

**Πιθανότητες σε Μεγάλες Διαστάσεις:
Φαινόμενα κατωφλίου για το
μέτρο τυχαίων πολυτόπων**

**Διδακτορική Διατριβή
Μηνάς Πάφης**

**Τμήμα Μαθηματικών
Πανεπιστήμιο Αθηνών
Αθήνα – 2025**

Η διδακτορική διατριβή υποστηρίχτηκε από το Ελληνικό Ίδρυμα Έρευνας και Καινοτομίας (ΕΛ.ΙΔ.Ε.Κ.) στο πλαίσιο της Δράσης «3η Προκήρυξη Υποτροφιών ΕΛ.ΙΔ.Ε.Κ. για Υποψήφιους Διδάκτορες» (Αριθμός Αίτησης: 5779, Κ.Ε.: 18627).

Επταμελής Εξεταστική Επιτροπή

- Απόστολος Γιαννόπουλος (επιβλέπων), Καθηγητής του Εθνικού Μετσοβίου Πολυτεχνείου
- Παντελής Δοδός, Καθηγητής του Πανεπιστημίου Αθηνών
- Μαρίνα Ηλιοπούλου, Καθηγήτρια του Πανεπιστημίου Αθηνών
- Μιχαήλ Λουλάκης, Καθηγητής του Εθνικού Μετσοβίου Πολυτεχνείου
- Σιλουανός Μπραζιτικός, Επίκουρος Καθηγητής του Πανεπιστημίου Κρήτης
- Σάμης Τρέβεζας, Επίκουρος Καθηγητής του Πανεπιστημίου Αθηνών
- Κωνσταντίνος Τύρος, Αναπληρωτής Καθηγητής του Πανεπιστημίου Αθηνών

Περιεχόμενα

1	Πρόλογος	1
1.1	Φαινόμενα κατωφλίου στον διακριτό κύβο	1
1.2	Γενίκευση του προβλήματος	5
2	Παρουσίαση των αποτελεσμάτων	9
2.1	Βάθος Tukey για λογαριθμικά κοίλα μέτρα πιθανότητας	9
2.2	Φαινόμενα κατωφλίου για το μέτρο τυχαίων πολυτόπων	14
2.3	Κορυφές με ανεξάρτητες συντεταγμένες	19
3	Βασικές έννοιες	23
3.1	Συμβολισμός και βασικοί ορισμοί	23
3.2	Λογαριθμικά κοίλα μέτρα πιθανότητας	24
4	Βάθος Tukey	31
4.1	Εισαγωγή	31
4.2	Μέση τιμή του βάθους Tukey: άνω φράγμα	33
4.3	Μέση τιμή του βάθους Tukey: κάτω φράγμα	35
4.3.1	Ομοιόμορφο μέτρο σε ένα κυρτό σώμα	36
4.3.2	Λογαριθμικά κοίλα μέτρα πιθανότητας	37
4.4	Φράγματα για τη μέση τιμή του μέτρου τυχαίων πολυτόπων	40
5	Φαινόμενα κατωφλίου για το μέτρο τυχαίων πολυτόπων	49
5.1	Εισαγωγή	49
5.2	Εκτιμήσεις για το βάθος ημιχώρου	52
5.3	Ροπές του μετασχηματισμού Cramér	57
5.4	Φαινόμενα κατωφλίου για το μέτρο: η προσέγγιση και εφαρμογές	66
5.5	Παραδείγματα	73
6	Κορυφές με ανεξάρτητες συντεταγμένες	79
6.1	Ορισμοί και βοηθητικά αποτελέσματα	79
6.2	Φαινόμενα κατωφλίου για αποδεκτά μέτρα	84
6.3	Φαινόμενα κατωφλίου για τα p -μέτρα	94

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Πρόλογος

1.1 Φαινόμενα κατωφλίου στον διακριτό κύβο

Έστω X ένα τυχαίο διάνυσμα στον $\mathbb{R}^n$ με ανεξάρτητες συντεταγμένες που παίρνουν καθεμία από τις τιμές ± 1 με πιθανότητα $\frac{1}{2}$. Για δοθέν $N > n$, θεωρούμε N ανεξάρτητα αντίγραφα $X_1, \dots, X_N$ του τυχαίου διανύσματος X και ορίζουμε το τυχαίο «0/1 πολύτοπο»

$$(1.1.1) \quad K_N = \text{conv}\{X_1, \dots, X_N\} \subseteq Q_n := [-1, 1]^n.$$

Οι Dyer, Füredi και McDiarmid απέδειξαν στο [25] ένα ακριβές κατωφλικό αποτέλεσμα για των όγκο αυτών των τυχαίων 0/1 πολύτόπων.

Θεώρημα 1.1.1 (Dyer-Füredi-McDiarmid). *Θέτουμε $\kappa = \ln 2 - \frac{1}{2}$ και για κάθε $N > n$ θεωρούμε το τυχαίο πολύτοπο K_N που ορίζεται από την (1.1.1). Για κάθε $\varepsilon \in (0, \kappa)$ έχουμε ότι*

$$(1.1.2) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sup \{2^{-n} \mathbb{E} |K_N| : N \leq \exp((\kappa - \varepsilon)n)\} = 0$$

και

$$(1.1.3) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \inf \{2^{-n} \mathbb{E} |K_N| : N \geq \exp((\kappa + \varepsilon)n)\} = 1.$$

Στη διατύπωση του θεωρήματος συμβολίζουμε με $|K_N|$ τον n -διάστατο όγκο του K_N . Εφόσον $|Q_n| = 2^n$, ο όγκος $2^{-n} \mathbb{E} |K_N|$ είναι το «αναμενόμενο ποσοστό» του Q_n που καταλαμβάνεται από το K_N . Σε αυτήν την εισαγωγική ενότητα παρουσιάζουμε τα βασικά σημεία της απόδειξης του Θεωρήματος 1.1.1. Αρκετά από τα λήμματα που θα χρησιμοποιήσουμε θα αποδειχθούν σε πιο γενική και ισχυρότερη μορφή αργότερα.

Η συνάρτηση $\varphi : (-1, 1)^n \rightarrow \mathbb{R}$ που ορίζεται από την

$$(1.1.4) \quad \varphi(x) := \inf \{\text{Prob}(X \in H) : x \in H, \text{ } H \text{ κλειστός ημίχωρος}\}$$

παίζει βασικό ρόλο στο επιχείρημα. Σημειώνουμε ότι το infimum στην (1.1.4) προσδιορίζεται από εκείνους τους ημιχώρους H για τους οποίους το x είναι σημείο του συνόρου $\partial(H)$ του H . Στη συνέχεια, για κάθε συμμετρικό κυρτό σώμα $A \subset (-1, 1)^n$ ορίζουμε

$$(1.1.5) \quad \varphi_+(A) = \sup_{x \notin A} \varphi(x) \quad \text{και} \quad \varphi_-(A) = \inf_{x \in A} \varphi(x).$$

Λήμμα 1.1.2. Έστω $N > n$ και έστω A ένα συμμετρικό κυρτό σώμα που περιέχεται στον $(-1, 1)^n$. Τότε,

$$\mathbb{E}(|K_N|) \leq |A| + 2^n N \varphi_+(A).$$

Απόδειξη. Γράφουμε

$$(1.1.6) \quad \mathbb{E}(|K_N|) = \mathbb{E}(|K_N \cap A|) + \mathbb{E}(|K_N \setminus A|) \leq |A| + \mathbb{E}(|K_N \setminus A|).$$

Παρατηρούμε ότι αν H είναι ένας κλειστός ημιχώρος που περιέχει το x και αν $x \in K_N$, τότε μπορούμε να βρούμε $i \leq N$ τέτοιον ώστε $X_i \in H$ (αλλιώς, θα είχαμε $x \in K_N \subseteq H'$, όπου H' είναι ο συμπληρωματικός ημιχώρος του H). Έπεται ότι $\text{Prob}(x \in K_N) \leq N \varphi(x)$. Χρησιμοποιώντας το θεώρημα Fubini βλέπουμε ότι

$$\mathbb{E}(|K_N \setminus A|) = \int_{Q_n \setminus A} \text{Prob}(x \in K_N) dx \leq \int_{Q_n \setminus A} N \varphi(x) dx \leq N \varphi_+(A) |Q_n \setminus A|.$$

όπου στην τελευταία ανισότητα χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι $\varphi(x) \leq \varphi_+(A)$ για κάθε $x \notin A$. Επιστρέφοντας στην (1.1.6) παίρνουμε τον ισχυρισμό του λήμματος. $\square$

Το Λήμμα 1.1.2 θα μας φανεί χρήσιμο για την απόδειξη της (1.1.2). Μένει να επιλέξουμε, αν βέβαια αυτό γίνεται, κατάλληλο A (που εξαρτάται από τα N και n) έτσι ώστε για κάθε $N \leq \exp((\kappa - \varepsilon)n)$ να έχουμε ταυτόχρονα $|A|/2^n \rightarrow 0$ και $N \varphi_+(A) \rightarrow 0$ όταν $n \rightarrow \infty$.

Μια δεύτερη βασική παρατήρηση δίνεται από το επόμενο λήμμα.

Λήμμα 1.1.3. Έστω A ένα συμμετρικό κυρτό σώμα που περιέχεται στον $(-1, 1)^n$. Τότε,

$$1 - \text{Prob}(K_N \supseteq A) \leq \binom{N}{n} 2^{-(N-n)} + 2 \binom{N}{n} (1 - \varphi_-(A))^{N-n}.$$

Παραλείπουμε την απόδειξη γιατί θα συζητήσουμε αργότερα μια πιο γενική εκδοχή του Λήμματος 1.1.3. Αυτό που είναι σημαντικό είναι ότι το Λήμμα 1.1.3 μας επιτρέπει να χρησιμοποιήσουμε τη συνάρτηση φ για να αποδείξουμε την (1.1.3). Σε αδρές γραμμές, αρκεί να επιλέξουμε, αν βέβαια αυτό γίνεται, κατάλληλο A (που εξαρτάται από τα N και n) έτσι ώστε για κάθε $N \geq \exp((\kappa + \varepsilon)n)$ να έχουμε ταυτόχρονα $|A|/2^n \rightarrow 1$ και $1 - \text{Prob}(K_N \supseteq A) \rightarrow 0$ όταν $n \rightarrow \infty$.

Για κάθε φραγμένη τυχαία μεταβλητή X , θεωρούμε τη ροπογεννήτρια $M(s) := \mathbb{E}(e^{sX})$ και τη λογαριθμική ροπογεννήτρια $\Lambda(s) := \ln M(s)$ της X . Εφόσον η X είναι φραγμένη, βλέπουμε ότι $M(s) < \infty$ για κάθε $s \in \mathbb{R}$. Λόγω της συμμετρίας της X έχουμε επίσης ότι οι M και Λ

είναι άρτιες. Χρησιμοποιώντας την ανισότητα Hölder ελέγχουμε εύκολα ότι η Λ , άρα και η M , είναι κυρτή. Τέλος, η M είναι C^∞ στο $\mathbb{R}$: η n -οστή παράγωγος της M είναι η συνάρτηση $M^{(n)}(s) = \mathbb{E}(X^n e^{sX})$.

Επιστρέφοντας στην περίπτωση μας, όπου η X παίρνει τις τιμές ± 1 με πιθανότητα $\frac{1}{2}$, απευθείας υπολογισμός δείχνει ότι

$$M(s) = \cosh(s) \quad \text{και} \quad \Lambda(s) = \ln \cosh(s).$$

Θεωρούμε τον μετασχηματισμό Legendre της Λ : είναι η συνάρτηση

$$f(x) := \sup \{sx - \Lambda(s) : s \in \mathbb{R}\}, \quad x \in (-1, 1).$$

Απευθείας υπολογισμός δείχνει ότι

$$f(x) = \frac{1}{2}(1+x) \ln(1+x) + \frac{1}{2}(1-x) \ln(1-x)$$

για κάθε $x \in (-1, 1)$. Σημειώνουμε ότι η f είναι άρτια κυρτή συνάρτηση και $\lim_{x \rightarrow \pm 1} f(x) = \ln 2$.

Από τον ορισμό της f και την ανισότητα Markov παίρνουμε το ακόλουθο άνω φράγμα για την $\varphi(x)$ συναρτήσει του αθροίσματος $\sum_{i=1}^n f(x_i)$, για κάθε $x \in (-1, 1)^n$.

Λήμμα 1.1.4. Για κάθε $x \in (-1, 1)^n$ ισχύει ότι $\varphi(x) \leq \exp\left(-\sum_{i=1}^n f(x_i)\right)$.

Απόδειξη. Έστω H ένας κλειστός ημίχωρος τέτοιος ώστε $x \in \partial(H)$. Τότε, υπάρχει $s = (s_1, \dots, s_n) \in \mathbb{R}^n$ τέτοιο ώστε $H = H(s) = \{y : \langle s, y - x \rangle \geq 0\}$. Από την ανισότητα Markov,

$$\begin{aligned} \text{Prob}(X \in H(s)) &= \text{Prob}\left(\sum_{i=1}^n s_i(X_i - x_i) \geq 0\right) \leq \mathbb{E}\left(\exp\left(\sum_{i=1}^n s_i(X_i - x_i)\right)\right) \\ &= \prod_{i=1}^n \mathbb{E}(\exp(s_i(X_i - x_i))) = \prod_{i=1}^n \exp(\Lambda(s_i) - s_i x_i). \end{aligned}$$

Από τον ορισμό της $\varphi(x)$ παίρνουμε

$$\varphi(x) \leq \inf_{s \in \mathbb{R}^n} \prod_{i=1}^n \exp(\Lambda(s_i) - s_i x_i) = \prod_{i=1}^n \exp(-\sup\{sx_i - \Lambda(s) : s \in \mathbb{R}\}) = \prod_{i=1}^n \exp(-f(x_i)).$$

Αυτό αποδεικνύει το λήμμα. □

Επεκτείνουμε την f συνεχώς στο $[-1, 1]$ θέτοντας $f(\pm 1) = \ln 2$ και για κάθε $x = (x_1, \dots, x_n) \in Q_n$ θέτουμε

$$F(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i).$$

Για κάθε $0 < t < \ln 2$, ορίζουμε

$$F_t = \{x \in (-1, 1)^n : F(x) \leq t\}.$$

Αφού η f είναι άρτια και κυρτή στο $(-1, 1)$, το σύνολο F_t είναι ένα συμμετρικό κυρτό υποσύνολο του $(-1, 1)^n$. Από τον ορισμό του F_t βλέπουμε ότι $\sum_{i=1}^n f(x_i) = nF(x) = tn$ για κάθε $x \in \partial(F_t)$. Τότε, το Λήμμα 1.1.4 και ο ορισμός της ποσότητας φ_+ μας δίνουν το εξής.

Λήμμα 1.1.5. Έστω $0 < t < \ln 2$. Για κάθε $x \in (-1, 1)^n$ έχουμε ότι $\varphi(x) \leq \exp(-nF(x))$. Ειδικότερα,

$$\varphi_+(F_t) \leq \exp(-tn).$$

Έστω $U_1, \dots, U_n$ ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές, ομοιόμορφα κατανεμημένες στο $(-1, 1)$. Τότε, για κάθε $0 < t < \ln 2$,

$$2^{-n}|F_t| = \text{Prob}((U_1, \dots, U_n) \in F_t) = \text{Prob}\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(U_i) \leq t\right).$$

Σημειώνουμε ότι

$$\kappa = \mathbb{E}(f(U_i)) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 f(x) dx = \ln 2 - \frac{1}{2}.$$

Από τον νόμο των μεγάλων αριθμών συμπεραίνουμε το εξής.

Λήμμα 1.1.6. Για κάθε $t \in (0, \kappa)$ έχουμε ότι $\lim_{n \rightarrow \infty} 2^{-n}|F_t| = 0$ και, όμοια, για κάθε $t \in (\kappa, \ln 2)$ έχουμε ότι $\lim_{n \rightarrow \infty} 2^{-n}|F_t| = 1$.

Τώρα, μπορούμε να αποδείξουμε το πρώτο μέρος του θεωρήματος των Dyer, Füredi και McDiarmid.

Πρόταση 1.1.7. Για κάθε $\varepsilon \in (0, \kappa)$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup \{2^{-n}E(|K_N|) : N \leq \exp((\kappa - \varepsilon)n)\} = 0.$$

Απόδειξη. Επιλέγουμε $t = \kappa - \varepsilon/2$. Από το Λήμμα 1.1.6 έχουμε ότι $\lim_{n \rightarrow \infty} 2^{-n}|F_t| = 0$. Από την άλλη πλευρά, αν $N \leq \exp((\kappa - \varepsilon)n)$, τότε το Λήμμα 1.1.5 δίνει

$$N\varphi_+(F_t) \leq \exp(-\varepsilon n/2).$$

Εφαρμόζοντας το Λήμμα 1.1.2 με $A = F_t$ παίρνουμε

$$2^{-n}\mathbb{E}(|K_N|) \leq 2^{-n}|F_t| + \exp(-\varepsilon n/2),$$

και το Λήμμα 1.1.6 δείχνει ότι το δεξί μέλος τείνει στο 0 καθώς $n \rightarrow \infty$. □

Για την απόδειξη της (1.1.3) χρειάζεται να φράξουμε την $\varphi(x)$ από κάτω ώστε να χρησιμοποιήσουμε το Λήμμα 1.1.3. Το βασικό τεχνικό βήμα είναι η επόμενη πρόταση, την οποία θα συζητήσουμε αργότερα σε ένα πιο γενικό πλαίσιο.

Πρόταση 1.1.8. Για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, που εξαρτάται μόνο από το ε , τέτοιος ώστε για κάθε $0 < t < \ln 2$ και για κάθε $n \geq n(\varepsilon)$ να έχουμε ότι

$$\varphi_-(F_t) \geq \exp(-t(1 + \varepsilon)n).$$

Τότε, η απόδειξη της (1.1.3) είναι απλή.

Πρόταση 1.1.9. Για κάθε $\varepsilon > 0$,

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \{2^{-n} \mathbb{E}(|K_N|) : N \geq \exp((\kappa + \varepsilon)n)\} = 1.$$

Απόδειξη. Σταθεροποιούμε $\varepsilon > 0$ και επιλέγουμε $t = \kappa + \varepsilon/3$. Συνδυάζοντας το Λήμμα 1.1.3 με την Πρόταση 1.1.8 βλέπουμε ότι αν $n \geq n(\varepsilon)$ και $N \geq \exp((\kappa + \varepsilon)n) \geq \exp((t + 2\varepsilon/3)n)$, τότε

$$\mathbb{E}(|K_N|) \geq |F_t| \text{Prob}(K_N \supseteq F_t) \geq |F_t|(1 - 2^{-n+1}).$$

Εφόσον $t > \kappa$, το Λήμμα 1.1.6 δείχνει ότι $\lim_{n \rightarrow \infty} 2^{-n}|F_t| = 1$, και έπεται το ζητούμενο. $\square$

1.2 Γενίκευση του προβλήματος

Με αφετηρία την εργασία [25] των Dyer, Füredi και McDiarmid που συζητήσαμε στην προηγούμενη ενότητα, έχουν μελετηθεί διάφορες παραλλαγές του «προβλήματος του κατωφλίου». Ήδη, στην ίδια εργασία, οι Dyer, Füredi και McDiarmid έδειξαν ότι παρόμοιο αποτέλεσμα ισχύει για τη μέση τιμή του όγκου τυχαίων πολυτόπων με κορυφές ομοιόμορφα κατανομημένες στον κύβο $Q_n = [-1, 1]^n$. Η αντίστοιχη τιμή της σταθεράς κ είναι $\kappa = \ln(2\pi) - \gamma - 1/2$, όπου γ είναι η σταθερά του Euler.

Στην εργασία [31] αποδεικνύεται φαινόμενο κατωφλίου για την $\mathbb{E}_{\mu^N}|K_N|/(2\alpha)^n$ στην περίπτωση που τα X_i έχουν ανεξάρτητες ισοκατανομημένες συντεταγμένες με φορέα ένα φραγμένο διάστημα $[-\alpha, \alpha]$ κάτω από κάποιες ήπιες πρόσθετες υποθέσεις. Πιο συγκεκριμένα, έστω μ ένα άρτιο Borel μέτρο πιθανότητας στην πραγματική ευθεία με $\mathbb{E}_{\mu}(X^2) = 1$ και τέτοιο ώστε

$$(1.2.1) \quad \int_{\mathbb{R}} e^{tx} d\mu(x) = \mathbb{E}(e^{tX}) < \infty \quad \text{για κάθε } t \text{ σε ένα ανοικτό διάστημα.}$$

Η συνθήκη (1.2.1) εξασφαλίζει ότι η X έχει πεπερασμένες ροπές όλων των τάξεων. Αν $X_1, \dots, X_n$ είναι ανεξάρτητες ισοκατανομημένες τυχαίες μεταβλητές, με κατανομή το μ , θέτουμε $\vec{X} = (X_1, \dots, X_n)$ και για δοθέν N που ικανοποιεί την $N > n$, θεωρούμε N ανεξάρτητα αντίγραφα $\vec{X}_1, \dots, \vec{X}_N$ του $\vec{X}$. Αυτή η διαδικασία ορίζει το τυχαίο πολύτοπο

$$(1.2.2) \quad K_N := \text{conv}\{\vec{X}_1, \dots, \vec{X}_N\}.$$

Αν υποθέσουμε ότι το μ έχει φορέα κάποιο διάστημα $[-\alpha, \alpha]$ τότε το τυχαίο πολύτοπο K_N περιέχεται στον κύβο $[-\alpha, \alpha]^N$ σχεδόν βεβαίως. Έστω $\varphi(t) := \mathbb{E}(e^{tX})$, $t \in \mathbb{R}$, η ροπογεννήτρια

της X , και έστω $\psi(t) := \ln \varphi(t)$ η λογαριθμική ροπογεννήτρια. Από την ανισότητα Hölder βλέπουμε ότι η ψ είναι κυρτή συνάρτηση στο $\mathbb{R}$. Θεωρούμε τον μετασχηματισμό Legendre λ της ψ , δηλαδή τη συνάρτηση

$$\lambda(x) := \sup \{tx - \psi(t) : t \in \mathbb{R}\}.$$

Ορίζουμε

$$\kappa = \kappa(\mu) := \frac{1}{2\alpha} \int_{-\alpha}^{\alpha} \lambda(x) dx.$$

Το κύριο αποτέλεσμα του [31] ισχυρίζεται ότι αν $0 < \kappa(\mu) < \infty$ τότε

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup \{(2\alpha)^{-n} \mathbb{E}(|K_N|) : N \leq \exp((\kappa - \varepsilon)n)\} = 0$$

για κάθε $\varepsilon > 0$. Επιπλέον,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \inf \{(2\alpha)^{-n} \mathbb{E}(|K_N|) : N \geq \exp((\kappa + \varepsilon)n)\} = 1.$$

για κάθε $\varepsilon > 0$, αν η κατανομή μ ικανοποιεί τη συνθήκη

$$(1.2.3) \quad \lim_{x \uparrow \alpha} \frac{-\log P(X \geq x)}{\lambda(x)} = 1.$$

Η υπόθεση $\kappa(\mu) > 0$ ισχύει αν εξαιρέσουμε τετριμμένες περιπτώσεις. Επιπλέον, η απόδειξη δείχνει ότι αν $\kappa(\mu) = \infty$ τότε $\sup \{(2\alpha)^{-n} \mathbb{E}(|K_N|) : N \leq e^{rn}\} \rightarrow 0$ όταν $n \rightarrow \infty$, για κάθε $r > 0$. Η συνθήκη (1.2.3) ικανοποιείται για μια μεγάλη κλάση κατανομών με συμπαγή φορέα.

Οι εργασίες [53] και [9], [10] είναι αφιερωμένες στο ίδιο ερώτημα για κάποιες περιπτώσεις όπου τα X_i έχουν σφαιρικά συμμετρική πυκνότητα. Κάποια ενδεικτικά αποτελέσματα είναι τα ακόλουθα:

- (i) Έστω $\varepsilon \in (0, 1)$ και $N(n)$ ακολουθία θετικών ακεραίων. Έστω $X_1, \dots, X_N$ ανεξάρτητα τυχαία σημεία, ομοιόμορφα κατανεμημένα στην B_2^n και έστω $B_{N,n} = \text{conv}\{X_1, \dots, X_N\}$. Τότε,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{E}|B_{N,n}|}{|B_2^n|} = \begin{cases} 0 & \text{αν } N \leq \exp\left((1 - \varepsilon)\left(\frac{n+1}{2}\right) \ln n\right) \\ 1 & \text{αν } N \geq \exp\left((1 + \varepsilon)\left(\frac{n+1}{2}\right) \ln n\right). \end{cases}$$

- (ii) Έστω $\varepsilon \in (0, 1)$ και $N(n)$ ακολουθία θετικών ακεραίων. Έστω $X_1, \dots, X_N$ ανεξάρτητα τυχαία σημεία, ομοιόμορφα κατανεμημένα στην S^{n-1} και έστω $S_{N,n} = \text{conv}\{X_1, \dots, X_N\}$. Τότε,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{E}|S_{N,n}|}{|B_2^n|} = \begin{cases} 0 & \text{αν } N \leq \exp\left((1 - \varepsilon)\left(\frac{n-1}{2}\right) \ln n\right) \\ 1 & \text{αν } N \geq \exp\left((1 + \varepsilon)\left(\frac{n-1}{2}\right) \ln n\right). \end{cases}$$

- (iii) Έστω $\mu = \mu_n$ ένα ισοτροπικό λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$ και $N(n)$ ακολουθία φυσικών. Έστω $X_1, \dots, X_N$ ανεξάρτητα σημεία με κατανομή το μέτρο Gauss

στον $\mathbb{R}^n$ και έστω $G_{N,n} = \text{conv}\{X_1, \dots, X_N\}$. Τότε,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(\mu(G_{N,n})) = \begin{cases} 0 & \text{αν } N \leq \exp((\frac{1}{2} - \varepsilon)n) \\ 1 & \text{αν } N \geq \exp((\frac{1}{2} + \varepsilon)n). \end{cases}$$

Εκθετικά ως προς τη διάσταση φράγματα κατωφλίου αποδείχθηκαν στο [29] για την περίπτωση που τα X_i είναι ομοιόμορφα κατανεμημένα σε ένα simplex. Πιο συγκεκριμένα, έστω $\Omega_n = \{\mathbf{x} \geq \mathbf{0} : x_1 + \dots + x_n = 1\}$ η συνήθης εμφύτευση του $(n-1)$ -διάστατου simplex στον n -διάστατο χώρο. Αν $N > C_0^n$, όπου $C_0 > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά, τότε

$$\mathbb{E} |\text{conv}\{x_1, \dots, x_N\}| \geq (1 - e^{-C_0 \sqrt{n}}) |\Omega_n|.$$

Το δεύτερο κύριο αποτέλεσμα της εργασίας δίνει κάτω φράγμα. Για κάθε $\varepsilon > 0$, αν $N < e^{(\gamma-\varepsilon)n}$, όπου γ είναι η σταθερά του Euler, τότε η κυρτή θήκη N τυχαίων σημείων $x_1, \dots, x_N$ που είναι ομοιόμορφα κατανεμημένα στο Ω_n ικανοποιεί την $\mathbb{E} |\text{conv}\{x_1, \dots, x_N\}| / |\Omega_n| \rightarrow 0$ καθώς το $n \rightarrow \infty$. Διατυπώνεται μάλιστα η εικασία ότι η σταθερά γ είναι βέλτιστη στην περίπτωση του simplex.

Άνω και κάτω φράγματα κατωφλίου αποδείχθηκαν πρόσφατα από τους Chakraborti, Tkocz και Βριτσίου στο [18] για κάποιες γενικές οικογένειες κατανομών. Αν μ είναι ένα άρτιο λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας με φορέα μέσα σε ένα κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$ και αν $X_1, X_2, \dots$ είναι ανεξάρτητα τυχαία σημεία με κατανομή το μ , τότε για κάθε $n < N \leq \exp(c_1 n / L_\mu^2)$ ισχύει ότι

$$(1.2.4) \quad \frac{\mathbb{E}_{\mu^N}(|K_N|)}{|K|} \leq \exp(-c_2 n / L_\mu^2),$$

όπου $c_1, c_2 > 0$ είναι απόλυτες σταθερές. Ένα κάτω φράγμα κατωφλίου αποδεικνύεται επίσης στο [18] για την περίπτωση όπου το μ είναι άρτιο κ -κοίλο μέτρο στον $\mathbb{R}^n$ με $0 < \kappa < 1/n$, που έχει φορέα μέσα σε ένα κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$. Αν $X_1, X_2, \dots$ είναι ανεξάρτητα τυχαία σημεία στον $\mathbb{R}^n$ με κατανομή το μ και αν $K_N = \text{conv}\{X_1, \dots, X_N\}$ όπως πριν, τότε για κάθε $M \geq C$ και κάθε $N \geq \exp\left(\frac{1}{\kappa}(\log n + 2 \log M)\right)$ έχουμε ότι

$$(1.2.5) \quad \frac{\mathbb{E}_{\mu^N}(|K_N|)}{|K|} \geq 1 - \frac{1}{M},$$

όπου $C > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

Το βασικό πρόβλημα που μελετάμε σε αυτήν την διατριβή έχει την ακόλουθη πολύ γενική διατύπωση. Για δοθέν λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας μ στον $\mathbb{R}^n$ θεωρούμε μια ακολουθία ανεξάρτητων τυχαίων σημείων $X_1, X_2, \dots$ στον $\mathbb{R}^n$ που έχουν κατανομή το μ και για κάθε $N > n$ θεωρούμε το τυχαίο πολύτοπο

$$K_N = \text{conv}\{X_1, \dots, X_N\}$$

και τη μέση τιμή $\mathbb{E}_{\mu^N}[\mu(K_N)]$. Όλα τα αποτελέσματα που περιγράψαμε πιο πάνω υποδεικνύουν ότι, τουλάχιστον στην περίπτωση όπου $\mu = \mu_K$ είναι το ομοιόμορφο μέτρο σε ένα κυρτό σώμα K μεγάλης διάστασης, η μέση τιμή $\mathbb{E}_{\mu^N}[\mu(K_N)]$ του μέτρου του K_N εμφανίζει φαινόμενο κατωφλίου με σταθερά $\kappa_\mu = \frac{1}{n}\mathbb{E}_\mu(\Lambda_\mu^*)$, όπου Λ_μ^* είναι ο μετασχηματισμός Cramér του μ , με την έννοια ότι η ακόλουθη πρόταση θα μπορούσε να ισχύει: για κάθε $\delta \in (0, \frac{1}{2})$, υπάρχει $n_0(\delta, \varepsilon) \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε αν $n \geq n_0$ τότε

$$\sup \left\{ \mathbb{E}_{\mu^N}[\mu(K_N)] : N \leq \exp((\kappa_\mu - \varepsilon)n) \right\} \leq \delta$$

και

$$\inf \left\{ \mathbb{E}_{\mu^N}[\mu(K_N)] : N \geq \exp((\kappa_\mu + \varepsilon)n) \right\} \geq 1 - \delta$$

για κάποιον $\varepsilon = c(n, \delta)\kappa_\mu$ με $\lim_{n \rightarrow \infty} c(n, \delta) = 0$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Παρουσίαση των αποτελεσμάτων

Σε αυτό το κεφάλαιο παρουσιάζουμε τα αποτελέσματα της διατριβής. Τα περιεχόμενα κάθε κεφαλαίου αντιστοιχούν σε ξεχωριστές εργασίες, οι οποίες έχουν ήδη δημοσιευθεί. Πιο συγκεκριμένα:

(α) Τα περιεχόμενα του Κεφαλαίου 4 προέρχονται από την εργασία

S. Brazitikos, A. Giannopoulos and M. Pafis, *Half-space depth of log-concave probability measures*, Probability Theory and Related Fields 188 (2024), 309–336.

