα ισούται με

$$\int_{\mathbb{R}^n} \Delta g_t(y) \, \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} e^{-\|y\|_2^2/2} \, dy \to \int_{\mathbb{R}^n} \Delta f(x) \, d\gamma(y) = \Delta f(x)$$

καθώς το $t \to 0^+$. Έπεται ότι

$$(Lf)(x) = \lim_{t\to 0} \big(L(T_t f)\big)(x) = \Delta f(x) - \langle \nabla f(x), x\rangle.$$

Μια άλλη ιδιότητα του L, η οποία προκύπτει από την προηγούμενη με εφαρμογή του τύπου του Green, είναι η εξής: για κάθε $f \in W^{2,2}(\gamma)$ και $g \in W^{2,1}(\gamma)$,

$$\int_{\mathbb{R}^n} Lf \cdot g \, d\gamma = -\int_{\mathbb{R}^n} \langle \nabla f, \nabla g\rangle \, d\gamma.$$

4.2 Δεύτερη απόδειξη της λογαριθμικής ανισότητας Sobolev

Θεώρημα 4.2.1 (λογαριθμική ανισότητα Sobolev). *Για κάθε $f \in W^{2,1}(\gamma)$ ισχύει η ανισότητα*

$$\int_{\mathbb{R}^n} f^2 \, \log|f| \, d\gamma - \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n} f^2 \, d\gamma \cdot \log\left(\int_{\mathbb{R}^n} f^2 \, d\gamma\right) \leq \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla f|^2 d\gamma,$$

δηλαδή

$$\int |f|^2 \log|f| \, d\gamma \leq \int |\nabla f|^2 d\gamma + \|f\|_2^2 \log \|f\|_2,$$

με τη σύμβαση $f^2 \log|f| = 0$ αν $f = 0$.

Απόδειξη. Θα υποθέσουμε ότι $f \in C_b^\infty(\mathbb{R}^n)$ και $f \geq c > 0$. Θέτουμε $\phi = f^2$, οπότε $\nabla f = \frac{\nabla\phi}{2\sqrt{\phi}}$ και η ανισότητα παίρνει τη μορφή

$$\int_{\mathbb{R}^n} \phi \, \log\phi \, d\gamma - \int_{\mathbb{R}^n} \phi \, d\gamma \cdot \log\left(\int_{\mathbb{R}^n} \phi \, d\gamma\right) \leq \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|\nabla\phi|^2}{\phi} \, d\gamma.$$

Παρατηρούμε ότι το αριστερό μέλος είναι ίσο με

$$\int_{\mathbb{R}^n} T_0\phi \cdot \log T_0\phi - \int_{\mathbb{R}^n} T_\infty\phi \cdot \log T_\infty\phi,$$

πορούμε λοιπόν να το γράψουμε στη μορφή

$$-\int_0^\infty \left(\frac{d}{dt}\left[\int_{\mathbb{R}^n} T_t\phi \cdot \log T_t\phi \, d\gamma\right]\right) dt.$$

Όμως,

$$\frac{d}{dt}\left[\int_{\mathbb{R}^n} T_t\phi\cdot\log T_t\phi\,d\gamma\right]=\int_{\mathbb{R}^n}\left\{LT_t\phi\cdot\log T_t\phi+\frac{d}{dt}T_t\phi\right\}$$

και

$$\begin{aligned}\int_0^\infty\int_{\mathbb{R}^n}\frac{d}{dt}T_t\phi &= \int_{\mathbb{R}^n}T_\infty\phi\,d\gamma-\int_{\mathbb{R}^n}T_0\phi\,d\gamma\\ &= \int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{\mathbb{R}^n}\phi\,d\gamma\right)d\gamma-\int_{\mathbb{R}^n}\phi\,d\gamma=0.\end{aligned}$$

Συνεπώς, το αριστερό μέλος της $(*)$ είναι ίσο με

$$\begin{aligned}-\int_0^\infty\int_{\mathbb{R}^n}LT_tf\cdot\log T_t\phi\,d\gamma &= \int_0^\infty\int_{\mathbb{R}^n}\langle\nabla T_t\phi,\nabla\log T_t\phi\rangle\,d\gamma\,dt\\ &= \int_0^\infty\int_{\mathbb{R}^n}\frac{|\nabla T_t\phi|^2}{T_t\phi}\,d\gamma\,dt.\end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας την

$$|T_t\partial_{x_i}\phi|^2=\left|T_t\left(\sqrt{\phi}\cdot\frac{\partial_{x_i}\phi}{\sqrt{\phi}}\right)\right|^2\leq T_t\phi\cdot T_t\left(\frac{(\partial_{x_i}\phi)^2}{\phi}\right),$$

συμπεραίνουμε ότι

$$\begin{aligned}|\nabla T_t\phi|^2 &= e^{-2t}|T_t(\nabla\phi)|^2=e^{-2t}\sum_{i=1}^n|T_t\partial_{x_i}\phi|^2\\ &\leq e^{-2t}T_t\phi\cdot\sum_{i=1}^nT_t\left(\frac{(\partial_{x_i}\phi)^2}{\phi}\right).\end{aligned}$$

Έπεται ότι

$$\begin{aligned}\int_0^\infty\int_{\mathbb{R}^n}\frac{|\nabla T_t\phi|^2}{T_t\phi}\,d\gamma\,dt &\leq \int_0^\infty e^{-2t}\int_{\mathbb{R}^n}\sum_{i=1}^nT_t\left(\frac{(\partial_{x_i}\phi)^2}{\phi}\right)d\gamma\,dt\\ &= \int_0^\infty e^{-2t}\int_{\mathbb{R}^n}T_t\left(\frac{|\nabla\phi|^2}{\phi}\right)d\gamma\,dt\\ &= \int_0^\infty e^{-2t}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{|\nabla\phi|^2}{\phi}\,d\gamma\,dt\\ &= \int_0^\infty e^{-2t}\,dt\cdot\int_{\mathbb{R}^n}\frac{|\nabla\phi|^2}{\phi}\,d\gamma\\ &= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{|\nabla\phi|^2}{\phi}\,d\gamma,\end{aligned}$$

και η απόδειξη είναι πλήρης. □

Θεώρημα 4.2.2 (ανισότητα Poincaré). *Για κάθε $f \in W^{2,1}(\gamma)$ ισχύει η ανισότητα*

$$\int_{\mathbb{R}^n} f^2\, d\gamma - \left(\int_{\mathbb{R}^n} f\, d\gamma\right)^2 \leq \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla f|^2 d\gamma.$$

Απόδειξη. Χρησιμοποιώντας την ίδια πορεία με αυτήν της προηγούμενης απόδειξης, γράφουμε

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} f^2\, d\gamma - \left(\int_{\mathbb{R}^n} f\, d\gamma\right)^2 &= \int_{\mathbb{R}^n} (T_0 f)^2\, d\gamma - (T_\infty f)^2 \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} (T_0 f)^2\, d\gamma - \int_{\mathbb{R}^n} (T_\infty f)^2\, d\gamma \\
&= -\int_0^\infty \frac{d}{dt}\left(\int_{\mathbb{R}^n} (T_t f)^2\right) dt \\
&= -\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} 2T_t f \cdot LT_t f\, d\gamma\, dt \\
&= 2\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} \langle \nabla T_t f, \nabla T_t f\rangle\, d\gamma\, dt \\
&= 2\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla T_t f|^2 d\gamma\, dt.
\end{aligned}$$

Τώρα,

$$\begin{aligned}
2\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla T_t f|^2 d\gamma\, dt &= 2\int_0^\infty e^{-2t} \int_{\mathbb{R}^n} |T_t(\nabla f)|^2 d\gamma\, dt \\
&= 2\int_0^\infty e^{-2t} \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{i=1}^n \big(T_t(\partial_{x_i} f)\big)^2 \\
&\leq 2\int_0^\infty e^{-2t} \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{i=1}^n T_t(1^2) T_t((\partial_{x_i} f)^2) \\
&= 2\int_0^\infty e^{-2t} \int_{\mathbb{R}^n} T_t(|\nabla f|^2)\, d\gamma\, dt \\
&= 2\int_0^\infty e^{-2t} \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla f|^2 d\gamma\, dt \\
&= 2\int_0^\infty e^{-2t} dt \cdot \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla f|^2 d\gamma \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla f|^2 d\gamma.
\end{aligned}$$

Έχουμε έτσι ευθεία απόδειξη της ανισότητας του Poincaré μέσω της ημιόμάδας Ornstein-Uhlenbeck. □

Η λογαριθμική ανισότητα Sobolev είναι ισχυρότερη από την ανισότητα Poincaré και αυτό φαίνεται από το γεγονός ότι η δεύτερη είναι συνέπεια της πρώτης: αν μας δοθεί η f, θεωρούμε την

$$g = f - \int_{\mathbb{R}^n} f\, d\gamma,$$

οπότε $\nabla g = \nabla f$ και για την ζητούμενη ανισότητα αρκεί να δείξουμε ότι, αν $\int g\, d\gamma = 0$ τότε

$$\int_{\mathbb{R}^n} g^2 d\gamma \leq \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla g|^2 d\gamma.$$

Χωρίς περιορισμό της γενικότητας μπορούμε επίσης να υποθέσουμε ότι

$$\int_{\mathbb{R}^n} g^2 d\gamma = 1.$$

Εφαρμόζουμε τη λογαριθμική ανισότητα Sobolev για την $1+\epsilon g$, με $\epsilon > 0$ μικρό: ξεκινώντας από την

$$\int_{\mathbb{R}^n} (1+\epsilon g)^2 \log(1+\epsilon g)\, d\gamma - \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n} (1+\epsilon g)^2 d\gamma \cdot \log\left(\int_{\mathbb{R}^n} (1+\epsilon g)^2 d\gamma\right) \leq \epsilon^2 \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla g|^2 d\gamma$$

και κάνοντας πράξεις, παίρνουμε

$$\int_{\mathbb{R}^n} (1+2\epsilon g+\epsilon^2 g^2)^2 (\epsilon g - \epsilon^2 g^2/2\, d\gamma - \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n} (1+\epsilon^2)\log(1+\epsilon^2) \leq \epsilon^2 \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla g|^2 d\gamma + O(\epsilon^3),$$

δηλαδή

$$2\epsilon^2 - \frac{\epsilon^2}{2} - \frac{1+\epsilon^2}{2}\epsilon^3 \leq \epsilon^2 \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla g|^2 d\gamma + O(\epsilon^3).$$

Έπεται ότι

$$1 \leq \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla g|^2 d\gamma + O(\epsilon^3)$$

και αφήνοντας το $\epsilon \to 0^+$ παίρνουμε

$$\int_{\mathbb{R}^n} g^2 d\gamma = 1 \leq \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla g|^2 d\gamma.$$

4.3 Η ισοπεριμετρική ανισότητα στο χώρο του Gauss

Θεώρημα 4.3.1. *Αν $U = \phi \circ \Phi^{-1}$ τότε*

$$U\left(\int_{\mathbb{R}^n} f\, d\gamma\right) \leq \int_{\mathbb{R}^n} \sqrt{U^2(f) + |\nabla f|^2}\, d\gamma.$$

Απόδειξη. Ορίζουμε
$$J(t)=\int_{\mathbb{R}^n}\sqrt{U^2(T_tf)+|\nabla T_tf|^2}\,d\gamma$$
και δείχνουμε αρχικά ότι $J'\leq 0$. Τότε, η ανισότητα $J(0)\geq J(\infty)$ μας δίνει το ζητούμενο: παρατηρήστε ότι
$$\begin{aligned} U\left(\int_{\mathbb{R}^n}f\,d\gamma\right) &= U(T_\infty f)=\int_{\mathbb{R}^n}\sqrt{U^2(T_\infty f)+|\nabla T_\infty f|^2}\,d\gamma \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n}\sqrt{U^2(T_0f)+|\nabla T_0f|^2}\,d\gamma \\ &= \int_{\mathbb{R}^n}\sqrt{U^2(f)+|\nabla f|^2}\,d\gamma. \end{aligned}$$
Υπολογίζουμε την παράγωγο της J: αν θέσουμε $g=T_tf$, τότε
$$J'(t)=\int_{\mathbb{R}^n}\frac{(UU')(g)L(g)+\langle\nabla g,\nabla(Lg)\rangle}{\sqrt{U^2(g)+|\nabla g|^2}}\,d\gamma.$$
Θέτουμε $K(g)=U^2(g)+|\nabla g|^2$ και θεωρούμε χωριστά τα
$$(I)\qquad\int_{\mathbb{R}^n}\frac{(UU')(g)L(g)}{\sqrt{K(g)}}\,d\gamma\ \text{ και }\ (II)\qquad\int_{\mathbb{R}^n}\frac{\langle\nabla g,\nabla(Lg)\rangle}{\sqrt{K(g)}}\,d\gamma.$$
Για ευκολία στο συμβολισμό υποθέτουμε ότι $n=1$. Θα χρησιμοποιήσουμε τις

(i) $\int\alpha L\beta=-\int\alpha'\beta'$.

(ii) $L\beta=\beta''-x\beta'$, άρα
$$\langle\nabla g,\nabla(Lg)\rangle=g'(g''-xg')'=g'L(g')-(g')^2.$$

(iii) $K'=2(UU')(g)\cdot g'+2g'g''$.

(iv) $UU''\equiv-1$. Πράγματι, παραγωγίζοντας βλέπουμε ότι
$$U'(x)=-\Phi^{-1}(x),$$
απ' όπου έπεται ότι
$$U''(x)=-\frac{1}{\phi(\Phi^{-1}(x))}=-\frac{1}{U(x)}.$$

Για το (I) γράφουμε
$$\int_{\mathbb{R}^n}\frac{(UU'(g)}{\sqrt{K(g)}}L(g)=-\int_{\mathbb{R}^n}\left(\frac{(UU')(g)}{\sqrt{K(g)}}\right)'g'$$

και παρατηρούμε ότι

$$\left(\frac{UU'}{\sqrt{K}}\right)' g' = \frac{\big((U')^2-1\big)(g')^2}{\sqrt{K}} - \frac{(UU')(g')^2[UU'+g'']}{K^{3/2}},$$

οπότε

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{(UU'(g)}{\sqrt{K(g)}} L(g) = -\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\big((U')^2-1\big)(g')^2}{\sqrt{K}} + \int_{\mathbb{R}^n} \frac{(UU')(g')^2[UU'+g'']}{K^{3/2}}.$$

Για το (II) χρησιμοποιώντας την

$$\frac{\langle \nabla g, \nabla(Lg)\rangle}{\sqrt{K(g)}} = \frac{g'Lg'-(g')^2}{\sqrt{K(g)}}$$

παίρνουμε

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\langle \nabla g, \nabla(Lg)\rangle}{\sqrt{K(g)}} &= -\int_{\mathbb{R}^n} \frac{(g')^2}{\sqrt{K(g)}} - \int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{g'}{\sqrt{K(g)}}\right)' g'' \\
&= -\int_{\mathbb{R}^n} \frac{(g')^2}{\sqrt{K(g)}} - \int_{\mathbb{R}^n} \frac{(g'')^2}{\sqrt{K(g)}} + \int_{\mathbb{R}^n} \frac{g'g''[(UU')(g)g'+g'g'']}{K(g)^{3/2}}.
\end{aligned}$$

Προσθέτοντας, παίρνουμε

$$\begin{aligned}
J'(t) &= -\int_{\mathbb{R}^n} \frac{(U')^2(g')^2}{\sqrt{K(g)}} + \int_{\mathbb{R}^n} \frac{(UU')(g')^2[UU'+g'']}{K^{3/2}} \\
&\quad -\int_{\mathbb{R}^n} \frac{(g'')^2}{\sqrt{K(g)}} + int_{\mathbb{R}^n} \frac{(g')^2 g''[(UU')(g)+g'']}{K(g)^{3/2}} \\
&= -\int_{\mathbb{R}^n} \frac{[(U')^2(g')^2+(g'')^2][U^2+(g')^2]-(g')^2[(UU')+g'']^2}{K(g)^{3/2}} \\
&= -\int_{\mathbb{R}^n} \frac{(g''U(g)-(g')^2U'(g))^2}{K(g)^{3/2}}\, d\gamma \leq 0.
\end{aligned}$$

Δηλαδή, η J είναι φθίνουσα. □

Ορισμός 4.3.2. Για κάθε Borel υποσύνολο A του $\mathbb{R}^n$, η επιφάνεια του A ορίζεται να είναι η ποσότητα

$$\gamma^+(A) = \liminf_{r\to 0^+} \frac{\gamma(A_r)-\gamma(A)}{r}$$

όπου $A_r = \{x \in \mathbb{R}^n : d(x,A) \leq r\}$.

Θεώρημα 4.3.3. *Για κάθε Borel υποσύνολο A του $\mathbb{R}^n$ με $0 < \gamma(A) < 1$,*

$$\gamma^+(A) \geq \gamma^+(H),$$

όπου $H = \{x \in \mathbb{R}^n : x_1 \leq a\}$ ημίχωρος με $\gamma(H) = \gamma(A)$.