(β) Τα περιεχόμενα του Κεφαλαίου 5 προέρχονται από την εργασία

S. Brazitikos, A. Giannopoulos and M. Pafis, *Threshold for the expected measure of random polytopes*, Mathematische Annalen 388 (2024), no. 3, 2991–3024.

(γ) Τα περιεχόμενα του Κεφαλαίου 6 προέρχονται από την εργασία

M. Pafis, *Threshold for the expected measure of the convex hull of random points with independent coordinates*, Bulletin of the London Mathematical Society 56 (2024), no. 1, 240–262.

Στο Κεφάλαιο 3 εισάγουμε βασικές έννοιες και τον συμβολισμό που θα χρησιμοποιηθεί στην διατριβή. Παρουσιάζουμε επίσης τα βασικά τεχνικά εργαλεία, από την κυρτή γεωμετρία και τη θεωρία πιθανοτήτων, τα οποία θα χρησιμοποιηθούν στα επόμενα. Παραπέμπουμε τον αναγνώστη σε αυτό το κεφάλαιο για τους ορισμούς που ενδεχομένως θα χρειαστεί διαβάζοντας το παρόν κεφάλαιο.

2.1 Βάθος Tukey για λογαριθμικά κοίλα μέτρα πιθανότητας

Έστω μ ένα μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$. Για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$ συμβολίζουμε με $\mathcal{H}(x)$ το σύνολο όλων των κλειστών ημιχώρων H του $\mathbb{R}^n$ οι οποίοι περιέχουν το x . Η συνάρτηση

$$\varphi_\mu(x) = \inf\{\mu(H) : H \in \mathcal{H}(x)\}$$

ονομάζεται βάθος Tukey ως προς ημιχώρους. Η πρώτη δημοσιευμένη εργασία στην περιοχή της Στατιστικής όπου εμφανίζεται κάποια μορφή του βάθους ως προς ημιχώρους είναι το άρθρο [36] του Hodges από το 1955. Ο Tukey εισήγαγε το βάθος ως προς ημιχώρους για σύνολα δεδομένων στην εργασία [59] ως ένα εργαλείο που μας επιτρέπει να οπτικοποιήσουμε με αποτελεσματικό τρόπο τυχαία δείγματα στο επίπεδο. Η ορολογία «βάθος» προέρχεται κι αυτή από το άρθρο του Tukey. Ένας τυπικός ορισμός του βάθους ως προς ημιχώρους ως εργαλείου για να διαφοροποιούμε σημεία που εντάσσονται στο μοτίβο μιας πολυδιάστατης κατανομής πιθανότητας και να αποκτήσουμε μια αποτελεσματική περιγραφή, οπτικοποίηση και μη παραμετρική στατιστική συμπερασματολογία για πολυδιάστατα δεδομένα, δόθηκε από τους Donoho και Gasko στο [23] (βλ. επίσης [57]). Παραπέμπουμε τον αναγνώστη στο άρθρο των Nagy, Schütt και Werner [48] για μια επισκόπηση αυτού του θέματος, με έμφαση στις διασυνδέσεις του με την κυρτή γεωμετρία, και πολλές βιβλιογραφικές αναφορές.

Στο Κεφάλαιο 4 μελετάμε τη μέση τιμή του βάθους ως προς ημιχώρους στο πλαίσιο των λογαριθμικά κοίλων μέτρων πιθανότητας. Αυτά είναι τα Borel μέτρα πιθανότητας μ στον $\mathbb{R}^n$ που ικανοποιούν την $\mu(\lambda A + (1 - \lambda)B) \geq \mu(A)^\lambda \mu(B)^{1-\lambda}$ για κάθε ζεύγος συμπαγών συνόλων $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ και κάθε $\lambda \in (0, 1)$, και επίσης ικανοποιούν τη συνθήκη $\mu(H) < 1$ για κάθε υπερεπίπεδο H στον $\mathbb{R}^n$, δηλαδή είναι «πλήρους διάστασης». Το ερώτημα αν υπάρχει απόλυτη σταθερά $c \in (0, 1)$ τέτοια ώστε

$$(2.1.1) \quad \mathbb{E}_\mu(\varphi_\mu) := \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_\mu(x) d\mu(x) \leq c^n$$

για κάθε $n \geq 1$ και κάθε λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας μ στον $\mathbb{R}^n$ διατυπώθηκε στο [46]. Σχετίζεται με τη στοχαστική διαχωρισιμότητα και τις εφαρμογές της στη μηχανική μάθηση και στους μηχανισμούς διόρθωσης σφαλμάτων σε συστήματα τεχνητής νοημοσύνης. Για περισσότερες πληροφορίες σχετικά με την αφετηρία του προβλήματος παραπέμπουμε στο άρθρο [32] και τις αναφορές που υπάρχουν εκεί. Στο πλαίσιο της ασυμπτωτικής γεωμετρικής ανάλυσης, αν ισχύει η (2.1.1) συμπεραίνουμε ότι για κάθε $m \leq C^n$, όπου $C > 1$ είναι μια απόλυτη σταθερά, ένα σύνολο m ανεξάρτητων τυχαίων σημείων με λογαριθμικά κοίλη κατανομή έχει, με πιθανότητα κοντά στο 1, την ιδιότητα ότι κάθε σημείο του συνόλου διαχωρίζεται από όλα τα υπόλοιπα με κάποιο υπερεπίπεδο.

Το πρώτο μας αποτέλεσμα δείχνει ότι η (2.1.1) ισχύει modulo την ισοτροπική σταθερά L_μ του μ (βλέπε Ενότητα 3.1).

Θεώρημα 2.1.1. Έστω μ ένα λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$, $n \geq n_0$. Τότε, $\mathbb{E}_\mu(\varphi_\mu) \leq \exp(-cn/L_\mu^2)$ όπου L_μ είναι η ισοτροπική σταθερά του μ και $c > 0$, $n_0 \in \mathbb{N}$ είναι απόλυτες σταθερές.

Στην Ενότητα 4.2 δίνουμε βασικές πληροφορίες για τα ισοτροπικά λογαριθμικά κοίλα μέτρα πιθανότητας και την ισοτροπική σταθερά. Η φημισμένη εικασία του υπερεπιπέδου ρωτάει αν υπάρχει απόλυτη σταθερά $C > 0$ τέτοια ώστε $L_n \leq C$ για κάθε $n \geq 2$, όπου

$$L_n = \sup\{L_\mu : \mu \text{ ισοτροπικό λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας στον } \mathbb{R}^n\}.$$

Ο Bourgain [14] απέδειξε το άνω φράγμα $L_n \leq c \sqrt[4]{n} \ln n$ και αργότερα ο Klartag στο [38] βελτίωσε αυτήν την εκτίμηση δείχνοντας ότι $L_n \leq c \sqrt[4]{n}$. Το φράγμα αυτό βελτιώθηκε δραστικά το 2020 από τον Chen [19] ο οποίος απέδειξε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε $L_n \leq n^\varepsilon$ για κάθε $n \geq n_0(\varepsilon)$. Στη συνέχεια, μια σειρά από σημαντικές εργασίες, μεταξύ των οποίων ένα πρόσφατο πολύ σημαντικό αποτέλεσμα του Guan [33], οδήγησε στην τελική καταφατική απάντηση για το πρόβλημα, από τους Klartag και Lehec [43] οι οποίοι απέδειξαν ότι $L_n \leq C$. Με βάση τα παραπάνω, το Θεώρημα 2.1.1 δείχνει ότι

$$\mathbb{E}_\mu(\varphi_\mu) \leq \exp(-cn)$$

αν το n είναι αρκετά μεγάλο και απαντά καταφατικά στο ερώτημα που είχε τεθεί. Η ποσότητα $\mathbb{E}_\mu(\varphi_\mu)$ είναι αφινικά αναλλοίωτη και συνεπώς για την απόδειξη του Θεωρήματος 2.1.1 μπορούμε να υποθέσουμε ότι το μ είναι ισοτροπικό. Μάλιστα, θα πάρουμε το Θεώρημα 2.1.1 ως ειδική περίπτωση ενός πιο γενικού αποτελέσματος το οποίο παρουσιάζουμε στην Ενότητα 4.2.

Θεώρημα 2.1.2. Έστω μ και ν δύο ισοτροπικά λογαριθμικά κοίλα μέτρα στον $\mathbb{R}^n$, $n \geq n_0$. Τότε,

$$\mathbb{E}_\nu(\varphi_\mu) := \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_\mu(x) d\nu(x) \leq \exp(-cn/L_\nu^2),$$

όπου $c > 0$, $n_0 \in \mathbb{N}$ είναι απόλυτες σταθερές.

Η απόδειξη του Θεωρήματος 2.1.2 ξεκινάει με τη γνωστή ανισότητα $\varphi_\mu(x) \leq \exp(-\Lambda_\mu^*(x))$ όπου Λ_μ^* είναι ο μετασχηματισμός Cramér του μ (που ορίζεται στην Ενότητα 3.2), και στην πραγματικότητα εξασφαλίζει την ισχυρότερη εκτίμηση

$$(2.1.2) \quad \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\Lambda_\mu^*(x)} d\nu(x) \leq \exp(-cn/L_\nu^2),$$

χρησιμοποιώντας άνω φράγματα για τον όγκο των συνόλων $B_t(\mu) = \{x \in \mathbb{R}^n : \Lambda_\mu^*(x) \leq t\}$. Η υπόθεση ότι τα μ και ν είναι και τα δύο ισοτροπικά δεν είναι απαραίτητη. Μπορούμε να θεωρήσουμε κι άλλες μορφές κανονικοποίησης. Συζητάμε αυτό το θέμα στην Ενότητα 4.2 και διατυπώνουμε μια άλλη εκδοχή του Θεωρήματος 2.1.2 που θα μπορούσε να φανεί χρήσιμη (δείτε το Θεώρημα 4.2.2). Σε κάθε περίπτωση, θέτοντας $\nu = \mu$ παίρνουμε το Θεώρημα 2.1.1 ως άμεση συνέπεια οποιασδήποτε από αυτές τις προτάσεις.

Στην Ενότητα 4.3 δείχνουμε ότι η εκθετική εκτίμηση που δίνει το Θεώρημα 2.1.1 είναι ακριβής.

Θεώρημα 2.1.3. Έστω μ ένα λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$. Τότε,

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi_\mu(x) d\mu(x) \geq e^{-cn},$$

όπου $c > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

Η απόδειξη του Θεωρήματος 2.1.3 χρησιμοποιεί διάφορα αποτελέσματα από τη θεωρία των ισοτροπικών λογαριθμικά κοίλων μέτρων πιθανότητας. Στην περίπτωση που το μ είναι το ομοιόμορφο μέτρο σε ένα κυρτό σώμα K όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$, μπορούμε να δείξουμε ότι $\varphi_\mu(x) \geq e^{-c_1 n}$ για κάθε $x \in \frac{1}{2}K$ και στη συνέχεια απλώς συνδυάζουμε την ανισότητα Markov με το γεγονός ότι $|\frac{1}{2}K| = 2^{-n}$. Αν το μ είναι τυχόν λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$, προκειμένου να αποδείξουμε το ίδιο εκθετικό ως προς τη διάσταση κάτω φράγμα πρέπει να εκμεταλλευτούμε την οικογένεια των μονόπλευρων L_t -κεντροειδών σωμάτων του μ . Ακριβέστερα, χρησιμοποιούμε το γεγονός ότι για να πάρουμε το κάτω φράγμα $\varphi_\mu(x) \geq e^{-c_1 n}$ μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε, αντί για το $\frac{1}{2}K$, το κυρτό σώμα $\frac{1}{2}Z_t^+(\mu)$ με $t = 5n$, όπου $Z_t^+(\mu)$ είναι το μονόπλευρο L_t -κεντροειδές σώμα του μ , και επιτυγχάνουμε κατάλληλο κάτω φράγμα για το $\mu(\frac{1}{2}Z_{5n}^+(\mu))$. Αυτή η τελευταία εκτίμηση απαιτεί την χρήση κάποιων άλλων οικογενειών κυρτών σωμάτων που σχετίζονται με ένα λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας. Εισάγουμε αυτές τις οικογένειες στην Ενότητα 3.1. Για τη διευκόλυνση του αναγνώστη παρουσιάζουμε πρώτα την απόδειξη του Θεωρήματος 2.1.3 στην απλούστερη περίπτωση που το μ είναι το ομοιόμορφο μέτρο σε ένα κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$ και μετά στη γενική περίπτωση τυχόντος λογαριθμικά κοίλου μέτρου πιθανότητας.

Στο δεύτερο μέρος του Κεφαλαίου 4 εξετάζουμε το ερώτημα να δοθούν ομοιόμορφα άνω και κάτω φράγματα κατωφλίου για τη μέση τιμή του μέτρου ενός τυχαίου πολυτόπου που ορίζεται ως η κυρτή θήκη ανεξάρτητων τυχαίων σημείων με λογαριθμικά κοίλη κατανομή. Ενδιαφερόμαστε δηλαδή για φράγματα κατωφλίου τα οποία να ισχύουν για κάθε μέτρο στην κλάση των λογαριθμικά κοίλων μέτρων πιθανότητας. Ζητάμε μια σταθερά $N_1(n)$, η οποία εξαρτάται μόνο από το n και είναι όσο γίνεται μεγαλύτερη, ώστε

$$\sup_{\mu} \left(\sup \left\{ \mathbb{E}_{\mu^N}[\mu(K_N)] : N \leq N_1(n) \right\} \right) \rightarrow 0$$

καθώς το $n \rightarrow \infty$ και μια δεύτερη σταθερά $N_2(n)$, που εξαρτάται μόνο από το n και είναι όσο γίνεται μικρότερη, ώστε

$$\inf_{\mu} \left(\inf \left\{ \mathbb{E}_{\mu^N}[\mu(K_N)] : N \geq N_2(n) \right\} \right) \rightarrow 1$$

καθώς το $n \rightarrow \infty$, όπου το supremum και το infimum είναι πάνω από όλα τα λογαριθμικά κοίλα μέτρα πιθανότητας. Θα αποκαλούμε το πρώτο είδος αποτελέσματος «ομοιόμορφο άνω φράγμα κατωφλίου» και το δεύτερο «ομοιόμορφο κάτω φράγμα κατωφλίου».

Ομοιόμορφα άνω και κάτω φράγματα κατωφλίου αυτού του τύπου δόθηκαν πρόσφατα από τους Chakraborti, Tkocz και Βριτσίου στο [18] για κάποιες οικογένειες κατανομών. Απέδειξαν ότι αν μ είναι ένα άρτιο λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας με φορέα μέσα σε ένα κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$ και αν $X_1, X_2, \dots$ είναι ανεξάρτητα τυχαία σημεία με κατανομή το μ , τότε για κάθε $n < N \leq \exp(c_1 n / L_\mu^2)$ ισχύει ότι

$$(2.1.3) \quad \frac{\mathbb{E}_{\mu^N}(|K_N|)}{|K|} \leq \exp(-c_2 n / L_\mu^2),$$

όπου $c_1, c_2 > 0$ είναι απόλυτες σταθερές. Αποδεικνύουμε άνω φράγμα κατωφλίου για τυχόν ζεύγος λογαριθμικά κοίλων μέτρων πιθανότητας μ και ν , αν μπορούν να τεθούν ταυτόχρονα στην ισοτροπική θέση.

Θεώρημα 2.1.4. Έστω μ και ν δύο ισοτροπικά λογαριθμικά κοίλα μέτρα πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$. Έστω $X_1, X_2, \dots$ ανεξάρτητα τυχαία σημεία στον $\mathbb{R}^n$ τα οποία έχουν κατανομή το μ και για κάθε $N > n$ θεωρούμε το τυχαίο πολύτοπο $K_N = \text{conv}\{X_1, \dots, X_N\}$. Τότε, για κάθε $N \leq \exp(c_1 n / L_\nu^2)$ ισχύει ότι

$$\mathbb{E}_{\mu^N}(\nu(K_N)) \leq 2 \exp(-c_2 n / L_\nu^2),$$

όπου $c_1, c_2 > 0$ είναι απόλυτες σταθερές.

Ως πόρισμα του Θεωρήματος 2.1.4 παίρνουμε το εξής:

Πόρισμα 2.1.5. Υπάρχει απόλυτη σταθερά $c > 0$ τέτοια ώστε αν $N_1(n) = \exp(cn / L_n^2)$ τότε

$$\sup_{\mu} \left(\sup \left\{ \mathbb{E}_{\mu^N}[\mu(K_N)] : N \leq N_1(n) \right\} \right) \rightarrow 0$$

καθώς το $n \rightarrow \infty$, όπου το πρώτο supremum είναι πάνω από όλα τα λογαριθμικά κοίλα μέτρα πιθανότητας μ στον $\mathbb{R}^n$.

Η απόδειξη του Θεωρήματος 2.1.4 εκμεταλλεύεται κάποιες από τις ιδέες που χρησιμοποιούνται για την απόδειξη της (2.1.3) στο [18]: το Λήμμα 4.4.2 είναι παραλλαγή μιας γνωστής ιδέας που χρησιμοποιείται συχνά για την απόδειξη άνω φραγμάτων κατωφλίου και βασίζεται πάλι στην ανισότητα $\varphi_\mu(x) \leq \exp(-\Lambda_\mu^*(x))$. Στη συνέχεια, χρησιμοποιούνται άνω φράγματα για τον όγκο των συνόλων $B_t(\mu)$. Η υπόθεση ότι τα μ και ν είναι και τα δύο ισοτροπικά μπορεί να αντικατασταθεί από διαφορετικές μορφές κανονικοποίησης. Συζητάμε κι άλλες εκδοχές του Θεωρήματος 2.1.4 στην Ενότητα 4.4 και δείχνουμε πώς μπορεί κανείς να ανακτήσει την (2.1.3) από αυτές.

Το ομοιόμορφο κάτω φράγμα κατωφλίου που αποδεικνύεται στο [18] αφορά την περίπτωση όπου το μ είναι ένα άρτιο κ -κοίλο μέτρο στον $\mathbb{R}^n$ με $0 < \kappa < 1/n$, που έχει φορέα μέσα σε ένα κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$. Αν $X_1, X_2, \dots$ είναι ανεξάρτητα τυχαία σημεία στον $\mathbb{R}^n$ με κατανομή το μ και $K_N = \text{conv}\{X_1, \dots, X_N\}$ όπως πριν, τότε για κάθε $M \geq C$ και κάθε $N \geq \exp\left(\frac{1}{\kappa}(\ln n + 2 \ln M)\right)$ ισχύει ότι

$$(2.1.4) \quad \frac{\mathbb{E}_{\mu^N}(|K_N|)}{|K|} \geq 1 - \frac{1}{M},$$

όπου $C > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

Η οικογένεια των λογαριθμικά κοίλων μέτρων πιθανότητας αντιστοιχεί στην περίπτωση $\kappa = 0$, είναι επομένως φυσιολογικό να εξετάσουμε αν ισχύουν αντίστοιχα αποτελέσματα για τα 0-κοίλα, δηλαδή τα λογαριθμικά κοίλα μέτρα πιθανότητας. Αποδεικνύουμε ένα ομοιόμορφο κάτω φράγμα κατωφλίου για την κλάση των λογαριθμικά κοίλων μέτρων πιθανότητας.

Θεώρημα 2.1.6. Έστω $\delta \in (0, 1)$. Τότε,

$$\inf_{\mu} \left(\inf \left\{ \mathbb{E}_{\mu^N} [\mu((1 + \delta)K_N)] : N \geq \exp(C\delta^{-1} \ln(2/\delta) n \ln n) \right\} \right) \rightarrow 1$$

καθώς το $n \rightarrow \infty$, όπου το πρώτο infimum είναι πάνω από όλα τα λογαριθμικά κοίλα μέτρα πιθανότητας μ στον $\mathbb{R}^n$ με κέντρο βάρους την αρχή των αξόνων, και $C > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

Η απόδειξη του Θεωρήματος 2.1.6 εκμεταλλεύεται το βάθος ως προς ημιχώρους με τον εξής τρόπο. Από ένα γνωστό αποτέλεσμα, το Λήμμα 4.4.7, είναι αρκετό για τον σκοπό μας να έχουμε κάποιο καλό κάτω φράγμα για την $\varphi_{\mu}(x)$ σε ένα σύνολο $A \subset \mathbb{R}^n$ που έχει μέτρο κοντά στο 1. Δείχνουμε ότι αν το μ έχει το κέντρο βάρους του στην αρχή των αξόνων τότε, όπως στην απόδειξη του Θεωρήματος 2.1.3, τον ρόλο του A μπορεί να παίξει το $(1 + \delta)Z_t^+(\mu)$ όπου, αυτή τη φορά, $t \geq C_{\delta} n \ln n$ και $C_{\delta} = C\delta^{-1} \ln(2/\delta)$. Το Θεώρημα 2.1.6 δίνει ασθενές φράγμα κατωφλίου με την έννοια ότι δίνουμε εκτίμηση για τη μέση τιμή $\mathbb{E}_{\mu^N} [\mu((1 + \delta)K_N)]$ (για αυθαίρετα μικρή αλλά θετική τιμή του δ) ενώ θα θέλαμε να έχουμε παρόμοιο αποτέλεσμα για την $\mathbb{E}_{\mu^N} [\mu(K_N)]$. Μπορούμε να «αφαιρέσουμε» τον δ -όρο, όμως η εξάρτηση από το n γίνεται χειρότερη. Ακριβέστερα, δείχνουμε στο Θεώρημα 4.4.8 ότι υπάρχει μια απόλυτη σταθερά $C > 0$ τέτοια ώστε

$$\inf_{\mu} \left(\inf \left\{ \mathbb{E}_{\mu^N} [\mu(K_N)] : N \geq \exp(C(n \ln n)^2 u(n)) \right\} \right) \rightarrow 1$$

καθώς το $n \rightarrow \infty$, όπου το πρώτο infimum είναι πάνω από όλα τα λογαριθμικά κοίλα μέτρα πιθανότητας μ στον $\mathbb{R}^n$ και $u(n)$ είναι οποιαδήποτε συνάρτηση με $u(n) \rightarrow \infty$ καθώς το $n \rightarrow \infty$.

Σημειώνουμε ότι δεν είναι δυνατόν να έχουμε εκθετικό ως προς τη διάσταση κάτω φράγμα κατωφλίου σε πλήρη γενικότητα. Για παράδειγμα, στην περίπτωση που τα X_i είναι ομοιόμορφα κατανεμημένα στην Ευκλείδεια μπάλα, το αυστηρό φαινόμενο κατωφλίου για το πρόβλημα εμφανίζεται γύρω από το

$$\exp\left((1 \pm \varepsilon)\frac{1}{2}n \ln n\right), \quad \varepsilon > 0.$$

Παραπέμπουμε στο [24] όπου δίνεται για πρώτη φορά μια σχετική εκτίμηση, και στα [53],[9] για ακριβή αποτελέσματα. Μία ακόμη απόδειξη δίνεται στο [2].

2.2 Φαινόμενα κατωφλίου για το μέτρο τυχαίων πολυτόπων

Στο Κεφάλαιο 5 μελετάμε το ερώτημα αν ισχύει φαινόμενο κατωφλίου για τη μέση τιμή του μέτρου ενός τυχαίου πολυτόπου που ορίζεται ως η κυρτή θήκη ανεξάρτητων τυχαίων σημείων με την ίδια λογαριθμικά κοίλη κατανομή. Η γενική διατύπωση του προβλήματος είναι η ακόλουθη. Για δοθέν λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας μ στον $\mathbb{R}^n$, θεωρούμε μια ακολουθία $X_1, X_2, \dots$ ανεξάρτητων τυχαίων σημείων στον $\mathbb{R}^n$ που έχουν κατανομή το μ και για κάθε $N > n$ ορίζουμε το τυχαίο πολύτοπο

$$K_N = \text{conv}\{X_1, \dots, X_N\}.$$

Κατόπιν, θεωρούμε τη μέση τιμή $\mathbb{E}_{\mu^N}[\mu(K_N)]$ του μέτρου του K_N , όπου $\mu^N = \mu \otimes \cdots \otimes \mu$ (N φορές). Αυτή είναι μια αφινικά αναλλοίωτη ποσότητα, μπορούμε λοιπόν να υποθέσουμε ότι το μ είναι κεντραρισμένο, δηλαδή το κέντρο βάρους του μ βρίσκεται στην αρχή των αξόνων.

Για δοθέν $\delta \in (0, 1)$ λέμε ότι το μ ικανοποιεί «δ-άνω φράγμα κατωφλίου» με σταθερά ϱ_1 αν

$$(2.2.1) \quad \sup\{\mathbb{E}_{\mu^N}[\mu(K_N)] : N \leq \exp(\varrho_1 n)\} \leq \delta$$

και ότι το μ ικανοποιεί «δ-κάτω φράγμα κατωφλίου» με σταθερά ϱ_2 αν

$$(2.2.2) \quad \inf\{\mathbb{E}_{\mu^N}[\mu(K_N)] : N \geq \exp(\varrho_2 n)\} \geq 1 - \delta.$$

Στη συνέχεια, ορίζουμε τις παραμέτρους $\varrho_1(\mu, \delta) = \sup\{\varrho_1 : \text{ισχύει η (2.2.1)}\}$ και $\varrho_2(\mu, \delta) = \inf\{\varrho_2 : \text{ισχύει η (2.2.2)}\}$. Στόχος μας είναι να δώσουμε άνω φράγματα για το «εύρος κατωφλίου», δηλαδή τη διαφορά

$$\varrho(\mu, \delta) := \varrho_2(\mu, \delta) - \varrho_1(\mu, \delta)$$

για κάθε δοθέν $\delta \in (0, \frac{1}{2})$.

Μπορούμε επίσης να θεωρήσουμε μια ακολουθία $\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty}$ λογαριθμικά κοίλων μέτρων πιθανότητας μ_n στον $\mathbb{R}^n$. Τότε, λέμε ότι η $\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty}$ εμφανίζει «αυστηρό φαινόμενο κατωφλίου» αν υπάρχει ακολουθία $\{\delta_n\}_{n=1}^{\infty}$ θετικών πραγματικών αριθμών τέτοια ώστε $\delta_n \rightarrow 0$ και $\varrho(\mu_n, \delta_n) \rightarrow 0$ όταν $n \rightarrow \infty$. Με αυτήν την ορολογία μπορούμε να περιγράψουμε τα αποτελέσματα που αναφέραμε στο προηγούμενο κεφάλαιο, τα οποία αφορούσαν ειδικές ακολουθίες μέτρων (στις περισσότερες περιπτώσεις μέτρα γινόμενα ή σφαιρικά συμμετρικά μέτρα).

Στόχος μας είναι να περιγράψουμε μια γενική προσέγγιση στο πρόβλημα, δουλεύοντας με ένα τυχόν λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας μ στον $\mathbb{R}^n$. Η προσέγγισή μας βασίζεται στον μετασχηματισμό Cramér του μ . Υπενθυμίζουμε ότι ο λογαριθμικός μετασχηματισμός Laplace του μ ορίζεται από την

$$\Lambda_\mu(\xi) = \ln \left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{\langle \xi, z \rangle} d\mu(z) \right), \quad \xi \in \mathbb{R}^n$$

και ο μετασχηματισμός Cramér του μ είναι ο μετασχηματισμός Legendre της Λ_μ , που ορίζεται από την

$$\Lambda_\mu^*(x) = \sup_{\xi \in \mathbb{R}^n} \{ \langle x, \xi \rangle - \Lambda_\mu(\xi) \}, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Για κάθε $t > 0$ ορίζουμε

$$B_t(\mu) := \{x \in \mathbb{R}^n : \Lambda_\mu^*(x) \leq t\}$$

και για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$ συμβολίζουμε με $\mathcal{H}(x)$ το σύνολο όλων των κλειστών ημιχώρων H του $\mathbb{R}^n$ οι οποίοι περιέχουν το x . Κατόπιν, θεωρούμε το βάθος Tukey ως προς ημιχώρους

$$\varphi_\mu(x) = \inf\{\mu(H) : H \in \mathcal{H}(x)\}$$

το οποίο συζητήσαμε στην προηγούμενη ενότητα. Από τον ορισμό της Λ_μ^* μπορούμε εύκολα να ελέγξουμε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$ ισχύει ότι $\varphi_\mu(x) \leq \exp(-\Lambda_\mu^*(x))$ (βλ. Λήμμα 5.2.1 στην

Ενότητα 5.2). Ειδικότερα, για κάθε $t > 0$ και για κάθε $x \notin B_t(\mu)$ έχουμε ότι $\varphi_\mu(x) \leq \exp(-t)$. Μια βασική ιδέα, η οποία εμφανίζεται σε όλες τις προηγούμενες δουλειές σε αυτό το θέμα, είναι να δείξουμε ότι η φ_μ είναι σχεδόν σταθερή στο σύνορο $\partial(B_t(\mu))$ του $B_t(\mu)$. Το πρώτο μας κύριο αποτέλεσμα δείχνει ότι αυτό ισχύει, γενικά, αν το $\mu = \mu_K$ είναι το ομοιόμορφο μέτρο σε ένα κεντραρισμένο κυρτό σώμα όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$.

Θεώρημα 2.2.1. Έστω K ένα κεντραρισμένο κυρτό σώμα όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$. Τότε, για κάθε $t > 0$ ισχύει ότι

$$\inf\{\varphi_{\mu_K}(x) : x \in B_t(\mu_K)\} \geq \frac{1}{10} \exp(-t - 2\sqrt{n}).$$

Επεται ότι

$$\omega_{\mu_K}(x) - 5\sqrt{n} \leq \Lambda^*(x) \leq \omega_{\mu_K}(x)$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$, όπου $\omega_{\mu_K}(x) = \ln\left(\frac{1}{\varphi_{\mu_K}(x)}\right)$.

Το Θεώρημα 2.2.1 είναι κατά κάποιον τρόπο μια εκδοχή του θεωρήματος Cramér (βλ. [21]) για τυχαία διανύσματα ομοιόμορφα κατανομημένα σε κυρτά σώματα. Παρουσιάζουμε την απόδειξη στην Ενότητα 5.2. Εκμεταλλεύεται τεχνικές από τη θεωρία των μεγάλων αποκλίσεων και ένα θεώρημα του Nguyen [50] (το οποίο αποδείχθηκε ανεξάρτητα από τον Wang [61], βλ. επίσης [28]) το οποίο είναι ακριβώς το συστατικό που μας αναγκάζει να θεωρήσουμε μόνο ομοιόμορφα μέτρα σε κυρτά σώματα. Μοιάζει δυσκολότερο να αποδείξουμε, αν ισχύει, ανάλογη εκτίμηση για κάθε κεντραρισμένο λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας μ στον $\mathbb{R}^n$. Σε αυτήν την κατεύθυνση υπάρχει ένα πρόσφατο αποτέλεσμα των Μπραζίτικου και Χασάπης [15] το οποίο περιγράφουμε στο τέλος της Ενότητας 5.2.

Το δεύτερο βήμα στην προσέγγισή μας είναι να θεωρήσουμε, για κάθε κεντραρισμένο λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας μ στον $\mathbb{R}^n$, την παράμετρο

$$(2.2.3) \quad \beta(\mu) = \frac{\text{Var}_\mu(\Lambda_\mu^*)}{(\mathbb{E}_\mu(\Lambda_\mu^*))^2}$$

με την προϋπόθεση ότι

$$\|\Lambda_\mu^*\|_{L^2(\mu)} = (\mathbb{E}_\mu((\Lambda_\mu^*)^2))^{1/2} < \infty.$$

Σε γενικές γραμμές, το πλάνο είναι το ακόλουθο: αν η φ_μ είναι «σχεδόν σταθερή» στο $\partial(B_t(\mu))$ για κάθε $t > 0$ και $\beta(\mu) = o_n(1)$, μπορούμε να εξασφαλίσουμε ένα «αυστηρό φαινόμενο κατωφλίου» για τη μέση τιμή του μέτρου του K_N με

$$\varrho_2 \approx \varrho_1 \approx \|\Lambda_\mu^*\|_{L^1(\mu)} = \mathbb{E}_\mu(\Lambda_\mu^*).$$

Αυτή η ιδέα παίρνει ακριβέστερη μορφή στην Ενότητα 5.4 και κατόπιν περιγράφεται μέσα από κάποια παραδείγματα στην Ενότητα 5.5. Σημειώνουμε ότι δεν είναι σαφές αν η Λ_μ^* έχει πεπερασμένη ροπή δεύτερης ή ανώτερης τάξης, κάτι που είναι απαραίτητο ώστε να ορίζεται η παράμετρος $\beta(\mu)$. Μελετάμε αυτό το ερώτημα στην Ενότητα 5.3 όπου δίνουμε καταφατική απάντηση στην περίπτωση του ομοιόμορφου μέτρου σε ένα κυρτό σώμα. Καλύπτουμε

μάλιστα τη γενικότερη περίπτωση των κ -κοίλων μέτρων πιθανότητας, $\kappa \in (0, 1/n]$, που έχουν φορέα μέσα σε ένα κεντραρισμένο κυρτό σώμα.

Θεώρημα 2.2.2. Έστω K ένα κεντραρισμένο κυρτό σώμα όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$. Έστω $\kappa \in (0, 1/n]$ και μ ένα κεντραρισμένο κ -κοίλο μέτρο πιθανότητας με $\text{supp}(\mu) = K$. Τότε,

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{\frac{\kappa \Lambda_\mu^*(x)}{2}} d\mu(x) < \infty.$$

Ειδικότερα, για κάθε $p \geq 1$ ισχύει ότι $\mathbb{E}_\mu((\Lambda_\mu^*(x))^p) < \infty$.

Η μέθοδος απόδειξης του Θεωρήματος 2.2.2 δίνει επιπλέον καλά άνω φράγματα για την $\|\Lambda_\mu^*\|_{L^p(\mu)}$. Ειδικότερα, αν υποθέσουμε ότι $\mu = \mu_K$ είναι το ομοιόμορφο μέτρο σε ένα κεντραρισμένο κυρτό σώμα τότε παίρνουμε ακριβείς αμφίπλευρες εκτιμήσεις για την πιο ενδιαφέρουσα περίπτωση όπου $p = 1$ ή 2.

Θεώρημα 2.2.3. Έστω K ένα κεντραρισμένο κυρτό σώμα όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$. Τότε,

$$c_1 n / L_{\mu_K}^2 \leq \|\Lambda_{\mu_K}^*\|_{L^1(\mu_K)} \leq \|\Lambda_{\mu_K}^*\|_{L^2(\mu_K)} \leq c_2 n \ln n,$$

όπου L_{μ_K} είναι η ισοτροπική σταθερά του ομοιόμορφου μέτρου μ_K στο K και $c_1, c_2 > 0$ είναι απόλυτες σταθερές.

Η αριστερή ανισότητα του Θεωρήματος 2.2.3 προκύπτει εύκολα αν συνδυάσουμε την απόδειξη του Θεωρήματος 2.1.1 από το Κεφάλαιο 4 με την ανισότητα Jensen. Τόσο το κάτω όσο και το άνω φράγμα έχουν τη βέλτιστη εξάρτηση από τη διάσταση. Αυτό φαίνεται αν, για παράδειγμα, θεωρήσουμε το ομοιόμορφο μέτρο στον κύβο ή την Ευκλείδεια μπάλα, αντίστοιχα (βλ. Ενότητα 5.4).

Εκτός από το Θεώρημα 2.2.2, αποδεικνύουμε στην Ενότητα 5.3 ότι η Λ_μ^* έχει πεπερασμένες ροπές όλων των τάξεων στις ακόλουθες περιπτώσεις:

- (α) Αν το μ είναι ένα κεντραρισμένο μέτρο πιθανότητας στο $\mathbb{R}$ το οποίο είναι απολύτως συνεχές ως προς το μέτρο Lebesgue ή γινόμενο τέτοιων μέτρων.
- (β) Αν το μ είναι ένα κεντραρισμένο λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$ και υπάρχει μια συνάρτηση $g : [1, \infty) \rightarrow [1, \infty)$ με $\lim_{t \rightarrow \infty} g(t) / \ln(t+1) = +\infty$ τέτοια ώστε $Z_t^+(\mu) \geq g(t) Z_2^+(\mu)$ για κάθε $t \geq 2$, όπου $\{Z_t^+(\mu)\}_{t \geq 1}$ είναι η οικογένεια των μονόπλευρων L_t -κεντροειδών σωμάτων του μ .

Φαίνεται πάλι δυσκολότερο να αποδείξουμε, αν ισχύει, ένα αντίστοιχο αποτέλεσμα για κάθε κεντραρισμένο λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας μ στον $\mathbb{R}^n$. Αυτό είναι ένα δεύτερο βασικό ερώτημα το οποίο αφήνουμε ανοικτό.

Στην Ενότητα 5.4 περιγράφουμε την προσέγγιση στο κεντρικό πρόβλημα και δείχνουμε πώς μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τα προηγούμενα αποτελέσματα για να πάρουμε φράγματα για την παράμετρο $\varrho(\mu, \delta)$. Διευκρινίζουμε επίσης τον ρόλο της παραμέτρου $\beta(\mu)$. Θα

μπορούσαμε να ελπίζουμε ότι η $\beta(\mu)$ είναι μικρή καθώς η διάσταση αυξάνει, δηλαδή ότι $\beta(\mu) = o_n(1)$ καθώς το $n \rightarrow \infty$. Αν κάτι τέτοιο ισχύει, τότε το επόμενο γενικό αποτέλεσμα δίνει ικανοποιητικά κάτω φράγματα για την παράμετρο $\varrho_1(\mu, \delta)$.

Θεώρημα 2.2.4. Έστω μ ένα κεντραρισμένο λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$. Υποθέτουμε ότι $\beta(\mu) < 1/8$ και $8\beta(\mu) < \delta < 1$. Αν $n/L_\mu^2 \geq c_2 \ln(2/\delta) \sqrt{\delta/\beta(\mu)}$ όπου L_μ είναι η ισοτροπική σταθερά του μ , τότε

$$\varrho_1(\mu, \delta) \geq \left(1 - \sqrt{8\beta(\mu)/\delta}\right) \frac{\mathbb{E}_\mu(\Lambda_\mu^*)}{n}.$$

Μπορούμε να δώσουμε ικανοποιητικά άνω φράγματα για την παράμετρο $\varrho_2(\mu, \delta)$ στην περίπτωση που το $\mu = \mu_K$ είναι το ομοιόμορφο μέτρο σε ένα κεντραρισμένο κυρτό σώμα K όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$.

Θεώρημα 2.2.5. Έστω K ένα κεντραρισμένο κυρτό σώμα όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$. Υποθέτουμε ότι $\beta(\mu_K) < 1/2$ και $2\beta(\mu_K) < \delta < 1$. Αν $n/L_{\mu_K}^2 \geq c_2 \ln(2/\delta) \sqrt{\delta/\beta(\mu_K)}$ τότε

$$\varrho_2(\mu_K, \delta) \leq \left(1 + \sqrt{8\beta(\mu_K)/\delta}\right) \frac{\mathbb{E}_{\mu_K}(\Lambda_{\mu_K}^*)}{n}.$$

Συνδυάζοντας αυτά τα δύο αποτελέσματα βλέπουμε ότι, υπό τον όρο ότι η $\beta(\mu_K)$ είναι μικρή σε σχέση με κάποιο δοθέν $\delta \in (0, 1)$, έχουμε φαινόμενο κατωφλίου με εύρος

$$\varrho(\mu_K, \delta) \leq \frac{c}{n} \sqrt{\frac{\text{Var}_{\mu_K}(\Lambda_{\mu_K}^*)}{\delta}}.$$

Η συζήτηση που προηγήθηκε αφήνει ανοικτό ένα τρίτο βασικό ερώτημα: να εκτιμήσουμε την παράμετρο

$$\beta_n := \sup\{\beta(\mu) : \mu \text{ κεντραρισμένο λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας στον } \mathbb{R}^n\}.$$

Τέλος, περιγράφουμε τη μέθοδο που αναπτύσσουμε σε αυτό το κεφάλαιο με κάποια παραδείγματα. Θεωρούμε πρώτα τα τυπικά παραδείγματα του ομοιόμορφου μέτρου στον μοναδιαίο κύβο και του μέτρου Gaussian. Από τα αποτελέσματά μας προκύπτει ότι και στις δύο περιπτώσεις έχουμε το φράγμα κατωφλίου $\varrho(\mu, \delta) \leq c(\delta)/\sqrt{n}$, όπου $c(\delta) > 0$ είναι μία σταθερά που εξαρτάται από το δ . Στη συνέχεια εξετάζουμε την περίπτωση του ομοιόμορφου μέτρου στην Ευκλείδεια μπάλα D_n όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$ και παίρνουμε το ακόλουθο αυστηρό φράγμα κατωφλίου.

Θεώρημα 2.2.6. Έστω D_n η κεντραρισμένη Ευκλείδεια μπάλα όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$. Τότε, η ακολουθία $\mu_n := \mu_{D_n}$ εμφανίζει φαινόμενο κατωφλίου με σταθερά $\varrho = \frac{1}{n} \mathbb{E}_{\mu_n}(\Lambda_{\mu_n}^*)$ και $\varrho(\mu_n, \delta) \leq \frac{c}{\sqrt{\delta \ln n}} \varrho$, διότι $\varrho \approx n \ln n$. Για παράδειγμα, στην περίπτωση που ο n είναι άρτιος έχουμε ότι

$$\mathbb{E}_{\mu_n}(\Lambda_{\mu_n}^*) = \frac{(n+1)}{2} H_{\frac{n}{2}} + O(\sqrt{n})$$

όταν $n \rightarrow \infty$, όπου $H_m = \sum_{k=1}^m \frac{1}{k}$.

2.3 Κορυφές με ανεξάρτητες συντεταγμένες

Έστω μ ένα άρτιο Borel μέτρο πιθανότητας στην πραγματική ευθεία και έστω $X_1, \dots, X_n$ ανεξάρτητες ισοκατανεμημένες τυχαίες μεταβλητές, ορισμένες σε κάποιον χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, όλες τους με κατανομή μ , δηλαδή, $\mu(B) := P(X_i \in B)$ για κάθε $i \leq n$ και όλα τα B στην Borel σ -άλγεβρα $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ του $\mathbb{R}$. Θεωρούμε το τυχαίο διάνυσμα $\vec{X} = (X_1, \dots, X_n)$ και, για κάποιο σταθερό N που ικανοποιεί την $N > n$, θεωρούμε N ανεξάρτητα αντίγραφα $\vec{X}_1, \dots, \vec{X}_N$ του $\vec{X}$. Η κατανομή του $\vec{X}$ είναι το μέτρο πιθανότητας $\mu_n := \mu \otimes \dots \otimes \mu$ (n φορές) και η κατανομή της N -άδας $(\vec{X}_1, \dots, \vec{X}_N)$ είναι το $\mu_n^N := \mu_n \otimes \dots \otimes \mu_n$ (N φορές). Στόχος μας είναι να αποδείξουμε ένα αυστηρό κατωφλικό φαινόμενο για τη μέση τιμή του μ_n -μέτρου του τυχαίου πολυτόπου

$$K_N := \text{conv}\{\vec{X}_1, \dots, \vec{X}_N\}.$$

Για να ορίσουμε ακριβώς τι εννοούμε με τον όρο «αυστηρό κατωφλικό φαινόμενο», για κάθε $n \geq 1$ και $\delta \in (0, \frac{1}{2})$ ορίζουμε το άνω φράγμα κατωφλίου

$$(2.3.1) \quad \varrho_1(\mu_n, \delta) = \sup\{\varrho_1 : \sup\{\mathbb{E}_{\mu_n^N}[\mu_n(K_N)] : N \leq \exp(\varrho_1 n)\} \leq \delta\}$$

και το κάτω φράγμα κατωφλίου

$$(2.3.2) \quad \varrho_2(\mu_n, \delta) = \inf\{\varrho_2 : \inf\{\mathbb{E}_{\mu_n^N}[\mu_n(K_N)] : N \geq \exp(\varrho_2 n)\} \geq 1 - \delta\}.$$

Κατόπιν, λέμε ότι η ακολουθία $\{\mu_n\}_{n=1}^\infty$ εμφανίζει αυστηρό κατωφλικό φαινόμενο αν

$$\varrho(\mu_n, \delta) := \varrho_2(\mu_n, \delta) - \varrho_1(\mu_n, \delta) \longrightarrow 0$$

όταν $n \rightarrow \infty$, για κάθε σταθερό $\delta \in (0, \frac{1}{2})$.

Ένα κατωφλικό φαινόμενο αυτής της μορφής αποδείχθηκε για πρώτη φορά στην κλασική δουλειά των Dyer, Füredi και McDiarmid [25] για την περίπτωση του ομοιόμορφου μέτρου μ στο $[-1, 1]$. Εφαρμόζουμε τη γενική προσέγγιση που περιγράψαμε στην προηγούμενη ενότητα και δίνουμε καταφατική απάντηση για ένα γενικό άρτιο μέτρο πιθανότητας μ στο $\mathbb{R}$ που ικανοποιεί κάποιες πρόσθετες υποθέσεις, τις οποίες εξηγούμε εδώ εν συντομία (δείτε την Ενότητα 6.1 για περισσότερες λεπτομέρειες). Υποθέτουμε ότι το μ είναι μη εκφυλισμένο, δηλαδή $\text{Var}(X) > 0$. Έστω

$$x^* = x^*(\mu) := \sup\{x \in \mathbb{R} : \mu([x, \infty)) > 0\}$$

το δεξιό άκρο του φορέα του μ και έστω $I_\mu = (-x^*, x^*)$. Σημειώνουμε ότι, αφού το μ είναι μη

εκφυλισμένο και άρτιο, έχουμε ότι $x^* > 0$. Έστω

$$g(t) := \mathbb{E}(e^{tX}) := \int_{\mathbb{R}} e^{tx} d\mu(x), \quad t \in \mathbb{R}$$

η ροπογεννήτρια της X , και έστω $\Lambda_\mu(t) := \ln g(t)$ η λογαριθμική της ροπογεννήτρια. Από την ανισότητα Hölder, η Λ_μ είναι μια κυρτή συνάρτηση στο $\mathbb{R}$. Θεωρούμε τον μετασχηματισμό Legendre $\Lambda_\mu^* : I_\mu \rightarrow \mathbb{R}$ της Λ_μ , δηλαδή τη συνάρτηση

$$\Lambda_\mu^*(x) := \sup \{tx - \Lambda_\mu(t) : t \in \mathbb{R}\}.$$

Όπως θα δούμε στην Πρόταση 6.1.6, η Λ_μ^* έχει πεπερασμένες ροπές όλων των τάξεων.

Λέμε ότι το μ είναι αποδεκτό αν είναι μη εκφυλισμένο, δηλαδή $\text{Var}_\mu(X) > 0$, και ικανοποιεί τις ακόλουθες συνθήκες:

- (α) Υπάρχει $r > 0$ τέτοιος ώστε $\mathbb{E}(e^{tX}) < \infty$ για κάθε $t \in (-r, r)$. Ειδικότερα, η X έχει πεπερασμένες ροπές όλων των τάξεων.
- (β) Ισχύει ένα από τα παρακάτω: (1) $x^* < +\infty$ και $P(X = x^*) = 0$, ή (2) $x^* = +\infty$ και $\{\Lambda_\mu < \infty\} = \mathbb{R}$, ή (3) $x^* = +\infty$, το $\{\Lambda_\mu < \infty\}$ είναι φραγμένο και το μ είναι λογαριθμικά κοίλο.

Τέλος, λέμε ότι το μ ικανοποιεί την Λ^* -συνθήκη αν

$$\lim_{x \uparrow x^*} \frac{-\ln \mu([x, \infty))}{\Lambda_\mu^*(x)} = 1.$$

Συχνά εκφράζουμε αυτή τη συνθήκη στη μορφή $-\ln \mu([x, \infty)) \sim \Lambda_\mu^*(x)$ καθώς $x \uparrow x^*$, όπου « $a(x) \sim b(x)$ καθώς $x \rightarrow A$ » σημαίνει « $\lim_{x \rightarrow A} \frac{a(x)}{b(x)} = 1$ ». Με αυτούς τους ορισμούς, το κεντρικό μας αποτέλεσμα είναι το εξής.

Θεώρημα 2.3.1. Έστω μ ένα αποδεκτό άρτιο μέτρο πιθανότητας στο $\mathbb{R}$ το οποίο ικανοποιεί την Λ^* -συνθήκη. Τότε, για κάθε $\delta \in (0, \frac{1}{2})$ και κάθε $\varepsilon \in (0, 1)$ υπάρχει $n_0(\mu, \delta, \varepsilon)$ τέτοιος ώστε

$$\varrho_1(\mu_n, \delta) \geq (1 - \varepsilon) \mathbb{E}_\mu(\Lambda_\mu^*) \quad \text{και} \quad \varrho_2(\mu_n, \delta) \leq (1 + \varepsilon) \mathbb{E}_\mu(\Lambda_\mu^*)$$

για κάθε $n \geq n_0(\mu, \delta, \varepsilon)$. Ειδικότερα, η ακολουθία $\{\mu_n\}_{n=1}^\infty$ εμφανίζει ισχυρό φαινόμενο κατωφλίου, δηλαδή $\lim_{n \rightarrow \infty} \varrho(\mu_n, \delta) = 0$, με «σταθερά κατωφλίου» $\mathbb{E}_\mu(\Lambda_\mu^*)$.

Στην Ενότητα 6.3 δίνουμε μια εφαρμογή του Θεωρήματος 2.3.1 στην περίπτωση του p -μέτρου γινομένου $\nu_p^n := \nu_p^{\otimes n}$. Για κάθε $p \geq 1$ συμβολίζουμε με ν_p την κατανομή πιθανότητας στο $\mathbb{R}$ με πυκνότητα $(2\gamma_p)^{-1} \exp(-|x|^p)$, όπου $\gamma_p = \Gamma(1 + 1/p)$. Αποδεικνύουμε ότι το ν_p ικανοποιεί την Λ^* -συνθήκη.

Θεώρημα 2.3.2. Για κάθε $p \geq 1$ έχουμε ότι

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-\ln(\nu_p[x, \infty))}{\Lambda_{\nu_p}^*(x)} = 1.$$

Σημειώνουμε ότι το μέτρο ν_p είναι αποδεκτό για κάθε $1 \leq p < \infty$. Ικανοποιεί τη συνθήκη (β-3) αν $p = 1$ και τη συνθήκη (β-2) για κάθε $1 < p < \infty$. Συνεπώς, το Θεώρημα 2.3.2 συνεπάγεται ότι αν K_N είναι η κυρτή θήκη N (όπου $N > n$) ανεξάρτητων τυχαίων διανυσμάτων $\vec{X}_1, \dots, \vec{X}_N$ με κατανομή ν_p^n τότε η μέση τιμή $\mathbb{E}_{(\nu_p^n)^N}(\nu_p^n(K_N))$ εμφανίζει αυστηρό φαινόμενο κατωφλίου γύρω στο $N = \exp((1 \pm \varepsilon)\mathbb{E}_{\nu_p}(\Lambda_{\nu_p}^*)n)$: για κάθε $\delta \in (0, \frac{1}{2})$ έχουμε ότι $\lim_{n \rightarrow \infty} \varrho(\nu_p^n, \delta) = 0$.

Όπως έχουμε ήδη αναφέρει στην Ενότητα 1.2, μια παραλλαγή του προβλήματος, στην οποία το $\mu_n(K_N)$ αντικαθίσταται από τον όγκο του K_N , έχει μελετηθεί στην περίπτωση που το μ έχει συμπαγή φορέα. Ορίζουμε

$$\kappa = \kappa(\mu) := \frac{1}{2x^*} \int_{-x^*}^{x^*} \Lambda_\mu^*(x) dx.$$

Στο [31] αποδείχθηκε το ακόλουθο φαινόμενο κατωφλίου για τον όγκο του K_N για μια ευρεία κλάση κατανομών μ με συμπαγή φορέα: Για κάθε $\varepsilon > 0$,

$$(2.3.3) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sup \{(2x^*)^{-n} \mathbb{E}(|K_N|) : N \leq \exp((\kappa - \varepsilon)n)\} = 0$$

και

$$(2.3.4) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \inf \{(2x^*)^{-n} \mathbb{E}(|K_N|) : N \geq \exp((\kappa + \varepsilon)n)\} = 1.$$

Το αποτέλεσμα αυτό γενίκευε τη δουλειά των Dyer, Füredi και McDiarmid [25] οι οποίοι είχαν μελετήσει τις εξής δύο περιπτώσεις:

(α) Αν $\mu(\{1\}) = \mu(\{-1\}) = \frac{1}{2}$ τότε $\Lambda_\mu(t) = \ln(\cosh t)$, η $\Lambda_\mu^* : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ δίνεται από την

$$\Lambda_\mu^*(x) = \frac{1}{2}(1+x) \ln(1+x) + \frac{1}{2}(1-x) \ln(1-x),$$

και το αποτέλεσμα ισχύει με $\kappa = \ln 2 - \frac{1}{2}$. Αυτή είναι η περίπτωση των ± 1 πολυτόπων.

(β) Αν το μ είναι η ομοιόμορφη κατανομή στο $[-1, 1]$, τότε $\Lambda_\mu(t) = \ln(\sinh t/t)$, και το αποτέλεσμα ισχύει με

$$\kappa = \int_0^\infty \left(\frac{1}{u} - \frac{1}{e^u - 1} \right)^2 du.$$

Η γενίκευση στο [31] ισχυρίζεται ότι αν μ είναι ένα άρτιο Borel μέτρο πιθανότητας με συμπαγή φορέα στην πραγματική ευθεία και $0 < \kappa(\mu) < \infty$, τότε η (2.3.3) ισχύει για κάθε $\varepsilon > 0$, και η (2.3.4) ισχύει για κάθε $\varepsilon > 0$ αν η κατανομή μ ικανοποιεί την Λ^* -συνθήκη.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Βασικές έννοιες

Σε αυτό το κεφάλαιο εισάγουμε τον απαραίτητο συμβολισμό και την ορολογία που θα χρησιμοποιήσουμε, καθώς και το σχετικό υπόβαθρο για τα κυρτά σώματα και τα λογαριθμικά κοίλα μέτρα πιθανότητας.

Παραπέμπουμε στο βιβλίο του Schneider [55] για τη θεωρία Brunn-Minkowski και στο βιβλίο [5] για βασικά αποτελέσματα από την ασυμπτωτική κυρτή γεωμετρία. Παραπέμπουμε επίσης στο βιβλίο [16] για περισσότερες πληροφορίες σχετικά με τα ισοτροπικά κυρτά σώματα και λογαριθμικά κοίλα μέτρα πιθανότητας.

3.1 Συμβολισμός και βασικοί ορισμοί

Γράφουμε $\langle \cdot, \cdot \rangle$ για το σύννηδες εσωτερικό γινόμενο στον $\mathbb{R}^n$ και συμβολίζουμε την Ευκλείδεια νόρμα με $|\cdot|$. Στα επόμενα, B_2^n είναι η Ευκλείδεια μοναδιαία μπάλα, S^{n-1} είναι η μοναδιαία σφαίρα, και σ είναι το αναλλοίωτο ως προς ορθογώνιους μετασχηματισμούς μέτρο πιθανότητας στην S^{n-1} . Το μέτρο Lebesgue στον $\mathbb{R}^n$ συμβολίζεται με $|\cdot|$. Τα γράμματα c, c', c_j, c'_j κ.λπ. συμβολίζουν απόλυτες θετικές σταθερές που η τιμή τους μπορεί να αλλάζει από γραμμή σε γραμμή. Όταν γράφουμε $a \approx b$, εννοούμε ότι υπάρχουν απόλυτες σταθερές $c_1, c_2 > 0$ τέτοιες ώστε $c_1 a \leq b \leq c_2 a$. Όμοια, αν A, B είναι σύνολα, τότε γράφοντας $A \approx B$ εννοούμε ότι $c_1 A \subseteq B \subseteq c_2 A$ για κάποιες απόλυτες σταθερές $c_1, c_2 > 0$.

Κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ είναι ένα συμπαγές κυρτό σύνολο $K \subset \mathbb{R}^n$ με μη κενό εσωτερικό. Συχνά θεωρούμε φραγμένα κυρτά σύνολα K στον $\mathbb{R}^n$ με $0 \in \text{int}(K)$. Δεδομένου ότι η κλειστή τους θήκη είναι κυρτό σώμα, ονομάζουμε κι αυτά τα σύνολα κυρτά σώματα. Λέμε ότι το K είναι συμμετρικό αν $-K = K$ και ότι το K είναι κεντραρισμένο αν το κέντρο βάρους $\text{bar}(K) = \frac{1}{|K|} \int_K x dx$ του K βρίσκεται στην αρχή των αξόνων. Θα χρησιμοποιήσουμε το γεγονός ότι αν K είναι ένα κεντραρισμένο κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ τότε

$$(3.1.1) \quad \max_{y \in \mathbb{R}^n} |K \cap (y + \xi^\perp)|_{n-1} \leq e |K \cap \xi^\perp|_{n-1}$$

για κάθε $\xi \in S^{n-1}$, όπου $\xi^\perp = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, \xi \rangle = 0\}$ και με $|\cdot|_{n-1}$ συμβολίζουμε τον $(n-1)$ -διάστατο όγκο. Αυτή είναι μια ανισότητα του Fradelizi (για μια απόδειξη, βλ. [16, Πρόταση 6.1.9]). Το συναρτησοειδές Minkowski $\|\cdot\|_K$ ενός κυρτού σώματος K στον $\mathbb{R}^n$ με $0 \in \text{int}(K)$ ορίζεται για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$ μέσω της $\|x\|_K = \inf\{s \geq 0 : x \in sK\}$ και η ακτινική συνάρτηση ϱ_K του K ορίζεται για κάθε $x \neq 0$ από την $\varrho_K(x) = \sup\{\lambda > 0 : \lambda x \in K\}$. Σημειώνουμε ότι $\varrho_K(\xi) = \|\xi\|_K^{-1}$ για κάθε $\xi \in S^{n-1}$. Για κάθε κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$, η συνάρτηση στήριξης του K είναι η συνάρτηση

$$h_K(x) = \sup\{\langle x, y \rangle : y \in K\}, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Το πολικό σώμα K° ενός κυρτού σώματος K στον $\mathbb{R}^n$ με $0 \in \text{int}(K)$ είναι το κυρτό σώμα

$$K^\circ := \{y \in \mathbb{R}^n : \langle x, y \rangle \leq 1 \text{ για κάθε } x \in K\}.$$

Ένα κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$ λέγεται ισοτροπικό αν έχει όγκο 1, είναι κεντραρισμένο, και ο πίνακας αδρανείας του είναι ένα πολλαπλάσιο του ταυτοτικού πίνακα: υπάρχει σταθερά $L_K > 0$, η ισοτροπική σταθερά του K , τέτοια ώστε

$$\|\langle \cdot, \xi \rangle\|_{L_2(K)}^2 := \int_K \langle x, \xi \rangle^2 dx = L_K^2$$

για κάθε $\xi \in S^{n-1}$.

3.2 Λογαριθμικά κοίλα μέτρα πιθανότητας

Ένα μέτρο Borel μ στον $\mathbb{R}^n$ λέγεται λογαριθμικά κοίλο αν $\mu(H) < 1$ για κάθε υπερεπίπεδο H στον $\mathbb{R}^n$ και $\mu(\lambda A + (1-\lambda)B) \geq \mu(A)^\lambda \mu(B)^{1-\lambda}$ για κάθε ζεύγος συμπαγών υποσυνόλων A, B του $\mathbb{R}^n$ και κάθε $\lambda \in (0, 1)$. Ένα θεώρημα του Borell [12] δείχνει ότι με αυτές τις υποθέσεις το μ έχει λογαριθμικά κοίλη πυκνότητα f_μ . Υπενθυμίζουμε ότι μια συνάρτηση $f : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty)$ λέγεται λογαριθμικά κοίλη αν ο φορέας της, $\{f > 0\}$, είναι κυρτό σύνολο στον $\mathbb{R}^n$ και ο περιορισμός της $\ln f$ σε αυτό είναι κοίλη συνάρτηση. Αν η f έχει πεπερασμένο θετικό ολοκλήρωμα τότε υπάρχουν σταθερές $A, B > 0$ τέτοιες ώστε $f(x) \leq Ae^{-B|x|}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$ (βλ. [16, Λήμμα 2.2.1]). Ειδικότερα, η f έχει πεπερασμένες ροπές όλων των τάξεων. Λέμε ότι το μ είναι άρτιο αν $\mu(-B) = \mu(B)$ για κάθε Borel υποσύνολο B του $\mathbb{R}^n$ και ότι το μ είναι κεντραρισμένο αν

$$\int_{\mathbb{R}^n} \langle x, \xi \rangle d\mu(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \langle x, \xi \rangle f_\mu(x) dx = 0$$

για κάθε $\xi \in S^{n-1}$. Θα χρησιμοποιήσουμε το γεγονός ότι αν μ είναι ένα κεντραρισμένο λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$ τότε

$$(3.2.1) \quad \|f_\mu\|_\infty \leq e^n f_\mu(0).$$

Αυτή είναι μια ανισότητα του Fradelizi από το [27] (για μια απόδειξη, βλ. [16, Θεώρημα 2.2.2]). Σημειώνουμε ότι αν K είναι ένα κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ τότε, από την ανισότητα

Brunn-Minkowski, η δείκτρια συνάρτηση $\mathbb{1}_K$ του K είναι η πυκνότητα ενός λογαριθμικά κοίλου μέτρου, του μέτρου Lebesgue στο K .

Για κάθε $\kappa \in [-\infty, 1/n]$ λέμε ότι ένα μέτρο μ στον $\mathbb{R}^n$ είναι κ -κοίλο αν

$$(3.2.2) \quad \mu((1-\lambda)A + \lambda B) \geq ((1-\lambda)\mu^\kappa(A) + \lambda\mu^\kappa(B))^{1/\kappa}$$

για κάθε ζεύγος συμπαγών υποσυνόλων A, B του $\mathbb{R}^n$ με $\mu(A)\mu(B) > 0$ και κάθε $\lambda \in (0, 1)$. Οι οριακές περιπτώσεις ορίζονται κατάλληλα. Για $\kappa = 0$ το δεξιό μέλος της (3.2.2) γίνεται $\mu(A)^{1-\lambda}\mu(B)^\lambda$ (άρα, τα 0-κοίλα μέτρα είναι τα λογαριθμικά κοίλα μέτρα). Στην περίπτωση $\kappa = -\infty$ το δεξιό μέλος της (3.2.2) γίνεται $\min\{\mu(A), \mu(B)\}$. Παρατηρήστε ότι αν το μ είναι κ -κοίλο και $\kappa_1 \leq \kappa$ τότε το μ είναι κ_1 -κοίλο.