Απόδειξη. Παρατηρούμε πρώτα ότι

$$\begin{aligned} \gamma^+(H) &= \lim_{r\to 0} \frac{\gamma(H_r) - \gamma(H)}{r} = \lim_{r\to 0} \frac{\Phi(a+r) - \Phi(a)}{r} \\ &= \phi(a) = \phi(\Phi^{-1}(\gamma(H))) = \phi(\Phi^{-1}(\gamma(H))) \\ &= U(\gamma(A)). \end{aligned}$$

Άρα, η ζητούμενη ανισότητα παίρνει τη μορφή

$$\gamma^+(A) \geq U(\gamma(A)).$$

Για $r > 0$ μικρό, ορίζουμε

$$f_r(x) = \left(1 - \frac{1}{r} d(x, A)\right)^+.$$

Η f_r ισούται με 1 στο A και με 0 στο $\overline{A_r}^c$. Δηλαδή, $f_r \to \chi_A$ σχεδόν παντού. Επομένως, όταν το $r \to 0^+$ έχουμε

$$U\left(\int_{\mathbb{R}^n} f_r \, d\gamma\right) \to U\left(\int_{\mathbb{R}^n} \chi_A \, d\gamma\right) = U(\gamma(A)).$$

Επίσης, $U(f_r) = 0$ γιατί $U(0) = U(1) = 0$ και $|\nabla f| \leq 1/r$, $\nabla f = 0$ στα A, $\overline{A_r}^c$. Άρα,

$$\liminf_{r\to 0^+} \int_{\mathbb{R}^n} \sqrt{U^2(f_r) + |\nabla f_r|^2} \, d\gamma \leq \liminf_{r\to 0^+} \frac{\gamma(A_r) - \gamma(A)}{r} = \gamma^+(A)).$$

Αφού

$$U\left(\int_{\mathbb{R}^n} f_r d\gamma\right) \leq \int_{\mathbb{R}^n} \sqrt{U^2(f_r) + |\nabla f_r|^2} \, d\gamma$$

για κάθε $r > 0$, έπεται η $U(\gamma(A)) \leq \gamma^+(A)$. $\square$

Κεφάλαιο 5

Ανισότητα Brunn-Minkowski και λογαριθμική ανισότητα Sobolev

5.1 Τρίτη απόδειξη της λογαριθμικής ανισότητας Sobolev

Έστω $E = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ χώρος πεπερασμένης διάστασης με νόρμα και έστω $E^* = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_*)$ ο δυϊκός του χώρος. Θεωρούμε ένα μέτρο πιθανότητας μ στον E με συνάρτηση πυκνότητας την $e^{-V(x)}$, όπου $V(x)$ κυρτή συνάρτηση ορισμένη σε ένα ανοιχτό κυρτό υποσύνολο Ω του E. Επιπλέον, υποθέτουμε ότι υπάρχει σταθερά $c > 0$ τέτοια ώστε: για κάθε $s, t > 0$ με $s + t = 1$ και για κάθε $x, y \in \Omega$ ισχύει

$$tV(x) + sV(y) - V(tx + sy) \geq \frac{cts}{2}\|x - y\|^2.$$

Έστω $f \in C^\infty(\Omega)$. Η εντροπία της f^2 ως προς το μ ορίζεται ως εξής:

$$\mathrm{Ent}_\mu(f^2) = \int f^2 \log f^2 d\mu - \int f^2 d\mu \cdot \log \int f^2 d\mu.$$

Θα αποδείξουμε την εξής ανισότητα.

Θεώρημα 5.1.1. *Για κάθε $f \in C^\infty(\Omega)$,*

$$\mathrm{Ent}_\mu(f^2) \leq \frac{2}{c} \int \|\nabla f\|_*^2 d\mu.$$

Απόδειξη. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $f^2 = e^g$ όπου $g \in C_b^\infty(\Omega)$, δηλαδή η g έχει συμπαγή φορέα στο Ω και φραγμένες μερικές παραγώγους. Έστω $t, s > 0$ με $t + s = 1$.

Θεωρούμε τις συναρτήσεις

$$u(x) = e^{g(x)/t - V(x)},\ v(y) = e^{-V(y)} \text{ και } w(z) = e^{g_t(z) - V(z)},$$

όπου

$$g_t(z) = \sup\{g(x) - [tV(x) + sV(y) - V(tx+sy)] : z = tx+sy, x, y \in \Omega\}.$$

Οι συναρτησεις $u, v, w : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$ είναι μετρήσιμες. Επίσης, αν $z = tx + sy$ ισχύει: $w(z) \geq u(t)^t u(y)^s$. Πράγματι:

$$\begin{aligned}
u^t(x)v^s(y) &= \exp(g(x) - tV(x))\exp(-sV(y)) \\
&= \exp(g(x) - tV(x) - sV(y)) \\
&= \exp(g(x) - [tV(x) + sV(y) - V(tx+sy)] - V(tx+sy)) \\
&\leq \exp\left(\sup_{z=tx+sy:x,y\in\Omega}\{g(x) - [tV(x) + sV(y) - V(tx+sy)]\} - V(tx+sy)\right) \\
&= w(z).
\end{aligned}$$

Εφαρμόζοντας την ανισότητα Prékopa–Leindler έχουμε:

$$\begin{aligned}
\int e^{g_t} d\mu &= \int e^{g_t(z) - V(z)} dx \\
&\geq \left(\int e^{g(x)/t - V(x)} dx\right)^t \left(\int e^{-V(x)}\right)^s \\
&= \left(\int e^{g/t} d\mu\right)^t.
\end{aligned}$$

Αναπτύσσοντας το δεξιό μέλος γύρω από το $t = 1$ παίρνουμε

$$\left(\int e^{g/t} d\mu\right)^t = \int e^g d\mu + s\,\mathrm{Ent}_\mu(e^g) + O(s^2).$$

Πράγματι, έστω $h(t) = (\int e^{g/t} d\mu)^t = e^{t \log \int e^{g/t} d\mu}$. Τότε,

$$h(t) = h(1) + h'(1)(t-1) + O((t-1)^2) = h(1) - h'(1)s + O(s^2).$$

Όμως,

$$h'(t) = \left(\int e^{g/t} d\mu\right)^t \left(\log \int e^{g/t} d\mu - \frac{\int e^g g d\mu}{t \int e^g d\mu}\right),$$

άρα $h'(1) = -\mathrm{Ent}_\mu(e^g)$ οπότε έχουμε το ζητούμενο.

Περνάμε τώρα στο αριστερό μέλος. Από την υπόθεση,

$$g(x) - [tV(x) + sV(y) - V(tx+sy)] \leq g(x) - \frac{cts}{2}\|x-y\|^2$$

για κάθε $x, y \in \Omega$. Από τον ορισμό της g_t έπεται ότι

$$g_t(z) \leq \sup\left\{g(x) - \frac{cts\|x-y\|^2}{2} : z = tx + sy,\ x, y \in \Omega\right\}.$$

Απο την $z = tx + sy$ έχουμε

$$z - y = tx + sy - y = tx - (1-s)y = tx - ty = t(x-y),$$

άρα

$$x - y = \frac{1}{t}(z-y).$$

Επίσης,

$$tx = z - sy = tz + sz - sy = tz + s(z-y),$$

άρα

$$x = z + \frac{s(z-y)}{t}.$$

Αν λοιπόν θέσουμε $h = z - y$ και $\eta = \frac{s}{t}$, τότε

$$g_t(z) \leq \sup_{h \in E}\left\{g(z+\eta h) - \frac{c\eta\|h\|^2}{2}\right\}.$$

Ισχυρισμός. Από το θεώρημα του Taylor,

$$g(z+\eta h) = g(z) + \eta\langle\nabla g(z), h\rangle + \eta^2 O(\|h\|^2),$$

όπου $O(\|h\|^2) \leq C\|h\|^2$ και η C είναι ανεξάρτητη του z.

Απόδειξη. Θέτουμε $w = \eta h$ και θεωρούμε το υπόλοιπο

$$\begin{aligned} R_1(w, z_0) &= \sum_{i,j=1}^{n}\int_0^1 (1-t)\frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_j}(z_0+tw)w_i w_j dt \\ &= \int_0^1 \sum_{i,j=1}^{n}(1-t)\frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_j}(z_0+tw)w_i w_j dt \\ &= \int_0^1 (1-t)\langle A_{z_0+tw}w, w\rangle dt. \end{aligned}$$

Ο $A_{z_0+tw} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ είναι τελεστής με πίνακα την Εσσιανή της g. Από το γεγονός ότι η g έχει φραγμένες μερικές παραγώγους, ελέγχουμε εύκολα ότι

$$\|A_{z_0+tw} : \ell_2^n \to \ell_2^n\| \leq \sqrt{n}\max_j \sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_j}(z_0+tw)\right| \leq M$$

όπου M σταθερά ανεξάρτητη από το $z_0 + tw$. Άρα,

$$\begin{aligned}|R_1(w,z_0)| &= \left|\int_0^1 (1-t)\langle A_{z_0+tw}w, w\rangle dt\right| \\ &\leq \int_0^1 (1-t)|\langle A_{z_0+tw}w, w\rangle| dt \\ &\leq \int_0^1 \|A_{z_0+tw}w\|_2 \|w\|_2 dt \\ &\leq Mr^2\|w\|^2.\end{aligned}$$

όπου $r = \|I : E \to \ell_2^n\|$. Θέτοντας $C = Mr^2$ έχουμε αποδείξει τον ισχυρισμό. □

Χρησιμοποιώντας τον ισχυρισμό γράφουμε

$$\begin{aligned}g_t(z) &\leq \sup\{g(z) + \eta\langle\nabla g(z), h\rangle + C\eta^2 O(\|h\|^2) - \frac{c\eta}{2}\|h\|^2\} \\ &= g(z) + \eta \sup\left\{\langle\nabla g(z), h > -(\frac{c}{2} - \eta C)\|h\|^2\right\}.\end{aligned}$$

Κάθε $h \in \mathbb{R}^n$ γράφεται στη μορφή $h = \lambda e$ όπου $\lambda \geq 0$ και $\|e\| = 1$. Άρα, αν θέσουμε $\theta = c - 2\eta C$,

$$\begin{aligned}g_t(z) &\leq g(z) + \eta \sup_{\lambda\geq 0} \sup_{\|e\|=1} \left\{\lambda\langle\nabla g(z), e\rangle - \left(\frac{c}{2} - \eta C\right)\lambda^2\right\} \\ &= g(z) + \eta \sup\left\{\lambda\|\nabla g(z)\|_* - \theta\frac{\lambda^2}{2} : \lambda \geq 0\right\} \\ &= g(z) + \eta\frac{\|\nabla g(z)\|_*^2}{2\theta}.\end{aligned}$$

Εύκολα ελέγχουμε ότι

$$\frac{\eta}{2\theta} = \frac{\eta}{2c} + O(\eta^2), \qquad |\eta| < \frac{c}{2C}$$

και αφού η νόρμα $\|\nabla g(z)\|_*$ είναι ομοιόμορφα φραγμένη παίρνουμε

$$\frac{\eta}{2\theta}\|\nabla g(z)\|_*^2 = \frac{\eta}{2c}\|\nabla g(z)\|_*^2 + O(\eta^2).$$

Άρα,

$$g_t(z) \leq g(z) + \frac{\eta}{2c}\|\nabla g(z)\|_*^2 + O(\eta^2).$$

Απο τύπο του Taylor για την $x \mapsto e^x$ στο x έχουμε

$$e^y = e^x + e^x(y-x) + O((y-x)^2).$$

Άρα,

$$\begin{aligned}\exp(g_t(z)) &\leq \exp\Big(g(z) + \frac{\eta}{2c}\|\nabla g(z)\|_*^2 + O(\eta^2)\Big)\\ &\leq \exp(g(z)) + \exp(g(z))\frac{\eta}{2c}\|\nabla g(z)\|_*^2 + O(\eta^2).\end{aligned}$$

Συνεπώς,

$$\begin{aligned}\int e^{g_t(z)}d\mu &\leq \int e^{g(z)}d\mu + \frac{\eta}{2c}\int \|\nabla g(z)\|_*^2 e^{g(z)}d\mu + \int O(\eta^2)d\mu\\ &= \int e^{g(z)}d\mu + \frac{\eta}{2c}\int \|\nabla g(z)\|_*^2 e^{g(z)}d\mu + O(\eta^2).\end{aligned}$$

Συνδυάζοντας τα παραπάνω με την ανισότητα $\big(\int e^{g/t}d\mu\big)^t \leq \int e^{g_t}d\mu$ βλέπουμε ότι

$$s\,\mathrm{Ent}_\mu(e^g) \leq \frac{\eta}{2c}\int \|\nabla g\|_*^2 e^g d\mu + O(s^2),$$

άρα

$$\mathrm{Ent}_\mu(e^g) \leq \frac{1}{2c(1-s)}\int \|\nabla g\|_*^2 e^g d\mu + O(s).$$

Παίρνοντας $s \to 0$ καταλήγουμε στην

$$(*) \qquad \mathrm{Ent}_\mu(e^g) \leq \frac{1}{2c}\int \|\nabla g\|_*^2 e^g d\mu.$$

Από την $f = e^{g/2}$ βλέπουμε ότι $2(\nabla f) = e^{g/2}\nabla g$, άρα $4\|\nabla f\|^2 = e^g\|g\|^2$. Επιστρέφοντας στην $(*)$ παίρνουμε

$$\mathrm{Ent}_\mu(f^2) = \mathrm{Ent}_\mu(e^g) \leq \frac{1}{2c}\int 4\|f\|^2 d\mu = \frac{2}{c}\int \|\nabla f\|^2 d\mu.$$

□

Κεφάλαιο 6

Λογαριθμική ανισότητα Sobolev και συγκέντρωση του μέτρου

6.1 Το επιχείρημα του Herbst

Σε αυτή την παράγραφο, χρησιμοποιώντας τη λογαριθμική ανισότητα Sobolev, θα αποδείξουμε τη συναρτησιακή μορφή της «ανισότητας συγκέντρωσης για το μέτρο του Gauss»:

Θεώρημα 6.1.1. *Έστω $F:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ Lipschitz συνεχής συνάρτηση με $\|F\|_{\rm Lip}\leq 1$. Τότε, για κάθε $r>0$,*

$$\gamma_n\left(x:\left|F(x)-\int_{\mathbb{R}^n}F\,d\gamma_n\right|>r\right)\leq 2\exp(-r^2/2).$$

Πιο συγκεκριμένα, αν $\|F\|_{\rm Lip}\leq 1$ και $\int F\,d\gamma_n=0$, τότε

$$\int_{\mathbb{R}^n}e^{\lambda F}d\gamma_n\leq \exp\left(\frac{\lambda^2}{2}\right)$$

για κάθε $\lambda>0$.

Απόδειξη. Θέτουμε $f^2=e^{\lambda F}$, οπότε

$$\nabla(f)=\frac{\nabla(f^2)}{2f}=\frac{\lambda e^{\lambda F}\nabla(F)}{2e^{\lambda F/2}}=\frac{\lambda}{2}e^{\lambda F/2}\nabla(F).$$

Από τη λογαριθμική ανισότητα Sobolev,

$$\int_{\mathbb{R}^n}e^{\lambda F}\frac{\lambda F}{2}\,d\gamma_n-\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n}e^{\lambda F}d\gamma_n\cdot\log\left(\int_{\mathbb{R}^n}e^{\lambda F}d\gamma_n\right)\leq\frac{\lambda^2}{4}\int_{\mathbb{R}^n}e^{\lambda F}\|\nabla F\|_2^2d\gamma_n.$$

Όμως $\|\nabla F\|_2 \leq 1$ σχεδόν παντού, άρα

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{\lambda F}\|\nabla F\|_2^2 d\gamma_n \leq \int_{\mathbb{R}^n} e^{\lambda F} d\gamma_n.$$

Ορίζουμε

$$H(\lambda) := \int_{\mathbb{R}^n} e^{\lambda F} d\gamma_n.$$

Τότε, $H'(\lambda) = \int_{\mathbb{R}^n} F e^{\lambda F} d\gamma_n$. Άρα,

$$\frac{\lambda}{2}H'(\lambda) - \frac{1}{2}H(\lambda)\log H(\lambda) \leq \frac{\lambda^2}{4}H(\lambda).$$

Αν λοιπόν ορίσουμε

$$K(\lambda) = \frac{\log H(\lambda)}{\lambda},$$

εύκολα ελέγχουμε ότι $K'(\lambda) \leq \frac{1}{2}$. Έπεται ότι, για κάθε $\lambda > 0$,

$$K(\lambda) \leq K(0) + \frac{\lambda}{2}.$$

Όμως,

$$K(0) = \lim_{\lambda \to 0} \frac{H'(\lambda)}{H(\lambda)} = \lim_{\lambda \to 0} \frac{\int_{\mathbb{R}^n} F e^{\lambda F} d\gamma_n}{\int_{\mathbb{R}^n} e^{\lambda F} d\gamma_n} = \int_{\mathbb{R}^n} F\, d\gamma_n = 0.$$

Συνεπώς,

$$\frac{1}{\lambda}\log\left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{\lambda F} d\gamma_n\right) \leq \frac{\lambda}{2} \ \text{ και έπεται ότι } \int_{\mathbb{R}^n} e^{\lambda F} d\gamma_n \leq \exp(\lambda^2/2).$$

Έστω $r > 0$. Από την ανισότητα του Markov, για κάθε $\lambda > 0$ έχουμε

$$\gamma_n\left(x : \, F - \int_{\mathbb{R}^n} F\, d\gamma_n \geq r\right) \leq \exp\left(\frac{\lambda^2}{2} - \lambda r\right).$$

Επιλέγοντας $\lambda = r$ βλέπουμε ότι

$$\gamma_n\left(x : \, F - \int_{\mathbb{R}^n} F\, d\gamma_n \geq r\right) \leq \exp\left(-\frac{r^2}{2}\right),$$

και λόγω συμμετρίας (βάζοντας την F στη θέση της $-F$) παίρνουμε την

$$\gamma_n\left(x : \, -F + \int_{\mathbb{R}^n} F\, d\gamma_n \geq r\right) \leq \exp\left(-\frac{r^2}{2}\right).$$

Έπεται το ζητούμενο. $\square$

Μπορούμε να δώσουμε μια δεύτερη απόδειξη χρησιμοποιώντας απευθείας την ημιομάδα Ornstein-Uhlenbeck: ορίζουμε

$$G(t) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{\lambda T_t F} d\gamma_n.$$

Τότε,

$$G(0) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{\lambda F} d\gamma_n \quad \text{και} \quad G(\infty) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{\lambda \int F\, d\gamma_n} d\gamma_n = 1.$$

Συνεπώς,

$$\begin{aligned} G(t) &= 1 - \int_t^\infty G'(s)\, ds \\ &= 1 - \int_t^\infty \int_{\mathbb{R}^n} \lambda e^{\lambda T_s F} L T_s(F)\, d\gamma_n\, ds \\ &= 1 + \lambda \int_t^\infty \int_{\mathbb{R}^n} \langle \nabla e^{\lambda T_s F}, \nabla T_s F \rangle\, d\gamma_n\, ds \\ &= 1 + \lambda^2 \int_t^\infty \int_{\mathbb{R}^n} e^{\lambda T_s F} \|\nabla T_s F\|_2^2\, d\gamma_n\, ds \\ &= 1 + \lambda^2 \int_t^\infty \int_{\mathbb{R}^n} e^{\lambda T_s F} e^{-2s} \|T_s(\nabla F)\|_2^2 d\gamma_n\, ds. \end{aligned}$$

Όμως, από την $\|\nabla F\|_2 \leq 1$ έχουμε $\|T_s(\nabla F)\|_2^2 \leq 1$. Άρα,

$$G(t) \leq 1 + \lambda^2 \int_t^\infty e^{-2s} G(s)\, ds.$$

Ορίζουμε

$$H(t) := \log \left(1 + \lambda^2 \int_t^\infty e^{-2s} G(s)\, ds \right).$$

Τότε,

$$H'(t) = - \frac{\lambda^2 e^{-2t} G(t)}{1 + \lambda^2 \int_t^\infty e^{-2s} G(s)\, ds} \geq -\lambda^2 e^{-2t},$$

άρα

$$H(t) - H(0) \geq -\lambda^2 \int_0^\infty e^{-2t} dt = -\frac{\lambda^2}{2}.$$

Όμως, $\lim\limits_{t\to\infty} H(t) = 0$. Συνεπώς, $H(0) \leq \lambda^2/2$. Έπεται ότι

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{\lambda F} d\gamma_n = G(0) \leq e^{H(0)} \leq \exp(\lambda^2/2).$$

6.2 Εντροπία

Έστω $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ένας χώρος πιθανότητας. Για κάθε μη αρνητική συνάρτηση f στον Ω, η εντροπία της f ως προς το μ είναι η ποσότητα

$$\mathrm{Ent}_\mu(f) = \int_\Omega f \log f \, d\mu - \int_\Omega f \, d\mu \, \log \int_\Omega f \, d\mu \tag{6.1}$$

αν $\int f \log(1+f) \, d\mu < +\infty$, και $+\infty$ αλλιώς. Παρατηρήστε ότι $\mathrm{Ent}_\mu(f) \geq 0$ από την ανισότητα Jensen για τη συνάρτηση $f(x) = x \log x$ και ότι η εντροπία είναι ομογενής βαθμού 1. Θεωρούμε τον Ευκλείδειο χώρο $\mathbb{R}^n$ και ένα μέτρο πιθανότητας μ στα Borel υποσύνολά του. Λέμε ότι το μ ικανοποιεί τη λογαριθμική ανισότητα Sobolev αν υπάρχει σταθερά $C > 0$ ώστε για κάθε αρκετά ομαλή συνάρτηση f στον $\mathbb{R}^n$ ισχύει

$$\mathrm{Ent}_\mu(f^2) \, d\mu \leq 2C \int \|\nabla f\|_2^2 \, d\mu.$$

Όπως έχουμε ήδη δει, από τη λογαριθμική ανισότητα Sobolev προκύπτουν φράγματα Laplace, δηλαδή ανισότητες της μορφής

$$E_{(X,d,\mu)}(\lambda) \leq e^{\lambda^2/2C}, \ \ \lambda \geq 0,$$

όπου $E_{(X,d,\mu)}(\lambda)$ είναι το $\sup \left(\int e^{\lambda F} \, d\mu \right)$ πάνω από όλες τις 1–Lipschitz συναρτήσεις $F : (X, d, \mu) \to \mathbb{R}$ που έχουν μέση τιμή 0.