Τώρα, έστω $\gamma \in [-\infty, \infty]$. Μια συνάρτηση $f : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty)$ λέγεται γ -κοίλη αν

$$f((1-\lambda)x + \lambda y) \geq ((1-\lambda)f^\gamma(x) + \lambda f^\gamma(y))^{1/\gamma}$$

για κάθε $x, y \in \mathbb{R}^n$ με $f(x)f(y) > 0$ και κάθε $\lambda \in (0, 1)$. Πάλι, ορίζουμε τις περιπτώσεις $\gamma = 0, +\infty$ κατάλληλα. Ο Borell [13] μελέτησε τη σχέση ανάμεσα στα κ -κοίλα μέτρα πιθανότητας και τις γ -κοίλες συναρτήσεις και έδειξε ότι αν μ είναι ένα μέτρο στον $\mathbb{R}^n$ και ο αφρινικός υπόχωρος F που παράγεται από τον φορέα $\text{supp}(\mu)$ του μ έχει διάσταση $\dim(F) = n$ τότε για κάθε $-\infty \leq \kappa < 1/n$ ισχύει ότι το μ είναι κ -κοίλο αν και μόνο αν έχει μια μη αρνητική πυκνότητα $\psi \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n, dx)$ και η ψ είναι γ -κοίλη, όπου $\gamma = \frac{\kappa}{1-\kappa n} \in [-1/n, +\infty)$.

Έστω μ και ν δύο λογαριθμικά κοίλα μέτρα πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$. Έστω $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ μετρήσιμη συνάρτηση, ορισμένη ν -σχεδόν παντού, η οποία ικανοποιεί την

$$\mu(B) = \nu(T^{-1}(B))$$

για κάθε Borel υποσύνολο B του $\mathbb{R}^n$. Λέμε ότι η T μεταφέρει το ν στο μ και γράφουμε $T_*\nu = \mu$. Είναι εύκολο να δούμε ότι $T_*\nu = \mu$ αν και μόνο αν για κάθε φραγμένη Borel μετρήσιμη συνάρτηση $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει ότι

$$\int_{\mathbb{R}^n} g(x) d\mu(x) = \int_{\mathbb{R}^n} g(T(y)) d\nu(y).$$

2.2.1 Ισοτροπική σταθερά. Αν μ είναι ένα λογαριθμικά κοίλο μέτρο στον $\mathbb{R}^n$ με πυκνότητα f_μ , ορίζουμε την ισοτροπική σταθερά του μ ως εξής:

$$L_\mu := \left(\frac{\sup_{x \in \mathbb{R}^n} f_\mu(x)}{\int_{\mathbb{R}^n} f_\mu(x) dx} \right)^{\frac{1}{n}} [\det \text{Cov}(\mu)]^{\frac{1}{2n}},$$

όπου $\text{Cov}(\mu)$ είναι ο πίνακας συνδιακυμάνσεων του μ με συντεταγμένες

$$\text{Cov}(\mu)_{ij} := \frac{\int_{\mathbb{R}^n} x_i x_j f_\mu(x) dx}{\int_{\mathbb{R}^n} f_\mu(x) dx} - \frac{\int_{\mathbb{R}^n} x_i f_\mu(x) dx}{\int_{\mathbb{R}^n} f_\mu(x) dx} \frac{\int_{\mathbb{R}^n} x_j f_\mu(x) dx}{\int_{\mathbb{R}^n} f_\mu(x) dx}.$$

Λέμε ότι ένα λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας μ στον $\mathbb{R}^n$ είναι ισοτροπικό αν είναι κεντραρισμένο και $\text{Cov}(\mu) = I_n$, όπου I_n είναι ο ταυτοτικός $n \times n$ πίνακας. Σε αυτήν την περίπτωση, $L_\mu = \|f_\mu\|_\infty^{1/n}$. Για κάθε μ υπάρχει αφινικός μετασχηματισμός T τέτοιος ώστε το $T_*\mu$ να είναι ισοτροπικό, όπου $T_*\mu$ είναι το μέτρο εικόνα του μ που ορίζεται από την $T_*\mu(A) = \mu(T^{-1}(A))$. Σημειώνουμε ότι ένα κυρτό σώμα K όγκου 1 είναι ισοτροπικό αν και μόνο αν το λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας με πυκνότητα $L_K^n \mathbb{1}_{K/L_K}$ είναι ισοτροπικό. Η εικασία του υπερεπιπέδου είναι το ερώτημα αν υπάρχει απόλυτη σταθερά $C > 0$ τέτοια ώστε

$$L_n := \max\{L_\mu : \mu \text{ ισοτροπικό λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας στον } \mathbb{R}^n\} \leq C$$

για κάθε $n \geq 1$. Ο Bourgain [14] απέδειξε το άνω φράγμα $L_n \leq c \sqrt[n]{n} \ln n$. Αργότερα, ο Klartag, στο [38], βελτίωσε αυτή την εκτίμηση σε $L_n \leq c \sqrt[n]{n}$. Στη συνέχεια, ο Chen [19] απέδειξε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε $L_n \leq n^\varepsilon$ για κάθε $n \geq n_0(\varepsilon)$. Κατόπιν, οι Klartag και Lehec [42] έδειξαν ότι $L_n \leq c(\ln n)^4$, και λίγο αργότερα ο Klartag [41] πέτυχε το άνω φράγμα $L_n \leq c \sqrt{\ln n}$. Ένα πρόσφατο πολύ σημαντικό τεχνικό αποτέλεσμα του Guan [33] οδήγησε τελικά στην οριστική καταφατική απάντηση για το πρόβλημα, από τους Klartag και Lehec [43] οι οποίοι απέδειξαν ότι $L_n \leq C$.

2.2.2. Κεντροειδή σώματα. Έστω μ ένα λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$. Για κάθε $t \geq 1$ ορίζουμε το L_t -κεντροειδές σώμα $Z_t(\mu)$ του μ να είναι το συμμετρικό κυρτό σώμα με συνάρτηση στήριξης την

$$h_{Z_t(\mu)}(y) := \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\langle x, y \rangle|^t f_\mu(x) dx \right)^{1/t}, \quad y \in \mathbb{R}^n.$$

Σημειώνουμε ότι το $Z_t(\mu)$ είναι πάντα συμμετρικό, και $Z_t(T_*\mu) = T(Z_t(\mu))$ για κάθε $T \in GL(n)$ και $t \geq 1$. Σημειώνουμε επίσης ότι ένα κεντραρισμένο λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας μ είναι ισοτροπικό αν και μόνο αν $Z_2(\mu) = B_2^n$. Το επόμενο θεώρημα του Πασούρη (βλ. [16, Θεώρημα 5.1.17]) δίνει άνω φράγματα για τον όγκο των L_t -κεντροειδών σωμάτων κεντραρισμένων λογαριθμικά κοίλων μέτρων πιθανότητας.

Θεώρημα 3.2.1. *Αν μ είναι ένα κεντραρισμένο λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$, τότε για κάθε $2 \leq t \leq n$ ισχύει ότι*

$$|Z_t(\mu)|^{1/n} \leq c \sqrt{t/n} [\det \text{Cov}(\mu)]^{\frac{1}{2n}},$$

όπου $c > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά. Ειδικότερα, αν το μ είναι ισοτροπικό τότε $|Z_t(\mu)|^{1/n} \leq c \sqrt{t/n}$ για κάθε $2 \leq t \leq n$.

Μια παραλλαγή των L_t -κεντροειδών σωμάτων του μ ορίζεται ως εξής. Για κάθε $t \geq 1$ θεωρούμε το κυρτό σώμα $Z_t^+(\mu)$ με συνάρτηση στήριξης την

$$h_{Z_t^+(\mu)}(y) = \left(\int_{\mathbb{R}^n} \langle x, y \rangle_+^t f_\mu(x) dx \right)^{1/t}, \quad y \in \mathbb{R}^n,$$

όπου $a_+ = \max\{a, 0\}$. Στην περίπτωση που η f_μ είναι άρτια, έχουμε ότι $Z_t^+(\mu) = 2^{-1/t} Z_t(\mu)$. Σε κάθε περίπτωση, ελέγχουμε εύκολα ότι

$$Z_t^+(\mu) \subseteq Z_t(\mu).$$

Επιπλέον, αν το μ είναι ισοτροπικό τότε $Z_2^+(\mu) \supseteq cB_2^n$ για κάποια απόλυτη σταθερά $c > 0$. Μπορούμε επίσης να ελέγξουμε ότι αν $1 \leq t < s$ τότε

$$\left(\frac{4}{e}\right)^{\frac{1}{t}-\frac{1}{s}} Z_t^+(\mu) \subseteq Z_s^+(\mu) \subseteq c_1 \left(\frac{4(e-1)}{e}\right)^{\frac{1}{t}-\frac{1}{s}} \frac{s}{t} Z_t^+(\mu).$$

Η ανισότητα στο δεξιό μέλος δίνει

$$(3.2.3) \quad \int_{\mathbb{R}^n} \langle x, \xi \rangle_+^{2t} f_\mu(x) dx = [h_{Z_{2t}^+(\mu)}(\xi)]^{2t} \leq C^{2t} [h_{Z_t^+(\mu)}(\xi)]^{2t} = C^{2t} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \langle x, \xi \rangle_+^t f_\mu(x) dx \right)^2,$$

για κάθε $\xi \in S^{n-1}$, όπου $C > 1$ είναι μια απόλυτη σταθερά. Για μια απόδειξη όλων αυτών των ισχυρισμών παραπέμπουμε στο [34], όπου γίνεται μελέτη της οικογένειας των σωμάτων $\tilde{Z}_t^+(\mu) = 2^{1/t} Z_t^+(\mu)$. Έχουμε κάνει τις αναγκαίες προσαρμογές στους εγκλεισμούς που χρησιμοποιούμε.

2.2.3. Τα σώματα $B_t(\mu)$. Έστω μ ένα μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$. Ορίζουμε

$$M_\mu(v) := \int_{\mathbb{R}^n} e^{\langle v, x \rangle} d\mu(x) = \exp(\Lambda_\mu(v))$$

όπου

$$\Lambda_\mu(v) = \ln \left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{\langle v, x \rangle} d\mu(x) \right)$$

είναι ο λογαριθμικός μετασχηματισμός Laplace του μ . Επίσης ορίζουμε

$$\Lambda_\mu^*(v) := \mathcal{L}(\Lambda_\mu)(v) = \sup_{u \in \mathbb{R}^n} \left\{ \langle v, u \rangle - \ln \int_{\mathbb{R}^n} e^{\langle u, x \rangle} d\mu(x) \right\},$$

όπου, για δοθείσα κυρτή συνάρτηση $g : \mathbb{R}^n \rightarrow (-\infty, \infty]$, ο μετασχηματισμός Legendre $\mathcal{L}(g)$ της g ορίζεται από την

$$\mathcal{L}(g)(x) := \sup_{y \in \mathbb{R}^n} \{ \langle x, y \rangle - g(y) \}.$$

Η συνάρτηση Λ_μ^* ονομάζεται μετασχηματισμός Cramér του μ και παίζει σημαντικό ρόλο στη θεωρία των μεγάλων αποκλίσεων. Για κάθε $t \geq 1$ ορίζουμε

$$M_t(\mu) := \left\{ v \in \mathbb{R}^n : \int_{\mathbb{R}^n} |\langle v, x \rangle|^t d\mu(x) \leq 1 \right\}.$$

Παρατηρήστε ότι

$$Z_t(\mu) := (M_t(\mu))^\circ = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : |\langle v, x \rangle|^t \leq \int_{\mathbb{R}^n} |\langle v, y \rangle|^t d\mu(y) \text{ για κάθε } v \in \mathbb{R}^n \right\}.$$

Για κάθε $t > 0$ ορίζουμε επίσης

$$B_t(\mu) := \{v \in \mathbb{R}^n : \Lambda_\mu^*(v) \leq t\}.$$

Λέμε ότι ένα μέτρο μ στον $\mathbb{R}^n$ είναι α -κανονικό αν για κάθε $s \geq t \geq 2$ και κάθε $v \in \mathbb{R}^n$,

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |\langle v, x \rangle|^s d\mu(x) \right)^{1/s} \leq \alpha \frac{s}{t} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\langle v, x \rangle|^t d\mu(x) \right)^{1/t}.$$

Για κάθε $s \geq t$ έχουμε ότι $M_s(\mu) \subseteq M_t(\mu)$ και $Z_t(\mu) \subseteq Z_s(\mu)$. Αν το μέτρο μ είναι α -κανονικό, τότε $M_t(\mu) \subseteq \alpha \frac{s}{t} M_s(\mu)$ και $Z_s(\mu) \subseteq \alpha \frac{s}{t} Z_t(\mu)$ για κάθε $s \geq t \geq 2$. Επιπλέον, για κάθε κεντραρισμένο μέτρο πιθανότητας μ ισχύει ότι $\Lambda_\mu^*(0) = 0$ από την ανισότητα Jensen, και η κυρτότητα της Λ_μ^* συνεπάγεται ότι $B_t(\mu) \subseteq B_s(\mu) \subseteq \frac{s}{t} B_t(\mu)$ για κάθε $s \geq t > 0$.

Υπενθυμίζουμε ότι, από το λήμμα του Borell, κάθε λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας είναι c -κανονικό (βλ. [16, Θεώρημα 2.4.6] για μια απόδειξη).

Πρόταση 3.2.2. Κάθε λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας είναι c -κανονικό, όπου $c \geq 1$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

Η επόμενη πρόταση συγκρίνει το $B_t(\mu)$ με το $Z_t(\mu)$ στην περίπτωση που το μ είναι α -κανονικό.

Πρόταση 3.2.3. Αν το μ είναι α -κανονικό για κάποιον $\alpha \geq 1$, τότε για κάθε $t \geq 2$ ισχύει ότι

$$B_t(\mu) \subseteq 4e\alpha Z_t(\mu).$$

Απόδειξη. Πρώτα ελέγχουμε ότι αν $u \in M_t(\mu)$ τότε

$$\Lambda_\mu\left(\frac{tu}{2e\alpha}\right) \leq t.$$

Σταθεροποιούμε $u \in M_t(\mu)$ και ορίζουμε $\tilde{u} := \frac{tu}{2e\alpha}$. Τότε,

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |\langle \tilde{u}, x \rangle|^k d\mu(x) \right)^{1/k} = \frac{t}{2e\alpha} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\langle u, x \rangle|^k d\mu(x) \right)^{1/k},$$

και παρατηρούμε ότι η τελευταία ποσότητα φράσσεται από $\frac{t}{2e\alpha}$ αν $k \leq t$ και από $\frac{k}{2e}$ αν $k > t$.

Έπεται ότι

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} e^{\langle \tilde{u}, x \rangle} d\mu(x) &\leq \int_{\mathbb{R}^n} e^{|\langle \tilde{u}, x \rangle|} d\mu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \int_{\mathbb{R}^n} |\langle \tilde{u}, x \rangle|^k d\mu(x) \\ &\leq \sum_{k \leq t} \frac{1}{k!} \left| \frac{t}{2e\alpha} \right|^k + \sum_{k > t} \frac{1}{k!} \left| \frac{k}{2e} \right|^k \leq e^{\frac{t}{2e\alpha}} + 1 \leq e^t \end{aligned}$$

και προκύπτει το ζητούμενο.

Τώρα, έστω $v \notin 4e\alpha Z_t(\mu)$. Μπορούμε να βρούμε $u \in M_t(\mu)$ τέτοιο ώστε $\langle v, u \rangle > 4e\alpha$, και τότε

$$\Lambda_{\mu}^*(v) \geq \left\langle v, \frac{tu}{2e\alpha} \right\rangle - \Lambda_{\mu} \left(\frac{tu}{2e\alpha} \right) > \frac{t}{2e\alpha} 4e\alpha - t = t.$$

Συνεπώς, $v \notin B_t(\mu)$. □

Από την Πρόταση 3.2.2, έχουμε ότι η Πρόταση 3.2.3 ισχύει (με μια απόλυτη σταθερά στη θέση της $4e\alpha$) για κάθε λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας.

2.2.4. Τα σώματα $K_t(\mu)$ του K. Ball. Αν μ είναι ένα λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$ τότε, για κάθε $t > 0$, ορίζουμε

$$K_t(\mu) := K_t(f_{\mu}) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \int_0^{\infty} r^{t-1} f_{\mu}(rx) dr \geq \frac{f_{\mu}(0)}{t} \right\}.$$

Από τον ορισμό έπεται ότι η ακτινική συνάρτηση του $K_t(\mu)$ δίνεται από την

$$(3.2.4) \quad \varrho_{K_t(\mu)}(x) = \left(\frac{1}{f_{\mu}(0)} \int_0^{\infty} tr^{t-1} f_{\mu}(rx) dr \right)^{1/t}$$

για κάθε $x \neq 0$. Τα σώματα $K_t(\mu)$ εισήχθησαν από τον K. Ball, ο οποίος απέδειξε επίσης ότι είναι κυρτά. Αν το μ είναι, επιπλέον, κεντραρισμένο τότε, για κάθε $0 < t \leq s$,

$$(3.2.5) \quad \frac{\Gamma(t+1)^{\frac{1}{t}}}{\Gamma(s+1)^{\frac{1}{s}}} K_s(\mu) \subseteq K_t(\mu) \subseteq e^{\frac{n}{t} - \frac{n}{s}} K_s(\mu).$$

Μια απόδειξη δίνεται στο [16, Πρόταση 2.5.7]. Ελέγχουμε εύκολα ότι

$$(3.2.6) \quad |K_n(f)| f_{\mu}(0) = \int_{\mathbb{R}^n} f_{\mu}(x) dx = 1$$

(δείτε π.χ. το [16, Λήμμα 2.5.6]) και στη συνέχεια μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τους εγκλεισμούς (3.2.5) για να εκτιμήσουμε τον όγκο του $K_t(\mu)$. Για κάθε $t > 0$ έχουμε ότι

$$(3.2.7) \quad e^{-1} \leq f_{\mu}(0)^{\frac{1}{n} + \frac{1}{t}} |K_{n+t}(\mu)|^{\frac{1}{n} + \frac{1}{t}} \leq e^{\frac{n+t}{n}}.$$

Ενδιαφερόμαστε κυρίως για το κυρτό σώμα $K_{n+1}(\mu)$. Θα χρησιμοποιήσουμε το γεγονός ότι το

$K_{n+1}(\mu)$ είναι κεντραρισμένο (δείτε το [16, Πρόταση 2.5.3(v)]) και ότι

$$(3.2.8) \quad f_\mu(0)|K_{n+1}(\mu)| \approx 1.$$

Η τελευταία εκτίμηση είναι άμεση συνέπεια των (3.2.6) και (3.2.7).

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

Βάθος Tukey

4.1 Εισαγωγή

Έστω μ ένα μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$. Για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$ συμβολίζουμε με $\mathcal{H}(x)$ το σύνολο όλων των κλειστών ημιχώρων H του $\mathbb{R}^n$ οι οποίοι περιέχουν το x . Η συνάρτηση

$$\varphi_\mu(x) = \inf\{\mu(H) : H \in \mathcal{H}(x)\}$$

ονομάζεται βάθος Tukey ως προς ημιχώρους. Σε αυτό το κεφάλαιο μελετάμε τη μέση τιμή του βάθους ως προς ημιχώρους στο πλαίσιο των λογαριθμικά κοίλων μέτρων πιθανότητας. Αφετηρία μας ήταν το ερώτημα αν υπάρχει απόλυτη σταθερά $c \in (0, 1)$ τέτοια ώστε

$$(4.1.1) \quad \mathbb{E}_\mu(\varphi_\mu) := \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_\mu(x) d\mu(x) \leq c^n$$

για κάθε $n \geq 1$ και κάθε λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας μ στον $\mathbb{R}^n$, το οποίο τέθηκε στα [46] και [32]. Στην Ενότητα 4.2 δείχνουμε ότι η (2.1.1) ισχύει modulo την ισοτροπική σταθερά L_μ του μ .

Θεώρημα 4.1.1. Έστω μ ένα λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$, $n \geq n_0$. Τότε, $\mathbb{E}_\mu(\varphi_\mu) \leq \exp(-cn/L_\mu^2)$ όπου L_μ είναι η ισοτροπική σταθερά του μ και $c > 0$, $n_0 \in \mathbb{N}$ είναι απόλυτες σταθερές.

Η ποσότητα $\mathbb{E}_\mu(\varphi_\mu)$ είναι αφφινικά αναλλοίωτη και συνεπώς για την απόδειξη του Θεωρήματος 4.1.1 μπορούμε να υποθέσουμε ότι το μ είναι ισοτροπικό. Μάλιστα, θα πάρουμε το Θεώρημα 4.1.1 ως ειδική περίπτωση ενός πιο γενικού αποτελέσματος.

Θεώρημα 4.1.2. Έστω μ και ν δύο ισοτροπικά λογαριθμικά κοίλα μέτρα στον $\mathbb{R}^n$, $n \geq n_0$. Τότε,

$$\mathbb{E}_\nu(\varphi_\mu) := \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_\mu(x) d\nu(x) \leq \exp(-cn/L_\nu^2),$$

όπου $c > 0$, $n_0 \in \mathbb{N}$ είναι απόλυτες σταθερές.

Στην Ενότητα 4.3 δείχνουμε ότι, αν εξαιρέσουμε την τιμή της ισοτροπικής σταθεράς L_μ , η εκθετική εκτίμηση που δίνει το Θεώρημα 4.1.1 είναι ακριβής.

Θεώρημα 4.1.3. Έστω μ ένα λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$. Τότε,

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi_\mu(x) d\mu(x) \geq e^{-cn},$$

όπου $c > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

Για τη διευκόλυνση του αναγνώστη παρουσιάζουμε πρώτα την απόδειξη του Θεωρήματος 4.1.3 στην απλούστερη περίπτωση που το μ είναι το ομοιόμορφο μέτρο σε ένα κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$ και μετά στη γενική περίπτωση τυχόντος λογαριθμικά κοίλου μέτρου πιθανότητας.

Στο δεύτερο μέρος αυτού του κεφαλαίου εξετάζουμε το ερώτημα να δοθούν ομοιόμορφα άνω και κάτω φράγματα κατωφλίου για τη μέση τιμή του μέτρου ενός τυχαίου πολυτόπου που ορίζεται ως η κυρτή θήκη ανεξάρτητων τυχαίων σημείων με λογαριθμικά κοίλη κατανομή. Εδώ, ενδιαφερόμαστε για ομοιόμορφα άνω και κάτω φράγματα κατωφλίου για την κλάση όλων των λογαριθμικά κοίλων μέτρων πιθανότητας. Το πρόβλημα που μελετάμε ζητάει να βρεθεί μια σταθερά $N_1(n)$, η οποία εξαρτάται μόνο από το n και είναι όσο γίνεται μεγαλύτερη, ώστε

$$\sup_{\mu} \left(\sup \left\{ \mathbb{E}_{\mu^N}[\mu(K_N)] : N \leq N_1(n) \right\} \right) \rightarrow 0$$

καθώς το $n \rightarrow \infty$ και μια δεύτερη σταθερά $N_2(n)$, που εξαρτάται μόνο από το n και είναι όσο γίνεται μικρότερη, ώστε

$$\inf_{\mu} \left(\inf \left\{ \mathbb{E}_{\mu^N}[\mu(K_N)] : N \geq N_2(n) \right\} \right) \rightarrow 1$$

καθώς το $n \rightarrow \infty$, όπου το supremum και το infimum είναι πάνω από όλα τα λογαριθμικά κοίλα μέτρα πιθανότητας. Θα αποκαλούμε το πρώτο είδος αποτελέσματος «ομοιόμορφο άνω φράγμα κατωφλίου» και το δεύτερο «ομοιόμορφο κάτω φράγμα κατωφλίου».

Στην Ενότητα 4.4 αποδεικνύουμε άνω φράγμα κατωφλίου για τυχόν ζεύγος λογαριθμικά κοίλων μέτρων πιθανότητας μ και ν , αν μπορούν να τεθούν ταυτόχρονα στην ισοτροπική θέση.

Θεώρημα 4.1.4. Έστω μ και ν δύο ισοτροπικά λογαριθμικά κοίλα μέτρα πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$. Έστω $X_1, X_2, \dots$ ανεξάρτητα τυχαία σημεία στον $\mathbb{R}^n$ τα οποία έχουν κατανομή το μ και για κάθε $N > n$ ας θεωρήσουμε το τυχαίο πολύτοπο $K_N = \text{conv}\{X_1, \dots, X_N\}$. Τότε, για κάθε $N \leq \exp(c_1 n / L_\nu^2)$ ισχύει ότι

$$\mathbb{E}_{\mu^N}(\nu(K_N)) \leq 2 \exp(-c_2 n / L_\nu^2),$$

όπου $c_1, c_2 > 0$ είναι απόλυτες σταθερές.

Ως πόρισμα του Θεωρήματος 4.1.4 παίρνουμε το εξής:

Πόρισμα 4.1.5. Υπάρχει απόλυτη σταθερά $c > 0$ τέτοια ώστε αν $N_1(n) = \exp(cn/L_n^2)$ τότε

$$\sup_{\mu} \left(\sup \left\{ \mathbb{E}_{\mu^N} [\mu(K_N)] : N \leq N_1(n) \right\} \right) \longrightarrow 0$$

καθώς το $n \rightarrow \infty$, όπου το πρώτο supremum είναι πάνω από όλα τα λογαριθμικά κοίλα μέτρα πιθανότητας μ στον $\mathbb{R}^n$.

Αποδεικνύουμε επίσης ένα ομοιόμορφο κάτω φράγμα κατωφλίου για την κλάση των λογαριθμικά κοίλων μέτρων πιθανότητας.

Θεώρημα 4.1.6. Έστω $\delta \in (0, 1)$. Τότε,

$$\inf_{\mu} \left(\inf \left\{ \mathbb{E}_{\mu^N} [\mu((1 + \delta)K_N)] : N \geq \exp(C\delta^{-1} \ln(2/\delta) n \ln n) \right\} \right) \longrightarrow 1$$

καθώς το $n \rightarrow \infty$, όπου το πρώτο infimum είναι πάνω από όλα τα λογαριθμικά κοίλα μέτρα πιθανότητας μ στον $\mathbb{R}^n$ με κέντρο βάρους την αρχή των αξόνων, και $C > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

Μπορούμε να «αφαιρέσουμε» τον δ -όρο, όμως η εξάρτηση από το n γίνεται χειρότερη. Ακριβέστερα, δείχνουμε στο Θεώρημα 4.4.8 ότι υπάρχει μια απόλυτη σταθερά $C > 0$ τέτοια ώστε

$$\inf_{\mu} \left(\inf \left\{ \mathbb{E}_{\mu^N} [\mu(K_N)] : N \geq \exp(C(n \ln n)^2 u(n)) \right\} \right) \longrightarrow 1$$

καθώς το $n \rightarrow \infty$, όπου το πρώτο infimum είναι πάνω από όλα τα λογαριθμικά κοίλα μέτρα πιθανότητας μ στον $\mathbb{R}^n$ και $u(n)$ είναι οποιαδήποτε συνάρτηση με $u(n) \rightarrow \infty$ καθώς το $n \rightarrow \infty$.

4.2 Μέση τιμή του βάθους Tukey: άνω φράγμα

Έστω μ και ν δύο λογαριθμικά κοίλα μέτρα πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$, με το ίδιο κέντρο βάρους. Αν $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ είναι ένας αντιστρέψιμος αφινικός μετασχηματισμός και $T_*\mu$ είναι το μέτρο εικόνα του μ που ορίζεται από την $T_*\mu(A) = \mu(T^{-1}(A))$ τότε παρατηρούμε ότι $\varphi_{T_*\mu}(x) = \varphi_{\mu}(T^{-1}(x))$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$, άρα

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi_{T_*\mu}(x) dT_*\nu(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_{\mu}(T^{-1}(x)) dT_*\nu(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_{\mu}(x) d\nu(x).$$

Συνεπώς, το Θεώρημα 4.1.1 έπεται άμεσα από το Θεώρημα 4.1.2 αφού ξεκινώντας με ένα λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας μ στον $\mathbb{R}^n$, μπορούμε να θεωρήσουμε έναν αφινικό μετασχηματισμό T τέτοιον ώστε το $T_*\mu$ να είναι ιστροπικό και κατόπιν να εφαρμόσουμε το Θεώρημα 4.1.2 για τα μέτρα $T_*\mu$ και $\nu = T_*\mu$.

Απόδειξη του Θεωρήματος 4.1.2. Θεωρούμε δύο ιστροπικά λογαριθμικά κοίλα μέτρα πιθανότητας μ, ν στον $\mathbb{R}^n$. Θα δείξουμε ότι

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi_{\mu}(x) d\nu(x) \leq e^{-cn/L_{\nu}^2}$$

για κάποια απόλυτη σταθερά $c > 0$. Αρχικά παρατηρούμε ότι για κάθε $v \in \mathbb{R}^n$ ο ημίχωρος $\{z : \langle z, v \rangle \geq \langle x, v \rangle\}$ ανήκει στην οικογένεια $\mathcal{H}(x)$, συνεπώς

$$\varphi_\mu(x) \leq \mu(\{z : \langle z, v \rangle \geq \langle x, v \rangle\}) \leq e^{-\langle x, v \rangle} \mathbb{E}_\mu(e^{\langle z, v \rangle}) = \exp(-[\langle x, v \rangle - \Lambda_\mu(v)]),$$

και παίρνοντας το infimum πάνω από όλα τα $v \in \mathbb{R}^n$ βλέπουμε ότι

$$\varphi_\mu(x) \leq \exp(-\Lambda_\mu^*(x)).$$

Στη συνέχεια, γράφουμε

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_\mu(x) d\nu(x) &\leq \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\Lambda_\mu^*(x)} f_\nu(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\Lambda_\mu^*(x)}^\infty e^{-t} dt \right) f_\nu(x) dx \\ &= \int_0^\infty e^{-t} \int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{1}_{B_t(\mu)}(x) f_\nu(x) dx dt = \int_0^\infty e^{-t} \nu(B_t(\mu)) dt. \end{aligned}$$

Σταθεροποιούμε $b \in (2/n, 1/2]$ το οποίο θα επιλέξουμε κατάλληλα. Αφού $\nu(B_t(\mu)) \leq 1$ και επίσης $\nu(B_t(\mu)) \leq \|f_\nu\|_\infty |B_t(\mu)|$ για κάθε $t > 0$, μπορούμε να γράψουμε

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_\mu(x) d\nu(x) &\leq \int_{bn}^\infty e^{-t} \nu(B_t(\mu)) dt + \|f_\nu\|_\infty \int_0^{bn} e^{-t} |B_t(\mu)| dt \\ &\leq \int_{bn}^\infty e^{-t} dt + L_\nu^n \int_0^2 e^{-t} |B_t(\mu)| dt + L_\nu^n \int_2^{bn} e^{-t} |B_t(\mu)| dt \\ &\leq e^{-bn} + L_\nu^n |B_2(\mu)| + L_\nu^n \int_2^{bn} e^{-t} |B_t(\mu)| dt. \end{aligned}$$

Εφαρμόζοντας την Πρόταση 3.2.3 και το Θεώρημα 3.2.1 παίρνουμε

$$|B_t(\mu)|^{1/n} \leq c_1 |Z_t(\mu)|^{1/n} \leq c_2 \sqrt{t/n}$$

για κάθε $2 \leq t \leq n$, όπου $c_1, c_2 > 0$ είναι απόλυτες σταθερές. Είναι επίσης γνωστό ότι $L_\nu \geq c_3$ όπου $c_3 > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά (βλ. [16, Πρόταση 2.3.12] για μια απόδειξη). Έτσι, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $c_2 L_\nu \geq \sqrt{2}$. Επιλέγοντας $b_0 := 1/(c_2 L_\nu)^2 \leq 1/2$ γράφουμε

$$L_\nu^n \int_2^{b_0 n} e^{-t} |B_t(\mu)| dt \leq c_2^n L_\nu^n \int_2^{b_0 n} (t/n)^{n/2} e^{-t} dt = (c_2 L_\nu)^n \int_2^{b_0 n} (t/n)^{n/2} e^{-t} dt,$$

και αφού $b_0 n \leq n/2$ και η συνάρτηση $t \mapsto t^{n/2} e^{-t}$ είναι αύξουσα στο $[0, n/2]$, παίρνουμε

$$(c_2 L_\nu)^n \int_2^{b_0 n} e^{-t} |B_t(\mu)| dt \leq (b_0 n - 2) \cdot (c_2 L_\nu)^n b_0^{n/2} e^{-b_0 n} = (b_0 n - 2) e^{-b_0 n}.$$

Επιπλέον, $|B_2(\mu)|^{1/n} \leq c_2 \sqrt{2/n}$, άρα

$$L_\nu^n |B_2(\mu)| \leq (c_4 L_\nu^2/n)^{n/2} \leq e^{-b_0 n},$$

διότι $c_4 L_\nu^2/n \leq e^{-2}$ αν $n \geq n_0$. Συνδυάζοντας τα παραπάνω έχουμε ότι

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi_\mu(x) d\nu(x) \leq e^{-b_0 n} + e^{-b_0 n} + (b_0 n - 2)e^{-b_0 n},$$

άρα

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi_\mu(x) d\nu(x) \leq n \exp(-n/(c_2 L_\nu)^2)$$

απ' όπου έπεται το συμπέρασμα. $\square$

Παρατήρηση 4.2.1. Όπως έχουμε ήδη αναφέρει, η υπόθεση ότι τα μ και ν είναι και τα δύο ισοτροπικά δεν είναι απαραίτητη. Μπορούμε να θεωρήσουμε διαφορετικές καταστάσεις, όπου τα μ και ν είναι κεντραρισμένα και η $\|f_\nu\|_\infty$ είναι συγκρίσιμη με την $\|f_\mu\|_\infty$. Για παράδειγμα, το επόμενο αποτέλεσμα αποδεικνύεται με τις ιδέες που χρησιμοποιήθηκαν για την απόδειξη του Θεωρήματος 4.1.2.