Σημείωση. Η λογαριθμική ανισότητα Sobolev έχει έννοια γενικότερα σε μετρικούς χώρους, αν ορίσουμε το μέτρο του gradient μιας τοπικά Lipschitz συνάρτησης f στο σημείο $x \in X$ από την

$$|\nabla f|(x) = \limsup_{y \to x} \frac{|f(x) - f(y)|}{d(x,y)}$$

Πρόταση 6.2.1. *Έστω μ ένα μέτρο πιθανότητας στα Borel υποσύνολα ενός μετρικού χώρου (X, d). Υποθέτουμε ότι για κάποια μη αρνητική συνάρτηση α ορισμένη στο $\mathbb{R}_+$ και για κάθε φραγμένη 1–Lipschitz συνάρτηση F στον (X, d) ισχύει*

$$\mu \left(\{ F \geq \int F \, d\mu + r \} \right) \leq \alpha(r),$$

για κάθε $r > 0$. Τότε

$$1 - \mu(A_r) \leq \alpha(\mu(A) r)$$

για κάθε Borel σύνολο A και $r > 0$. Ειδικότερα

$$\alpha_{(X,d,\mu)}(r) = \sup \left\{ 1 - \mu(A_r) : \ A \subset X, \ \mu(A) \geq \frac{1}{2} \right\} \leq \alpha \left(\frac{r}{2} \right), \ \ r > 0.$$

Επιπλέον, αν η α είναι τέτοια ώστε $\lim_{r \to +\infty} \alpha(r) = 0$, τότε κάθε 1–Lipschitz συνάρτηση είναι ολοκληρώσιμη ως προς το μ και αν είναι συνεχής ικανοποιεί την παραπάνω ανισότητα.

Απόδειξη: Έστω $A \subset X$, $\mu(A) > 0$ και $r > 0$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $F(x) = d(x, A)$, $x \in X$. Είναι φανερό ότι

$$\|F\|_{Lip} = \sup_{y \neq x} \frac{|F(x) - F(y)|}{d(x, y)} \leq 1$$

και

$$\int F \, d\mu = \int_A F \, d\mu + \int_{A^c} F \, d\mu \leq r(1 - \mu(A)),$$

οπότε

$$r \geq \int F \, d\mu + r\mu(A).$$

Τότε,

$$\begin{aligned} 1 - \mu(A_r) = \mu(A_r^c) &= \mu(\{F \geq r\}) \\ &\leq \mu(\{F \geq r\mu(A) + \int F \, d\mu\}) \\ &\leq \alpha(\mu(A)r) \end{aligned}$$

Έτσι, αν πάρουμε οποιοδήποτε $A \subset X$ με $\mu(A) \geq \frac{1}{2}$, έχουμε ότι

$$\begin{aligned} 1 - \mu(A_r) &\leq \mu\left(\left\{F \geq \int F \, d\mu + r\mu(A)\right\}\right) \\ &\leq \mu\left(\left\{F \geq \int f \, d\mu + \frac{1}{2}\right\}\right) \\ &\leq \alpha\left(\frac{r}{2}\right) \end{aligned}$$

Παίρνοντας supremum ως προς όλα τα $A \subset X$ με $\mu(A) \geq \frac{1}{2}$, συμπεραίνουμε ότι

$$\alpha_{(X,d,\mu)}(r) \leq \alpha\left(\frac{r}{2}\right), \quad r > 0.$$

Θεωρούμε τώρα μια 1–Lipschitz συνάρτηση F στον (X, d). Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ θέτουμε $F_n = \min(|F|, n)$. Κάθε F_n είναι 1–Lipschitz και φραγμένη. Εφαρμόζοντας την ανισότητα $\mu(\{F \geq \int F \, d\mu + r\}) \leq \alpha(r)$ για την $-F_n$ έχουμε ότι

$$\mu\left(\left\{F_n \leq \int F_n \, d\mu - r\right\}\right) \leq \alpha(r), \quad r > 0.$$

Επιλέγουμε m τέτοιο ώστε $\mu(\{|F| \leq m\}) \geq 1/2$ και $r_0 > 0$ ώστε $\alpha(r_0) < 1/2$ (υπάρχουν τέτοια αφού $\{|F| \leq m\} \uparrow X$ και $1 = \mu(X) = \mu(\cup_{m=1}^{\infty}\{|F| \leq m\}) = \lim_m \mu(\{|F| \leq m\})$

και $\lim_{r\to+\infty}\alpha(r)=0$.) Τότε για κάθε $n\in\mathbb{N}$, $\mu(\{F_n\le m\})\ge\frac{1}{2}$ και $\mu\left(\{F_n\le\int F_n\,d\mu-r_0\}\right)<\frac{1}{2}$, οπότε $\int F\,d\mu\le m+r_0$, ανεξάρτητα του n, αφού

$$\{F_n\le m\}\bigcap\left\{F_n\le\int F_n\,d\mu-r_0\right\}=\emptyset.$$

Αφού $F_n\uparrow|F|$ κατά σημείο, από το θεώρημα μονότονης σύγκλισης έπεται ότι

$$\int|F|\,d\mu=\lim_n\int F_n\,d\mu\le m+r_0,$$

άρα η F είναι ολοκληρώσιμη.

Έστω τώρα ότι η α είναι συνεχής. Θα δείξουμε ότι κάθε 1–Lipschitz συνάρτηση F ικανοποιεί τη σχέση

$$\mu\left(\left\{F\ge\int F\,d\mu+r\right\}\right)\le\alpha(r),\quad r>0.$$

Θεωρούμε την ακολουθία $F_n-\min\left(\max\left(F,-n\right),n\right)$. Τότε για την F_n έχουμε ότι $F_n\to F$ κατά σημείο, οι F_n είναι φραγμένες, 1–Lipschitz και $\int|F|\,d\mu<+\infty$.

Ισχυρισμός: $\int F_n\,d\mu\to\int F\,d\mu$, καθώς $n\to+\infty$.

Απόδειξη. Έχουμε

$$F_n(x)=\begin{cases}F(x) & , \text{ αν } |F(x)|\le n\\ -n & , \text{ αν } F(x)\le -n\\ n & , \text{ αν } F(x)\ge n\end{cases}$$

Έστω $n\in\mathbb{N}$. Τότε,

- Αν $|F(x)|\le n,\ F_n(x)=F(x)$
- Αν $F(x)\ge n$,

$$F_{n+1}(x)=\begin{cases}F(x) & , \text{ αν } n<F(x)\le n+1\\ n+1 & , \text{ αν } F(x)>n+1\end{cases}$$

  οπότε σε κάθε περίπτωση $F_{n+1}(x)\ge F_n(x)$.

- Αν $F(x)\le -n$, τότε

$$F_{n+1}(x)=\begin{cases}F(x) & , \text{ αν } n<F(x)\le n+1\\ n+1 & , \text{ αν } F(x)>n+1\end{cases}$$

  οπότε σε κάθε περίπτωση $F_{n+1}(x)\le F_n(x)$

Άρα, αν θέσουμε $A = \{F \geq 0\}$, $B = \{F \leq 0\}$, τότε η $(F_n\chi_A)_{n=1}^{\infty}$ είναι αύξουσα και η $(F_n\chi_B)_{n=1}^{\infty}$ είναι φθίνουσα. Εφόσον $F_n\chi_A \to F\chi_A$, $F_n\chi_B \to F\chi_B$ και $\int F_1\chi_B \, d\mu < +\infty$ από τα προηγούμενα έχουμε ότι

$$\int F_n \, d\mu = \int_A F \, d\mu + \int_B F \, d\mu \to \int_A F \, d\mu + \int_B F \, d\mu = \int F \, d\mu.$$

Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει

$$\mu\left(\left\{F_n \geq \int F_n \, d\mu + r\right\}\right) \leq \alpha(r).$$

Έστω $r_0 > 0$, $\varepsilon > 0$. Θα δείξουμε ότι

$$\mu\left(\left\{F \geq \int F \, d\mu + r_0\right\}\right) < \alpha(r_0) + \varepsilon.$$

Από τη συνέχεια της α στο r_0, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε αν $r \in (r_0 - \delta, r_0 + \delta)$ τότε $|\alpha(r) - \alpha(r_0)| < \varepsilon$, δηλαδή $\alpha\left(r_0 - \frac{\delta}{2}\right) < \alpha(r_0) + \varepsilon$. Έχουμε ότι $F_n(x) \to F(x)$ για κάθε $x \in X$ και $\lim F_n \; d\mu \to \int F \; d\mu$. Θεωρούμε τυχόν $x \in \left\{F \geq \int F \, d\mu + r_0\right\}$, οπότε $F(x) \geq \int F \, d\mu + r_0$. Τότε, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$, ώστε για κάθε $n \geq n_0$ να ισχύουν οι $F_n(x) > F(x) - \frac{\delta}{4}$ και $\int F \, d\mu \geq \int F_n \, d\mu - \frac{\delta}{4}$. Τότε,

$$\begin{aligned} F_n(x) &> F(x) - \frac{\delta}{4} \geq \int F \, d\mu + r_0 - \frac{\delta}{4} > \int F_n \, d\mu - \frac{\delta}{4} + r_0 - \frac{\delta}{4} \\ &= \int F_n \, d\mu + r_0 - \frac{\delta}{2}. \end{aligned}$$

Άρα,

$$\left\{F \geq \int F \, d\mu + r_0\right\} \subset \liminf \left\{F_n \geq \int F_n \, d\mu + r_0 \frac{\delta}{2}\right\},$$

οπότε

$$\begin{aligned} \mu\left(\left\{F \geq \int F \, d\mu\right\}\right) &\leq \mu\left(\liminf \left\{F_n \geq \int F_n \, d\mu + r_0 - \frac{\delta}{2}\right\}\right) \\ &\leq \liminf \mu\left(\left\{F_n \geq \int F_n \, d\mu + r_0 - \frac{\delta}{2}\right\}\right) \\ &\leq \alpha(r_0 - \frac{\delta}{2}) \\ &< \alpha(r_0) + \varepsilon \end{aligned}$$

Αυτό δείχνει ότι $\mu\left(\left\{F \geq \int F \, d\mu + r\right\}\right) \leq \alpha(r)$ για κάθε $r > 0$. $\square$

Θεώρημα 6.2.2. *Έστω (X, d, μ) μετρικός χώρος πιθανότητας, τέτοιος ώστε για κάποια σταθερά $C > 0$ και για κάθε τοπικά Lipschitz συνάρτηση f στον X ισχύει*

$$\mathrm{Ent}_\mu(f^2) \leq 2C \int |\nabla f|^2 \, d\mu.$$

Τότε, κάθε 1–Lipschitz συνάρτηση F είναι ολοκληρώσιμη και για κάθε $r > 0$,

$$\mu\left(\left\{F \geq \int F \, d\mu + r\right\}\right) \leq e^{-\frac{r^2}{2C}}.$$

Ειδικότερα ισχύει

$$\alpha_{(X,d,\mu)}(r) \leq e^{-\frac{r^2}{8C}}, \quad r > 0.$$

Απόδειξη. Από το επιχείρημα του Herbst ισχύει

$$E_\mu(\lambda) \leq e^{C\lambda^2/2}, \quad \lambda \geq 0,$$

όπου $E_\mu(\lambda)$ το συναρτησοειδές Laplace ως προς το μ. Έστω F μια 1–Lipschitz συνάρτηση. Τότε, για κάθε $r > 0$ και για κάθε $\lambda \geq 0$, για την $\tilde{F} = f - \int F \, d\mu$ έχουμε

$$\begin{aligned} \mu(\tilde{F} \geq r) &= \mu\left(F \geq \int F \, d\mu + r\right) = \mu\left(e^{\lambda F - \int F \, d\mu} \geq e^{\lambda r}\right) \\ &\leq e^{-\lambda r} \int e^{\lambda \tilde{F}} \, d\mu \\ &\leq e^{-\lambda r + C\lambda^2/2}. \end{aligned}$$

Το φράγμα ελαχιστοποιείται αν επιλέξουμε $\lambda = r/C$, οπότε τελικά για κάθε 1–Lipschitz συνάρτηση F και για κάθε $r > 0$ ισχύει

$$\mu(\{F \geq \int F \, d\mu + r\}) \leq e^{-\frac{r^2}{2C}}.$$

Από την πρόταση 3.5.1 έχουμε ότι

$$\alpha_{(X,d,\mu)} \leq e^{-\frac{r^2}{2C}}, \quad r > 0.$$

□

Έστω $(X_i, \mathcal{A}_i, \mu_i)$, $i = 1, \ldots, n$ χώροι πιθανότητας και $X = \prod_{i=1}^n X_i$, $P = \mu_1 \otimes \ldots \otimes \mu_n$ ο χώρος γινόμενο εφοδιασμένος με τη σ–άλγεβρα γινόμενο και το μέτρο γινόμενο. Αν f είναι συνάρτηση ορισμένη στον X, συμβολίζουμε με f_i τη συνάρτηση που ορίζεται, για σταθερά $x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n$, στον X_i ως εξής:

$$f_i(x_i) = f(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n).$$

Πρόταση 6.2.3. *Για κάθε μη αρνητική συνάρτηση f ορισμένη στον χώρο γινόμενο X ισχύει*

$$\mathrm{Ent}_P(f) \leq \sum_{i=1}^n \int \mathrm{Ent}_{\mu_i}(f_i)\, dP.$$

Απόδειξη: Δείχνουμε πρώτα ότι, για κάθε συνάρτηση f ορισμένη σε ένα χώρο πιθανότητας $(X, \mathcal{A}, \mu)$,

$$\mathrm{Ent}_\mu(f) = \sup\left\{\int fg\, d\mu :\ \int e^g\, d\mu \leq 1\right\}.$$

Επειδή η ισότητα είναι ομογενής, υποθέτουμε ότι $\int f\, d\mu = 1$. Από την ανισότητα του Young έχουμε

$$uv \leq u\log u - u + e^v,\ u \geq 0,\ v \in \mathbb{R}$$

οπότε αν g είναι συνάρτηση στον X τέτοια ώστε $\int e^g\, d\mu \leq 1$, ισχύει

$$\int fg\, d\mu \leq \int f\log f\, d\mu - \int f\, d\mu + \int e^g\, d\mu \leq \int f\log f\, d\mu.$$

Παίρνοντας supremum έχουμε ότι

$$\sup\left\{\int fg\, d\mu :\ \int e^g\, d\mu \leq 1\right\} \leq \int f\log f\, d\mu = \mathrm{Ent}_\mu(f),$$

αφού υποθέσαμε ότι $\int f\, d\mu = 1$. Τέλος, αφού $\int e^{\log f}\, d\mu = \int f\, d\mu = 1$, έπεται ότι

$$\sup\left\{\int fg\, d\mu :\ \int e^g\, d\mu \leq 1\right\} \geq \int f\log f\, d\mu,$$

οπότε ισχύει ισότητα.

Άρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι αν g είναι μια συνάρτηση ορισμένη στον X που ικανοποιεί την $\int e^g\, dP \leq 1$, τότε

$$\int fg\, dP \leq \sum_{i=1}^n \int \mathrm{Ent}_{\mu_i}(f_i)\, dP.$$

Για κάθε $i = 1, \ldots, n$ θέτουμε

$$g^i(x_1, \ldots, x_n) = \log\left(\frac{\int e^g\, d\mu_1(x_1)\ldots d\mu_{i-1}(x_{i-1})}{\int e^g\, d\mu_1(x_1)\ldots d\mu_i(x_i)}\right).$$

Τότε $g \leq \sum_{i=1}^n g^i$ και $\int e^{(g^i)_i}\, d\mu_i = 1$. Πράγματι,

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n g^i &= \log\left(\frac{e^g}{\int e^g\, d\mu_1}\frac{\int e^g\, d\mu_1}{\int e^g\, d\mu_1 d\mu_2}\cdots\frac{\int e^g\, d\mu_1\ldots d\mu_{n-1}}{\int e^g\, d\mu_1\ldots d\mu_n}\right)\\ &= \log\left(\frac{e^g}{\int e^g\, dP}\right),\end{aligned}$$

οπότε αφού $\int e^g \, dP \leq 1$ έπεται ότι

$$g \leq \log\left(\frac{e^g}{\int e^g \, dP}\right).$$

Επίσης,

$$\begin{aligned}\int e^{(g^i)_i} \, d\mu_i &= \int \frac{\int e^g \, d\mu_1(x_1)\dots d\mu_{i-1}(x_{i-1})}{\int e^g \, d\mu_1(x_1)\dots d\mu_i(x_i)} \, d\mu_i(x_i) \\ &= \frac{\int e^g \, d\mu_1 \dots d\mu_i}{\int e^g \, d\mu_1 \dots d\mu_i} = 1.\end{aligned}$$

Άρα,

$$\begin{aligned}\int fg \, dP &\leq \sum_{i=1}^n \int fg^i \, dP \\ &= \sum_{i=1}^n \int \left(\int f_i (g^i)_i \, d\mu_i\right) dP \\ &\leq \sum_{i=1}^n \int \mathrm{Ent}_{\mu_i}(f_i) \, dP,\end{aligned}$$

οπού η τελευταία ανισότητα προκύπτει από το γεγονός ότι $\int (g^i)_i \, d\mu_i = 1$. □

Πόρισμα 6.2.4. *Έστω (X_i, d_i, μ_i) μετρικοί χώροι πιθανότητας. Υποθέτουμε ότι, για κάθε $i = 1, \dots, n$, υπάρχει σταθερά C_i ώστε για κάθε τοπικά Lipschitz συνάρτηση f στον X_i να ισχύει*

$$\mathrm{Ent}_{\mu_i}(f^2) \leq 2C_i \int |\nabla_i f|^2 \, d\mu_i,$$

όπου $|\nabla_i f|$ το μέτρο του γενικευμένου gradient στον X_i. Τότε για κάθε τοπικά Lipschitz συνάρτηση f στον $X = \prod_{i=1}^n X_i$ ισχύει

$$\mathrm{Ent}_P(f^2) \leq 2 \max_{1\leq i\leq n} C_i \int |\nabla f|^2 \, dP,$$

όπου

$$|\nabla f|^2 = \sum_{i=1}^n |\nabla_i f|^2$$

Απόδειξη: Από την προηγούμενη πρόταση έχουμε ότι

$$\mathrm{Ent}_P(f^2) \leq \sum_{i=1}^n \int \mathrm{Ent}_{\mu_i}(f^2) \, dP$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \sum_{i=1}^{n} \int \left(2C_i \int |\nabla_i f|^2 \, d\mu_i \right) \, dP \\
&\leq 2 \max_{1\leq i\leq n} C_i \int \left(\int \sum_{i=1}^{n} |\nabla_i f|^2 \, d\mu_i \right) \, dP \\
&= 2 \max_{1\leq i\leq n} C_i \int |\nabla f|^2 \, dP.
\end{aligned}
$$

□

Κεφάλαιο 7

Μεταφορά του μέτρου

7.1 Εισαγωγή

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε ένα σωρό από άμμο και μια λακούβα την οποία πρέπει να γεμίσουμε με αυτή την άμμο. Προφανώς, η άμμος και η λακούβα έχουν τον ίδιο όγκο. Επίσης κανονικοποιούμε την μάζα της άμμου και την θεωρούμε ίση με 1. Για να φτιάξουμε ένα μοντέλο του προβλήματος, θεωρούμε δύο χώρους πιθανότητας (X, μ) (που αντιστοιχεί στο σωρό της άμμου) και (Y, ν) (που αντιστοιχεί στη λακούβα). Έτσι, για κάθε ζευγάρι μετρήσιμων υποσυνόλων A και B των X και Y αντίστοιχα, θεωρούμε ότι $\mu(A)$ είναι η μάζα της άμμου που είναι τοποθετημένη στο A και $\nu(B)$ είναι η μάζα της άμμου που μπορεί να τοποθετηθεί το B.

Το κόστος της μεταφοράς της άμμου από το X στο Y μοντελοποιείται από μια μετρήσιμη συνάρτηση $c(x, y)$ η οποία ορίζεται στον $X \times Y$. Με άλλα λόγια η συνάρτηση $c(x, y)$ μας λέει πόσο κοστίζει η μεταφορά μιας μονάδας μάζας από την τοποθεσία $x \in X$ στην τοποθεσία $y \in Y$. Φυσιολογικά, υποθέτουμε ότι η συνάρτηση κόστους είναι μη αρνητική και μετρήσιμη με τιμές στο $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

Βασικό πρόβλημα: Πώς θα πετύχουμε το ελάχιστο κόστος μεταφοράς;

Πρέπει πρώτα να διευκρινίσουμε τι εννοούμε με τη λέξη «μεταφορά». Εφοδιάζουμε τον $X \times Y$ με ένα μέτρο πιθανότητας $\pi \in \mathcal{P}(X \times Y)$ και συμβολίζουμε με $d\pi(x, y)$ την ποσότητα μάζας που μεταφέρεται από την τοποθεσία x στην τοποθεσία y. Για να λέμε ότι η $\pi \in \mathcal{P}(X \times Y)$ προσδιορίζει κάποια μεταφορά από το X στο Y θα πρέπει να ισχύει

$$\int_Y d\pi(x, y) = d\mu(x) \text{ και } \int_X d\pi(x, y) = d\nu(y).$$

Αυτό ισχύει αν

$$\pi(A \times Y) = \mu(A) \text{ και } \nu(X \times B) = \nu(B),$$

για κάθε ζευγάρι μετρήσιμων υποσόλων $A \subset X$ και $B \subset Y$. Έτσι, θεωρούμε το σύνολο

$$\Pi(\mu,\nu) = \{\pi \in \mathcal{P}(X \times Y) : \ \pi(A \times Y) = \mu(A) \ , \ \pi(X \times B) = \nu(B)\}$$

για κάθε ζευγάρι μετρήσιμων $A \subset X$ και $B \subset Y$ και λέμε ότι το π έχει περιθώρια μέτρα (marginals) τα μ και ν. Αυτό είναι ισοδύναμο με το εξής: για κάθε ζευγάρι μετρήσιμων συναρτήσεων $\varphi X \to \mathbb{R}$ και $\psi : Y \to \mathbb{R}$ ισχύει

$$\int_{X\times Y} [\varphi(x) + \psi(y)] \ d\pi(x,y) = \int_X \varphi(x) \ d\mu(x) + \int_Y \psi(y) \ d\nu(y).$$

Ο φυσιολογικός χώρος για το ζευγάρι (φ, ψ) είναι ο $L^1(\mu) \times L^1(\nu)$, όμως στις πιο ενδιαφέρουσες περιπτώσεις μπορούμε να υποθέσουμε ότι $(\varphi, \psi) \in C_b(X) \times C_b(Y)$.

Είμαστε τώρα σε θέση να διατυπώσουμε το πρόβλημα, γνωστό ως πρόβλημα των Kantorovich-Monge:

Να ελαχιστοποιηθεί η ποσότητα

$$I[\pi] = \int_{X\times Y} c(x,y) \ d\pi(x,y)$$

πάνω από όλα τα $\pi \in \Pi(\mu,\nu)$.

Αξίζει τον κόπο να αναφέρουμε ότι αυτό το πρόβλημα μελετήθηκε στη δεκαετία του ΄40 από τον Kantorovich ο οποίος βραβεύτηκε για τη δουλειά του με το βραβείο Nobel στα οικονομικά.

7.2 Το θεώρημα δυϊσμού του Kantorovich

Θα διατυπώσουμε το θεώρημα στη γενική του μορφή. Σε ό,τι ακολουθεί, θεωρούμε δύο μετρικούς χώρους X και Y και δύο μέτρα πιθανότητας μ και ν στα Borel υποσύνολα των X, Y αντίστοιχα.

Θεώρημα 7.2.1. *Εστω X, Y δύο Πολωνικοί χώροι (δηλαδή, πλήρεις και διαχωρίσιμοι μετρικοί χώροι), έστω $\mu \in \mathcal{P}(X)$ και $\nu \in \mathcal{P}(Y)$, και $c : X \times Y \to \mathbb{R}_+ \cup +\infty$ μια κάτω ημισυνεχής συνάρτηση κόστους. Για κάθε $\pi \in \mathcal{P}(X \times Y)$ και $(\varphi, \psi) \in L^1(d\mu) \times L^1(d\nu)$ ορίζουμε*

$$I[\pi] = \int_{X\times Y} c(x,y) d\pi(x,y) \ \ , \ \ J(\varphi,\psi) = \int_X \varphi(x) d\mu(x) + \int_Y \psi(y) d\nu(y).$$

Ορίζουμε $\Pi(\mu,\nu)$ το σύνολο των Borel μέτρων πιθανότητας στον $X \times Y$ με περιθώρια μέτρα τα μ, ν, και Φ_c το σύνολο των μετρήσιμων συναρτήσεων $(\varphi, \psi) \in L^1(d\mu) \times L^1(d\nu)$ που ικανοποιούν την σχέση

$$\varphi(x) + \psi(y) \le c(x,y)$$

μ-σχεδόν για κάθε $x \in X$ και ν-σχεδόν για κάθε $y \in Y$. Τότε,

$$\inf_{\pi \in \Pi(\mu,\nu)} I[\pi] = \sup_{\Phi_c} J(\varphi, \psi).$$

Επιπλέον, το infimum πιάνεται από ένα μέτρο $\pi \in \Pi(\mu, \nu)$. Τέλος, η τιμή του supremum δεν αλλάζει αν, στον ορισμό του Φ_c, περιοριστούμε στις (φ,ψ) που είναι συνεχείς και φραγμένες.

Πριν προχωρήσουμε στην απόδειξη θα δώσουμε κάποιους βασικούς ορισμούς και στοιχεία της θεωρίας που θα χρησιμοποιήσουμε.
(α) Ένα Borel μέτρο πιθανότητας μ σε έναν Πολωνικό χώρο X είναι αυτομάτως **κανονικό**, δηλαδή για κάθε Borel σύνολο A έχουμε:

$$\begin{aligned} \mu(A) &= \sup\{\mu(K) \mid K \text{ συμπαγές}, K \subset A\} \\ &= \inf\{\mu(G) \mid G \text{ ανοιχτό}, A \subset G\}. \end{aligned}$$

(β) Ένα μέτρο πιθανότητας μ σε έναν Πολωνικό χώρο είναι **συγκεντρωμένο** σε ένα σ-συμπαγές σύνολο: υπάρχει ένα μετρήσιμο σύνολο S το οποίο γράφεται ως αριθμήσιμη ένωση συμπαγών συνόλων, τέτοιο ώστε $\mu(S) = 1$. Ισοδύναμα, το μ είναι **tight**, δηλαδή για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει ένα συμπαγές K_ε τέτοιο ώστε $\mu(K_\varepsilon^c) \leq \varepsilon$. Αυτό το αποτέλεσμα είναι γνωστό ως «λήμμα Ulam».
(γ) Μια οικογένεια μέτρων πιθανότητας $\mathcal{P}$ σε έναν τοπολογικό χώρο X λέγεται **tight** αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει ένα συμπαγές υποσύνολο $K_\varepsilon \subset X$ τέτοιο ώστε:

$$\sup_{\mu \in \mathcal{P}} \mu(K_\varepsilon^c) \leq \varepsilon.$$

Το θεώρημα του Prokhorov λέει ότι μια tight οικογένεια στον $\mathcal{P}(X)$ είναι ακολουθιακά σχετικά συμπαγές σύνολο με την w^*–τοπολογία, δηλαδή: για κάθε ακολουθία (μ_k) στον $\mathcal{P}$ υπάρχει μια υπακολουθία, την οποία συμβολίζουμε πάλι με (μ_k), και ένα μέτρο πιθανότητας μ_* στον Q ώστε: για κάθε $\varphi \in C_b(X)$,

$$\lim_{k \to \infty} \int_X \varphi \, d\mu_k = \int_X \varphi \, d\mu_*.$$

Το αποτέλεσμα αυτό επεκτείνεται και σε μη Πολωνικούς χώρους.
(δ) Αν Q είναι ένας μετρικός χώρος και F μια συνάρτηση μη αρνητική και κάτω ημισυνεχής στον X, τότε γράφεται ως supremum μιας αύξουσας ακολουθίας ομοιόμορφα συνεχών μη αρνητικών συναρτήσεων: πιο συγκεκριμένα,

$$F_n(x) = \inf_{y \in X} [F(y) + nd(x, y)],$$

όπου d είναι η μετρική στον X.

Διατυπώνουμε τώρα το θεώρημα δυϊσμού των Fenchel–Rockafellar που θα χρησιμοποιήσουμε για την απόδειξη του θεωρήματος του Kantorovich.

Θεώρημα 7.2.2 (Fenchel–Rockafellar duality). *Έστω E ένας χώρος με νόρμα, E^* ο τοπολογικός δυϊκός του και Θ, Ξ δύο κυρτές συναρτήσεις στον E με τιμές στο $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Έστω Θ^*, Ξ^* οι μετασχηματισμοί Legendre-Fenchel των Θ, Ξ αντίστοιχα, όπου, για παράδειγμα, ο μετασχηματισμός Legendre–Fenchel της Θ ορίζεται από την*

$$\Theta^*(z^*) = \sup_{z\in E} [z^*(z) - \Theta(z)].$$

Υποθέτουμε ότι υπάρχει $z_0 \in E$ τέτοιο ώστε να ισχύουν οι $\Theta(z_0) < +\infty$, $\Xi(z_0) < +\infty$ και η Θ να είναι συνεχής στο z_0. Τότε,

$$\inf_E [\Theta + \Xi] = \max_{z^*\in E^*} [-\Theta^*(-z^*) - \Xi(z^*)].$$

Απόδειξη: Αυτό που έχουμε να δείξουμε είναι ότι:

$$\sup_{z^*\in E^*} \inf_{x,y\in E} [\Theta(x) + \Xi(y) + z^*(x-y)] = \inf_{x\in E} [\Theta(x) + \Xi(y)].$$

(i) Η επιλογή $x = y$ δείχνει ότι η αριστερή πλευρά της ανισότητας δεν είναι μεγαλύτερη από την δεξιά πλευρά. Έτσι αυτό που έχουμε να δείξουμε είναι ότι υπάρχει ένα γραμμικό συναρτησοειδές $z^* \in E^*$ τέτοιο ώστε για κάθε $x, y \in E$, ισχύει

$$\Theta(x) + \Xi(y) + z^*(x-y) \geq m \equiv \inf (\Theta + \Xi).$$

Επειδή $\Theta(z_0) + \Xi(z_0) < +\infty$, έπεται ότι το infimum είναι πεπερασμένο.

(ii) Θέτουμε:

$$C = \{(x,\lambda) \in E\times\mathbb{R} :\ \lambda > \Theta(x)\} \text{ και } C'\{(y,\mu) \in E\times\mathbb{R} :\ \mu \leq m - \Xi(y)\}.$$

Είναι εύκολο να δούμε ότι αφού οι Θ, Ξ είναι κυρτές τότε και τα C, C' είναι κυρτά σύνολα. Λόγω της συνέχειας της Θ στο z_0 έπεται ότι το $(z_0, \Theta(z_0) + 1) \in \mathrm{int}(C)$. Αναζητούμε ένα $\delta > 0$ ώστε αν $\|z - z_0\| + |\lambda - (1 + \Theta(z))| < \delta$, τότε $\lambda > \Theta(z)$. Πράγματι· από τη συνέχεια της Θ στο z_0 υπάρχει $0 < \delta < 1$ ώστε αν $\|z - z_0\| < \delta$ τότε $|\Theta(z) - \Theta(z_0)| < 1$. Αν $\|z - z_0\| + |\lambda - (1 + \Theta(z))| < \delta/2$, τότε ειδικότερα ισχύει $\|z - z_0\| < \delta$ και έχουμε ότι $|\Theta(z) - \Theta(z_0)| < 1/2$. Άρα, από την τριγωνική ανισότητα παίρνουμε

$$\delta/2 > |\lambda - (1 + \Theta(z))| \geq 1 - \lambda + \Theta(z) - |\Theta(z) - \Theta(z_0)| > 1 - \lambda + \Theta(z) - 1/2.$$

Έπεται ότι $\lambda > \Theta(z) + \frac{1-\delta}{2}$. Άρα, $\mathrm{int}(C) \neq \emptyset$. Από αυτό έπεται εύκολα ότι $\overline{C} = \overline{\mathrm{int}(C)}$. Ακόμα $C \cap C' = \emptyset$, επειδή $m = \inf [\Theta + \Xi]$. Έπεται λοιπόν από το διαχωριστικό θεώρημα Hahn-Banach ότι υπάρχει ένα γραμμικό συναρτησοειδές $\ell \in (E\times\mathbb{R})^*$ για το οποίο ισχύει:

$$\inf_{c\in C} \ell(c) = \inf_{c\in \mathrm{int}(C)} \ell(c) \geq \sup_{c'\in C'} \ell(c').$$

Με άλλα λόγια, υπάρχουν $w^* \in E^*$ και $\alpha \in \mathbb{R}$ με $(w^*, \alpha) \neq (0,0)$, ώστε

$$w^*(x) + \alpha\lambda \geq w^*(y) + \alpha\mu,$$

με $\lambda > \Theta(x)$ και $\mu \leq m - \Xi(y)$. Εύκολα ελέγχουμε ότι $\alpha > 0$. (Πράγματι· θέτοντας $w^* = z^*/a$ θα είχαμε $0 = z^*(z_0 - z_0) \leq \mu - \lambda < m - \Xi(z_0) - \Theta(z_0)$, άτοπο). Άρα, έχουμε

$$z^*(x) + \lambda \geq z^*(y) + \mu$$

για κάθε (x, λ) με $\lambda > \Theta(x)$ και (y, μ) με $\mu \leq m - \Xi(y)$. Αυτό σημαίνει ότι για κάθε $x, y \in E$ έχουμε ότι

$$z^*(x) + \Theta(x) \geq z^*(y) + m - \Xi(y).$$

Πράγματι· παίρνοντας για τυχαίο $\varepsilon > 0$ τα σημεία $(x, \Theta(x) + \varepsilon)$ και $(y, m - \Xi(y))$ και αφήνοντας το ε να πάει στο 0 παίρνουμε το ζητούμενο. Η απόδειξη του θεωρήματος είναι πλήρης. □

Είμαστε έτοιμοι τώρα να περάσουμε στην απόδειξη του θεωρήματος του Kantorovich.

Απόδειξη του Θεωρήματος 7.2.1. Η απόδειξη θα γίνει σε τρία βήματα. Σε κάθε βήμα εξασφαλίζουμε το συμπέρασμα χαλαρώνοντας τις υποθέσεις μας.

Βήμα 1. Αρχικά υποθέτουμε ότι οι χώροι X, Y είναι συμπαγείς και η συνάρτηση κόστους είναι συνεχής στον $X \times Y$, άρα και φραγμένη. Θέτουμε $E = C_b(X \times Y)$ το σύνολο των (φραγμένων) συνεχών συναρτήσεων στον $X \times Y$ εφοδιασμένο με την $\|\cdot\|_\infty$ νόρμα. Από το Θεώρημα του Riesz ο τοπολογικός δυϊκός του μπορεί να ταυτιστεί με τον χώρο των (κανονικών) μέτρων τον οποίο συμβολίζουμε με $M(X \times Y)$ και τον θεωρούμε εφοδιασμένο με την νόρμα της ολικής κύμανσης. Θέτουμε

$$\Theta : u \in C_b(X \times Y) \longmapsto \begin{cases} 0, & \text{αν } u(x,y) \geq -c(x,y) \\ +\infty, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

και

$$\Xi : u \in C_b(X \times Y) \longmapsto \begin{cases} \int_X \varphi d\mu + \int_Y \psi d\nu, & \text{αν } u(x,y) = \varphi(x) + \psi(y) \\ +\infty, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Παρατηρήστε ότι η Ξ είναι καλά ορισμένη: αν $\varphi(x) + \psi(y) = \tilde{\varphi}(x) + \tilde{\psi}(y)$ για κάθε x, y τότε $\varphi = \tilde{\varphi} + s$, $\psi = \tilde{\psi} + s$ για κάποιον $s \in \mathbb{R}$. Οπότε θα είναι $\int \tilde{\varphi} d\mu + \int \tilde{\psi} d\nu = \int \varphi d\mu + \int \varphi d\mu + \int \psi d\nu$. Οι υποθέσεις του θεωρήματος 7.2.2 ικανοποιούνται αν θέσουμε $z_0 = 1$. Τώρα, θα υπολογίσουμε τα δύο μέλη της ισότητας. Το αριστερό μέλος είναι:

$$\inf\left\{\int_X \varphi\, d\mu + \int_Y \psi\, d\nu, \quad \text{αν } \varphi(x) + \psi(y) \geq -c(x,y)\right\}$$
$$= -\sup\{J(\varphi, \psi), \quad \text{αν } (\varphi, \psi) \in \Phi_c\}.$$

Σε κάθε άλλη περίπτωση είναι $+\infty$. Υπολογίζουμε τους μετασχηματισμούς Legendre–Fenchel των Θ, Ξ. Κατ' αρχήν, για κάθε $\pi \in M(X \times Y)$ έχουμε:

$$\begin{aligned}\Theta^*(-\pi) &= \sup_{u\in C_c(X\times Y)}\left\{-\int u(x,y)d\pi(x,y), \quad u(x,y)\geq -c(x,y)\right\}\\ &= \sup_{u\in C_b(X\times Y)}\left\{\int u(x,y)d\pi(x,y), \quad u(x,y)\leq c(x,y)\right\}.\end{aligned}$$

- Αν τώρα το π δεν είναι μη αρνητικό μέτρο, τότε υπάρχει μη θετική συνάρτηση $\upsilon \in C_b(X\times Y)$ τέτοια ώστε $\int \upsilon\ d\pi > 0$. Αν επιλέξουμε $u = \lambda\upsilon$, και αφήσουμε το $\lambda \to +\infty$, βλέπουμε ότι το supremum είναι $+\infty$.

- Αν το π είναι μη αρνητικό μέτρο, τότε το supremum είναι ίσο με $\int c\ d\pi$.

Έτσι, έχουμε

$$\Theta^*(-\pi) = \begin{cases} \int c d\pi, & \text{αν } \pi\in M_+(X\times Y)\\ +\infty, & \text{αλλιώς}\end{cases}$$

Ομοίως βλέπουμε ότι

$$\Xi^*(\pi) = \begin{cases} 0, & \forall\ (\varphi,\psi)\in C_b(X)\times C_b(Y)\ :\ \int[\varphi(x)+\psi(y)]\ d\pi(x,y) = \int\varphi\ d\mu + \int\psi\ d\nu,\\ +\infty, & \text{αλλιώς}\end{cases}$$

Με άλλα λόγια οι Θ^*, Ξ^* είναι οι χαρακτηριστικές συναρτήσεις των $M_+(X\times Y)$ και $\Pi(\mu,\nu)$, αντίστοιχα. Έτσι λοιπόν, έχουμε

$$\begin{aligned}\inf\,[\Theta+\Xi] &= -\sup\{J(\varphi,\psi):\ (\varphi,\psi)\in\Phi_c\cap C_b\}\\ &= -\inf\left\{\int_{X\times Y} c(x,y)\ d\pi(x,y):\ \pi\in\Pi(\mu,\nu)\right\}\end{aligned}$$

και έχουμε δείξει αυτό που θέλαμε.

Βήμα 2. Υποθέτουμε ότι οι χώροι είναι Πολωνικοί και κρατάμε ακόμα την υπόθεση ότι η c είναι φραγμένη και ομοιόμορφα συνεχής. Ορίζουμε

$$\|c\|_\infty = \sup_{X\times Y} c(x,y).$$

Επειδή, το $\Pi(\mu,\nu)$ είναι συμπαγές υποσύνολο του $M(X\times Y)$ έπεται ότι υπάρχει ένα μέτρο $\pi_*\in\Pi(\mu,\nu)$ ώστε

$$I[\pi^*] = \inf_{\pi\in\Pi(\mu,\nu)} I[\pi].$$

Αφού η c είναι φραγμένη έπεται ότι το infimum είναι πεπερασμένο. Τη συμπάγεια του $\Pi(\mu,\nu)$ την αποδεικνύουμε παρακάτω.

Έστω, λοιπόν $\delta>0$ οσοδήποτε μικρό. Εφόσον οι X, Y είναι Πολωνικοί χώροι έπεται ότι και ο $X\times Y$ είναι Πολωνικός. Επίσης το π_* είναι tight αφού υπάρχουν υποσύνολα $X_0\subset X, Y_0\subset Y$ συμπαγή τέτοια ώστε:

$$\mu(X\setminus X_0)\leq\delta\ ,\ \nu(Y\setminus Y_0)\leq\delta.$$

Τότε ισχύει

$$\pi_* \left((X \times Y) \setminus (X_0 \times Y_0) \right) \leq 2\delta.$$

Ορίζουμε

$$\pi_{*0} = \frac{\mathbf{1}_{X_0 \times Y_0}}{\pi_*(X_0 \times Y_0)} \pi_*$$

και παρατηρούμε εύκολα ότι είναι μέτρο πιθανότητας στον $X_0 \times Y_0$. Γράφουμε μ_0, ν_0 για τα περιθώρια μέτρα του π_*0 στους X_0, Y_0 αντίστοιχα. Επίσης ορίζουμε $\Pi(\mu_0, \nu_0)$ το σύνολο των μέτρων πιθανότητας στον $X_0 \times Y_0$ με περιθώρια μέτρα μ_0, ν_0 και I_0 την ποσότητα

$$I_0[\pi_0] = \int_{X_0 \times Y_0} c(x, y) \; d\pi_0(x, y).$$

Θέτουμε $\tilde{\pi}_0 \in \Pi_0(\mu_0, \nu_0)$ το μέτρο για το οποίο ισχύει

$$I_0[\tilde{\pi}_0] = \inf_{\pi_0 \in \Pi_0(\mu_0, \nu_0)} I_0[\pi_0].$$

Επεκτείνουμε το $\tilde{\pi}_0$ σε ένα μέτρο $\tilde{\pi} \in \Pi(\mu, \nu)$ ως εξής:

$$\tilde{\pi} = \pi_*(X_0 \times Y_0) \tilde{\pi}_0 + \mathbf{1}_{(X_0 \times Y_0)^c} \pi_*.$$

Εύκολα ελέγχουμε ότι $\tilde{\pi} \in \Pi(\mu, \nu)$. Έτσι έχουμε

$$\begin{aligned} I[\tilde{\pi}] &= \pi_*(X_0 \times Y_0) I_0[\tilde{\pi}_0] + \int_{(X_0 \times Y_0)^c} c(x, y) \; d\pi_*(x, y) \\ &\leq I_0[\tilde{\pi}_0] + 2\delta \|c\|_\infty = \inf I_0 + 2\delta \|c\|_\infty. \end{aligned}$$

Τώρα ορίζουμε το συναρτησοειδές

$$J(\varphi_0, \psi_0) = \int_{X_0} \varphi_0 \; d\mu_0 + \int_{Y_0} \psi_0 \; d\nu_0,$$

που ορίζεται στον $L^1(d\mu_0) \times L^1(d\nu_0)$. Από το βήμα 1 της απόδειξης έπεται ότι $\inf I_0 = \sup J_0$, όπου το supremum τρέχει πάνω από τα ζεύγη $(\varphi_0, \psi_0) \in L^1(d\mu_0) \times L^1(d\nu_0)$, που ικανοποιούν την ανισότητα $\varphi_0(x) + \psi_0(y) \leq c(x, y)$ σχεδόν για κάθε x, y. Έτσι υπάρχει ένα ζεύγος συναρτήσεων $(\tilde{\varphi}_0, \tilde{\psi}_0)$ τέτοιο ώστε

$$J_0(\tilde{\varphi}_0, \tilde{\psi}_0) \geq \sup J_0 - \delta.$$

Το πρόβλημά μας τώρα ανάγεται στο να κατασκευάσουμε ένα ζεύγος (φ, ψ) κατάλληλο για το πρόβλημα μεγιστοποίησης του $J(\varphi, \psi)$. Είναι χρήσιμο να αναφέρουμε ότι η ανισότητα $\tilde{\varphi}_0(x) + \tilde{\psi}_0(y) \leq c(x, y)$ ισχύει για κάθε x, y. Πράγματι μπορούμε να βρούμε σύνολα N_x , N_y ώστε $\tilde{\varphi}_0(x) + \tilde{\psi}_0(y) \leq c(x, y)$ για κάθε $(x, y) \in N_x^c \times N_y^c$, και τις ορίζουμε να είναι $-\infty$ στα N_x, N_y αντίστοιχα.

Χωρίς βλάβη της γενικότητας, υποθέτουμε ότι $\delta \leq 1$. Αφού $J_0(0,0) \geq 0$, ξέρουμε ότι $\sup J_0 \geq 0$, οπότε $J_0(\tilde{\varphi}_0, \tilde{\psi}_0) \geq -1$. Αφού είναι

$$J_0(\tilde{\varphi}_0, \tilde{\psi}_0) = \int_{X \times Y} [\tilde{\varphi}_0 + \tilde{\psi}_0] \, d\pi_0(x,y)$$

όπου το π_0 είναι οποιοδήποτε στοιχείο του $\Pi_0(\mu_0, \nu_0)$, συμπεραίνουμε ότι υπάρχει $(x_0, y_0) \in X_0 \times Y_0$ τέτοιο ώστε

$$\tilde{\varphi}_0(x_0) + \tilde{\psi}_0(y_0) \geq -1.$$

Αν αντικαταστήσουμε τις $(\tilde{\varphi}_0, \tilde{\psi}_0)$ από τις $(\tilde{\varphi}_0 + s, \tilde{\psi}_0 - s)$ για τυχόντα πραγματικό αριθμό s, δεν αλλάζουμε την τιμή $J_0(\tilde{\varphi}_0, \tilde{\psi}_0)$. Με κατάλληλη επιλογή του s, έχουμε

$$\tilde{\varphi}_0(x_0) \geq -\frac{1}{2} \ , \ \ \tilde{\psi}_0(y_0) \geq -\frac{1}{2}.$$

Αυτό σημαίνει ότι, για κάθε $(x,y) \in X_0 \times Y_0$,

$$\tilde{\varphi}_0(x) \leq c(x, y_0) - \tilde{\psi}_0(y_0) \leq c(x, y_0) + \frac{1}{2}$$

και

$$\tilde{\psi}_0(y) \leq c(x_0, y) - \tilde{\varphi}_0(x_0) \leq c(x_0, y) + \frac{1}{2}.$$

Ορίζουμε την εξής συνάρτηση· για κάθε $x \in X$ θέτουμε

$$\bar{\varphi}_0(x) = \inf_{y \in Y_0} [c(x,y) - \tilde{\psi}_0(y)].$$

Από την ανισότητα $\tilde{\varphi}_0(x) \leq c(x,y) - \tilde{\psi}_0(y)$ έπεται ότι $\tilde{\varphi}_0 \leq \bar{\varphi}_0$ στον X_0. Αυτό σημαίνει ότι $J_0(\bar{\varphi}_0, \tilde{\psi}_0) \geq J_0(\tilde{\varphi}_0, \tilde{\psi}_0)$. Ακόμα περισσότερο, έχουμε φράγμα για την $\bar{\varphi}_0$ αφού

$$\bar{\varphi}_0(x) \geq \inf_{y \in Y_0} [c(x,y) - c(x_0, y)] - \frac{1}{2},$$

$$\bar{\varphi}_0(x) \leq c(x, y_0) - \tilde{\psi}_0(y_0) \leq c(x, y_0) + \frac{1}{2}.$$

Τέλος, ορίζουμε για κάθε $y \in Y$,

$$\bar{\psi}_0(y) = \inf_{x \in X} [c(x,y) - c(x, y_0)],$$

και το $(\bar{\varphi}_0, \bar{\psi}_0) \in \Phi_c$. Έτσι έχουμε $J_0(\bar{\varphi}_0, \bar{\psi}_0) \geq J_0(\bar{\varphi}_0, \tilde{\psi}_0) \geq J_0(\tilde{\varphi}_0, \tilde{\psi}_0)$. Ακόμα περισότερο έχουμε ότι

$$\bar{\psi}_0(y) \geq \inf_{x \in X} [c(x,y) - c(x, y_0)] - \frac{1}{2}$$

και

$$\bar{\psi}_0(y) \leq c(x_0, y) - \bar{\varphi}_0(x_0) \leq c(x_0, y) - \tilde{\varphi}_0(x_0) \leq c(x_0, y) + \frac{1}{2}.$$

Ειδικότερα έχουμε ότι,

$$\bar{\varphi}_0(x) \geq -\|c\|_\infty - \frac{1}{2}$$

και

$$\bar{\psi}_0(y) \geq -\|c\|_\infty - \frac{1}{2}.$$

Τότε έχουμε

$$\begin{aligned}
J(\bar{\varphi}_0, \bar{\psi}_0) &= \int_X \bar{\varphi}_0 \, d\mu + \int_Y \bar{\psi}_0 \, d\nu = \int_{X\times Y} [\bar{\varphi}_0(x) + \bar{\psi}_0(y)] \, d\pi_*(x,y) \\
&= \pi_*(X_0 \times Y_0) \int_{X_0 \times Y_0} [\bar{\varphi}_0(x) + \bar{\psi}_0(y)] \, d\pi_{*0}(x,y) \\
&+ \int_{(X_0\times Y_0)^c} [\bar{\varphi}_0(x) + \bar{\psi}_0(y)] \, d\pi_*(x,y) \\
&\geq (1-2\delta) \left(\int_{X_0} \bar{\varphi}_0 \, d\mu_0 + \int_{Y_0} \bar{\psi} \, d\nu_0 \right) - (4\|c\|_\infty + 1)\pi_* \left((X_0 \times Y_0)^c \right) \\
&\geq (1-2\delta) J_0(\bar{\varphi}_0, \bar{\psi}_0) - 2(4\|c\|_\infty + 1)\delta \\
&\geq (1-2\delta) J_0(\tilde{\varphi}_0, \tilde{\psi}_0) - 2(4\|c\|_\infty + 1)\delta \\
&\geq (1-2\delta)(\inf I_0 - \delta) - 2(2\|c\|_\infty + 1)\delta \\
&\geq (1-2\delta)\left(\inf I - (4\|c\|_\infty + 1)\delta\right) - 2(4\|c\|_\infty + 1)\delta.
\end{aligned}$$

Αφού το δ είναι οσοδήποτε μικρό, συμπεραίνουμε ότι $\sup J(\varphi, \psi) \geq \inf I$, άρα ισχύει η ισότητα.

Βήμα 3. Εξετάζουμε τώρα τη γενική περίπτωση, όπου η c είναι κάτω ημισυνεχής. Όπως έχουμε ήδη αναφέρει, η c γράφεται $c = \sup_n c_n$, όπου (c_n) είναι αύξουσα ακολουθία ομοιόμορφα συνεχών συναρτήσεων κόστους. Επίσης, επειδή μπορούμε να αντικαταστήσουμε την c_n από την $\inf(c_n, n)$, μπορούμε να υποθέσουμε ότι οι c_n είναι φραγμένες.
Τώρα θέτουμε

$$I_n[\pi] = \int_{X\times Y} c_n \, d\pi \quad , \quad \pi \in \Pi(\mu,\nu).$$

Από το βήμα 2 έχουμε ότι

$$\inf_{\pi\in\Pi(\mu,\nu)} I_n[\pi] = \sup_{(\varphi,\psi)\in\Phi_{c_n}} J(\varphi,\psi). \tag{7.1}$$

Τώρα επειδή, για κάθε n ισχύει

$$\sup_{(\varphi,\psi)\in\Phi_{c_n}} J(\varphi,\psi) \leq \sup_{(\varphi,\psi)\in\Phi_c} J(\varphi,\psi) \tag{7.2}$$

αν δείξουμε ότι

$$\sup_n \inf_{\pi\in\Pi(\mu,\nu)} I_n[\pi] = \inf_{\pi\in\Pi(\mu,\nu)} I[\pi], \tag{7.3}$$

έχουμε τελειώσει.