Θεώρημα 4.2.2. Έστω μ και ν κεντραρισμένα λογαριθμικά κοίλα μέτρα πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$, $n \geq n_0$, τέτοια ώστε $\|f_\mu\|_\infty = \|f_\nu\|_\infty$. Τότε,

$$\mathbb{E}_\nu(\varphi_\mu) := \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_\mu(x) d\nu(x) \leq \exp(-cn/L_\mu^2),$$

όπου $c > 0$, $n_0 \in \mathbb{N}$ είναι απόλυτες σταθερές.

Η απόδειξη του Θεωρήματος 4.2.2 είναι παρόμοια με αυτήν του Θεωρήματος 4.1.2. Σταθεροποιούμε $b \in (2/n, 1/2]$ και γράφουμε

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_\mu(x) d\nu(x) &\leq \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\Lambda_\mu^*(x)} f_\nu(x) dx = \int_0^\infty e^{-t} \nu(B_t(\mu)) dt \\ &\leq e^{-bn} + \|f_\nu\|_\infty |B_2(\mu)| + \|f_\nu\|_\infty \int_2^{bn} e^{-t} |B_t(\mu)| dt. \end{aligned}$$

Στη συνέχεια, χρησιμοποιούμε το άνω φράγμα

$$|B_t(\mu)|^{1/n} \leq c_1 |Z_t(\mu)|^{1/n} \leq c_2 \sqrt{t/n} [\det \text{Cov}(\mu)]^{\frac{1}{2n}}.$$

Παρατηρούμε ότι

$$\|f_\nu\|_\infty [\det \text{Cov}(\mu)]^{\frac{1}{2}} = \|f_\mu\|_\infty [\det \text{Cov}(\mu)]^{\frac{1}{2}} = L_\mu^n$$

και συνεχίζουμε όπως στην απόδειξη του Θεωρήματος 4.1.2.

4.3 Μέση τιμή του βάθους Tukey: κάτω φράγμα

Σε αυτήν την ενότητα δείχνουμε ότι η εκθετική εκτίμηση του Θεωρήματος 4.1.1 είναι ακριβής. Για τη διευκόλυνση του αναγνώστη θεωρούμε αρχικά την απλούστερη περίπτωση όπου το μ είναι το ομοιόμορφο μέτρο σε ένα κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$ και στη συνέχεια παρουσιάζουμε τα

πιο τεχνικά εργαλεία και τους υπολογισμούς που απαιτούνται στην περίπτωση που έχουμε τυχόν λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας μ στον $\mathbb{R}^n$.

4.3.1 Ομοιόμορφο μέτρο σε ένα κυρτό σώμα

Η πρόταση που ακολουθεί μας δίνει εκθετικό κάτω φράγμα για την $\mathbb{E}_{\mu_K}(\varphi_{\mu_K})$, όπου μ_K είναι το ομοιόμορφο μέτρο στο κυρτό σώμα K .

Πρόταση 4.3.1. Έστω K ένα κυρτό σώμα όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$. Τότε,

$$\int_K \varphi_{\mu_K}(x) dx \geq e^{-cn},$$

όπου $c > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

Απόδειξη. Λόγω του αναλλοίωτου ως προς μεταφορές μπορούμε να υποθέσουμε ότι το κέντρο βάρους του K βρίσκεται στην αρχή των αξόνων. Έστω $x \in \frac{1}{2}K$. Θα δείξουμε ότι $\varphi_{\mu_K}(x) \geq \frac{1}{e^2 n} \cdot \frac{1}{2^n}$. Αρκεί να ελέγξουμε ότι

$$(4.3.1) \quad |\{z \in K : \langle z, \xi \rangle \geq \langle x, \xi \rangle\}| \geq \frac{1}{e^2 n} \cdot \frac{1}{2^n},$$

όπου το infimum είναι πάνω από όλα τα $\xi \in S^{n-1}$, διότι από τον ορισμό της $\varphi_{\mu_K}(x)$ αρκεί να εξετάσουμε μόνο τους ημιχώρους $H \in \mathcal{H}(x)$ που έχουν το x ως συνοριακό σημείο. Επιπλέον, μπορούμε να θεωρήσουμε μόνο εκείνα τα $\xi \in S^{n-1}$ που ικανοποιούν την $\langle x, \xi \rangle \geq 0$, διότι αν $\langle x, \xi \rangle < 0$ τότε

$$|\{z \in K : \langle z, \xi \rangle \geq \langle x, \xi \rangle\}| \geq |\{z \in K : \langle z, \xi \rangle \geq 0\}| \geq 1/e$$

από το λήμμα του Grünbaum (βλ. [16, Λήμμα 2.2.6]). Σταθεροποιούμε $\xi \in S^{n-1}$ με $\langle x, \xi \rangle \geq 0$ και θέτουμε $m = h_K(\xi) = \max\{\langle z, \xi \rangle : z \in K\}$. Εφόσον $\langle x, \xi \rangle \leq m/2$, αρκεί να δείξουμε ότι

$$(4.3.2) \quad |\{z \in K : \langle z, \xi \rangle \geq m/2\}| \geq \frac{1}{e^2 n} \cdot \frac{1}{2^n}.$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(t) = |K(\xi, t)|_{n-1}$, όπου $K(\xi, t) = \{z \in K : \langle z, \xi \rangle = t\}$, $t \in [0, m]$ και με $|\cdot|_{n-1}$ συμβολίζουμε τον $(n-1)$ -διάστατο όγκο. Από την ανισότητα Brunn-Minkowski έχουμε ότι η $g^{\frac{1}{n-1}}$ είναι κοίλη. Συνεπώς, για κάθε $r \in [0, m]$ ισχύει ότι

$$g(r) \geq \left(1 - \frac{r}{m}\right)^{n-1} g(0).$$

Γράφουμε

$$\begin{aligned} |\{z \in K : \langle z, \xi \rangle \geq m/2\}| &= \int_{m/2}^m g(r) dr \geq g(0) \int_{m/2}^m \left(1 - \frac{r}{m}\right)^{n-1} dr \\ &= g(0)m \int_{1/2}^1 (1-s)^{n-1} ds = \frac{1}{n2^n} g(0)m. \end{aligned}$$

Αφού το K είναι κεντραρισμένο, γνωρίζουμε ότι $\|g\|_\infty \leq e|K \cap \xi^\perp|_{n-1} = eg(0)$ από την (3.1.1). Τότε, χρησιμοποιώντας επίσης το λήμμα του Grünbaum, βλέπουμε ότι

$$\frac{1}{e} \leq \int_0^m g(r) dr \leq \|g\|_\infty m \leq eg(0)m,$$

και έπεται η (4.3.2). Είναι τώρα σαφές ότι

$$\int_K \varphi_{\mu_K}(x) dx \geq \int_{\frac{1}{2}K} \varphi_{\mu_K}(x) dx \geq \left| \frac{1}{2}K \right| \cdot \frac{1}{e^2 n} \cdot \frac{1}{2^n} = \frac{1}{e^2 n} \cdot \frac{1}{4^n} \geq e^{-cn}$$

για κάποια απόλυτη σταθερά $c > 0$. □

4.3.2 Λογαριθμικά κοίλα μέτρα πιθανότητας

Τώρα, υποθέτουμε ότι μ είναι ένα λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$. Στόχος μας είναι να δείξουμε το ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 4.3.2. Έστω μ ένα λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$. Τότε,

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi_\mu(x) d\mu(x) \geq e^{-cn},$$

όπου $c > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

Λόγω του αφινικά αναλλοίωτου της ποσότητας $\mathbb{E}_\mu(\varphi_\mu)$, μπορούμε να υποθέσουμε ότι το μ είναι κεντραρισμένο. Για την απόδειξη θα χρειαστούμε μερικές παρατηρήσεις. Η πρώτη είναι συνέπεια της ανισότητας Paley-Zygmund. Προσαρμόζουμε εδώ την απόδειξη από το [16, Λήμμα 11.3.3] για να δώσουμε κάτω φράγμα για την $\varphi_\mu(x)$ όταν $x \in \delta Z_t^+(\mu)$ για κάποιο $\delta \in (0, 1)$.

Λήμμα 4.3.3. Έστω $t \geq 1$ και $\delta \in (0, 1)$. Για κάθε $x \in \delta Z_t^+(\mu)$ ισχύει ότι

$$\varphi_\mu(x) \geq \frac{(1 - \delta^t)^2}{C_1^t},$$

όπου $C_1 > 1$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

Απόδειξη. Έστω $x \in \delta Z_t^+(\mu)$. Όπως στην απόδειξη της Πρότασης 4.3.1, χρησιμοποιώντας το λήμμα του Grünbaum βλέπουμε ότι αρκεί να δείξουμε ότι

$$(4.3.3) \quad \inf \mu(\{z \in \mathbb{R}^n : \langle z, \xi \rangle \geq \langle x, \xi \rangle\}) \geq \frac{(1 - \delta^t)^2}{C_1^t},$$

όπου το infimum είναι πάνω από όλα τα $\xi \in S^{n-1}$ για τα οποία $\langle x, \xi \rangle \geq 0$.

Εφόσον $x \in \delta Z_t^+(\mu)$, έχουμε ότι $\langle x, \xi \rangle \leq \delta h_{Z_t^+(\mu)}(\xi)$. Για κάθε τέτοιο $\xi \in S^{n-1}$, αρκεί λοιπόν

να δείξουμε ότι

$$(4.3.4) \quad \mu(\{z \in \mathbb{R}^n : \langle z, \xi \rangle \geq \delta h_{Z_t^+}(\mu)(\xi)\}) \geq \frac{(1 - \delta^t)^2}{C_1^t}.$$

Εφαρμόζουμε την ανισότητα Paley-Zygmund

$$\mu(\{z : g(z) \geq \delta^t \mathbb{E}_\mu(g)\}) \geq (1 - \delta^t)^2 \frac{[\mathbb{E}_\mu(g)]^2}{\mathbb{E}_\mu(g^2)}$$

για τη συνάρτηση $g(z) = \langle z, \xi \rangle_+^t$. Από την (3.2.3) βλέπουμε ότι

$$\mathbb{E}_\mu(g^2) \leq C_1^t [\mathbb{E}_\mu(g)]^2$$

για κάποια απόλυτη σταθερά $C_1 > 0$, και έπεται το λήμμα. $\square$

Ορισμός 4.3.4. Για κάθε $t \geq 1$ θεωρούμε το κυρτό σύνολο

$$R_t(\mu) = \{x \in \mathbb{R}^n : f_\mu(x) \geq e^{-t} f_\mu(0)\}.$$

Η κυρτότητα του $R_t(\mu)$ προκύπτει άμεσα από το γεγονός ότι η f_μ είναι λογαριθμικά κοίλη. Σημειώνουμε ότι το $R_t(\mu)$ είναι φραγμένο και $0 \in \text{int}(R_t(\mu))$.

Λήμμα 4.3.5. Για κάθε $t \geq 5n$ ισχύει ότι $R_t(\mu) \supseteq c_0 K_{n+1}(\mu)$, όπου $c_0 > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

Απόδειξη. Έστω $t \geq 5n$. Για δοθέν $\xi \in S^{n-1}$ θεωρούμε τη λογαριθμικά κοίλη συνάρτηση $h : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ που ορίζεται από την $h(t) = f_\mu(t\xi)$. Από το [40, Λήμμα 5.2] γνωρίζουμε ότι

$$\int_0^{\varrho_{R_t(\mu)}(\xi)} r^{n-1} h(r) dr \geq (1 - e^{-t/8}) \int_0^\infty r^{n-1} h(r) dr.$$

Από τον ορισμό του $K_n(\mu)$ έχουμε

$$\int_0^\infty r^{n-1} h(r) dr = \frac{f_\mu(0)}{n} [\varrho_{K_n(\mu)}(\xi)]^n.$$

Από την άλλη πλευρά,

$$\int_0^{\varrho_{R_t(\mu)}(\xi)} r^{n-1} h(r) dr \leq \|f\|_\infty \int_0^{\varrho_{R_t(\mu)}(\xi)} r^{n-1} dr = \frac{\|f\|_\infty}{n} [\varrho_{R_t(\mu)}(\xi)]^n.$$

Χρησιμοποιώντας επίσης το γεγονός ότι $\|f\|_\infty \leq e^n f_\mu(0)$ από την (3.2.1), παίρνουμε

$$e^n [\varrho_{R_t(\mu)}(\xi)]^n \geq (1 - e^{-t/8}) [\varrho_{K_n(\mu)}(\xi)]^n.$$

Αυτό αποδεικνύει ότι $R_t(\mu) \supseteq c_0 K_n(\mu)$, όπου $c_0 > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά. Από την (3.2.5) γνωρίζουμε ότι $K_n(\mu) \approx K_{n+1}(\mu)$, και αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη. $\square$

Το τελευταίο μας λήμμα συγκρίνει το $Z_t^+(\mu)$ με το $K_{n+1}(\mu)$ όταν $t \geq 5n$.

Λήμμα 4.3.6. Για κάθε $t \geq 5n$ ισχύει ότι $Z_t^+(\mu) \supseteq c'_0 K_{n+1}(\mu)$, όπου $c'_0 > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

Απόδειξη. Από το Λήμμα 4.3.5 γνωρίζουμε ότι $c_0 K_{n+1}(\mu) \subseteq R_t(\mu)$ για κάθε $t \geq 5n$, όπου $c_0 > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά. Θεωρούμε $\xi \in S^{n-1}$ και θέτουμε $m := h_{c_0 K_{n+1}(\mu)}(\xi) = c_0 h_{K_{n+1}(\mu)}(\xi)$. Ορίζουμε

$$A_\xi = c_0 K_{n+1}(\mu) \cap \{x : \langle x, \xi \rangle \geq m/2\}.$$

Αφού το $K_{n+1}(\mu)$ είναι κεντραρισμένο, η απόδειξη της Πρότασης 4.3.1 δείχνει ότι

$$|A_\xi| \geq \frac{|c_0 K_{n+1}(\mu)|}{e^{2n} \cdot 2^n} \geq \frac{|c_0 K_{n+1}(\mu)|}{C^n}$$

για κάποια απόλυτη σταθερά $C > c_0$. Επιπλέον, αν $x \in A_\xi$ τότε $x \in R_t(\mu)$ και συνεπώς $f_\mu(x) \geq e^{-t} f_\mu(0)$. Γράφουμε

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \langle x, \xi \rangle_+^t d\mu(x) &\geq \int_{A_\xi} \langle x, \xi \rangle_+^t d\mu(x) \\ &\geq \left(\frac{m}{2}\right)^t e^{-t} f_\mu(0) |A_\xi| \geq \left(\frac{m}{2}\right)^t \left(\frac{c_0}{C}\right)^n f_\mu(0) |K_{n+1}(\mu)|. \end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας επίσης το γεγονός ότι $(c_0/C)^n \geq (c_0/C)^t$ διότι $t \geq 5n$, παίρνουμε

$$\int_{\mathbb{R}^n} \langle x, \xi \rangle_+^t d\mu(x) \geq (c_1 m)^t f_\mu(0) |K_{n+1}(\mu)|,$$

όπου $c_1 > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά. Τέλος, $f_\mu(0) |K_{n+1}(\mu)| \approx 1$ από την (3.2.8), και αυτό συνεπάγεται ότι

$$h_{Z_t^+(\mu)}(\xi) \geq c_2 m = c'_0 h_{K_{n+1}(\mu)}(\xi),$$

όπου $c'_0 = c_2 c_0$, το οποίο αποδεικνύει το λήμμα. $\square$

Απόδειξη του Θεωρήματος 4.3.2. Συνδυάζοντας το Λήμμα 4.3.5 και το Λήμμα 4.3.6 βλέπουμε ότι

$$R_{5n}(\mu) \cap Z_{5n}^+(\mu) \supseteq c_1 K_{n+1}(\mu)$$

για κάποια απόλυτη σταθερά $c_1 > 0$. Εφαρμόζουμε το Λήμμα 4.3.3 με $t = 5n$ και $\delta = \frac{1}{2}$. Για κάθε $x \in \frac{1}{2} Z_{5n}^+(\mu)$ έχουμε ότι

$$\varphi_\mu(x) \geq C_1^{-n}$$

για κάποια απόλυτη σταθερά $C_1 > 1$. Έπεται ότι

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi_\mu(x) d\mu(x) \geq C_1^{-n} \mu\left(\frac{1}{2} Z_{5n}^+(\mu)\right).$$

Τότε, από το Λήμμα 4.3.6 έχουμε ότι $\frac{1}{2}Z_{5n}^+(\mu) \supseteq \frac{c_1}{2}K_{n+1}(\mu)$. Εφόσον $\frac{c_1}{2}K_{n+1}(\mu) \subseteq R_{5n}(\mu)$, γνωρίζουμε ότι $f_\mu(x) \geq e^{-5n}f_\mu(0)$ για κάθε $x \in \frac{c_1}{2}K_{n+1}(\mu)$. Χρησιμοποιώντας επίσης την (3.2.8), παίρνουμε

$$\begin{aligned} \mu\left(\frac{1}{2}Z_{5n}^+(\mu)\right) &\geq \mu\left(\frac{c_1}{2}K_{n+1}(\mu)\right) = \int_{\frac{c_1}{2}K_{n+1}(\mu)} f_\mu(x) dx \geq e^{-5n}f_\mu(0) \left|\frac{c_1}{2}K_{n+1}(\mu)\right| \\ &= e^{-5n}(c_1/2)^n f_\mu(0)|K_{n+1}(\mu)| \geq e^{-5n}c_2^n. \end{aligned}$$

Συνδυάζοντας τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi_\mu(x) d\mu(x) \geq C_1^{-n} e^{-5n} c_2^n \geq e^{-cn},$$

για κάποια απόλυτη σταθερά $c > 0$. □

4.4 Φράγματα για τη μέση τιμή του μέτρου τυχαίων πολυτόπων

Έστω μ ένα λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$. Έστω $X_1, X_2, \dots$ ανεξάρτητα τυχαία σημεία στον $\mathbb{R}^n$ με κατανομή το μ . Για κάθε $N > n$ θεωρούμε το τυχαίο πολύτοπο $K_N = \text{conv}\{X_1, \dots, X_N\}$. Θεωρούμε επίσης ένα δεύτερο λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας ν στον $\mathbb{R}^n$ που έχει το ίδιο κέντρο βάρους με το μ , και τη μέση τιμή $\mathbb{E}_{\mu^N}[\nu(K_N)]$ του ν -μέτρου του K_N . Σημειώνουμε ότι αν $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ είναι ένας αντιστρέψιμος αφφινικός μετασχηματισμός και $T_*\mu$ είναι το μέτρο εικόνα του μ που ορίζεται από την $T_*\mu(A) = \mu(T^{-1}(A))$, τότε

$$\mathbb{E}_{(T_*\mu)^N}[(T_*\nu)(K_N)] = \mathbb{E}_{\mu^N}[\nu(K_N)].$$

Μπορούμε λοιπόν να υποθέσουμε ότι το μ είναι ισοτροπικό και το ν είναι κεντραρισμένο. Στο επόμενο θεώρημα υποθέτουμε μάλιστα ότι τα μ και ν είναι και τα δύο ισοτροπικά.

Θεώρημα 4.4.1. Έστω μ και ν ισοτροπικά λογαριθμικά κοίλα μέτρα πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$, $n \geq n_0$. Για κάθε $N \leq \exp(c_1 n / L_\nu^2)$ ισχύει ότι

$$\mathbb{E}_{\mu^N}(\nu(K_N)) \leq 2 \exp(-c_2 n / L_\nu^2),$$

όπου $c_1, c_2 > 0$ και $n_0 \in \mathbb{N}$ είναι απόλυτες σταθερές.

Για την απόδειξη του Θεωρήματος 4.4.1 θα εκμεταλλευτούμε τα εργαλεία που χρησιμοποιήθηκαν στην προηγούμενη ενότητα, τα οποία θα συνδυάσουμε με μια παραλλαγή του κλασικού λήμματος το οποίο χρησιμοποιείται για την απόδειξη άνω κατωφλίων. Υπενθυμίζουμε ότι $B_t(\mu) = \{\nu \in \mathbb{R}^n : \Lambda_\mu^*(\nu) \leq t\}$, όπου Λ_μ^* είναι ο μετασχηματισμός Cramér του μ . Μια εκδοχή του επόμενου λήμματος εμφανίστηκε αρχικά στο [25].

Λήμμα 4.4.2. Έστω μ, ν λογαριθμικά κοίλα μέτρα πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$ και $t > 0$. Για κάθε $N > n$ έχουμε ότι

$$\mathbb{E}_{\mu^N}(\nu(K_N)) \leq \nu(B_t(\mu)) + N \exp(-t).$$

Απόδειξη. Γράφουμε

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_{\mu^N}(\nu(K_N)) &= \mathbb{E}_{\mu^N}(\nu(K_N \cap B_t(\mu))) + \mathbb{E}_{\mu^N}(\nu(K_N \setminus B_t(\mu))) \\ &\leq \nu(B_t(\mu)) + \mathbb{E}_{\mu^N}(\nu(K_N \setminus B_t(\mu))).\end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι αν H είναι ένας κλειστός ημίχωρος που περιέχει το x , και αν $x \in K_N$, τότε υπάρχει $i \leq N$ τέτοιος ώστε $X_i \in H$ (αλλιώς, θα είχαμε $x \in K_N \subseteq H'$, όπου H' είναι ο συμπληρωματικός ημίχωρος). Έπεται ότι

$$\mu^N(x \in K_N) \leq N\varphi_\mu(x).$$

Τότε, από το θεώρημα Fubini βλέπουμε ότι

$$\mathbb{E}_{\mu^N}(\nu(K_N \setminus B_t(\mu))) = \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_t(\mu)} \mu^N(x \in K_N) d\nu(x) \leq \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_t(\mu)} N\varphi_\mu(x) d\nu(x) \leq N e^{-t}$$

διότι $\varphi_\mu(x) \leq \exp(-\Lambda_\mu^*(x)) \leq e^{-t}$ για κάθε $x \notin B_t(\mu)$. □

Απόδειξη του Θεωρήματος 4.4.1. Χρησιμοποιώντας την εκτίμηση $\nu(B_t(\mu)) \leq \|f_\nu\|_\infty |B_t(\mu)|$, την Πρόταση 3.2.3 και το Θεώρημα 3.2.1, από το Λήμμα 4.4.2 παίρνουμε

$$\mathbb{E}_{\mu^N}(\nu(K_N)) \leq \left(c_1 \|f_\nu\|_\infty^{1/n} \sqrt{t/n}\right)^n + N \exp(-t)$$

για κάθε $N > n$ και $2 \leq t \leq n$. Έχουμε υποθέσει ότι το ν είναι ισοτροπικό, άρα $\|f_\nu\|_\infty^{2/n} = L_\nu^2 = O(\sqrt{n})$. Μάλιστα, το φράγμα των Klartag και Lehec για την L_n δίνει ότι $L_\nu^2 \leq C$. Τότε, αν $n \geq n_0$ όπου $n_0 \in \mathbb{N}$ είναι μια απόλυτη σταθερά, η επιλογή $t := (c_1 e)^{-2} n / \|f_\nu\|_\infty^{2/n}$ ικανοποιεί την $2 \leq t \leq n$ και μας δίνει

$$\left(c_1 \|f_\nu\|_\infty^{1/n} \sqrt{t/n}\right)^n \leq e^{-n}.$$

Συνεπώς,

$$\mathbb{E}_{\mu^N}(\nu(K_N)) \leq e^{-n} + N \exp(-c_2 n / \|f_\nu\|_\infty^{2/n}),$$

όπου $c_2 = (c_1 e)^{-2}$. Έπεται ότι αν $N \leq \exp(c_3 n / \|f_\nu\|_\infty^{2/n})$ όπου $c_3 = c_2/2$, τότε έχουμε

$$\mathbb{E}_{\mu^N}(\nu(K_N)) \leq e^{-n} + \exp(-c_3 n / \|f_\nu\|_\infty^{2/n})$$

και το συμπέρασμα προκύπτει από το γεγονός ότι $\|f_\nu\|_\infty^{2/n} = L_\nu^2 \geq c$. □

Παρατήρηση 4.4.3. Έστω ότι το μ είναι ισοτροπικό. Αυτό που πραγματικά χρειαζόμαστε, σε ό,τι αφορά το ν , για την απόδειξη του Θεωρήματος 4.4.1 είναι το ν να είναι κεντραρισμένο και να ισχύει ότι $\|f_\nu\|_\infty^{1/n} = o_n(\sqrt{n})$. Τότε, η απόδειξη που προηγήθηκε μας δίνει

$$\mathbb{E}_{\mu^N}(\nu(K_N)) \leq \exp(-c_2 n / \max\{1, \|f_\nu\|_\infty^{2/n}\})$$

αν $N \leq \exp(c_1 n / \|f_\nu\|_\infty^{2/n})$. Σημειώνουμε ότι η απόδειξη της (1.2.4) στο [18] εκμεταλλεύεται τις ίδιες ιδέες. Τον ρόλο του ν παίζει το ομοιόμορφο μέτρο σε ένα κυρτό σώμα K , άρα $\|f_\nu\|_\infty = \frac{1}{|K|}$. Από την άλλη πλευρά, το μ είναι ισοτροπικό και φέρεται από το K , συνεπώς

$$|K| \cdot L_\mu^n \geq \int_K f_\mu(x) dx = \mu(K) = 1.$$

Αυτό δείχνει ότι $\|f_\nu\|_\infty \leq L_\mu^n$, άρα $n / \|f_\nu\|_\infty^{2/n} \geq n / L_\mu^2$, το οποίο (σε συνδυασμό με τα παραπάνω) αποδεικνύει την (1.2.4).

Μια δεύτερη πιθανή κανονικοποίηση είναι να υποθέσουμε ότι τα μ και ν είναι απλώς κεντραρισμένα και ότι $\|f_\mu\|_\infty = \|f_\nu\|_\infty$. Τότε, ξεκινώντας τον υπολογισμό όπως στην απόδειξη του Θεωρήματος 4.4.1 παίρνουμε

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\mu^N}(\nu(K_N)) &\leq \left(c_1 \|f_\nu\|_\infty^{1/n} [\det \text{Cov}(\mu)]^{\frac{1}{2n}} \sqrt{t/n} \right)^n + N \exp(-t) \\ &= \left(c_1 \|f_\mu\|_\infty^{1/n} [\det \text{Cov}(\mu)]^{\frac{1}{2n}} \sqrt{t/n} \right)^n + N \exp(-t) = \left(c_1 L_\mu \sqrt{t/n} \right)^n + N \exp(-t). \end{aligned}$$

Επιλέγοντας $t = (c_1 e)^{-2} n / L_\mu^2$ και συνεχίζοντας όπως παραπάνω, παίρνουμε το εξής:

Θεώρημα 4.4.4. Έστω μ και ν δύο κεντραρισμένα λογαριθμικά κοίλα μέτρα πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$ με $\|f_\mu\|_\infty = \|f_\nu\|_\infty$. Για κάθε $N \leq \exp(c_1 n / L_\mu^2)$ έχουμε ότι

$$\mathbb{E}_{\mu^N}(\nu(K_N)) \leq 2 \exp(-c_2 n / L_\mu^2),$$

όπου $c_1, c_2 > 0$ είναι απόλυτες σταθερές.

Περνάμε τώρα στο κάτω φράγμα κατωφλίου. Είναι χρήσιμο να παρατηρήσουμε ότι στην περίπτωση που τα $X_1, X_2, \dots$ είναι ομοιόμορφα κατανομημένα στην Ευκλείδεια μοναδιαία μπάλα, το ακριβές φαινόμενο κατωφλίου (βλ. [53] και [9]) εμφανίζεται στο

$$\exp\left((1 \pm \varepsilon) \frac{1}{2} n \ln n\right), \quad \varepsilon > 0.$$

Επικεντρωνόμαστε στην περίπτωση $\nu = \mu$ του προβλήματός μας, και σε αυτήν την περίπτωση θα αποδείξουμε ένα ασθενές φράγμα κατωφλίου αυτής της τάξης. Η ακριβής διατύπωση του αποτελέσματός μας είναι η ακόλουθη.

Θεώρημα 4.4.5. Έστω $\delta \in (0, 1)$. Τότε,

$$\inf_{\mu} \left(\inf \left\{ \mathbb{E}_{\mu^N}[\mu((1 + \delta)K_N)] : N \geq \exp(C\delta^{-1} \ln(2/\delta) n \ln n) \right\} \right) \rightarrow 1$$

καθώς $n \rightarrow \infty$, όπου το πρώτο *infimum* είναι πάνω από όλα τα κεντραρισμένα λογαριθμικά κοίλα μέτρα πιθανότητας μ στον $\mathbb{R}^n$ και $C > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

Αυτό είναι ένα ασθενές φράγμα κατωφλίου με την έννοια ότι θεωρούμε τη μέση τιμή του μέτρου του $(1 + \delta)K_N$ αντί για το K_N , όπου το $\delta > 0$ είναι οσοδήποτε μικρό. Ο λόγος γι' αυτό είναι η εξάρτηση από το δ στην επόμενη τεχνική πρόταση.

Πρόταση 4.4.6. Έστω μ ένα ισοτροπικό λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$. Για κάθε $\delta \in (0, 1)$ και κάθε $t \geq C_\delta n \ln n$ ισχύει ότι

$$\mu((1 + \delta)Z_t^+(\mu)) \geq 1 - e^{-c_\delta t}$$

όπου $C_\delta = C\delta^{-1} \ln(2/\delta)$ και $c_\delta = c\delta$ είναι θετικές σταθερές που εξαρτώνται μόνο από το δ .