Η (7.2) είναι προφανής: αφού $c_n \leq c$, έπεται ότι $\Phi_{c_n} \subset \Phi_c$ Παρατηρούμε ότι η ακολουθία $(I_n)_n$, είναι αύξουσα, αφού η $(c_n)_n$ είναι αύξουσα. Άρα και η $(\inf_{\pi\in\Pi(\mu,\nu)} I[\pi])_n$ είναι αύξουσα. Επομένως το μόνο που έχουμε να δείξουμε είναι ότι

$$\lim_{n\to\infty} \inf_{\pi\in\Pi(\mu,\nu)} I_n[\pi] \geq \inf_{\pi\in\Pi(\mu,\nu)} I[\pi]. \tag{7.4}$$

Παρατηρούμε ότι η οικογένεια $\Pi(\mu,\nu)$ είναι tight. Πράγματι, εφόσον τα μ,ν είναι tight έπεται ότι υπάρχουν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχουν συμπαγή σύνολα $K_\varepsilon \subset X$, $L_\varepsilon \subset Y$, τέτοια ώστε

$$\mu(K_\varepsilon^c) \leq \varepsilon/2 \quad \nu(L_\varepsilon^c) \leq \varepsilon/2,$$

οπότε για κάθε $\pi \in \Pi(\mu,\nu)$,

$$\pi\left((K_\varepsilon \times L_\varepsilon)^c\right) \leq \pi(K_\varepsilon^c \times Y) + \pi(X \times L_\varepsilon^c) = \mu(K_\varepsilon^c) + \nu(L_\varepsilon^c) \leq \varepsilon.$$

Από το θεώρημα του Prokhorov, έπεται ότι το $\Pi(\mu,\nu)$ είναι σχετικά ακολουθιακά συμπαγές (η w^*–τοπολογία στον $M(X\times Y)$ είναι μετρικοποιήσιμη, όταν οι χώροι X, Y είναι Πολωνικοί). Αυτό σημαίνει ότι, αν για κάθε n, η ακολουθία $(\pi_n^k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \Pi(\mu,\nu)$ είναι τέτοια ώστε $I[\pi_n^k] \to \inf_{\pi\in\Pi(\mu,\nu)} I_n[\pi]$, τότε υπάρχει υπακολουθία, που την συμβολίζουμε πάλι με $(\pi_n^k)_{k\in\mathbb{N}}$, και ένα μέτρο πιθανότητας $\pi_n \in \mathcal{P}(X\times Y)$ ώστε $\pi_n^k \xrightarrow{w^*} \pi_n$. Αυτό σημαίνει ότι για κάθε συνεχή συνάρτηση θ στον $X \times Y$,

$$\int \theta(x,y)\, d\pi_n^k(x,y) \longrightarrow \int \theta(x,y)\, d\pi_n(x,y),$$

καθώς $k \to \infty$. Από αυτό έπεται άμεσα ότι το π_n ανήκει στο $\Pi(\mu,\nu)$ και ότι το $\Pi(\mu,\nu)$ είναι συμπαγές, αφού για κάθε ακολουθία $(\pi_n)_n$ με $\pi_n \xrightarrow{w^*} \pi$, $\pi \in \mathcal{P}(X\times Y)$, τότε $\pi \in \Pi(\mu,\nu)$, είναι συμπαγές και

$$\inf I_n = \lim_{k\to\infty} \int c_n\, d\pi_n^k = \int c_n\, d\pi_n,$$

δηλαδή για κάθε n υπάρχει $\pi_n \in \Pi(\mu,\nu)$ ώστε $\inf I_n = I[\pi_n]$.

Όμοια, η ακολουθία $(\pi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ έχει σημείο συσσώρευσης, έστω π_*, από τη συμπάγεια του $\Pi(\mu,\nu)$. Για κάθε $n \geq m$, είναι $I_n[\pi_n] \geq I_m[\pi_n]$. Από την συνέχεια του I_m, έπεται ότι

$$\lim_{n\to\infty} I_n[\pi_n] \geq \limsup_{n\to\infty} I_m[\pi_n] \geq I_m[\pi_*].$$

Από το θεώρημα μονότονης σύγκλισης έπεται ότι $I_m[\pi_*] \to I[\pi_*]$, καθώς $m \to \infty$, οπότε

$$\lim_{n\to\infty} I_n[\pi_n] \geq \lim_{m\to\infty} I_m[\pi_*] = I[\pi_*] \geq \inf_{\pi\in\Pi(\mu,\nu)} I[\pi],$$

και έχουμε δείξει αυτό που θέλαμε. Τέλος το infimum πιάνεται από ένα μέτρο $\pi_* \in \Pi(\mu,\nu)$, λόγω της συμπάγειας του $\Pi(\mu,\nu)$. Πράγματι, αν $(\pi_k)_k$ ακολουθία στο $\Pi(\mu,\nu)$

ώστε $I[\pi_k] \to \inf_{\pi\in\Pi(\mu,\nu)} I[\pi]$, τότε η $(\pi_k)_k$ έχει υπακολουθία, την οποία συμβολίζουμε πάλι με $(\pi_k)_k$, και υπάρχει μέτρο πιθανότητας π_* ώστε $\pi_k \xrightarrow{w^*} \pi_*$. Τότε

$$I[\pi_*] = \lim_{n\to\infty} I_n[\pi_*] \leq \lim_{n\to\infty} \limsup_{k\to\infty} I_n[\pi_k] \leq \limsup_{k\to\infty} I[\pi_k] = \inf I.$$

□

7.3 Η ανισότητα του Pinsker

Θεώρημα 7.3.1. *Έστω (X,d) μετρικός χώρος και μ,ν δύο μέτρα Borel πιθανότητας ώστε $\nu \ll \mu$. Τότε, για τη σχετική εντροπία*

$$H(\nu|\mu) = \int_Q \log\frac{d\nu}{d\mu} d\nu = \int_X \frac{d\nu}{d\mu}\log\frac{d\nu}{d\mu} d\mu$$

ισχύει η ανισότητα:

$$H(\nu|\mu) \geq \frac{1}{2} \parallel \mu-\nu \parallel^2,$$

οπου $\parallel \mu-\nu \parallel$ η ολική κύμανση του μέτρου $\mu-\nu$.

Απόδειξη. Θέτουμε $f = \frac{d\mu}{d\nu}$ με $f \geq 0$ (δηλαδή $\nu(A) = \int_A f d\mu$ για κάθε $A \in \mathcal{B}(X)$). Παρατηρούμε ότι: $\int (f-1)d\mu = \int f d\mu - 1 = 0$. Αν λοιπόν θέσουμε $u = f-1$, τότε

$$H(\nu|\mu) = \int_X h(u)d\mu,$$

όπου $h(t) = (1+t)\log(1+t) - t\ ,\ t \geq -1$.

Από το θεώρημα του Taylor με χρήση του ολοκληρωτικού υπολοίπου βρίσκουμε:

$$\begin{aligned} h(t) &= h(0) + h'(0)t + \int_0^t \frac{h''(0)}{1!}(t-s)ds \\ &= \int_0^1 \frac{1}{1+tw}(t-tw)t\, dw \\ &= t^2\int_0^1 \frac{1-tw}{1+tw}\, dw. \end{aligned} \tag{7.5}$$

όπου η δεύτερη ισότητα προέκυψε από την αντικατάσταση $s = tw$. Συνεπώς, έχουμε

$$H(\nu|\mu) = \int_X h(u(x))d\mu(x) = \int_X h(u)d\mu = \int_X\int_0^1 \frac{u^2(1-t)}{1+ut}\, dtd\mu$$

Επίσης έχουμε :

$$\|\nu-\mu\| = \int_X d|\nu-\mu| = \int_X |u|\, d\mu.$$

Από την ανισότητα Cauchy-Schwarz έχουμε :

$$\begin{aligned}
\|\nu-\mu\|^2\left(\int_0^1 (1-t)\,dt\right)^2 &= \left(\int_0^1\int_X |u|(1-t)\,d\mu dt\right)^2\\
&\le \int_0^1\int_X \frac{u^2(1-t)}{1+tu}\,d\mu dt \int_0^1\int_X (1-t)(1+tu)\,d\mu dt\\
&= H(\nu|\mu)\left[\int\int (1-t)+\int\int t(1-t)u\right]\\
&= H(\nu|\mu)\int_0^1 (1-t)dt\\
&= \frac{1}{2}H(\nu|\mu). \qquad (7.6)
\end{aligned}$$

Άρα, τελικά,

$$H(\nu|\mu)\ge\frac{1}{2}\|\nu-\mu\|^2.$$

□

7.4 Ανισότητες κόστους μεταφοράς και συγκέντρωση του μέτρου

Έστω (X,d) μετρικός χώρος και μ,ν Borel μέτρα πιθανότητας στον X ώστε το ν να είναι απόλυτα συνεχές ως προς το μ. Τότε, ορίζεται η παράγωγος Radon–Nikodym $\frac{d\nu}{d\mu}$ και ορίζουμε ως **σχετική εντροπία του ν ως προς το μ** την ποσότητα

$$H(\nu|\mu)=Ent_\mu\left(\frac{d\nu}{d\mu}\right)=\int\log\frac{d\nu}{d\mu}\,d\nu$$

και την **απόσταση Wasserstein**

$$W_1(\mu,\nu)=\inf_{\pi\in\Pi(\mu,\nu)}\int_X\int_X d(x,y)\,d\pi(x,y).$$

Αν θεωρήσουμε στον X την διακριτή μετρική τότε η απόσταση Wasserstein συμπίπτει με την ολική κύμανση του $\mu-\nu$. Έστω ότι υπάρχει σταθερά $C>0$ ώστε

$$W_1(\mu,\nu)\le(2CH(\nu|\mu))^{1/2}$$

για κάθε μέτρο ν απόλυτα συνεχές ως προς το μ. Έστω A,B Borel υποσύνολα του X με $\mu(A),\mu(B)>0$,. Θεωρούμε τα μέτρα $\mu_A=\mu(\cdot|A)$ και $\mu_B=\mu(\cdot|B)$. Τότε, από την τριγωνική ανισότητα ισχύει:

$$\begin{aligned}
W_1(\mu_A,\mu_B) &\le W_1(\mu,\mu_A)+W_!(\mu,\mu_B)\\
&\le \sqrt{2CH(\mu_A|\mu)}+\sqrt{2CH(\mu_B|\mu)}\\
&\le \sqrt{2C\log\frac{1}{\mu(A)}}+\sqrt{2C\log\frac{1}{\mu(B)}}.
\end{aligned}$$

Τώρα, επειδή τα μ_A , μ_B έχουν φορέα τα A και B αντίστοιχα, από τον ορισμό της W_1 έπεται ότι

$$W_1(\mu_A, \mu_B) \geq d(A, B) = \inf\{d(x, y) \ : \ x \in A, y \in B\}.$$

Έτσι αν τα A, B είναι τέτοια ώστε $d(A, B) \geq r > 0$, έχουμε

$$r \leq \sqrt{2C \log \frac{1}{\mu(A)}} + \sqrt{2C \log \frac{1}{1 - \mu(A_r)}},$$

όπου $A = \{x \in X : \ d(x, A) < r\}$, η r–επέκταση του A. Έτσι, αν $A \subset X$, τέτοιο ώστε $\mu(A) \geq \frac{1}{2}$, είναι

$$r \leq \sqrt{2C \log 2} + \sqrt{2C \log \frac{1}{1 - \mu(A_r)}},$$

οπότε αν $r \geq 2\sqrt{2C \log 2}$, τότε

$$r \leq \frac{r}{2} + \sqrt{2C \log \frac{1}{1 - \mu(A_r)}},$$

απ' όπου έπεται ότι

$$1 - \mu(A_r) \leq e^{-r^2/8C}.$$

Δηλαδή, έχουμε ανισότητα συγκέντρωσης. Μέχρι τώρα έχουμε ότι δει ότι αν έχουμε ανισότητα

$$E_{(X,d,\mu)}(\lambda) \leq e^{C\lambda^2/2} \tag{7.7}$$

για κάθε $\lambda > 0$, και για κάποια σταθερά $C > 0$, όπου $E_{(X,d,\mu)}(\lambda)$ είναι το συναρτησοειδές του Laplace, από το επιχείρημα του Herbst συμπεραίνουμε ανισότητα συγκέντρωσης. Στο παρακάτω θεώρημα αποδεκνύουμε ότι οι δύο αυτές ανισότητες είναι ισοδύναμες.

Θεώρημα 7.4.1. *Έστω μ ένα μέτρο Borel πιθανότητας σε ένα μετρικό χώρο (X, d). Τότε*

$$W_1(\mu, \nu) \leq \sqrt{2CH(\nu|\mu)}, \tag{7.8}$$

για κάποια σταθερά $C > 0$, για κάθε ν απόλυτα συνεχές ως προς το μ, αν και μόνο αν

$$E_{(X,d,\mu)}(\lambda) \leq e^{C\lambda^2/2}, \quad \lambda \geq 0. \tag{7.9}$$

Απόδειξη: Από το θεώρημα δυϊσμού του Kantorovich η απόσταση Wasserstein γράφεται

$$W_1(\mu, \nu) = \sup \left[\int_X g \, d\nu - \int_X f \, d\mu \right],$$

όπου το supremum παίρνεται πάνω απ΄ όλες τις φραγμένες μετρήσιμες συναρτήσεις f και g που ικανοποιούν την $g(x) \leq f(y) + d(x,y)$, για κάθε $x, y \in X$. Ονομάζουμε αυτό το σύνολο Φ_d όπως στην απόδειξη του θεωρήματος Kantorovich. Από την (7.6) έπεται ότι αν $(g,f) \in \Phi_d$, τότε,

$$\int g\, d\nu - \int f\, d\mu \leq \sqrt{2C\mathrm{Ent}_\mu\left(\frac{d\nu}{d\mu}\right)},$$

ισοδύναμα για κάθε $\lambda > 0$,

$$\begin{aligned}\int g\, d\nu - \int f\, d\mu &\leq \left(C\lambda\, \frac{2}{\lambda}\mathrm{Ent}_\mu\left(\frac{d\nu}{d\mu}\right)\right)^{1/2} \\ &\leq \frac{c\lambda}{2} + \frac{1}{\lambda}\mathrm{Ent}_\mu\left(\frac{d\nu}{d\mu}\right).\end{aligned}$$

Θέτουμε $\varphi = \frac{d\nu}{d\mu}$, οπότε

$$\int \left(\lambda g - \lambda \int f\, d\mu - \frac{C\lambda^2}{2}\right)\varphi\, d\mu \leq \mathrm{Ent}_\mu(\varphi).$$

Επίσης θέτουμε $\psi = \lambda g - \lambda \int f\, d\mu - \frac{C\lambda^2}{2}$, οπότε έχουμε ότι

$$\int \psi\varphi\, d\mu \leq \mathrm{Ent}_\mu(\varphi). \tag{7.10}$$

Αυτό ισχύει για κάθε $\varphi = \frac{d\nu}{d\mu}$, οπότε παίρνοντας την $\psi = \frac{e^\psi}{\int e^\psi\, d\mu}$ έχουμε

$$\int \psi e^\psi\, d\mu \leq \mathrm{Ent}_\mu(e^\psi),$$

αφού η $\mathrm{Ent}_\mu(f)$ είναι ομογενής πρώτου βαθμού. Τότε

$$\int \psi e^\psi\, d\mu \leq \int \psi e^\psi\, d\mu - \int e^\psi\, d\mu\, \log \int e^\psi\, d\mu$$

δηλαδή $\log \int e^\psi\, d\mu \leq 0$. Ειδικότερα $\int e^\psi\, d\mu \leq 1$. Αυτό σημαίνει ότι

$$\int e^{\lambda g}\, d\mu \leq e^{\lambda \int f\, d\mu + \frac{C\lambda^2}{2}} \;,\; \lambda \geq 0. \tag{7.11}$$

Έστω λοιπόν μια 1–Lipschitz συνάρτηση F με $\int F\, d\mu = 0$. Τότε, παίρνοντας $f = g = F$, έχουμε ότι

$$\int e^{\lambda F}\, d\mu \leq e^{\frac{C\lambda^2}{2}} \;,\; \lambda \geq 0.$$

και παίρνοντας supremum έχουμε το ζητούμενο.

Έστω τώρα $(g, f) \in \Phi_d$, δηλαδή για κάθε $x, y \in X$, $g(y) \leq f(x) + d(x, y)$. Τότε ορίζουμε

$$F(x) = \inf_{y \in X} [f(y) + d(x, y)].$$

Για την F έχουμε ότι $g \leq F \leq f$ και ότι είναι 1–Lipschitz. Πράγματι· έστω $\varepsilon > 0$ και $x, y \in X$, τότε από τον ορισμό του infimum υπάρχει $z \in X$ τέτοιο ώστε

$$f(z) + d(x, z) < F(x) + \varepsilon.$$

Τότε,

$$F(x) \geq f(z) + d(y, z) - d(x, y) - \varepsilon \geq F(y) - d(x, y) - \varepsilon$$

οπότε $F(y) - F(x) \leq d(x, y) + \varepsilon$ και αφού ισχύει για κάθε $\varepsilon > 0$, έπεται ότι $F(y) - F(x) \leq d(x, y)$, για κάθε $x, y \in X$. Όμοια δείχνουμε ότι $F(x) - F(y) \leq d(x, y)$. Τώρα παίρνουμε την $\tilde{F} = F - \int F \, d\mu$, οπότε $\int \tilde{F} \, d\mu = 0$ και $\tilde{F} = F - \int F \, d\mu \geq g - \int f \, d\mu$, άρα

$$\int e^{\lambda g - \lambda \int f \, d\mu} \, d\mu \leq \int e^{\lambda \tilde{F}} \, d\mu \leq e^{\frac{C\lambda^2}{2}}.$$

Κάνουμε πάλι την ίδια δουλειά, δηλαδή θέτουμε $\psi = \lambda g - \lambda \int f \, d\mu - \frac{C\lambda^2}{2}$, οπότε έχουμε ότι $\int e^{\psi} \, d\mu \leq 1$. Άρα για την $\varphi = \frac{d\nu}{d\mu}$ ισχύει

$$\mathrm{Ent}_{\mu}(\varphi) = \sup \left\{ \int \varphi\psi \, d\mu \; : \; \int e^{\psi} \, d\mu \leq 1 \right\} \geq \int \varphi\psi \, d\mu.$$

Ισοδύναμα, όπως δείξαμε παραπάνω, παίρνουμε ότι

$$\int g \, d\nu - \int f \, d\mu \leq \sqrt{2C\mathrm{Ent}_{\mu}(\varphi)}.$$

Παίρνοντας supremum ως προς όλα τα ζεύγη έχουμε ότι

$$W_1(\mu, \nu) \leq \sqrt{2CH(\nu|\mu)}.$$

□

Η γενίκευση της απόστασης Wasserstein για έναν μετρικό χώρο (X, d) εφοδιασμένο με μέτρα πιθανότητας μ, ν στα Borel υποσύνολά του είναι:

$$W_{\tilde{c}}(\mu, \nu) = \inf \left\{ \int_{X \times X} \tilde{c}(x, y) \, d\pi(x, y) : \; \pi \in \Pi(\mu, \nu) \right\}.$$

Η γενίκευση του δυϊκού χαρακτηρισμού της αναπαράστασης Monge–Kantorovich–Rubinstein είναι

$$W_{\tilde{c}}(\mu, \nu) = \sup \left[\int_X g \, d\nu - \int_X f \, d\mu \right],$$

όπου το supremum παίρνεται πάνω από όλες τις φραγμένες μετρήσιμες συναρτήσεις οι οποίες ικανοποιούν την ανισότητα

$$g(y) \leq f(x) + \tilde{c}(x,y)$$

για κάθε $x, y \in X$. Επίσης, ορίζουμε την **ελαχιστική συνέλιξη** μιας συνάρτησης f στον X ως εξής:

$$Q_{\tilde{c}} f(x) = \inf_{y \in X} \left[f(y) + \tilde{c}(x,y) \right], \; x \in X.$$

Επαναλαμβάνοντας την απόδειξη του προηγούμενου θεωρήματος έχουμε την παρακάτω πρόταση.