Απόδειξη. Θεωρούμε $\delta \in (0, 1)$ και θέτουμε $\varepsilon = \delta/5$. Σταθεροποιούμε $t \geq n$ το οποίο θα προσδιορίσουμε κατάλληλα. Υπενθυμίζουμε ότι $b_1 B_2^n \subseteq Z_t^+(\mu) \subseteq b_2 t B_2^n$ για κάποιες απόλυτες σταθερές $b_1, b_2 > 0$. Αυτό συνεπάγεται ότι αν $v, w \in S^{n-1}$ και $|v - w| \leq \frac{b_1 \varepsilon}{b_2 t}$ τότε

$$h_{Z_t^+(\mu)}(v - w) \leq b_2 t |v - w| \quad \text{και} \quad b_1 \leq \min\{h_{Z_t^+(\mu)}(v), h_{Z_t^+(\mu)}(w)\},$$

άρα

$$(4.4.1) \quad h_{Z_t^+(\mu)}(v - w) \leq b_2 t |v - w| \leq \varepsilon \min\{h_{Z_t^+(\mu)}(v), h_{Z_t^+(\mu)}(w)\}.$$

Θέτουμε $b := b_2/b_1$ και θεωρούμε ένα $\frac{\varepsilon}{bt}$ -δίκτυο N για την Ευκλείδεια μοναδιαία σφαίρα S^{n-1} με πληθάρημο $|N| \leq (1 + 2bt/\varepsilon)^n \leq (3bt/\varepsilon)^n$ (μια απόδειξη του φράγματος για τον πληθάρημο του N δίνεται, για παράδειγμα, στο [5, Λήμμα 5.2.5]). Ορίζουμε

$$W = \bigcap_{\xi \in N} \left\{ x : \langle x, \xi \rangle_+ \leq \frac{1}{1 + \varepsilon} h_{Z_t^+(\mu)}(\xi) \right\}.$$

Έστω $x \in W$. Τότε, $\langle x, \xi \rangle_+ \leq \frac{1}{1 + \varepsilon} h_{Z_t^+(\mu)}(\xi)$ για κάθε $\xi \in N$. Θα δείξουμε ότι $(1 - \varepsilon)\langle x, w \rangle_+ \leq h_{Z_t^+(\mu)}(w)$ για κάθε $w \in S^{n-1}$, το οποίο είναι ισοδύναμο με την $(1 - \varepsilon)x \in Z_t^+(\mu)$. Θέτουμε

$$\alpha_\mu(x) := \max \left\{ \frac{\langle x, w \rangle_+}{h_{Z_t^+(\mu)}(w)} : w \in S^{n-1} \right\}$$

και θεωρούμε $v \in S^{n-1}$ τέτοιο ώστε $\langle x, v \rangle_+ = \alpha_\mu(x) \cdot h_{Z_t^+(\mu)}(v)$. Υπάρχει $\xi \in N$ που ικανοποιεί την $|\xi - v| \leq \frac{\varepsilon}{bt}$. Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι $\langle x, v - \xi \rangle_+ \leq \alpha_\mu(x) h_{Z_t^+(\mu)}(v - \xi)$, γράφουμε

$$\langle x, v \rangle_+ \leq \langle x, \xi \rangle_+ + \langle x, v - \xi \rangle_+ \leq \frac{1}{1 + \varepsilon} h_{Z_t^+(\mu)}(\xi) + \alpha_\mu(x) h_{Z_t^+(\mu)}(v - \xi).$$

Από την (4.4.1) έπεται ότι

$$\langle x, v \rangle_+ \leq \frac{1}{1 + \varepsilon} h_{Z_t^+(\mu)}(\xi) + \varepsilon \alpha_\mu(x) h_{Z_t^+(\mu)}(v) = \frac{1}{1 + \varepsilon} h_{Z_t^+(\mu)}(\xi) + \varepsilon \langle x, v \rangle_+,$$

το οποίο μας δίνει ότι

$$\langle x, v \rangle_+ \leq \frac{1}{1 - \varepsilon^2} h_{Z_t^+(\mu)}(\xi).$$

Επιπλέον,

$$h_{Z_t^+(\mu)}(\xi) \leq h_{Z_t^+(\mu)}(v) + h_{Z_t^+(\mu)}(\xi - v) \leq h_{Z_t^+(\mu)}(v) + \varepsilon h_{Z_t^+(\mu)}(v) = (1 + \varepsilon)h_{Z_t^+(\mu)}(v),$$

απ' όπου τελικά βλέπουμε ότι $\alpha_\mu(x) \leq 1/(1 - \varepsilon)$. Αυτό αποδεικνύει ότι $(1 - \varepsilon)W \subseteq Z_t^+(\mu)$. Για κάθε $\xi \in N$ έχουμε

$$\mu(\{x : \langle x, \xi \rangle_+ \geq (1 + \varepsilon)\|\langle \cdot, \xi \rangle_+\|_t\}) \leq (1 + \varepsilon)^{-t}.$$

Αφού $\delta \in (0, 1)$, έχουμε ότι $0 < \varepsilon < 1/5$, συνεπώς $\frac{(1+\varepsilon)^2}{1-\varepsilon} \leq 1 + 5\varepsilon = 1 + \delta$. Τότε,

$$\begin{aligned} \mu((1 + \delta)Z_t^+(\mu)) &\geq \mu\left(\frac{(1 + \varepsilon)^2}{1 - \varepsilon}Z_t^+(\mu)\right) \geq \mu((1 + \varepsilon)^2W) \\ &= \mu\left(\bigcap_{\xi \in N} \{x : \langle x, \xi \rangle_+ \leq (1 + \varepsilon)h_{Z_t^+(\mu)}(\xi)\}\right) \\ &\geq 1 - |N| \cdot (1 + \varepsilon)^{-t} \geq 1 - (C'_\varepsilon t)^n (1 + \varepsilon)^{-t}, \end{aligned}$$

όπου $C'_\varepsilon = 3b/\varepsilon$. Έπεται ότι υπάρχει σταθερά $C_\varepsilon > 1$ τέτοια ώστε αν $t \geq C_\varepsilon n \ln n$ να ισχύει ότι

$$(4.4.2) \quad (C'_\varepsilon t)^n (1 + \varepsilon)^{-t} \leq (1 + \varepsilon)^{-t/2} \leq e^{-\varepsilon t/4}.$$

Για να το δούμε αυτό, θεωρούμε τη συνάρτηση

$$\ell(t) = \frac{t}{2} \ln(1 + \varepsilon) - n \ln(3bt/\varepsilon).$$

Ελέγχουμε εύκολα ότι η ℓ είναι αύξουσα στο διάστημα $[2n/\ln(1 + \varepsilon), \infty)$. Επομένως, αν $t \geq C_\varepsilon n \ln n$ όπου $C_\varepsilon = \frac{C}{\varepsilon} \ln\left(\frac{2}{\varepsilon}\right)$ για μια αρκετά μεγάλη απόλυτη σταθερά $C > 0$, μπορούμε να ελέγξουμε ότι $\ell(t) \geq \ell(C_\varepsilon n \ln n) > 0$. Αυτό έχει ως συνέπεια την (4.4.2). Αφού $\varepsilon = \delta/5$, παίρνουμε το συμπέρασμα της πρότασης με την εξάρτηση που ισχυριστήκαμε από το δ για τις σταθερές C_δ, c_δ . $\square$

Για την απόδειξη του Θεωρήματος 4.4.5 χρειαζόμαστε επίσης ένα βασικό αποτέλεσμα που παίζει κεντρικό ρόλο στην απόδειξη όλων των κάτω φαινομένων κατωφλίου που έχουν εμφανιστεί ως τώρα. Η μορφή με την οποία το διατυπώνουμε προέρχεται από το [18, Λήμμα 3]. Η απόδειξη που δίνουμε παρακάτω είναι ουσιαστικά αυτή που παρουσιάζεται στο [31, Λήμμα 4.1].

Λήμμα 4.4.7. Έστω μ ένα λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$. Για κάθε κυρτό σώμα A στον $\mathbb{R}^n$ και κάθε $N > n$ έχουμε ότι

$$1 - \mu^N(K_N \supseteq A) \leq 2 \binom{N}{n} (1 - \varphi_-(A))^{N-n}.$$

Συνεπώς,

$$\mathbb{E}_{\mu^N}(\mu(K_N)) \geq \mu(A) \left(1 - 2 \binom{N}{n} (1 - \varphi_-(A))^{N-n}\right).$$

Απόδειξη. Σημειώνουμε ότι, με πιθανότητα ίση με 1, το τυχαίο πολύτοπο K_N έχει μη κενό εσωτερικό. Για κάθε υποσύνολο $J = \{j_1, \dots, j_n\}$ του $\{1, \dots, N\}$, πληθαιθμού n , έχουμε ότι τα $X_{j_1}, \dots, X_{j_n}$ είναι αφινικά ανεξάρτητα με πιθανότητα 1, και ορίζουμε το ενδεχόμενο L_J ως εξής: για έναν από τους δύο κλειστούς ημιχώρους H_1, H_2 που ορίζουν, ας πούμε τον H_i , έχουμε ταυτόχρονα $K_N \subset H_i$ και $\mu(\mathbb{R}^n \setminus H_i) \geq \varphi_-(A)$.

Αν $A \not\subset K_N$, τότε υπάρχει $x \in \partial(A) \setminus K_N$. Εφόσον $x \notin K_N$, υπάρχει κάποια έδρα F του K_N με την ακόλουθη ιδιότητα: ένας από τους δύο κλειστούς ημιχώρους H_1 και H_2 που προσδιορίζονται από την F περιέχει το K_N αλλά δεν περιέχει το x . Τότε, αν H_i είναι αυτός ο ημιχώρος, έχουμε ταυτόχρονα $K_N \subset H_i$ και $\mu(\mathbb{R}^n \setminus H_i) \geq \varphi_\mu(x) \geq \varphi_-(A)$. Αφού το υπερεπίπεδο που φράσσει τον H_i προσδιορίζεται από κάποιες αφινικά ανεξάρτητες κορυφές $X_{j_1}, \dots, X_{j_n}$ του K_N οι οποίες βρίσκονται στην F , αυτό δείχνει ότι

$$\{A \not\subset K_N\} \subseteq \bigcup_J L_J.$$

Έπεται ότι

$$\text{Prob}(A \not\subset K_N) \leq \sum_J \text{Prob}(L_J) = \binom{N}{n} \text{Prob}(L'),$$

όπου $L' := L_{\{1, \dots, n\}}$. Δεν είναι δύσκολο να δούμε ότι

$$\text{Prob}(L') \leq 2(1 - \varphi_-(A))^{N-n}.$$

Πράγματι, τα $X_1, \dots, X_n$ προσδιορίζουν δύο κλειστούς ημιχώρους $H_i = H_i(X_1, \dots, X_n)$, $i = 1, 2$. Έστω L^i το ενδεχόμενο να ισχύει ότι $\mu(\mathbb{R}^n \setminus H_i) \geq \varphi_-(A)$. Τότε, συμβολίζοντας με Exp τη μέση τιμή ως προς το μέτρο Prob , βλέπουμε ότι

$$\begin{aligned} \text{Prob}(L') &\leq \sum_{i=1}^2 \text{Prob}(\{X_{n+1}, \dots, X_N \in H_i\} \cap L^i) \\ &= \sum_{i=1}^2 \text{Exp}(\text{Prob}(\{X_{n+1}, \dots, X_N \in H_i\} \mid X_1, \dots, X_n) \mathbb{1}_{L^i}) \\ &\leq (1 - \varphi_-(A))^{N-n} \sum_{i=1}^2 \text{Prob}(L^i). \end{aligned}$$

Ο δεύτερος ισχυρισμός του λήμματος προκύπτει από την ανισότητα Markov. $\square$

Απόδειξη του Θεωρήματος 4.4.5. Θεωρούμε $0 < \delta < 1$ και επιλέγουμε $\varepsilon = \delta/3$. Έστω μ ένα κεντραρισμένο λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$. Η μέση τιμή $\mathbb{E}_{\mu^N}[\mu((1 + \delta)K_N)]$ είναι γραμμικά αναλλοίωτη ποσότητα, άρα μπορούμε να υποθέσουμε ότι το μ είναι

ισοτροπικό. Από το Λήμμα 4.3.3 γνωρίζουμε ότι για κάθε $x \in (1 - \varepsilon)Z_t^+(\mu)$ έχουμε

$$\varphi_\mu(x) \geq \frac{(1 - (1 - \varepsilon)^t)^2}{C_1^t},$$

όπου $C_1 > 1$ είναι μια απόλυτη σταθερά. Τότε, παίρνοντας υπ' όψιν μας το γεγονός ότι $1 - \varepsilon > 2/3$, παίρνουμε

$$\mu^N(K_N \supseteq (1 - \varepsilon)Z_t^+(\mu)) \geq 1 - 2 \binom{N}{n} \left[1 - \frac{(1 - (1 - \varepsilon)^t)^2}{C_1^t} \right]^{N-n}.$$

Από το θεώρημα μέσης τιμής έχουμε ότι $1 - (1 - \varepsilon)^t = t\varepsilon z^{t-1}$ για κάποιο $z \in (1 - \varepsilon, 1)$, άρα $1 - (1 - \varepsilon)^t \geq t\varepsilon(1 - \varepsilon)^{t-1}$. Παίρνοντας επίσης υπ' όψιν μας το γεγονός ότι $1 - \varepsilon > 2/3$, βλέπουμε ότι

$$\begin{aligned} \mu^N(K_N \supseteq (1 - \varepsilon)Z_t^+(\mu)) &\geq 1 - 2 \binom{N}{n} \left[1 - \frac{(t\varepsilon(1 - \varepsilon)^{t-1})^2}{C_1^t} \right]^{N-n} \\ &\geq 1 - \left(\frac{2eN}{n} \right)^n \exp \left(-(N - n) \frac{(t\varepsilon)^2}{(3C_1)^t} \right). \end{aligned}$$

Αυτή η τελευταία ποσότητα τείνει στο 1 καθώς το $n \rightarrow \infty$ εάν

$$(4.4.3) \quad (3C_1)^t n \ln(4eN/n) < (N - n)(t\varepsilon)^2,$$

και υποθέτοντας ότι $\delta \in (1/n^2, 1)$ και $t \geq C_\varepsilon n \ln n$ όπου C_ε είναι η σταθερά από την Πρόταση 4.4.6, ελέγχουμε ότι η (4.4.3) ισχύει αν $N \geq \exp(C_2 t)$ για κάποια αρκετά μεγάλη απόλυτη σταθερά $C_2 > 0$.

Σημειώνουμε ότι η επιλογή $\varepsilon = \delta/3$ μας εξασφαλίζει ότι $1 + \delta > \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}$. Έτσι, αν $N \geq \exp(C_2 C_\varepsilon n \ln n)$ βλέπουμε ότι

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\mu^N} [\mu((1 + \delta)K_N)] &\geq \mathbb{E}_{\mu^N} \left[\mu \left(\frac{1 + \varepsilon}{1 - \varepsilon} K_N \right) \right] \geq \mu((1 + \varepsilon)Z_t^+(\mu)) \times \mu^N(K_N \supseteq (1 - \varepsilon)Z_t^+(\mu)) \\ &\geq (1 - e^{-c\varepsilon t}) \left[1 - \left(\frac{2eN}{n} \right)^n \exp \left(-(N - n) \frac{(t\varepsilon)^2}{(3C_1)^t} \right) \right] \rightarrow 1 \end{aligned}$$

καθώς το $n \rightarrow \infty$. □

Έχουμε ήδη αναφέρει ότι το Θεώρημα 4.4.5 εξασφαλίζει ένα ασθενές φράγμα κατωφλίου με την έννοια ότι δίνουμε εκτίμηση για τη μέση τιμή $\mathbb{E}_{\mu^N}(\mu((1 + \delta)K_N))$ (για οσοδήποτε μικρή αλλά θετική τιμή του δ) ενώ το αρχικό ερώτημα αφορούσε την $\mathbb{E}_{\mu^N}(\mu(K_N))$. Το επόμενο αποτέλεσμα δίνει μια εκτίμηση όπου «το δ έχει αφαιρεθεί», όμως η εξάρτηση από το n είναι χειρότερη.

Θεώρημα 4.4.8. Υπάρχει απόλυτη σταθερά $C > 0$ τέτοια ώστε

$$\inf_{\mu} \left(\inf \left\{ \mathbb{E}_{\mu^N} [\mu(K_N)] : N \geq \exp(C(n \ln n)^2 u(n)) \right\} \right) \rightarrow 1$$

καθώς το $n \rightarrow \infty$, όπου το πρώτο *infimum* είναι πάνω από όλα τα λογαριθμικά κοίλα μέτρα πιθανότητας μ στον $\mathbb{R}^n$ και $u(n)$ είναι οποιαδήποτε συνάρτηση με $u(n) \rightarrow \infty$ καθώς το $n \rightarrow \infty$.

Απόδειξη. Έστω μ ένα λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$. Εύκολα ελέγχουμε ότι η μέση τιμή $\mathbb{E}_{\mu^N} [\mu(K_N)]$ είναι αφρινικά αναλλοίωτη ποσότητα, άρα μπορούμε να υποθέσουμε ότι το μ είναι κεντραρισμένο. Σημειώνουμε ότι αν $A \subset \mathbb{R}^n$ είναι ένα σύνολο Borel, τότε

$$\mu((1+\delta)A) = \int_{(1+\delta)A} f_{\mu}(x) dx = (1+\delta)^n \int_A f_{\mu}((1+\delta)x) dx.$$

Αφού η f_{μ} είναι λογαριθμικά κοίλη, βλέπουμε ότι

$$f_{\mu}((1+\delta)x) \leq f_{\mu}(x) \left(\frac{f_{\mu}(x)}{f_{\mu}(0)} \right)^{\delta} \leq e^{n\delta} f_{\mu}(x)$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$, διότι $f_{\mu}(x) \leq e^n f_{\mu}(0)$ από την (3.2.1). Έπεται ότι

$$(4.4.4) \quad \mu((1+\delta)A) \leq (1+\delta)^n e^{n\delta} \mu(A) \leq e^{2n\delta} \mu(A).$$

Έστω $u(n)$ συνάρτηση με $u(n) \rightarrow \infty$ καθώς το $n \rightarrow \infty$. Επιλέγουμε $\delta_n = (nu(n))^{-1}$. Από την (4.4.4) έχουμε ότι

$$\mathbb{E}_{\mu^N} [\mu(K_N)] \geq e^{-2n\delta_n} \mathbb{E}_{\mu^N} [\mu((1+\delta_n)K_N)].$$

Συνεπώς, βλέπουμε ότι

$$\begin{aligned} & \inf_{\mu} \left(\inf \left\{ \mathbb{E}_{\mu^N} [\mu(K_N)] : N \geq \exp(C\delta_n^{-1} \ln(2/\delta_n) n \ln n) \right\} \right) \\ & \geq e^{-2n\delta_n} \inf_{\mu} \left(\inf \left\{ \mathbb{E}_{\mu^N} [\mu((1+\delta_n)K_N)] : N \geq \exp(C\delta_n^{-1} \ln(2/\delta_n) n \ln n) \right\} \right) \rightarrow 1 \end{aligned}$$

καθώς το $n \rightarrow \infty$, χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 4.4.5 και το γεγονός ότι $e^{-2n\delta_n} = e^{-2/u(n)} \rightarrow 1$. Μπορούμε επίσης να υποθέσουμε ότι $u(n) = O(n)$. Τότε,

$$\delta_n^{-1} \ln(2/\delta_n) n \ln n = n^2 \ln n \ln(2nu(n))u(n) \approx (n \ln n)^2 u(n),$$

και έπεται το συμπέρασμα. □

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

Φαινόμενα κατωφλίου για το μέτρο τυχαίων πολυτόπων

5.1 Εισαγωγή

Σε αυτό το κεφάλαιο παρουσιάζουμε την προσέγγισή μας στο πρόβλημα του κατωφλίου για τη μέση τιμή του μέτρου ενός τυχαίου πολυτόπου που ορίζεται ως η κυρτή θήκη ανεξάρτητων τυχαίων σημείων με την ίδια, τυχούσα, λογαριθμικά κοίλη κατανομή. Δίνεται ένα λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας μ στον $\mathbb{R}^n$, και θεωρούμε μια ακολουθία $X_1, X_2, \dots$ ανεξάρτητων τυχαίων σημείων στον $\mathbb{R}^n$ που έχουν κατανομή το μ . Για κάθε $N > n$ ορίζουμε το τυχαίο πολύτοπο $K_N = \text{conv}\{X_1, \dots, X_N\}$ και θεωρούμε τη μέση τιμή $\mathbb{E}_{\mu^N}[\mu(K_N)]$ του μέτρου του K_N . Εύκολα ελέγχουμε ότι αυτή η ποσότητα είναι αφρινικά αναλλοίωτη, άρα μπορούμε να υποθέσουμε ότι το μ είναι κεντραρισμένο.

Για δοθέν $\delta \in (0, 1)$ ορίζουμε το « δ -άνω φράγμα κατωφλίου»

$$(5.1.1) \quad \varrho_1(\mu, \delta) = \sup\{\varrho_1 : \sup\{\mathbb{E}_{\mu^N}[\mu(K_N)] : N \leq \exp(\varrho_1 n)\} \leq \delta\}$$

και το « δ -κάτω φράγμα κατωφλίου»

$$(5.1.2) \quad \varrho_2(\mu, \delta) = \inf\{\varrho_2 : \inf\{\mathbb{E}_{\mu^N}[\mu(K_N)] : N \geq \exp(\varrho_2 n)\} \geq 1 - \delta\}.$$

Στόχος μας είναι να δώσουμε άνω φράγματα για τη διαφορά $\varrho(\mu, \delta) := \varrho_2(\mu, \delta) - \varrho_1(\mu, \delta)$ για κάθε δοθέν $\delta \in (0, \frac{1}{2})$.

Η προσέγγισή μας βασίζεται στον μετασχηματισμό Cramér του μ . Υπενθυμίζουμε ότι ο λογαριθμικός μετασχηματισμός Laplace του μ ορίζεται από την

$$\Lambda_\mu(\xi) = \ln \left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{\langle \xi, z \rangle} d\mu(z) \right), \quad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Μέσω της ανισότητας Hölder ελέγχουμε εύκολα ότι η Λ_μ είναι κυρτή και ισχύει ότι $\Lambda_\mu(0) = 0$.

Εφόσον $\text{bar}(\mu) = 0$, η ανισότητα Jensen δείχνει ότι

$$\Lambda_\mu(\xi) = \log \left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{\langle \xi, z \rangle} f(z) dz \right) \geq \int_{\mathbb{R}^n} \langle \xi, z \rangle f(z) dz = 0$$

για κάθε ξ . Συνεπώς, η Λ_μ είναι μη αρνητική συνάρτηση. Μπορούμε να ελέγξουμε ότι το σύνολο $A(\mu) = \{\Lambda_\mu < \infty\}$ είναι ανοικτό και η Λ_μ είναι C^∞ και γνησίως κυρτή στο $A(\mu)$. Ορίζουμε επίσης

$$\Lambda_\mu^*(x) = \sup_{\xi \in \mathbb{R}^n} \{\langle x, \xi \rangle - \Lambda_\mu(\xi)\}.$$

Με άλλα λόγια, η Λ_μ^* είναι ο μετασχηματισμός Legendre της Λ_μ : υπενθυμίζουμε ότι για κάθε κυρτή συνάρτηση $g : \mathbb{R}^n \rightarrow (-\infty, \infty]$, ο μετασχηματισμός Legendre $\mathcal{L}(g)$ της g είναι η συνάρτηση

$$\mathcal{L}(g)(x) := \sup_{\xi \in \mathbb{R}^n} \{\langle x, \xi \rangle - g(\xi)\}.$$

Η συνάρτηση Λ_μ^* ονομάζεται και μετασχηματισμός Cramér του μ . Για κάθε $t > 0$ ορίζουμε το κυρτό σύνολο

$$B_t(\mu) := \{x \in \mathbb{R}^n : \Lambda_\mu^*(x) \leq t\}.$$

Για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$ συμβολίζουμε με $\mathcal{H}(x)$ το σύνολο όλων των ημιχώρων H του $\mathbb{R}^n$ οι οποίοι περιέχουν το x . Στη συνέχεια ορίζουμε

$$\varphi_\mu(x) = \inf\{\mu(H) : H \in \mathcal{H}(x)\}.$$

Η συνάρτηση φ_μ ονομάζεται βάθος ημιχώρων κατά Tukey. Από τον ορισμό της Λ_μ^* μπορούμε εύκολα να ελέγξουμε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$ ισχύει ότι $\varphi_\mu(x) \leq \exp(-\Lambda_\mu^*(x))$ (βλ. Λήμμα 5.2.1 στην Ενότητα 5.2 πιο κάτω). Ειδικότερα, για κάθε $t > 0$ και για κάθε $x \notin B_t(\mu)$ έχουμε ότι $\varphi_\mu(x) \leq \exp(-t)$. Μια βασική ιδέα, η οποία εμφανίζεται σε όλες τις προηγούμενες δουλειές σε αυτό το θέμα, είναι να δείξουμε ότι η φ_μ είναι σχεδόν σταθερή στο σύνορο $\partial(B_t(\mu))$ του $B_t(\mu)$. Το πρώτο μας κύριο αποτέλεσμα δείχνει ότι αυτό ισχύει, γενικά, αν το $\mu = \mu_K$ είναι το ομοιόμορφο μέτρο σε ένα κεντραρισμένο κυρτό σώμα όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$.

Θεώρημα 5.1.1. Έστω K ένα κεντραρισμένο κυρτό σώμα όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$. Τότε, για κάθε $t > 0$ ισχύει ότι

$$\inf\{\varphi_{\mu_K}(x) : x \in B_t(\mu_K)\} \geq \frac{1}{10} \exp(-t - 2\sqrt{n}).$$

Έπεται ότι

$$\omega_{\mu_K}(x) - 5\sqrt{n} \leq \Lambda_\mu^*(x) \leq \omega_{\mu_K}(x)$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$, όπου $\omega_{\mu_K}(x) = \ln\left(\frac{1}{\varphi_{\mu_K}(x)}\right)$.

Το δεύτερο βήμα στην προσέγγισή μας είναι να θεωρήσουμε, για κάθε κεντραρισμένο λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας μ στον $\mathbb{R}^n$, την παράμετρο

$$(5.1.3) \quad \beta(\mu) = \frac{\text{Var}_\mu(\Lambda_\mu^*)}{(\mathbb{E}_\mu(\Lambda_\mu^*))^2}$$

με την προϋπόθεση ότι

$$\|\Lambda_\mu^*\|_{L^2(\mu)} = (\mathbb{E}_\mu((\Lambda_\mu^*)^2))^{1/2} < \infty.$$

Σε γενικές γραμμές, το πλάνο είναι το ακόλουθο: αν η φ_μ είναι «σχεδόν σταθερή» στο $\partial(B_t(\mu))$ για κάθε $t > 0$ και $\beta(\mu) = o_n(1)$, μπορούμε να εξασφαλίσουμε ένα «αυστηρό φαινόμενο κατωφλίου» για τη μέση τιμή του μέτρου του K_N με

$$\varrho_2 \approx \varrho_1 \approx \|\Lambda_\mu^*\|_{L^1(\mu)} = \mathbb{E}_\mu(\Lambda_\mu^*).$$

Αυτή η ιδέα παίρνει ακριβέστερη μορφή στην Ενότητα 5.4 όπου περιγράφεται επίσης μέσα από κάποια παραδείγματα. Σημειώνουμε ότι δεν είναι σαφές αν η Λ_μ^* έχει πεπερασμένη ροπή δεύτερης ή ανώτερης τάξης, κάτι που είναι απαραίτητο ώστε να ορίζεται η παράμετρος $\beta(\mu)$. Μελετάμε αυτό το ερώτημα στην Ενότητα 5.3 όπου δίνουμε καταφατική απάντηση στην περίπτωση του ομοιόμορφου μέτρου σε ένα κυρτό σώμα. Καλύπτουμε μάλιστα τη γενικότερη περίπτωση των κ -κοίλων μέτρων πιθανότητας, $\kappa \in (0, 1/n]$, που έχουν φορέα μέσα σε ένα κεντραρισμένο κυρτό σώμα.

Θεώρημα 5.1.2. Έστω K ένα κεντραρισμένο κυρτό σώμα όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$. Έστω $\kappa \in (0, 1/n]$ και μ ένα κεντραρισμένο κ -κοίλο μέτρο πιθανότητας με $\text{supp}(\mu) = K$. Τότε,

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{\frac{\kappa \Lambda_\mu^*(x)}{2}} d\mu(x) < \infty.$$

Ειδικότερα, για κάθε $p \geq 1$ ισχύει ότι $\mathbb{E}_\mu((\Lambda_\mu^*(x))^p) < \infty$.

Η μέθοδος απόδειξης του Θεωρήματος 5.1.2 δίνει επιπλέον καλά άνω φράγματα για την $\|\Lambda_\mu^*\|_{L^p(\mu)}$. Ειδικότερα, αν υποθέσουμε ότι $\mu = \mu_K$ είναι το ομοιόμορφο μέτρο σε ένα κεντραρισμένο κυρτό σώμα τότε παίρνουμε ακριβείς αμφίπλευρες εκτιμήσεις για την πιο ενδιαφέρουσα περίπτωση όπου $p = 1$ ή 2.

Θεώρημα 5.1.3. Έστω K ένα κεντραρισμένο κυρτό σώμα όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$. Τότε,

$$c_1 n / L_{\mu_K}^2 \leq \|\Lambda_{\mu_K}^*\|_{L^1(\mu_K)} \leq \|\Lambda_{\mu_K}^*\|_{L^2(\mu_K)} \leq c_2 n \ln n,$$

όπου L_{μ_K} είναι η ισοτροπική σταθερά του ομοιόμορφου μέτρου μ_K στο K και $c_1, c_2 > 0$ είναι απόλυτες σταθερές.

Στην Ενότητα 5.4 περιγράφουμε την προσέγγιση στο κεντρικό πρόβλημα και δείχνουμε πώς μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τα προηγούμενα αποτελέσματα για να πάρουμε φράγματα για την παράμετρο $\varrho(\mu, \delta)$. Διευκρινίζουμε επίσης τον ρόλο της παραμέτρου $\beta(\mu)$. Θα μπορούσαμε να ελπίζουμε ότι η $\beta(\mu)$ είναι μικρή καθώς η διάσταση αυξάνει, για παράδειγμα ότι $\beta(\mu) \leq c/\sqrt{n}$. Αν κάτι τέτοιο ισχύει, τότε το επόμενο γενικό αποτέλεσμα δίνει ικανοποιητικά κάτω φράγματα για την παράμετρο $\varrho_1(\mu, \delta)$.

Θεώρημα 5.1.4. Έστω μ ένα κεντραρισμένο λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$. Υποθέτουμε ότι $\beta(\mu) < 1/8$ και $8\beta(\mu) < \delta < 1$. Αν $n/L_\mu^2 \geq c_2 \ln(2/\delta) \sqrt{\delta/\beta(\mu)}$ όπου L_μ είναι η

ισοτροπική σταθερά του μ , τότε

$$\varrho_1(\mu, \delta) \geq \left(1 - \sqrt{8\beta(\mu)/\delta}\right) \frac{\mathbb{E}_\mu(\Lambda_\mu^*)}{n}.$$

Μπορούμε να δώσουμε ικανοποιητικά άνω φράγματα για την παράμετρο $\varrho_2(\mu, \delta)$ στην περίπτωση που το $\mu = \mu_K$ είναι το ομοιόμορφο μέτρο σε ένα κεντραρισμένο κυρτό σώμα K όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$.

Θεώρημα 5.1.5. Έστω K ένα κεντραρισμένο κυρτό σώμα όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$. Υποθέτουμε ότι $\beta(\mu_K) < 1/2$ και $2\beta(\mu_K) < \delta < 1$. Αν $n/L_{\mu_K}^2 \geq c_2 \ln(2/\delta) \sqrt{\delta/\beta(\mu_K)}$ τότε

$$\varrho_2(\mu_K, \delta) \leq \left(1 + \sqrt{8\beta(\mu_K)/\delta}\right) \frac{\mathbb{E}_{\mu_K}(\Lambda_{\mu_K}^*)}{n}.$$

Συνδυάζοντας αυτά τα δύο αποτελέσματα βλέπουμε ότι, υπό τον όρο ότι $n\beta(\mu_K)$ είναι μικρή σε σχέση με κάποιο δοθέν $\delta \in (0, 1)$, έχουμε φαινόμενο κατωφλίου με

$$\varrho(\mu_K, \delta) \leq \frac{c}{n} \sqrt{\frac{\text{Var}_{\mu_K}(\Lambda_{\mu_K}^*)}{\delta}}.$$

Η συζήτηση που προηγήθηκε αφήνει ανοικτό ένα τρίτο βασικό ερώτημα: να εκτιμήσουμε την παράμετρο

$$\beta_n := \sup\{\beta(\mu) : \mu \text{ κεντραρισμένο λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας στον } \mathbb{R}^n\}.$$

Στην Ενότητα 5.5 περιγράφουμε τη μέθοδο με κάποια παραδείγματα, όπως το ομοιόμορφο μέτρο στον μοναδιαίο κύβο, του μέτρο Gaussian και το ομοιόμορφο μέτρο στην Ευκλείδεια μπάλα D_n όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$.

5.2 Εκτιμήσεις για το βάθος ημίχωρου

Έστω μ ένα κεντραρισμένο λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$ με πυκνότητα $f := f_\mu$. Στόχος μας είναι να δώσουμε άνω και κάτω φράγματα για την $\varphi_\mu(x)$ όταν $x \in \partial(B_t(\mu))$, $t > 0$.

Λήμμα 5.2.1. Έστω μ ένα Borel μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$. Για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$ έχουμε ότι $\varphi_\mu(x) \leq \exp(-\Lambda_\mu^*(x))$. Ειδικότερα, για κάθε $t > 0$ και για κάθε $x \notin B_t(\mu)$ έχουμε ότι $\varphi_\mu(x) \leq \exp(-t)$.

Απόδειξη. Έστω $x \in \mathbb{R}^n$. Ξεκινάμε με την παρατήρηση ότι για κάθε $\xi \in \mathbb{R}^n$ ο ημίχωρος $\{z : \langle z - x, \xi \rangle \geq 0\}$ ανήκει στην οικογένεια $\mathcal{H}(x)$, άρα

$$\varphi_\mu(x) \leq \mu(\{z : \langle z, \xi \rangle \geq \langle x, \xi \rangle\}) \leq e^{-\langle x, \xi \rangle} \mathbb{E}_\mu(e^{\langle z, \xi \rangle}) = \exp(-[\langle x, \xi \rangle - \Lambda_\mu(\xi)]),$$

και παίρνοντας το infimum πάνω από όλα τα $\xi \in \mathbb{R}^n$ βλέπουμε ότι $\varphi_\mu(x) \leq \exp(-\Lambda_\mu^*(x))$, όπως θέλαμε. $\square$

Κατόπιν, θα θέλαμε να δώσουμε κάτω φράγμα για την $\varphi_\mu(x)$ όταν $x \in B_t(\mu)$. Στην περίπτωση όπου το $\mu = \mu_K$ είναι το ομοιόμορφο μέτρο σε ένα κεντραρισμένο κυρτό σώμα K όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$, έχουμε την ακόλουθη εκτίμηση.

Θεώρημα 5.2.2. Έστω K ένα κεντραρισμένο κυρτό σώμα όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$. Τότε, για κάθε $t > 0$ έχουμε ότι

$$\inf\{\varphi_{\mu_K}(x) : x \in B_t(\mu_K)\} \geq \frac{1}{10} \exp(-t - 2\sqrt{n}).$$

Το πρώτο μέρος της απόδειξης που θα δώσουμε δουλεύει για κάθε κεντραρισμένο λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας μ με πυκνότητα f στον $\mathbb{R}^n$. Για κάθε $\xi \in \mathbb{R}^n$ ορίζουμε το μέτρο πιθανότητας μ_ξ με πυκνότητα

$$f_\xi(z) = e^{-\Lambda_\mu(\xi) + \langle \xi, z \rangle} f(z).$$

Στο επόμενο λήμμα (βλ. [16, Πρόταση 7.2.1]) υπενθυμίζουμε κάποιες βασικές ιδιότητες του μ_ξ .

Λήμμα 5.2.3. Το κέντρο βάρους του μ_ξ είναι το $x = \nabla \Lambda_\mu(\xi)$ και $\text{Con}(\mu_\xi) = \text{Hess}(\Lambda_\mu)(\xi)$.

Θέτουμε επίσης

$$\sigma_\xi^2 = \int_{\mathbb{R}^n} \langle z - x, \xi \rangle^2 d\mu_\xi(z).$$

Έστω $t > 0$. Αφού το $B_t(\mu)$ είναι κυρτό, για να δώσουμε κάτω φράγμα για το $\inf\{\varphi_\mu(x) : x \in B_t(\mu)\}$ αρκεί να δώσουμε κάτω φράγμα για το $\mu(H)$, όπου H είναι τυχόν κλειστός ημίσφαιρος του οποίου το συνοριακό υπερεπίπεδο στηρίζεται το $B_t(\mu)$. Σε αυτήν την περίπτωση,

$$(5.2.1) \quad \mu(H) = \mu(\{z : \langle z - x, \xi \rangle \geq 0\})$$

για κάποιο $x \in \partial(B_t(\mu))$, με $\xi = \nabla \Lambda_\mu^*(x)$, ή ισοδύναμα $x = \nabla \Lambda_\mu(\xi)$ (βλ. για παράδειγμα Θεώρημα 23.5 και Πρόγραμμα 23.5.1 στο [54]). Σημειώνουμε ότι

$$\begin{aligned} (5.2.2) \quad \mu(\{z : \langle z - x, \xi \rangle \geq 0\}) &= \int_{\mathbb{R}^n} \mathbb{1}_{[0, \infty)}(\langle z - x, \xi \rangle) f(z) dz \\ &= e^{\Lambda_\mu(\xi)} \int_{\mathbb{R}^n} \mathbb{1}_{[0, \infty)}(\langle z - x, \xi \rangle) e^{-\langle z, \xi \rangle} d\mu_\xi(z) \\ &= e^{\Lambda_\mu(\xi)} e^{-\langle x, \xi \rangle} \int_{\mathbb{R}^n} \mathbb{1}_{[0, \infty)}(\langle z - x, \xi \rangle) e^{-\langle z - x, \xi \rangle} d\mu_\xi(z) \\ &\geq e^{-\Lambda_\mu^*(x)} \int_0^\infty \sigma_\xi e^{-\sigma_\xi t} \mu_\xi(\{z : 0 \leq \langle z - x, \xi \rangle \leq \sigma_\xi t\}) dt. \end{aligned}$$

Από την ανισότητα Markov βλέπουμε ότι

$$\mu_\xi(\{z : \langle z - x, \xi \rangle \geq 2\sigma_\xi\}) \leq \frac{1}{4}.$$

Επιπλέον, αφού το x είναι το κέντρο βάρους του μ_ξ , το λήμμα του Grünbaum (βλ. [16,

Λήμμα 2.2.6]) συνεπάγεται ότι

$$\mu_\xi(\{z : \langle z - x, \xi \rangle \geq 0\}) \geq \frac{1}{e}.$$

Άρα,

$$(5.2.3) \quad \int_0^\infty \sigma_\xi e^{-\sigma_\xi t} \mu_\xi(\{z : 0 \leq \langle z - x, \xi \rangle \leq \sigma_\xi t\}) dt \geq \int_2^\infty \sigma_\xi e^{-\sigma_\xi t} \left(\frac{1}{e} - \frac{1}{4} \right) dt \geq \frac{4-e}{4e} e^{-2\sigma_\xi}.$$

Θα θέλαμε τώρα ένα άνω φράγμα για το $\sup_\xi \sigma_\xi$. Μπορούμε να το επιτύχουμε όταν το $\mu = \mu_K$ είναι το ομοιόμορφο μέτρο σε ένα κεντραρισμένο κυρτό σώμα K όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$, χρησιμοποιώντας ένα θεώρημα του Nguyen [50] (το οποίο αποδείχθηκε ανεξάρτητα από τον Wang [61], βλ. επίσης [28]).

Θεώρημα 5.2.4. Έστω ν ένα λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$ με πυκνότητα $g = \exp(-p)$, όπου p είναι μια κυρτή συνάρτηση. Τότε,

$$\text{Var}_\nu(p) \leq n.$$

Περιγραφή της απόδειξης. Παρατηρούμε ότι

$$\text{Var}_\nu(p) = V(g) := \int_{\mathbb{R}^n} g(\ln g)^2 - \left(\int_{\mathbb{R}^n} g \ln g \right)^2.$$

Ορίζουμε $F : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $F(s) = \ln \left(\int_{\mathbb{R}^n} g^s(x) dx \right)$. Υπολογίζοντας τις $F''(s)$ και $V(g_s)$ βλέπουμε ότι $F''(s) = V(g_s)/s^2$, όπου g_s είναι η λογαριθμικά κοίλη πυκνότητα

$$g_s = \frac{g^s}{\int_{\mathbb{R}^n} g^s}.$$

Στη συνέχεια, παρατηρούμε ότι αν η $\psi : \mathbb{R}^n \rightarrow (-\infty, \infty]$ είναι κυρτή συνάρτηση τότε και η συνάρτηση $w : \mathbb{R}^n \times (0, \infty) \rightarrow (-\infty, \infty]$ με $w(z, s) = s\psi(z/s)$ είναι κυρτή. Έπεται ότι η συνάρτηση $G : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ που ορίζεται από την

$$G(s) = s^n \int_{\mathbb{R}^n} g^s(x) dx$$

είναι λογαριθμικά κοίλη. Αυτό ελέγχεται αν κάνουμε την αλλαγή μεταβλητής $x = z/s$ και χρησιμοποιήσουμε την κυρτότητα της w καθώς και το γεγονός ότι κάθε περιθώριο μέτρο ενός λογαριθμικά κοίλου μέτρου είναι λογαριθμικά κοίλο και συνεπώς έχει λογαριθμικά κοίλη πυκνότητα. Αυτό συνεπάγεται ότι $V(g_s) \leq n$ για κάθε $s > 0$. Πράγματι, για να το ελέγξουμε, γράφουμε $\ln G(s) = n \ln s + F(s)$ και παραγωγίζουμε δύο φορές. Ειδικότερα, για $s = 1$, παίρνουμε $V(g) \leq n$.

Στην περίπτωση όπου $g = e^{-p}$ όπως παραπάνω, και η p είναι θετικά ομογενής τάξης 1, μπορούμε να ελέγξουμε ότι $G(s) = 1$ για κάθε $s > 0$, άρα $V(g_s) = n$. Ειδικότερα, έχουμε ότι

$V(g) = n$, και αυτό δείχνει ότι η ανισότητα του θεωρήματος είναι βέλτιστη. $\square$

Απόδειξη του Θεωρήματος 5.2.2. Θέτουμε $\mu := \mu_K$. Εφόσον $f(z) = \mathbb{1}_K(z)$, η πυκνότητα f_ξ του μ_ξ είναι πολλαπλάσιο της $e^{\langle \xi, z \rangle} \mathbb{1}_K(z)$. Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι

$$\mathbb{E}_{\mu_\xi}(\langle \xi, z \rangle) = \langle \nabla \Lambda_\mu(\xi), \xi \rangle = \langle x, \xi \rangle,$$

από το Θεώρημα 5.2.4 παίρνουμε ότι

$$\sigma_\xi^2 = \mathbb{E}_{\mu_\xi}(\langle z - x, \xi \rangle)^2 = \text{Var}_{\mu_\xi}(\langle \xi, z \rangle) \leq n.$$

Τότε, συνδυάζοντας τις (5.2.1), (5.2.2) και (5.2.3), για κάθε υπερεπίπεδο στήριξης H του $B_t(\mu)$ έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \mu(H) &\geq e^{-\Lambda_\mu^*(x)} \int_0^\infty \sigma_\xi e^{-\sigma_\xi t} \mu_\xi(0 \leq \langle z - x, \xi \rangle \leq \sigma_\xi t) dt \\ &\geq \frac{4-e}{4e} e^{-\Lambda_\mu^*(x)-2\sigma_\xi} \geq \frac{1}{10} \exp(-t - 2\sqrt{n}), \end{aligned}$$

όπως θέλαμε. $\square$

Το Θεώρημα 5.2.2 δείχνει ότι αν K είναι ένα κεντραρισμένο κυρτό σώμα όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$ τότε

$$10\varphi_{\mu_K}(x) \geq \exp(-\Lambda_{\mu_K}^*(x) - 2\sqrt{n})$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$. Θέτοντας

$$(5.2.4) \quad \omega_{\mu_K}(x) = \ln\left(\frac{1}{\varphi_{\mu_K}(x)}\right)$$

και παίρνοντας υπ' όψιν μας το Λήμμα 5.2.1 έχουμε την ακόλουθη αμφίπλευρη εκτίμηση.

Πόρισμα 5.2.5. Έστω K ένα κεντραρισμένο κυρτό σώμα όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$. Τότε, για κάθε $x \in \text{int}(K)$ έχουμε ότι

$$(5.2.5) \quad \omega_{\mu_K}(x) - 5\sqrt{n} \leq \Lambda_{\mu_K}^*(x) \leq \omega_{\mu_K}(x).$$

Σημείωση 5.2.6. Ένα βασικό ερώτημα το οποίο προκύπτει από τα αποτελέσματα αυτής της ενότητας είναι κατά πόσον ισχύει κάποιο ανάλογο της (5.2.5) για κάθε κεντραρισμένο λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας μ στον $\mathbb{R}^n$. Αυτό θα μας επέτρεπε να εφαρμόσουμε τα επόμενα βήματα της διαδικασίας που προτείνουμε σε όλα τα λογαριθμικά κοίλα μέτρα πιθανότητας. Οι Μπραζιτικός και Χασάπης [15] απέδειξαν πρόσφατα μια τέτοια παραλλαγή του Θεωρήματος 5.2.2 η οποία ισχύει σε αυτό το πιο γενικό πλαίσιο.

Θεώρημα 5.2.7. Έστω μ ένα λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$. Για κάθε $x \in$

$\text{supp}(\mu)$ και κάθε $\varepsilon \in (0, 1)$ έχουμε ότι

$$\Lambda_\mu^*(x) \geq (1 - \varepsilon) \ln \left(\frac{1}{\varphi_\mu(x)} \right) + \ln \left(\frac{\varepsilon}{2^{1-\varepsilon}} \right).$$

Περιγραφή της απόδειξης. Ξεκινάμε με την περίπτωση $n = 1$. Αρχικά παρατηρούμε ότι η $\varphi_\mu(y) = \min\{\mu((-\infty, y]), \mu([y, \infty))\}$ είναι λογαριθμικά κοίλη συνάρτηση. Τότε, η συνάρτηση $g(y) = -(1-\varepsilon) \ln \varphi_\mu(y)$ είναι κυρτή, άρα μπορούμε να βρούμε $t, b \in \mathbb{R}$ τέτοιους ώστε η $\ell(y) = ty + b$ να ικανοποιεί τις $\ell(x) = g(x)$ και $\ell(y) \leq g(y)$ για κάθε y . Άρα, $\mathbb{E}_\mu(e^{\ell(y)}) \leq \mathbb{E}_\mu(e^{g(y)})$, ή ισοδύναμα

$$-\ln(\mathbb{E}_\mu(e^{g(y)})) \leq -\ln(\mathbb{E}_\mu(e^{\ell(y)})) = -b - \Lambda_\mu(t).$$

Εφόσον $\ell(x) = g(x)$, βλέπουμε ότι

$$g(x) - \ln(\mathbb{E}_\mu(e^{g(y)})) \leq \ell(x) - b - \Lambda_\mu(t) = xt - \Lambda_\mu(t) \leq \Lambda_\mu^*(x).$$

Τέλος, μπορούμε να ελέγξουμε ότι $\mathbb{E}(\varphi_\mu(y)^{\varepsilon-1}) \leq (\varepsilon 2^{\varepsilon-1})^{-1}$ (βλ. [15, Πρόταση 3.2]), απ' όπου έπεται ότι

$$-\ln(\mathbb{E}_\mu(e^{g(y)})) = -\ln(\mathbb{E}_\mu(\varphi_\mu(y)^{\varepsilon-1})) \geq \ln \left(\frac{\varepsilon}{2^{1-\varepsilon}} \right)$$

και έχουμε αποδείξει τον ισχυρισμό του θεωρήματος στη μονοδιάστατη περίπτωση.

Υποθέτουμε τώρα ότι $n > 1$. Αν X είναι ένα τυχαίο διάνυσμα στον $\mathbb{R}^n$ με κατανομή μ , για κάθε $\xi \in S^{n-1}$ θεωρούμε την τυχαία μεταβλητή $\xi_X = \langle X, \xi \rangle$. Τότε, η κατανομή μ_ξ της ξ_X είναι λογαριθμικά κοίλη και από τον ισχυρισμό της μονοδιάστατης περίπτωσης βλέπουμε ότι

$$\Lambda_{\mu_\xi}^*(\langle x, \xi \rangle) \geq (1 - \varepsilon) \ln \left(\frac{1}{\varphi_{\mu_\xi}(\langle x, \xi \rangle)} \right) + \ln \left(\frac{\varepsilon}{2^{1-\varepsilon}} \right)$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$. Παρατηρούμε ότι, για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$,

$$\Lambda_\mu^*(x) = \sup_{y \in \mathbb{R}^n} (\langle x, y \rangle - \Lambda_\mu(y)) = \sup_{(\xi, t) \in S^{n-1} \times \mathbb{R}} (t \langle x, \xi \rangle - \Lambda_{\mu_\xi}(t)) = \sup_{\xi \in S^{n-1}} \Lambda_{\mu_\xi}^*(\langle x, \xi \rangle).$$

Εφόσον

$$\sup_{\xi \in S^{n-1}} \ln \left(\frac{1}{\varphi_{\mu_\xi}(\langle x, \xi \rangle)} \right) = \ln \left(\frac{1}{\inf_{\xi \in S^{n-1}} \mu(\{z : \langle z, \xi \rangle \geq \langle x, \xi \rangle\})} \right) = \ln \left(\frac{1}{\varphi_\mu(x)} \right),$$

συνδυάζοντας τα παραπάνω παίρνουμε το ζητούμενο. $\square$

Σημείωση. Μπορούμε να ξαναγράψουμε την ανισότητα του Θεωρήματος 5.2.7 στη μορφή $\varphi_\mu(x)^{1-\varepsilon} \geq (\varepsilon/2^{1-\varepsilon})e^{-\Lambda_\mu^*(x)}$, απ' όπου βλέπουμε ότι

$$(5.2.6) \quad [\varphi_-(B_t(\mu))]^{1-\varepsilon} \geq \frac{\varepsilon}{2^{1-\varepsilon}} e^{-t}$$

για κάθε $\varepsilon \in (0, 1)$. Αυτή η ανισότητα, η οποία ισχύει για όλα τα λογαριθμικά κοίλα μέτρα πιθανότητας, μπορεί να παίξει τον ρόλο της εκτίμησης που δίνει το Θεώρημα 5.2.2.

5.3 Ροπές του μετασχηματισμού Cramér

Όπως εξηγήσαμε στην εισαγωγή, θα θέλαμε να γνωρίζουμε για ποια κεντραρισμένα λογαριθμικά κοίλα μέτρα πιθανότητας μ στον $\mathbb{R}^n$ ισχύει ότι η Λ_μ^* έχει πεπερασμένες ροπές όλων των τάξεων. Το πρώτο μας αποτέλεσμα δίνει καταφατική απάντηση στην περίπτωση που το $\mu = \mu_K$ είναι το ομοιόμορφο μέτρο σε ένα κεντραρισμένο κυρτό σώμα K όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$. Μάλιστα, το επόμενο θεώρημα καλύπτει μια πιο γενική περίπτωση.

Θεώρημα 5.3.1. Έστω K ένα κεντραρισμένο κυρτό σώμα όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$. Έστω $\kappa \in (0, 1/n]$ και έστω μ ένα κεντραρισμένο κ -κοίλο μέτρο πιθανότητας με $\text{supp}(\mu) = K$. Τότε,

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{\frac{\kappa \Lambda_\mu^*(x)}{2}} d\mu(x) < \infty.$$

Ειδικότερα, για κάθε $p \geq 1$ έχουμε ότι $\mathbb{E}_\mu((\Lambda_\mu^*(x))^p) < \infty$.

Η απόδειξη του Θεωρήματος 5.3.1 βασίζεται στο επόμενο λήμμα, το οποίο αποδεικνύεται στο [18, Λήμμα 7] στη συμμετρική περίπτωση.

Λήμμα 5.3.2. Έστω K ένα κεντραρισμένο κυρτό σώμα όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$. Έστω $\kappa \in (0, 1/n]$ και έστω μ ένα κεντραρισμένο κ -κοίλο μέτρο πιθανότητας με $\text{supp}(\mu) = K$. Τότε,

$$(5.3.1) \quad \varphi_\mu(x) \geq e^{-2} \kappa (1 - \|x\|_K)^{1/\kappa}$$

για κάθε $x \in K$, όπου $\|x\|_K$ είναι το συναρτησοειδές Minkowski του K .

Σκιαγράφηση της απόδειξης. Θα τροποποιήσουμε το επιχείρημα από το [18, Λήμμα 7] για να καλύψουμε και τη μη συμμετρική περίπτωση. Έστω X ένα τυχαίο διάνυσμα που έχει ως κατανομή το μ . Για δοθέν $\vartheta \in S^{n-1}$ θέτουμε $b = h_K(\vartheta)$ και $a = h_K(-\vartheta)$. Αν g_ϑ είναι η πυκνότητα της τυχαίας μεταβλητής $\langle X, \vartheta \rangle$ τότε η $g_\vartheta^{\frac{1}{1-\kappa}}$ είναι κοίλη στο $[-a, b]$, άρα

$$g_\vartheta(t) \geq g_\vartheta(0) \left(1 - \frac{t}{b}\right)^{\frac{1-\kappa}{\kappa}}$$

για κάθε $t \in [0, b]$. Έπεται ότι, για κάθε $0 < s < b$,

$$\mathbb{P}(\langle X, \vartheta \rangle \geq s) = \int_s^b g_\vartheta(t) dt \geq g_\vartheta(0) \int_s^b \left(1 - \frac{t}{b}\right)^{\frac{1-\kappa}{\kappa}} dt = \kappa g_\vartheta(0) b \left(1 - \frac{s}{b}\right)^{\frac{1}{\kappa}}.$$

Σημειώνουμε ότι η g_ϑ είναι μια κεντραρισμένη λογαριθμικά κοίλη πυκνότητα. Συνεπώς, $g_\vartheta(0) \geq e^{-1} \|g_\vartheta\|_\infty$ από την (3.2.1) και $\|g_\vartheta\|_\infty b \geq \mathbb{P}(\langle X, \vartheta \rangle \geq 0) \geq e^{-1}$ από το λήμμα του Grünbaum [16, Λήμμα 2.2.6], το οποίο συνεπάγεται ότι $g_\vartheta(0) b \geq e^{-2}$. Έπεται ότι

$$\mathbb{P}(\langle X, \vartheta \rangle \geq s) = \int_s^b g_\vartheta(t) dt \geq e^{-2} \kappa \left(1 - \frac{s}{b}\right)^{\frac{1}{\kappa}}.$$

Τώρα, έστω $x \in K$. Τότε $\langle x, \vartheta \rangle \leq \|x\|_K h_K(\vartheta) = \|x\|_K b$, και συνεπώς

$$\mathbb{P}(\langle X, \vartheta \rangle \geq \langle x, \vartheta \rangle) \geq \mathbb{P}(\langle X, \vartheta \rangle \geq \|x\|_K b) \geq e^{-2\kappa(1 - \|x\|_K)^{\frac{1}{\kappa}}}$$

όπως θέλαμε. $\square$

Απόδειξη του Θεωρήματος 5.3.1. Από το Λήμμα 5.2.1 γνωρίζουμε ότι $\varphi_\mu(x) \leq \exp(-\Lambda_\mu^*(x))$, ή ισοδύναμα,

$$e^{\frac{\kappa \Lambda_\mu^*(x)}{2}} \leq \frac{1}{\varphi_\mu(x)^{\kappa/2}}$$

για κάθε $x \in K$. Από το Λήμμα 5.3.2 γνωρίζουμε ότι

$$\varphi_\mu(x) \geq e^{-2\kappa(1 - \|x\|_K)^{1/\kappa}}$$

για κάθε $x \in K$. Έπεται ότι

$$\int_K e^{\frac{\kappa \Lambda_\mu^*(x)}{2}} d\mu(x) \leq (e^2/\kappa)^{\kappa/2} \int_K \frac{1}{(1 - \|x\|_K)^{1/2}} d\mu(x).$$

Υπενθυμίζουμε ότι το κωνικό μέτρο πιθανότητας ν_K στο σύνορο $\partial(K)$ ενός κυρτού σώματος K με $0 \in \text{int}(K)$ ορίζεται ως εξής:

$$\nu_K(B) = \frac{|\{rx : x \in B, 0 \leq r \leq 1\}|}{|K|}$$

για όλα τα Borel υποσύνολα B του $\partial(K)$. Θα χρησιμοποιήσουμε την ταυτότητα

$$\int_{\mathbb{R}^n} g(x) dx = n|K| \int_0^\infty r^{n-1} \int_{\partial(K)} g(rx) d\nu_K(x) dr$$

η οποία ισχύει για κάθε ολοκληρώσιμη συνάρτηση $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ (βλ. [49, Πρόταση 1]). Έστω f η πυκνότητα του μ στο K . Γράφουμε

$$\begin{aligned} \int_K \frac{1}{(1 - \|x\|_K)^{1/2}} d\mu(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(x)}{(1 - \|x\|_K)^{1/2}} \mathbb{1}_K(x) dx \\ &= n|K| \int_0^\infty r^{n-1} \int_{\partial(K)} \frac{f(ry)}{(1 - \|ry\|_K)^{1/2}} \mathbb{1}_K(ry) d\nu_K(y) dr \\ &= n|K| \int_0^1 \frac{r^{n-1}}{\sqrt{1-r}} \int_{\partial(K)} f(ry) d\nu_K(y) dr \\ &\leq n|K| \|f\|_\infty \int_0^1 \frac{r^{n-1}}{\sqrt{1-r}} dr = n|K| B(n, 1/2) \|f\|_\infty \leq c \sqrt{n} \|f\|_\infty < +\infty, \end{aligned}$$

και η απόδειξη είναι πλήρης. $\square$

Στην περίπτωση του ομοιόμορφου μέτρου $\mu = \mu_K$ σε ένα κεντραρισμένο κυρτό σώμα K

όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$ βλέπουμε ότι

$$\int_K (\Lambda_{\mu_K}^*(x)/2n)^p dx \leq (c_1 p)^p \int_K e^{\frac{\Lambda_{\mu_K}^*(x)}{2n}} dx \leq (c_2 p)^p \sqrt{n},$$

όπου $c_1, c_2 > 0$ είναι απόλυτες σταθερές. Αυτό μας δίνει την ακόλουθη εκτίμηση για τις ροπές της $\Lambda_{\mu_K}^*$:

$$\|\Lambda_{\mu_K}^*\|_{L^p(\mu_K)} \leq c p n^{1+\frac{1}{2p}}$$

για κάθε $p \geq 1$. Όμως, ουσιαστικά επαναλαμβάνοντας το επιχείρημα που χρησιμοποιήσαμε για το Θεώρημα 5.3.1 μπορούμε να πάρουμε ακριβείς εκτιμήσεις στην πιο ενδιαφέρουσα περίπτωση $p = 1$ ή 2 . Θα χρειαστούμε το επόμενο λήμμα.

Λήμμα 5.3.3. *Θέτουμε $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$. Τότε,*

$$\int_0^1 r^{n-1} \ln(1-r) dr = -\frac{1}{n} H_n$$

και

$$\int_0^1 r^{n-1} \ln^2(1-r) dr = \frac{1}{n} H_n^2 + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}.$$

Απόδειξη. Θεωρούμε το Βήτα ολοκλήρωμα

$$B(x, y) = \int_0^1 r^{x-1} (1-r)^{y-1} dr$$

και το παραγωγίζουμε ως προς y . Τότε, τα δύο ολοκληρώματα που μας ενδιαφέρουν είναι ίσα με

$$\frac{\partial}{\partial y} B(x, y) \Big|_{y=1} \quad \text{και} \quad \frac{\partial^2}{\partial^2 y} B(x, y) \Big|_{y=1}$$

αντίστοιχα. Έχουμε ότι

$$\frac{\partial}{\partial y} B(x, y) = B(x, y) \left(\frac{\Gamma'(y)}{\Gamma(y)} - \frac{\Gamma'(x+y)}{\Gamma(x+y)} \right) = B(x, y) (\psi(y) - \psi(x+y)),$$

όπου $\psi(y) = \frac{\Gamma'(y)}{\Gamma(y)}$ είναι η διγάμμα-συνάρτηση. Επιπλέον,

$$\frac{\partial^2}{\partial^2 y} B(x, y) = B(x, y) ((\psi(y) - \psi(x+y))^2 + (\psi'(y) - \psi'(x+y))).$$

Υπενθυμίζουμε (βλ. για παράδειγμα [4]) ότι

$$\psi(n+1) - \psi(1) = H_n := \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \quad \text{και} \quad \psi'(n) = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$

για κάθε $n \geq 1$. Συνεπώς,

$$\int_0^1 r^{n-1} \ln(1-r) dr = B(n, 1)(\psi(1) - \psi(n+1)) = -\frac{1}{n} H_n,$$

και

$$\int_0^1 r^{n-1} \ln^2(1-r) dr = B(n, 1)((\psi(1) - \psi(n+1))^2 + (\psi'(1) - \psi'(n+1))) = \frac{1}{n} H_n^2 + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2},$$

όπως ισχυριστήκαμε. $\square$

Θεώρημα 5.3.4. Έστω K ένα κεντραρισμένο κυρτό σώμα όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$. Θεωρούμε $\kappa \in (0, 1/n]$ και έστω μ ένα κεντραρισμένο κ -κοίλο μέτρο πιθανότητας με $\text{supp}(\mu) = K$. Τότε,

$$\mathbb{E}_\mu(\Lambda_\mu^*) \leq (\mathbb{E}_\mu[(\Lambda_\mu^*)^2])^{1/2} \leq \frac{c \ln n}{\kappa} \|f\|_\infty^{1/2},$$

όπου $c > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά και f είναι η πυκνότητα του μ .

Απόδειξη. Όπως στην απόδειξη του Θεωρήματος 5.3.1, γράφουμε

$$\int_K (\Lambda_\mu^*(x))^2 d\mu(x) \leq \int_K \ln^2 \left(\frac{e^2}{\kappa (1 - \|x\|_K)^{1/\kappa}} \right) d\mu(x).$$

Αν f είναι η πυκνότητα του μ στο K και ν_K είναι το κωνικό μέτρο πιθανότητας του K , χρησιμοποιώντας την ανισότητα $\ln^2(ab) \leq 2(\ln^2 a + \ln^2 b)$ όπου $a, b > 0$, μπορούμε να γράψουμε

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_K \ln^2 \left(\frac{e^2}{\kappa (1 - \|x\|_K)^{1/\kappa}} \right) d\mu(x) - \ln^2 \left(\frac{e^2}{\kappa} \right) \\ & \leq \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \ln^2 \left(\frac{1}{(1 - \|x\|_K)^{1/\kappa}} \right) \mathbb{1}_K(x) dx \\ & = n|K| \int_0^\infty r^{n-1} \int_{\partial(K)} f(ry) \ln^2 \left(\frac{1}{(1 - \|ry\|_K)^{1/\kappa}} \right) \mathbb{1}_K(ry) d\nu_K(y) dr \\ & = \frac{n}{\kappa^2} \int_0^1 r^{n-1} \ln^2(1-r) \int_{\partial(K)} f(ry) d\nu_K(y) dr \\ & \leq \frac{n}{\kappa^2} \|f\|_\infty \int_0^1 r^{n-1} \ln^2(1-r) dr. \end{aligned}$$

Εφόσον $1 \leq \int_K f(x) dx \leq \|f\|_\infty$, χρησιμοποιώντας επίσης το Λήμμα 5.3.3 παίρνουμε

$$\begin{aligned} \int_K (\Lambda_\mu^*(x))^2 d\mu(x) & \leq \frac{2n}{\kappa^2} \left(\frac{1}{n} H_n^2 + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \right) \|f\|_\infty + 2 \ln^2 \left(\frac{e^2}{\kappa} \right) \\ & \leq \left(\frac{c_0 H_n^2}{\kappa^2} + 2 \ln^2(e^2/\kappa) \right) \|f\|_\infty \leq \frac{c_1 \ln^2 n}{\kappa^2} \|f\|_\infty, \end{aligned}$$

όπου $c_1 > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά. Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη. $\square$

Το άνω φράγμα του Θεωρήματος 5.3.4 συμπληρώνεται από το κάτω φράγμα που μας δίνει το επόμενο λήμμα.