Πρόταση 7.4.2. *Έστω (X,d) μετρικός χώρος, μ ένα μέτρο πιθανότητας στα Borel υποσύνολα του X και $\tilde{c}$ μια συνάρτηση κόστους στον $X \times X$. Τότε,*

$$W_{\tilde{c}}(\mu,\nu) \leq H(\nu|\mu)$$

για κάθε ν απόλυτα συνεχές ως προς το μ αν και μόνο αν για κάθε φραγμένη μετρήσιμη f ισχύει

$$\int_X e^{Q_{\tilde{c}} f} \, d\mu \leq e^{\int_X f \, d\mu}.$$

Απόδειξη: $(\Rightarrow)$ Έστω f, g φραγμένες μετρήσιμες ώστε: για κάθε $x, y \in X$, ισχύει

$$g(y) \leq f(x) + \tilde{c}(x,y),$$

και $\varphi = \frac{d\nu}{d\mu}$. Τότε

$$\int_X g \, d\nu - \int_X f \, d\mu \leq \mathrm{Ent}_\mu(\varphi),$$

ισοδύναμα,

$$\int_X \left(g - \int_X f \, d\mu \right) \varphi \, d\mu \leq \mathrm{Ent}_\mu(\varphi).$$

Θέτουμε $\psi = g - \int f \, d\mu$ και $\varphi = e^\psi / \int e^\psi \, d\mu$ και έχουμε ότι

$$\int_X \psi e^\psi \, d\mu \leq \mathrm{Ent}_\mu(e^\psi),$$

από το οποίο έπεται ότι $\int e^\psi \, d\mu \leq 1$. Άρα $\int_X e^g \, d\mu \leq e^{\int_X f \, d\mu}$. Αν στην θέση της g βάλουμε την $Q_{\tilde{c}} f$, παίρνουμε την ζητούμενη ανισότητα

$$\int_X e^{Q_c f} \, d\mu \leq e^{\int_X f \, d\mu}. \tag{7.12}$$

Η αντίστροφη πορεία της απόδειξης είναι τελείως ανάλογη. □

Ανισότητες της μορφής

$$\int e^{Q_{\tilde{c}}f}\, d\mu \int e^{-f}\, d\mu \leq 1 \tag{7.13}$$

καλούνται **ανισότητες ελαχιστικής συνέλιξης** και λέμε ότι το μ ικανοποιεί την ανισότητα ελαχιστικής συνέλιξης ως προς την συνάρτηση κόστους $\tilde{c}$. Από την ανισότητα Jensen έχουμε ότι $\int e^{-f}\, d\mu \geq e^{-\int f\, d\mu}$, οπότε έχουμε ότι η (7.13) είναι πιο ισχυρή από την (7.12).

Πόρισμα 7.4.3. *Έστω μ ένα μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$. Τότε,*

$$W_2(\mu,\nu) \leq \sqrt{CH(\nu|\mu)} \tag{7.14}$$

για κάποια σταθερά $C > 0$ και για κάθε μέτρο πιθανότητας ν αν και μόνο αν για κάθε φραγμένη μετρήσιμη συνάρτηση f στον $\mathbb{R}^n$ ισχύει

$$\int_X e^{Q_{1/C}f}\, d\mu \leq e^{\int_X f\, d\mu}$$

όπου $Q_c f$, $c > 0$ είναι η ελαχιστική συνέλιξη της f ως προς την συνάρτηση κόστους $\tilde{c}(x,y) = \frac{c}{2}|x-y|^2$, δηλαδή

$$Q_c f(x) = \inf_{y\in\mathbb{R}^n} \left[f(y) + \frac{c}{2}|x-y|^2\right],\ x \in \mathbb{R}^n.$$

και

$$W_2(\mu,\nu)^2 = \inf_{\pi\in\Pi(\mu,\nu)} \int_X \int_X \frac{1}{2}|x-y|^2\, d\pi(x,y)$$

η τετραγωνική απόσταση Wasserstein.

Λήμμα 7.4.4. *Έστω X, Y μετρικοί χώροι, μ,ν μέτρα Borel πιθανότητας στον X και Y αντίστοιχα που ικανοποιούν την ανισότητα της ελαχιστικής συνέλιξης με συναρτήσεις κόστους $\tilde{c}$ και $\tilde{e}$ αντίστοιχα. Τότε το μέτρο $\mu\otimes\nu$ ικανοποιεί την ανισότητα ελαχιστικής συνέλιξης στον $X\times Y$ ως προς την συνάρτηση κόστους $\tilde{c}+\tilde{e}$.*

Απόδειξη: Έστω $f = f(x,y)$ μια συνάρτηση στον $X\times Y$ και $f^y(x) = f(x,y)$ $(y \in Y)$. Θέτουμε $g(y) = \log \int e^{Q_{\tilde{c}}f}\, d\mu$.

Ισχυρισμός. Ισχύει η ανισότητα

$$\int_X e^{Q_{\tilde{c}+\tilde{e}}f}\, d\mu \leq e^{Q_{\tilde{e}}g}.$$

Απόδειξη. Πράγματι,

$$\int_X \exp Q_{\tilde{c}+\tilde{e}}f(x,y)\, d\mu(x) \quad = \quad \int_X \exp\left\{\inf_{(s,t)} [f(s,t) + \tilde{c}(x,s) + \tilde{e}(y,t)]\right\} d\mu(x)$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_X \inf_{(s,t)} \left[\exp\left\{f(s,t) + \tilde{c}(x,s) + \tilde{e}(y,t)\right\}\right] d\mu(x) \\
&\leq \inf_t \int_X \exp\left\{\inf_s \left[f^t(s) + \tilde{c}(x,s)\right]\right\} e^{\tilde{e}(y,t)}\, d\mu(x) \\
&= \inf_t \int_X e^{Q_{\tilde{c}} f^t}\, d\mu(x) e^{\tilde{e}(y,t)} \\
&= \inf_t e^{g(t)+\tilde{e}(y,t)} \\
&= \exp\left\{\inf_t [g(t) + \tilde{e}(y,t)]\right\} = e^{Q_{\tilde{e}} g(y)}
\end{aligned}
$$

Εφαρμόζοντας την (7.13) στην f^y ως προς το μ, για κάθε y έχουμε ότι

$$\int_X e^{Q_{\tilde{c}} f^y}\, d\mu \int_X e^{-f^y}\, d\mu \leq 1.$$

Άρα,

$$\int_X e^{-f^y}\, d\mu \leq \left(\int_X e^{Q_{\tilde{c}} f^y}\, d\mu\right)^{-1} = e^{-g(y)} \tag{7.15}$$

και

$$\int_Y e^{Q_{\tilde{e}} g}\, d\nu \int_Y e^{-g(y)}\, d\nu \leq 1. \tag{7.16}$$

Συνδυάζοντας τις (7.15) και (7.16) έχουμε ότι

$$
\begin{aligned}
\int_{X\times Y} e^{Q_{\tilde{c}+\tilde{e}} f}\, d\mu \otimes \nu \int_{X\times Y} e^{-f}\, d\mu \otimes \nu &= \int_Y \left(\int_X e^{Q_{\tilde{c}+\tilde{e}} f}\, d\mu\right) d\nu \int_Y \left(\int_X e^{-f^y}\, d\mu\right) d\nu \\
&\leq \int_Y e^{Q_{\tilde{e}} g}\, d\nu \int_Y e^{-g}\, d\nu \leq 1.
\end{aligned}
$$

□

Πρόταση 7.4.5. *Έστω (X_i, d_i, μ_i) μετρικοί χώροι πιθανότητας, $X = \prod_{i=1}^n X_i$ ο χώρος γινόμενο εφοδιασμένος με το μέτρο γινόμενο $P = \mu_1 \times \ldots \times \mu_n$. Υποθέτουμε ότι τα μ_i $i = 1, \ldots, n$ ικανοποιούν την ανισότητα*

$$W_{\tilde{c}_i}(\mu_i, \nu_i) \leq H(\nu_i|\mu_i),$$

για κάποιες συναρτήσεις κόστους $\tilde{c}_i$ και για κάθε μέτρο πιθανότητας ν_i στον X_i. Τότε

$$W_{\tilde{c}}(P, R) \leq H(R|P),$$

για κάθε μέτρο πιθανότητας R στον X ως προς την συνάρτηση κόστους $\tilde{c} = \sum_{i=1}^n \tilde{c}_i$.

Απόδειξη. Με επαγωγή. Αρκεί να το δείξουμε για $n = 2$. Πράγματι, δουλεύοντας όπως στο λήμμα 7.4.4, θέτουμε $g(x_2) = \log \int_{X_1} e^{Q_{\tilde{c}_1} f^{x_2}}\, d\mu_1$, όπου $f^{x_2}(\cdot) = f(\cdot, x_2)$ η περιθώρια συνάρτηση της f. Έχουμε δείξει ότι

$$\int_{X_1} e^{Q_{\tilde{c}} f^{x_2}}\, d\mu_1 \leq e^{Q_{\tilde{c}_2} g},$$

όπου $\tilde{c}\tilde{c}_1 + \tilde{c}_2$, οπότε

$$\begin{aligned}\int_{X_2}\int_{X_1} e^{Q_{\tilde{c}} f}\, d\mu_1\, d\mu_2 &\leq \int_{X_2} e^{Q_{\tilde{c}_2} g}\, d\mu_2 \leq \int e^{\int_{X_2} g\, d\mu_2}\\ &\leq e^{\int_{X_2}\int_{X_1} f^{x_2}\, d\mu_1 d\mu_2},\end{aligned}$$

αφού

$$\int_{X_1} e^{Q_{\tilde{c}_1} f^{x_2}}\, d\mu_1 \leq e^{\int_{X_1} f^{x_2}\, d\mu_1},$$

οπότε $g(x_2) \leq \int_{X_2} f^{x_2}\, d\mu_2$.

Οι ανισότητες ελαχιστικής συνέλιξης εξασφαλίζουν ανισότητες συγκέντρωσης. Έστω $(X, \mathcal{A})$ ένας χώρος μέτρου. Θεωρούμε μια συνάρτηση κόστους $\tilde{c} : X \times X \to \mathbb{R}_+$. Για μια συνάρτηση f ορισμένη στον X ορίζουμε κατά τα γνωστά την ελαχιστική συνέλιξή της ως εξής:

$$Q_{\tilde{c}} f(x) = \inf_{y \in X} [f(y) + \tilde{c}(x, y)]\ ,\ x \in X.$$

Έστω επίσης ένα μέτρο πιθανότητας μ στον $(X, \mathcal{A})$. Για κάθε φραγμένη μετρήσιμη συνάρτηση f στον X ισχύει

$$\int_X e^{Q_{\tilde{c}} f}\, d\mu \int_X e^{-f}\, d\mu \leq 1,$$

δηλαδή ικανοποιεί την ανισότητα ελαχιστικής συνέλιξης. Με την παραδοχή ότι $-\infty \times 0 \leq 1$, η παραπάνω ανισότητα επεκτείνεται σε συναρτήσεις που παίρνουν τιμές σε όλο το $\bar{\mathbb{R}}$. Τότε ισχύει η παρακάτω πρόταση.

Πρόταση 7.4.6. *Αν το μ ικανοποιεί την ανισότητα της ελαχιστικής συνέλιξης, ως προς την συνάρτηση κόστους $\tilde{c}$, τότε για κάθε μετρήσιμο σύνολο $A \subset X$ και για κάθε $r > 0$, ισχύει*

$$1 - \mu(\{\inf_{y \in A} \tilde{c}(\cdot, y) \geq r\}) \leq \frac{1}{\mu(A)} e^{-r}.$$

Απόδειξη: Εφαρμόζουμε την ανισότητα ελαχιστικής συνέιλιξης για την συνάρτηση f που είναι 0 στο A και $+\infty$ έξω από το A. Τότε έχουμε ότι $Q_{\tilde{c}} f \geq r$ αν και μόνο αν $\inf_{y \in A} \tilde{c}(x, y) \geq r$. Εφαρμόζοντας τώρα την f στην ανισότητα ελαχιστικής συνέλιξης έχουμε ότι

$$\int_X e^{Q_{\tilde{c}} f}\, d\mu \int_X e^{-f}\, d\mu \quad = \quad \int_X e^{Q_{\tilde{c}} f}\, d\mu \left(\int_A e^{-f}\, d\mu + \int_{A^c} e^{-f}\, d\mu\right)$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_X e^{Q_{\tilde{c}} f}\, d\mu \int_A 1\, d\mu + \int_X e^{Q_{\tilde{c}} f}\, d\mu \int_{A^c} 0\, d\mu \\
&= \mu(A) \int_X e^{Q_{\tilde{c}} f}\, d\mu \le 1,
\end{aligned}
$$

άρα τελικά

$$
\int_X e^{Q_{\tilde{c}} f}\, d\mu \le \frac{1}{\mu(A)}. \tag{7.17}
$$

Τέλος εφαρμόζοντας την ανισότητα του Chebyshev ισχύει

$$
\begin{aligned}
1 - \mu(\{\inf_{y\in A} \tilde{c}(\cdot, y) < r\}) &= \mu(\{\inf_{y\in A} \tilde{c}(\cdot, y) \ge r\}) \\
&= \mu(\{e^{Q_{\tilde{c}} f} \ge r\}) \\
&\le e^{-r} \int_X e^{Q_{\tilde{c}} f}\, d\mu \\
&\le \frac{1}{\mu(A)} e^{-r}.
\end{aligned}
$$

Ενδιαφέρον παρουσιάζουν οι περιπτώσεις όπου η συνάρτηση κόστους κόστους σε έναν μετρικό χώρο (X, d) είναι η

$$
\tilde{c}(x, y) = \frac{c}{2} d(x, y)^2, \quad x, y \in X,
$$

για κάποια σταθερά $c > 0$. Από την ανισότητα Jensen έπεται ότι για κάθε φραγμένη μετρήσιμη συνάρτηση f ισχύει

$$
\int_X e^{Q_{\tilde{c}} f}\, d\mu \le e^{\int_X f\, d\mu}.
$$

Αν θεωρήσουμε μία συνάρτηση Lipschitz F στον X με σταθερά Lipschitz $\|F\|_{Lip}$, τότε σταθεροποιώντας ένα $x \in X$, έχουμε για κάθε $y \in X$,

$$
F(y) \ge F(x) - \|F\|_{Lip}\, d(x, y),
$$

άρα

$$
F(y) + \frac{c}{2} d(x, y)^2 \ge F(x) - \|F\|_{Lip}\, d(x, y) + \frac{c}{2}\, d(x, y)^2,
$$

οπότε παίρνοντας infimum ως προς $y \in X$ έχουμε ότι

$$
\begin{aligned}
Q_{\tilde{c}} F(x) &\ge F(x) + \inf_{y\in X} \left[-\|F\|_{Lip}\, d(x, y) + \frac{c}{2}\, d(x, y)^2 \right] \\
&\ge F(x) - \frac{1}{2c} \|F\|_{Lip}^2,
\end{aligned}
$$

αφού για κάθε $y \in X$

$$-\|F\|_{Lip}\, d(x,y) + \frac{c}{2}\, d(x,y)^2 \geq -\frac{1}{2c}\|F\|^2_{Lip}.$$

Έτσι έπεται ότι

$$\int e^F \, d\mu \leq e^{\int F \, d\mu + \|F\|^2_{Lip}/2},$$

από την οποία εξάγονται φράγματα Laplace, και από αυτά παίρνουμε ανισότητα συγκέντρωσης. Ανισότητες της μορφής (7.14) λέγονται **τετραγωνικές ανισότητες κόστους μεταφοράς**.

Έστω μ ένα μέτρο πιθανότητας στα Borel υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$ με πυκνότητα e^{-U} ως προς το μέτρο Lebesque. Υποθέτουμε ότι η U έχει την ιδιότητα για κάποια σταθερά $c > 0$ και για κάθε $\theta \in [0,1]$, $x, y \in \mathbb{R}^n$, ισχύει

$$\theta U(x) + (1-\theta)U(y) - U\left(\theta x + (1-\theta)y\right) \geq \frac{c}{2}\theta(1-\theta)|x-y|^2. \tag{7.18}$$

Θεώρημα 7.4.7. *Έστω μ ένα μέτρο πιθανότητας στα Borel υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$ τέτοιο ώστε $d\mu = e^{-U}dx$, όπου η U ικανοποιεί την (7.18), για κάποια σταθερά $c > 0$. Τότε για κάθε μέτρο πιθανότητας ν στον $\mathbb{R}^n$ ισχύει*

$$W_2(\mu,\nu) \leq \sqrt{\frac{1}{c}H(\nu|\mu)}.$$

Σημείωση: Πριν προχωρήσουμε στην απόδειξη του θεωρήματος αξίζει να παρατηρήσουμε ότι περιλαμβάνει την περίπτωση του μέτρου του Gauss για $c = 1$.

Απόδειξη. Έστω $\theta \in [0,1]$ και $x, y \in \mathbb{R}^n$. Θέτουμε

$$L_\theta(x,y) = \frac{1}{\theta(1-\theta)}\left[\theta U(x) + (1-\theta)U(y) - U(\theta x + (1-\theta)y)\right].$$

Αν f, g είναι συναρτήσεις μετρήσιμες φραγμένες που ικανοποιούν τη σχέση

$$g(y) \leq f(x) + L_\theta(x,y), \quad x, y \in \mathbb{R}^n,$$

τότε οι συναρτήσεις

$$u(x) = e^{-(1-\theta)f(x) - U(x)}, \quad \upsilon(y) = e^{\theta g(y) - U(y)}, \quad w(z) = e^{-U(z)},$$

όπου $z = \theta x + (1-\theta)y$ ο κυρτός συνδυασμός των x, y, ικανοποιούν τις υποθέσεις της συναρτησιακής μορφής του θεωρήματος του Brunn–Minkowski. Πράγματι αφού $L_\theta(x,y) \geq g(y) - f(x)$, τότε

$$U(z) \leq \theta(1-\theta)f(x) + \theta U(y) + (1-\theta)U(y) - \theta(1-\theta)g(y),$$

άρα
$$e^{-U(z)} \geq \left(e^{-(1-\theta)f(x)-U(x)}\right)^{\theta} \left(e^{\theta g(y)-U(y)}\right)^{1-\theta},$$
άρα παίρνουμε
$$1 \geq \left(\int_X e^{-(1-\theta)f}\, d\mu\right)^{\theta} \left(\int_X e^{\theta g}\, d\mu\right)^{1-\theta}.$$
Δοθείσης μιας συνάρτησης f επιλέγουμε για g την βέλτιστη με αυτή την ιδιότητα, δηλαδή την
$$g = L_\theta f(y) = \inf_{x\in\mathbb{R}^n} [f(x) + L_\theta(x,y)], \quad y \in \mathbb{R}^n.$$
Έτσι, παίρνουμε την ανισότητα
$$\left(\int_X e^{-(1-\theta)f}\, d\mu\right)^{1/(1-\theta)} \left(\int_X e^{\theta L_\theta f}\, d\mu\right)^{1/\theta} \leq 1.$$
Από την ανισότητα Jensen ισχύει
$$\int e^{-(1-\theta)f}\, d\mu \geq e^{-\int_X (1-\theta)f\, d\mu},$$
επόμένως, υψώνοντας στην $1/(1-\theta)$ έχουμε ότι $\int_X e^{-(1-\theta)f}\, d\mu \geq e^{-\int_X f\, d\mu}$, άρα τελικά
$$\int_X e^{\theta L_\theta f}\, d\mu \leq e^{\int_X f\, d\mu}.$$
Από τις υποθέσεις για την L_θ, έχουμε ότι
$$\liminf_{\theta\to 1} L_\theta(x,y) \geq \frac{c}{2}|x-y|^2,$$
επομένως αφήνοντας το $\theta \to 1$ έχουμε ότι
$$\int_X e^{Q_c f}\, d\mu \leq e^{\int_X f\, d\mu},$$
οπότε έχουμε το ζητούμενο. □

Έχουμε δει ότι από λογαριθμικές ανισότητες Sobolev συμπεραίνουμε ανισότητες συγκέντρωσης, όπως και από τις τετραγωνικές ανισότητες μεταφοράς. Στην πραγματικότητα οι τετραγωνικές ανισότητες μεταφοράς είναι συνέπεια των λογαριθμικών ανισοτήτων Sobolev. Θεωρούμε ένα μέτρο πιθανότητας μ στα Borel υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$ το οποίο ικανοποιεί την λογαριθμική ανισότητα Sobolev, δηλαδή για κάθε αρκετά ομαλή συνάρτηση ισχύει
$$\mathrm{Ent}_\mu(f^2) \leq 2C \int |\nabla f|^2\, d\mu,$$

για κάποια σταθερά $C > 0$. Για απλότητα θεωρούμε ότι το μ έχει πυκνότητα γνήσια θετική η οποία γράφεται e^{-U} για κάποια ομαλή συνάρτηση U στον $\mathbb{R}^n$. Θεωρούμε τον τελεστή L $L = \triangle - \langle \nabla U, \nabla \rangle$ με αναλλοίωτο μέτρο μ. Ολοκληρώνοντας κατά μέρη παίρνουμε ότι

$$\int f(-Lg)\, d\mu = \int \langle \nabla f, \nabla g \rangle\, d\mu, \tag{7.19}$$

για τυχούσες ομαλές συναρτήσεις f, g. Θεωρούμε την ημιομάδα $(P_t)_{t\geq 0}$ με γεννήτορα τον L. Στην περίπτωση του μέτρου του Gauss η $(P_t)_{t\geq 0}$ έχει την ολοκληρωτική αναπαράσταση

$$P_t f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f\left(e^{-t}x + \sqrt{1-e^{-2t}}y\right)\, d\gamma_n(y).$$

Δοθείσης μιας συνάρτησης f, η οποία ανήκει στο πεδίο ορισμού του L, τότε $u = u(x,t) = P_t f(x)$ είναι η θεμελιώδης λύση του προβλήματος αρχικών τιμών

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - Lu = 0 & , \quad \text{στο } \mathbb{R}^n \times (0, +\infty) \\ u = f & , \quad \text{στο } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\} \end{cases}$$

Ο L. Gross έδειξε ότι η λογαριθμική ανισότητα Sobolev ισχύει για το μ αν και μόνο αν η ημιομάδα $(P_t)_{t\geq 0}$ έχει την ιδότητα της υπερσυσταλτότητας, δηλαδή για κάθε $1 < p < q < +\infty$ και κάθε f στον L_p ισχύει

$$\|P_t f\|_q \leq \|f\|_p \tag{7.20}$$

για κάθε $t > 0$ αρκετά μεγάλο ώστε $e^{2t/C} \geq \frac{q-1}{p-1}$, όπου οι L_p–νόρμες είναι ως προς το μ. Η ιδέα είναι να θεωρήσουμε μία συνάρτηση $q(t)$ για $t \geq 0$, τέτοια ώστε $q(0) = p$ και να πάρουμε την παράγωγο της συνάρτησης $F(t) = \|P_t f\|_{q(t)}$. Από τη σχέση $\frac{\partial}{\partial t}P_t f = LP_t f$ έπεται ότι η παράγωγος είναι

$$\begin{aligned} F'(t) &= \frac{d}{dt}\left[\exp\left(\frac{1}{q(t)}\log\int (P_t f)^{q(t)}\, d\mu\right)\right] \\ &= \left(\int (P_t f)^{q(t)}\, d\mu\right)^{1/q(t)} \\ &\quad \times \left[-\frac{q'(t)}{q(t)^2}\log\int (P_t f)^{q(t)}\, d\mu + \frac{\int (P_t f)^{q(t)}\left[q'(t)\log P_t f + q(t)\frac{LP_t f}{P_t f}\right]\, d\mu}{q(t)\int (P_t f)^{q(t)}\, d\mu}\right] \end{aligned}$$

επομένως

$$\begin{aligned} q(t)^2 F(t)^{q(t)-1}F'(t) &= q'(t)\mathrm{Ent}_\mu\left((P_t f)^{q(t)}\right) + q(t)^2\int (P_t(f))^{q(t)-1}LP_t f\, d\mu \\ &= q'(t)\mathrm{Ent}_\mu\left((P_t f)^{q(t)}\right) - q(t)^2\int \left\langle \nabla (P_t f)^{q(t)-1}, \nabla P_t f\right\rangle\, d\mu \end{aligned}$$

$$= \quad q'(t)\mathrm{Ent}_\mu \left((P_t f)^{q(t)}\right)$$
$$-2(q(t)-1)\int \frac{q(t)^2}{2}|\nabla P_t f|^2 (P_t f)^{q(t)-2}\, d\mu.$$

Εφαρμόζοντας την λογαριθμική Sobolev για την $(P_t f)^{q(t)/2}$, παίρνουμε

$$\mathrm{Ent}_\mu \left((P_t f)^{q(t)}\right) \leq 2C \int |\nabla P_t f|^2 \, \frac{q(t)^2}{4} \, (P_t f)^{q(t)-2}\, d\mu,$$

αφού $|\nabla (P_t f)^{q(t/2)}| = |\nabla P_t f| \frac{q(t)}{2}(P_t f)^{q(t)/2-1}$. Επομένως η παραπάνω ανισότητα γίνεται

$$q(t)^2 F(t)^{q(t)-1}F'(t) \leq \left(q'(t)C - 2(q(t)-1)\right)\int \frac{q(t)^2}{2}|\nabla P_t f|^2 (P_t f)^{q(t)-2}\, d\mu,$$

άρα $F'(t) \leq 0$, αν $q'(t) = 2(q(t)-1)/C$, οπότε παίρνουμε $q(t) = 1 + (p-1)e^{2t/C}$ $t \geq 0$. Έτσι, για τυχαία $1 < p < q < +\infty$, επιλέγοντας αρκετά μεγάλο $t > 0$ τέτοιο ώστε $e^{2t/C} \geq \frac{q-1}{p-1}$, παίρνουμε την ανισότητα υπερσυσταλτότητας $\|P_t f\|_q \leq \|f\|_p$. Ο L. Gross απέδειξε ότι αυτές οι ανισότητες είναι ισοδύναμες. Είναι εύκολο να δούμε ότι η (7.20) παίρνει την ισοδύναμη μορφή

$$\|e^{P_t f}\|_{e^{2t/C}} \leq \|e^f\|_1 \tag{7.21}$$

για κάθε $t > 0$ και f. Ακόμα πιο γενικά από γραμμικότητα προκύπτει ότι

$$\|e^{P_t f}\|_{ae^{2t/C}} \leq \quad (\text{αντίστοιχα } \geq) \quad \|e^f\|_a$$

για κάθε $a \geq 0$ (αντίστοιχα $a \leq 0$).

Θεωρούμε τώρα το πρόβλημα αρχικών Hamilton–Jacobi

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2}|\nabla \upsilon|^2 = 0 & , \quad \text{στο } \mathbb{R}^n \times (0,+\infty) \\ \upsilon = f & , \quad \text{στο } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\} \end{cases}$$

Οι λύσεις Q_t αυτού του προβλήματος περιγράφονται από την αναπαράσταση Hopf–Lax. Για κάθε συνάρτηση f (συνεχή,Lipschitz),

$$Q_t f(x) = \inf_{y\in\mathbb{R}^n} [f(y) + \frac{1}{2t}|x-y|^2], \quad t > 0, \ x \in \mathbb{R}^n.$$

Η οικογένεια $(Q_t)_{t\geq 0}$ ορίζει μία ημιομάδα τελεστών με (μη γραμμικό) γενήτορα $-\frac{1}{2}|\nabla f|^2$. Έτσι, $\upsilon = \upsilon(x,t) = Q_t f(x)$ είναι η λύση του προβλήματος αρχικών τιμών Hopf–Lax. Ακολουθώντας την ιδέα του Gross, θεωρούμε τη συνάρτηση $F(t) = \|e^{Q_t f}\|_{\lambda(t)}$, $t \geq 0$, για κάποια συνάρτηση $\lambda(t)$ με $\lambda(0) = a$, $a \in \mathbb{R}$ και παίρνουμε ανάλογη σχέση

$$\lambda(t)^2 F(t)^{\lambda(t)-1}F'(t) = \lambda'(t)\mathrm{Ent}_\mu \left(e^{\lambda(t)Q_t f}\right) - \int \frac{\lambda(t)^2}{2}|\nabla Q_t f|^2 e^{\lambda(t)Q_t f}\, d\mu.$$

Εφαρμόζοντας τώρα τη λογαριθμική ανισότητα Sobolev για τη συνάρτηση $e^{\lambda(t)Q_t f}$, συμπεραίνουμε ότι $F'(t) \leq 0$ εφόσον $\lambda'(t) = 1/C$, $t \geq 0$. Έτσι, αυτό που δείξαμε είναι ότι για κάθε $t \geq 0$, $a \in \mathbb{R}$ και για κάθε (φραγμένη) συνάρτηση f, ισχύει

$$\|e^{Q_t f}\|_{a+t/C} \leq \|e^f\|_a \tag{7.22}$$

Αποδεικνύεται αντίστροφα ότι αν ισχύει η (7.22) τότε ισχύει η λογαριθμική ανισότητα Sobolev. Δηλαδή, ισχύει το εξής.

Θεώρημα 7.4.8. *Έστω μέτρο μ απόλυτα συνεχές ως προς το μέτρο Lebesque, τέτοιο ώστε για κάποια σταθερά $C > 0$ και για κάθε αρκετά ομαλή συνάρτηση στον $\mathbb{R}^n$, ισχύει*

$$\mathrm{Ent}_\mu(f^2) \leq 2C \int \|\nabla f\|_2^2 \, d\mu.$$

Τότε, για κάθε φραγμένη, μετρήσιμη συνάρτηση f στον $\mathbb{R}^n$, $t \geq 0$ και για κάθε $a \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$\|e^{Q_t f}\|_{a+t/C} \leq \|e^f\|_a$$

Αντίστροφα, αν η (7.22) ισχύει για κάθε $t \geq 0$ και $a \neq 0$, τότε ισχύει η λογαριθμική ανισότητα Sobolev.

Από την (7.22) τώρα έπεται η ανισότητα

$$\|e^{Q_1 f}\|_{r+1/C} \leq \|e^f\|_r. \tag{7.23}$$

Θέτοντας τώρα στην παραπάνω ανισότητα $r = 0$, παίρνουμε

$$\int e^{Q_C f} \, d\mu \leq \int e^f \, d\mu.$$

Πράγματι,

$$\begin{aligned}
\|e^f\|_0 &= \lim_{r\to 0} \|e^f\|_r \\
&= \lim_{r\to 0} \left(\int e^{rf} \, d\mu \right)^{1/r} \\
&= \lim_{r\to 0} \exp\left(\frac{1}{r} \log \int e^{rf} \, d\mu \right) \\
&= \exp\left(\lim_{r\to 0} \frac{1}{r} \log \int e^{rf} \, d\mu \right) \\
&= e^{\int f \, d\mu},
\end{aligned}$$

αφού

$$\lim_{r\to 0} \frac{1}{r} \log \int e^{rf} \, d\mu = \lim_{r\to 0} \frac{\int f e^{rf} \, d\mu}{\int e^{rf \, d\mu}} = \int f \, d\mu.$$

Επίσης, επειδή ισχύει $Q_t(sf) = sQ_{st}f,\ s,t > 0$, έχουμε ότι $tQ_tf = Q_1(tf)$, οπότε,

$$\begin{aligned}
\|e^{Q_tf}\|_{a+t/C} &= \left(\int (e^{Q_tf})^{t(r+1/C)}\, d\mu\right)^{\frac{1}{t(r+1/C)}} \\
&= \left(\int (e^{Q_1(tf)})^{r+1/C}\right)^{\frac{1}{t(r+1/C)}} \\
&= \|e^{Q_1(tf)}\|_{r+1/C}^{1/t} \\
&\le \left(\int e^{af}\, d\mu\right)^{1/a} \\
&= \left(\int e^{trf}\, d\mu\right)^{1/tr} \\
&= \|e^{tf}\|_r^{1/t},
\end{aligned}$$

όπου $r = a/t$. Άρα τελικά έχουμε ότι

$$\|e^{Q_1f}\|_{r+1/C} \le \|e^f\|_r.$$

Τέλος, επειδή $\frac{1}{C}Q_1f = Q_C(\frac{1}{C}g)$, είναι

$$\begin{aligned}
\|e^{Q_1f}\|_{1/C} &= \left(\int (e_{Q_1f})^{1/C}\, d\mu\right)^C \\
&= \left(\int e^{Q_C(1/C\ f)}\, d\mu\right)^C \\
&\le e^{\int f\, d\mu},
\end{aligned}$$

δηλαδή

$$\int e^{Q_Cf}\, d\mu \le e^{\int f\, d\mu}, \tag{7.24}$$

για κάθε φραγμένη μετρήσιμη συνάρτηση f.

Έχουμε δείξει ότι οι ανισότητες της μορφής (7.23) είναι ισοδύναμες με τις τετραγωνικές ανισότητες κόστους, άρα ισχύει το εξής.

Θεώρημα 7.4.9. *Έστω μ μέτρο πιθανότητας, απόλυτα συνεχές ως προς το μέτρο Lebesque τέτοιο ώστε για κάποια σταθερά $C > 0$ και για κάθε αρκετά smooth συνάρτηση f ισχύει*

$$\mathrm{Ent}_\mu(f^2) \le 2C \int \|\nabla f\|_2^2\, d\mu.$$

Τότε, για κάθε μέτρο πιθανότητας $\nu \ll \mu$, ισχύει

$$W_2(\mu,\nu) \le \sqrt{CH(\nu|\mu)}.$$

Αντικαθιστώντας την Ευκλείδεια απόσταση $\|x-y\|_2$ με την Riemannian απόσταση $d(x,y)$ παίρνουμε τα ίδια απότελέσματα σε ομαλές πλήρεις Riemannian πολλαπλότητες. Είναι ανοιχτό πρόβλημα (μάλλον με αρνητική απάντηση) πότε η τετραγωνική ανισότητα ακόστους είναι ισοδύναμη με την λογαριθμική ανισότητα Sobolev.

Βιβλιογραφία

[1] J. Arias-de-Reyna, K. Ball and R. Villa, *Concentration of the distance in finite dimensional normed spaces*, Mathematika **45** (1998), 245-252.

[2] W. Beckner, *Inequalities in Fourier Analysis*, Annals of Mathematics **102** (1975), 150–182.

[3] S.G. Bobkov, *A functional form of the isoperimetric inequality for the Gaussian measure*, J. Funct. Anal. **135** (1996), 39–49.

[4] S.G. Bobkov, *An isoperimetric inequality on the discrete cube and an elementary proof of the isoperimetric inequality in Gauss space*, Ann. Probab. **25** (1997), 206–214.

[5] S.G. Bobkov and M. Ledoux, *From Brunn-Minkowski to Brascamp-Lieb and to logarithmic Sobolev inequalities*, Geom. Funct. Anal. **10** (2000), 1028–1052.

[6] V. Bogachev, *Gaussian measures*, Amer. Math. Soc. (1998).

[7] A. Bonami, *Étude des coefficients de Fourier des fonctions de $L^p(G)$*, Ann. Inst. Fourier **20** (1971), 335–402.

[8] A. Ehrhard, *Symétrisation dans l' espace de Gauss*, Math. Scand. **53** (1983), 281–301.

[9] D.J.H. Garling, *Inequalities: A Journey into Linear Analysis*, Cambridge University Press (2007).

[10] L. Gross, *Logarithmic Sobolev inequalities*, Amer. J. Math. **97** (1975), 1061–1083.

[11] M. Ledoux, *Concentration of measure and logarithmic Sobolev inequalities*, Séminaire de Probabilités, XXXIII, Lectre Notes in Mathematics **1704**, 120–216.

[12] M. Ledoux, *The concentration of measure phenomenon*, Mathematical Surveys and Monographs, 89. American Mathematical Society, Providence, RI, 2001.

[13] L. Leindler, *On a certain converse of Hölder's inequality*, Acta Sci. Math. **33** (1972), 217-223.

[14] A. Prékopa, *On logarithmically concave measures and functions*, Acta Sci. Math. **34** (1973), 335-343.

[15] M. Talagrand, *An isoperimetric inequality on the cube and the Khintchine–Kahane inequalities*, Proc. Amer. Math. Soc. **104** (1988), 905–909.

[16] C. Villani, *Topics in Optimal Transportation*, Graduate Texts in Mathematics **58**, Amer. Math. Soc. (2003).