Λήμμα 5.3.5. Έστω μ ένα λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$, $n \geq n_0$. Τότε,

$$\mathbb{E}(\Lambda_\mu^*) \geq cn/L_\mu^2,$$

όπου L_μ είναι η ιστροπική σταθερά του μ και $c > 0$, $n_0 \in \mathbb{N}$ είναι απόλυτες σταθερές.

Απόδειξη. Το Θεώρημα 4.1.1 ισχυρίζεται ότι αν μ είναι ένα λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$ τότε

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi_\mu(x) d\mu(x) \leq \exp(-cn/L_\mu^2),$$

όπου $c > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά. Μάλιστα, η απόδειξη αυτής της εκτίμησης ξεκινάει με το Λήμμα 5.2.1 και το συμπέρασμα προκύπτει από το εξής ισχυρότερο αποτέλεσμα: Αν $n \geq n_0$ τότε

$$\int_{\mathbb{R}^n} \exp(-\Lambda_\mu^*(x)) d\mu(x) \leq \exp(-cn/L_\mu^2)$$

όπου L_μ είναι η ιστροπική σταθερά του μ και $c > 0$, $n_0 \in \mathbb{N}$ είναι απόλυτες σταθερές. Κατόπιν, από την ανισότητα Jensen βλέπουμε ότι

$$e^{-\mathbb{E}_\mu(\Lambda_\mu^*)} \leq \int_{\mathbb{R}^n} \exp(-\Lambda_\mu^*(x)) d\mu(x) \leq \exp(-cn/L_\mu^2)$$

απ' όπου παίρνουμε τον ισχυρισμό του λήμματος. □

Το κάτω φράγμα του Λήμματος 5.3.5 και το άνω φράγμα του Θεωρήματος 5.3.4 είναι και τα δύο βέλτιστα ως προς τη διάσταση, όπως μπορεί να δει κανείς θεωρώντας το ομοιόμορφο μέτρο στον κύβο ή την Ευκλείδεια μπάλα αντίστοιχα.

Παρουσιάζουμε τώρα μια εναλλακτική προσέγγιση στο πρόβλημα των ροπών της Λ_μ^* , η οποία βασίζεται στην έννοια του αφφινικού εμβαδού επιφάνειας. Έστω K ένα κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Το αφφινικό εμβαδόν επιφάνειας του K είναι η ποσότητα

$$\text{as}(K) = \int_{\partial(K)} \kappa(x)^{\frac{1}{n+1}} d\mu_{\partial(K)}(x),$$

όπου $\kappa(x)$ είναι η γενικευμένη καμπυλότητα Gauss-Kronecker στο x και $\mu_{\partial(K)}$ είναι το επιφανειακό μέτρο στο $\partial(K)$ (βλέπε [48] και τις αναφορές που δίνονται εκεί). Το αφφινικό εμβαδόν επιφάνειας μιας Ευκλείδειας μπάλας με ακτίνα 1 είναι ίσο με το εμβαδόν της επιφάνειάς της και το αφφινικό εμβαδόν επιφάνειας οποιουδήποτε πολυτόπου είναι ίσο με 0. Η αφφινική ισοπεριμετρική ανισότητα ισχυρίζεται ότι

$$\left(\frac{\text{as}(K)}{\text{as}(B_2^n)} \right)^{n+1} \leq \left(\frac{|K|}{|B_2^n|} \right)^{n-1}$$

με ισότητα αν και μόνο αν το K είναι ελλειροειδές (βλέπε [55, Ενότητα 10.5]). Δεδομένου ότι $\text{as}(B_2^n) = n\omega_n$ όπου $\omega_n = |B_2^n|$, βλέπουμε ότι αν $|K| = |B_2^n|$ τότε $\text{as}(K) \leq \text{as}(B_2^n)$. Επίσης, αν $|K| = 1$ τότε

$$\text{as}(K) \leq n\omega_n \cdot \frac{1}{\omega_n^{\frac{n-1}{n+1}}} = n\omega_n^{\frac{2}{n+1}} \leq c_1.$$

Για κάθε $\delta \in (0, 1/2)$ ορίζουμε το «επιπλέον σώμα»

$$K_\delta = \bigcap \{H^+ : H^+ \text{ κλειστός ημίχωρος με } |K \cap H^-| = \delta\},$$

όπου H^- είναι ο συμπληρωματικός ημίχωρος του H^+ . Ορίζουμε επίσης

$$T_\delta = \{x \in K : \varphi_{\mu_K}(x) \geq \delta\}$$

Σημειώνουμε ότι το T_δ είναι κυρτό: αν $x, y \in T_\delta$ τότε για κάθε $z \in [x, y]$ και κάθε $H \in \mathcal{H}(z)$ έχουμε ότι είτε το x είτε το y ανήκει στον H , άρα $|K \cap H| \geq \delta$, και αυτό δείχνει ότι $\varphi_{\mu_K}(z) \geq \delta$. Μάλιστα, δεν είναι δύσκολο να δείξουμε ότι

$$T_\delta = K_\delta.$$

Οι Schütt και Werner απέδειξαν στο [56] ότι για κάθε κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$ ισχύει ότι

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{|K| - |K_\delta|}{\delta^{\frac{2}{n+1}}} = \frac{1}{2} \left(\frac{n+1}{\omega_{n-1}} \right)^{\frac{2}{n+1}} \text{as}(K).$$

Ειδικότερα, αν $|K| = 1$ τότε υπάρχει $\delta_0 > 0$ τέτοιο ώστε αν $0 < \delta < \delta_0$ να ισχύει ότι

$$1 - |K_\delta| \leq c_2 n \delta^{\frac{2}{n+1}}.$$

Μπορούμε να εκμεταλλευτούμε αυτά τα αποτελέσματα ως εξής. Υπενθυμίζουμε ότι $\varphi_{\mu_K}(x) \leq \exp(-\Lambda_{\mu_K}^*(x))$ και άρα, για κάθε $s > 0$ έχουμε ότι

$$\exp(s\Lambda_{\mu_K}^*(x)) \leq (\varphi_{\mu_K}(x))^{-s}.$$

Συνεπώς,

$$\begin{aligned} \int_K \exp(s\Lambda_{\mu_K}^*(x)) dx &\leq \int_K \frac{1}{(\varphi_{\mu_K}(x))^s} dx = \int_0^\infty \mu_K(\{1/\varphi_{\mu_K}^s \geq t\}) dt \\ &= \int_0^\infty \mu_K(\{\varphi_{\mu_K} \leq 1/t^{1/s}\}) dt = \int_0^\infty (1 - \mu_K(T_{t^{-1/s}})) dt \\ &= \int_0^\infty (1 - \mu_K(T_{t^{-1/s}})) dt. \end{aligned}$$

Θέτουμε $t_0 = \delta_0^{-s}$. Τότε,

$$\int_{t_0}^{\infty} (1 - \mu_K(T_{t^{-1/s}})) dt \leq c_2 n \int_{t_0}^{\infty} t^{-\frac{2}{s(n+1)}} dt < +\infty$$

αν υποθέσουμε ότι $s < \frac{2}{n+1}$. Έτσι, έχουμε αποδείξει το ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 5.3.6. Έστω K ένα κυρτό σώμα όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$. Για κάθε $0 < s < \frac{2}{n+1}$ ισχύει ότι

$$\int_{\mathbb{R}^n} \exp(s\Lambda_{\mu_K}^*(x)) d\mu_K(x) < \infty.$$

Ειδικότερα, για κάθε $p \geq 1$ έχουμε ότι $\mathbb{E}_{\mu_K}((\Lambda_{\mu_K}^*(x))^p) < \infty$.

Μπορούμε επίσης να πάρουμε μια γενίκευση αυτού του θεωρήματος, με παρόμοιο επιχείρημα, χρησιμοποιώντας αποτελέσματα των Besau, Ludwig και Werner για σταθμισμένα επιπλέοντα σώματα. Πιο συγκεκριμένα, από το [7, Θεώρημα 1.1] προκύπτει ότι το συμπέρασμα του Θεωρήματος 5.3.6 εξακολουθεί να ισχύει αν αντικαταστήσουμε το μ_K με οποιοδήποτε μέτρο πιθανότητας που έχει συνεχή και γνησίως θετική πυκνότητα $\psi : K \rightarrow (0, +\infty)$. Αυτές οι ιδέες θα μπορούσαν να φανούν χρήσιμες στη μελέτη του προβλήματος για τυχόν λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας.

Το επόμενο αποτέλεσμα αφορά τη μονοδιάστατη περίπτωση. Έστω μ ένα κεντραρισμένο μέτρο πιθανότητας στο $\mathbb{R}$ το οποίο είναι απολύτως συνεχές ως προς το μέτρο Lebesgue. Θεωρούμε μια τυχαία μεταβλητή X , σε κάποιον χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, με κατανομή μ , δηλαδή, $\mu(B) := P(X \in B)$, $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Ορίζουμε

$$\alpha_+ = \alpha_+(\mu) := \sup \{x \in \mathbb{R} : \mu([x, \infty)) > 0\} \quad \text{και} \quad \alpha_- = \alpha_-(\mu) := \sup \{x \in \mathbb{R} : \mu((-\infty, -x]) > 0\}.$$

Με άλλα λόγια, τα $-\alpha_-, \alpha_+$ είναι τα άκρα του φορέα του μ . Σημειώνουμε ότι δεν αποκλείεται να έχουμε $\alpha_{\pm} = +\infty$. Ορίζουμε $I_{\mu} = (-\alpha_-, \alpha_+)$. Υπενθυμίζουμε ότι

$$\Lambda_{\mu}^*(x) := \sup\{tx - \Lambda_{\mu}(t) : t \in \mathbb{R}\}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Μάλιστα, αφού $tx - \Lambda_{\mu}(t) < 0$ για $t < 0$ όταν $x \in [0, \alpha_+)$, έχουμε ότι $\Lambda_{\mu}^*(x) = \sup\{tx - \Lambda_{\mu}(t) : t \geq 0\}$ σε αυτήν την περίπτωση, και όμοια $\Lambda_{\mu}^*(x) := \sup\{tx - \Lambda_{\mu}(t) : t \leq 0\}$ όταν $x \in (-\alpha_-, 0]$. Μπορούμε επίσης να ελέγξουμε ότι $\Lambda_{\mu}^*(\alpha_{\pm}) = +\infty$. Δείτε το [31, Λήμμα 2.8] για την περίπτωση $\alpha_{\pm} < +\infty$. Εάν $\alpha_{\pm} = \pm\infty$, τότε η κυρτότητα και οι ιδιότητες μονοτονίας της Λ_{μ}^* συνεπάγονται πάλι ότι $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \Lambda_{\mu}^*(t) = +\infty$.

Πρόταση 5.3.7. Έστω μ ένα κεντραρισμένο μέτρο πιθανότητας στο $\mathbb{R}$ το οποίο είναι απολύτως συνεχές ως προς το μέτρο Lebesgue. Τότε,

$$\int_{I_{\mu}} e^{\Lambda_{\mu}^*(x)/2} d\mu(x) \leq 4,$$

όπου $I_\mu = \text{supp}(\mu)$. Ειδικότερα, για κάθε $p \geq 1$ έχουμε ότι

$$\int_{I_\mu} (\Lambda_\mu^*(x))^p d\mu(x) < +\infty.$$

Απόδειξη. Θεωρούμε την $F(x) = \mu(-\infty, x]$. Για κάθε $x \in [0, \alpha_+)$ και $t \geq 0$ έχουμε

$$\min\{F(x), 1 - F(x)\} = \varphi_\mu(x) \leq e^{-\Lambda_\mu^*(x)}.$$

Έπεται ότι

$$\begin{aligned} (5.3.2) \quad \int_{I_\mu} e^{\Lambda_\mu^*(x)/2} d\mu(x) &\leq \int_{I_\mu} \frac{1}{\sqrt{\min\{F(x), 1 - F(x)\}}} f(x) dx \\ &\leq \int_{I_\mu} \frac{1}{\sqrt{F(x)}} f(x) dx + \int_{I_\mu} \frac{1}{\sqrt{1 - F(x)}} f(x) dx. \end{aligned}$$

Γράφουμε f για την πυκνότητα του μ ως προς το μέτρο Lebesgue. Τότε, $(1 - F)'(x) = -f(x)$, και αυτό συνεπάγεται ότι

$$\int_0^{\alpha_+} \frac{1}{\sqrt{1 - F(x)}} f(x) dx = - \int_0^{\alpha_+} \frac{1}{\sqrt{1 - F(x)}} (1 - F)'(x) dx = -2 \sqrt{1 - F(x)} \Big|_0^{\alpha_+} = 2 \sqrt{1 - F(0)}$$

εφόσον $F(\alpha_+) = 1$. Με τον ίδιο τρόπο ελέγχουμε ότι

$$\int_{-\alpha_-}^0 \frac{1}{\sqrt{1 - F(x)}} f(x) dx = - \int_{-\alpha_-}^0 \frac{1}{\sqrt{1 - F(x)}} (1 - F)'(x) dx = -2 \sqrt{1 - F(x)} \Big|_{-\alpha_-}^0 = 2 - 2 \sqrt{1 - F(0)}.$$

Αυτό αποδεικνύει ότι

$$\int_{I_\mu} \frac{1}{\sqrt{1 - F(x)}} f(x) dx \leq 2.$$

Με παρόμοιο τρόπο παίρνουμε το ίδιο άνω φράγμα για τον δεύτερο προσθετέο στην (5.3.2) και έπεται το συμπέρασμα. $\square$

Μπορούμε να επεκτείνουμε την Πρόταση 5.3.7 σε μέτρα γινόμενα. Έστω μ_i , $1 \leq i \leq n$ κεντραρισμένα μέτρα πιθανότητας στο $\mathbb{R}$, όλα τους απολύτως συνεχή ως προς το μέτρο Lebesgue. Εάν $\bar{\mu} = \mu_1 \otimes \cdots \otimes \mu_n$ τότε $I_{\bar{\mu}} = \prod_{i=1}^n I_{\mu_i}$ και μπορούμε εύκολα να ελέγξουμε ότι

$$\Lambda_{\bar{\mu}}^*(x) = \sum_{i=1}^n \Lambda_{\mu_i}^*(x_i)$$

για κάθε $x = (x_1, \dots, x_n) \in I_{\bar{\mu}}$, απ' όπου βλέπουμε ότι

$$\int_{I_{\bar{\mu}}} e^{\Lambda_{\bar{\mu}}^*(x)/2} d\bar{\mu}(x) = \prod_{i=1}^n \left(\int_{I_{\mu_i}} e^{\Lambda_{\mu_i}^*(x_i)/2} d\mu_i(x_i) \right) \leq 4^n.$$

Ειδικότερα, για κάθε $p \geq 1$ έχουμε ότι

$$\int_{I_{\bar{\mu}}} (\Lambda_{\bar{\mu}}^*(x))^p d\bar{\mu}(x) < +\infty.$$

Κλείνουμε αυτήν την ενότητα με μία ακόμη περίπτωση στην οποία μπορούμε να εξασφαλίσουμε ότι η Λ_{μ}^* έχει πεπερασμένες ροπές όλων των τάξεων. Θεωρούμε τυχόν κεντραρισμένο λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$ αλλά πρέπει να επιβάλουμε κάποιες συνθήκες για την αυξητικότητα των μονόπλευρων L_t -κεντροειδών σωμάτων $Z_t^+(\mu)$. Υπενθυμίζουμε ότι για κάθε $t \geq 1$, το μονόπλευρο L_t -κεντροειδές σώμα $Z_t^+(\mu)$ του μ είναι το κυρτό σώμα με συνάρτηση στήριξης την

$$h_{Z_t^+(\mu)}(y) = \left(\int_{\mathbb{R}^n} \langle x, y \rangle_+^t f_{\mu}(x) dx \right)^{1/t},$$

όπου $a_+ = \max\{a, 0\}$. Εάν το μ είναι ισοτροπικό τότε $Z_2^+(\mu) \supseteq cB_2^n$ για κάποια απόλυτη σταθερά $c > 0$. Μπορούμε επίσης να ελέγχουμε ότι αν $1 \leq t < s$ τότε

$$\left(\frac{4}{e} \right)^{\frac{1}{t} - \frac{1}{s}} Z_t^+(\mu) \subseteq Z_s^+(\mu) \subseteq c_1 \left(\frac{4e-4}{e} \right)^{\frac{1}{t} - \frac{1}{s}} \frac{s}{t} Z_t^+(\mu).$$

Για μια απόδειξη αυτών των ισχυρισμών παραπέμπουμε στο [34]. Η συνθήκη που χρειαζόμαστε είναι ότι η οικογένεια των μονόπλευρων L_t -κεντροειδών σωμάτων αυξάνει με κάποιον ήπιο ρυθμό καθώς $t \rightarrow \infty$ (σημειώνουμε ότι η υπόθεση που κάνουμε στην επόμενη πρόταση μπορεί να ικανοποιείται μόνο για λογαριθμικά κοίλα μέτρα πιθανότητας μ που έχουν φορέα $\text{supp}(\mu) = \mathbb{R}^n$).

Πρόταση 5.3.8. Έστω μ ένα κεντραρισμένο λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$. Υποθέτουμε ότι υπάρχει μια αύξουσα συνάρτηση $g : [1, \infty) \rightarrow [1, \infty)$ με $\lim_{t \rightarrow \infty} g(t)/\ln(t+1) = +\infty$ τέτοια ώστε $Z_t^+(\mu) \supseteq g(t)Z_2^+(\mu)$ για κάθε $t \geq 2$. Τότε,

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\Lambda_{\mu}^*(x)|^p d\mu(x) < +\infty$$

για κάθε $p \geq 1$.

Απόδειξη. Θα χρησιμοποιήσουμε το εξής αποτέλεσμα, το οποίο αποδεικνύεται στο Λήμμα 4.3.3: Εάν $t \geq 1$ τότε για κάθε $x \in \frac{1}{2}Z_t^+(\mu)$ έχουμε ότι

$$\varphi_{\mu}(x) \geq e^{-c_1 t},$$

όπου $c_1 > 1$ είναι μια απόλυτη σταθερά. Εφόσον $\Lambda_{\mu}^*(x) \leq \ln \frac{1}{\varphi_{\mu}(x)}$, αυτό δείχνει ότι $\Lambda_{\mu}^*(x) \leq c_1 t$ για κάθε $x \in \frac{1}{2}Z_t^+(\mu)$. Με άλλα λόγια,

$$(5.3.3) \quad \frac{1}{2}Z_{t/c_1}^+(\mu) \subseteq B_t(\mu), \quad t \geq c_1.$$

Εφόσον $\lim_{t \rightarrow \infty} g(t) = +\infty$, υπάρχει $t_0 \geq c_1$ τέτοιος ώστε $\mu\left(\frac{g(t_0/c_1)}{2}Z_2^+(\mu)\right) \geq 2/3$. Από το λήμμα

του Borell [16, Λήμμα 2.4.5] γνωρίζουμε ότι, για κάθε $t \geq t_0$,

$$1 - \mu\left(\frac{g(t/c_1)}{2} Z_2^+(\mu)\right) \leq e^{-c_2 g(t/c_1)/g(t_0/c_1)},$$

όπου $c_2 > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά. Γράφουμε

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\Lambda_\mu^*(x)|^p d\mu(x) = \int_0^\infty p t^{p-1} \mu(\{x : \Lambda_\mu^*(x) \geq t\}) dt = p \int_0^\infty t^{p-1} (1 - \mu(B_t(\mu))) dt.$$

Από την (5.3.3) έπεται ότι

$$1 - \mu(B_t(\mu)) \leq 1 - \mu\left(\frac{1}{2} Z_{t/c_1}^+(\mu)\right) \leq 1 - \mu\left(\frac{g(t/c_1)}{2} Z_2^+(\mu)\right) \leq e^{-c_2 g(t/c_1)/g(t_0/c_1)}$$

για κάθε $t \geq t_0$. Εφόσον $\lim_{t \rightarrow \infty} g(t)/\ln(t+1) = +\infty$, υπάρχει $t_p \geq t_0$ τέτοιος ώστε

$$(p-1)\ln(t) \leq \frac{c_2}{2g(t_0/c_1)} g(t/c_1)$$

για κάθε $t \geq t_p$. Ας υποθέσουμε ότι $p > 2$. Τότε, από τις προηγούμενες παρατηρήσεις παίρνουμε

$$\begin{aligned} p \int_{t_p}^\infty t^{p-1} (1 - \mu(B_t(\mu))) dt &\leq p \int_{t_p}^\infty t^{p-1} \left(1 - \mu\left(\frac{g(t/c_1)}{2} Z_2^+(\mu)\right)\right) dt \\ &\leq p \int_{t_p}^\infty t^{p-1} t^{-2(p-1)} dt = p \int_{t_p}^\infty t^{-(p-1)} dt < \infty. \end{aligned}$$

Αυτό αποδεικνύει το αποτέλεσμα για $p > 2$ και κατόπιν, από την ανισότητα Hölder, είναι σαφές ότι ο ισχυρισμός της πρότασης ισχύει επίσης για κάθε $p \geq 1$. $\square$

Σημείωση 5.3.9. Δεν είναι δύσκολο να κατασκευάσουμε παραδείγματα λογαριθμικά κοίλων μέτρων πιθανότητας, ακόμη και στην πραγματική ευθεία, στα οποία έχουμε $\text{supp}(\mu) = \mathbb{R}^n$ αλλά η υπόθεση της Πρότασης 5.3.8 δεν ικανοποιείται. Θεωρήστε για παράδειγμα ένα μέτρο μ στο $\mathbb{R}$ με πυκνότητα $f(x) = c \cdot \exp(-p)$ όπου η p είναι μια άρτια κυρτή συνάρτηση που αυξάνει πολύ γρήγορα στο άπειρο, για παράδειγμα η $p(t) = e^{t^2}$.

Όμως, αυτό δεν αποκλείει το ενδεχόμενο να ισχύει ότι για κάθε κεντραρισμένο λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας μ στον $\mathbb{R}^n$ η συνάρτηση Λ_μ^* έχει πεπερασμένη ροπή δεύτερης ή και μεγαλύτερης τάξης.

5.4 Φαινόμενα κατωφλίου για το μέτρο: η προσέγγιση και εφαρμογές

Για κάθε λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας μ στον $\mathbb{R}^n$ ορίζουμε την παράμετρο

$$(5.4.1) \quad \beta(\mu) = \frac{\text{Var}_\mu(\Lambda_\mu^*)}{(\mathbb{E}_\mu(\Lambda_\mu^*))^2}$$

αν βέβαια

$$\|\Lambda_\mu^*\|_{L^2(\mu)} = (\mathbb{E}(\Lambda_\mu^*)^2)^{1/2} < \infty.$$

Θα χρειαστούμε ορισμένες παρατηρήσεις για την περίπτωση $\mu = \mu_K$ όπου K είναι ένα κεντραρισμένο κυρτό σώμα όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$. Το επόμενο λήμμα δίνει κάτω φράγμα για την $\text{Var}(\Lambda_{\mu_K}^*)$.

Λήμμα 5.4.1. Έστω K ένα κεντραρισμένο κυρτό σώμα όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$. Τότε,

$$\text{Var}(\Lambda_{\mu_K}^*) \geq c/L_{\mu_K}^4,$$

όπου $c > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

Απόδειξη. Ο Borell έχει αποδείξει στο [11, Θεώρημα 1] ότι αν T είναι ένα κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ και f είναι μια μη αρνητική, φραγμένη και κυρτή συνάρτηση στο T , η οποία δεν είναι ταυτοτικά μηδενική και έχει ελάχιστη τιμή $\min(f) = 0$, τότε η συνάρτηση

$$\Phi_f(p) = \ln[(n+p)\|f\|_p^p]$$

είναι κυρτή στο $[0, \infty)$. Θεωρούμε ένα κεντραρισμένο κυρτό σώμα K όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$. Εφαρμόζοντας το θεώρημα του Borell για τη συνάρτηση $\Lambda_{\mu_K}^*$ στο rK , $r \in (0, 1)$ και την τριάδα $p = 0, 1$ και 2 , και αφήνοντας στο τέλος το $r \rightarrow 1^-$, βλέπουμε ότι

$$(n+1)^2 \|\Lambda_{\mu_K}^*\|_{L^1(\mu_K)}^2 \leq n(n+2) \|\Lambda_{\mu_K}^*\|_{L^2(\mu_K)}^2,$$

το οποίο συνεπάγεται ότι

$$\text{Var}(\Lambda_{\mu_K}^*) \geq \frac{1}{n(n+2)} \|\Lambda_{\mu_K}^*\|_{L^1(\mu_K)}^2.$$

Παίρνοντας υπ' όψιν μας και το Λήμμα 5.3.5 έχουμε το συμπέρασμα. $\square$

Υπενθυμίζουμε τον ορισμό της $\omega_{\mu_K} = \ln(1/\varphi_{\mu_K})$ στην (5.2.4) και θεωρούμε την παράμετρο

$$(5.4.2) \quad \tau(\mu_K) = \frac{\text{Var}_{\mu_K}(\omega_{\mu_K})}{(\mathbb{E}_{\mu_K}(\omega_{\mu_K}))^2}.$$

Το επόμενο λήμμα δείχνει ότι μπορούμε να εκτιμήσουμε την $\beta(\mu_K)$ αν είμαστε σε θέση να υπολογίσουμε την $\tau(\mu_K)$.

Λήμμα 5.4.2. Έστω K ένα κεντραρισμένο κυρτό σώμα όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$. Τότε,

$$\beta(\mu_K) = \left(\tau(\mu_K) + O(L_{\mu_K}^2 / \sqrt{n}) \right) \left(1 + O(L_{\mu_K}^2 / \sqrt{n}) \right).$$

Απόδειξη. Από το Πρόγραμμα 5.2.5 γνωρίζουμε ότι αν K είναι ένα κεντραρισμένο κυρτό σώμα όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$ τότε για κάθε $x \in \text{int}(K)$ έχουμε ότι $\omega_{\mu_K}(x) - 5\sqrt{n} \leq \Lambda_{\mu_K}^*(x) \leq \omega_{\mu_K}(x)$. Γράφοντας $\Lambda_{\mu_K}^* = \omega_{\mu_K} + h$ όπου $\|h\|_\infty \leq 5\sqrt{n}$ βλέπουμε εύκολα ότι

$$\text{Var}_{\mu_K}(\Lambda_{\mu_K}^*) = \text{Var}_{\mu_K}(\omega_{\mu_K}) + O(\sqrt{n} \mathbb{E}_{\mu_K}(\Lambda_{\mu_K}^*))$$

όπου $X = O(Y)$ σημαίνει ότι $|X| \leq cY$ για κάποια απόλυτη σταθερά $c > 0$. Από το Λήμμα 5.3.5 και το γεγονός ότι $\mathbb{E}_{\mu_K}(\omega_{\mu_K}) = \mathbb{E}_{\mu_K}(\Lambda_{\mu_K}^*) + O(\sqrt{n})$ έπεται ότι

$$\frac{\mathbb{E}_{\mu_K}(\omega_{\mu_K})}{\mathbb{E}_{\mu_K}(\Lambda_{\mu_K}^*)} = 1 + O(L_{\mu_K}^2 / \sqrt{n}).$$

Λαμβάνοντας υπ' όψιν μας και το γεγονός ότι $L_{\mu_K}^2 / \sqrt{n} = O(1/\sqrt{n}) = o(1)$ παίρνουμε

$$\mathbb{E}_{\mu_K}(\omega_{\mu_K}) \approx \mathbb{E}_{\mu_K}(\Lambda_{\mu_K}^*).$$

Συνδυάζοντας τα παραπάνω βλέπουμε ότι

$$\begin{aligned} \beta(\mu_K) &= \frac{\text{Var}_{\mu_K}(\Lambda_{\mu_K}^*)}{(\mathbb{E}_{\mu_K}(\Lambda_{\mu_K}^*))^2} = \frac{\text{Var}_{\mu_K}(\omega_{\mu_K}) + O(\sqrt{n}\mathbb{E}_{\mu_K}(\Lambda_{\mu_K}^*))}{(\mathbb{E}_{\mu_K}(\omega_{\mu_K}))^2} \left(\frac{\mathbb{E}_{\mu_K}(\omega_{\mu_K})}{\mathbb{E}_{\mu_K}(\Lambda_{\mu_K}^*)} \right)^2 \\ &= \left(\frac{\text{Var}_{\mu_K}(\omega_{\mu_K})}{(\mathbb{E}_{\mu_K}(\omega_{\mu_K}))^2} + O(L_{\mu_K}^2 / \sqrt{n}) \right) (1 + O(L_{\mu_K}^2 / \sqrt{n}))^2 \\ &= (\tau(\mu_K) + O(L_{\mu_K}^2 / \sqrt{n})) (1 + O(L_{\mu_K}^2 / \sqrt{n})), \end{aligned}$$

όπως θέλαμε. □

Υπενθυμίζουμε ότι $B_t(\mu) = \{x \in \mathbb{R}^n : \Lambda_\mu^*(x) \leq t\}$, όπου Λ_μ^* είναι ο μετασχηματισμός Cramér του μ . Ισχύει επίσης το εξής (βλ. Λήμμα 4.4.2).

Λήμμα 5.4.3. Έστω $t > 0$. Για κάθε $N > n$ έχουμε ότι

$$\mathbb{E}_{\mu^N}(\mu(K_N)) \leq \mu(B_t(\mu)) + N \exp(-t).$$

Χρησιμοποιούμε αυτό το λήμμα με τον εξής τρόπο. Θέτουμε $m := \mathbb{E}_\mu(\Lambda_\mu^*)$. Τότε, για κάθε $\varepsilon \in (0, 1)$, από την ανισότητα Chebyshev έχουμε ότι

$$\mu(\{\Lambda_\mu^* \leq m - \varepsilon m\}) \leq \mu(\{|\Lambda_\mu^* - m| \geq \varepsilon m\}) \leq \frac{\mathbb{E}_\mu|\Lambda_\mu^* - m|^2}{\varepsilon^2 m^2} = \frac{\beta(\mu)}{\varepsilon^2}.$$

Ισοδύναμα,

$$\mu(B_{(1-\varepsilon)m}(\mu)) \leq \frac{\beta(\mu)}{\varepsilon^2}.$$

Έστω $\delta \in (\beta(\mu), 1)$. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

(α) Αν $\beta(\mu) < 1/8$ και $8\beta(\mu) < \delta < 1$ τότε, επιλέγοντας $\varepsilon = \sqrt{2\beta(\mu)/\delta}$ έχουμε ότι

$$\mu(B_{(1-\varepsilon)m}(\mu)) \leq \frac{\delta}{2}.$$

Τότε, από το Λήμμα 5.4.3 βλέπουμε ότι

$$\begin{aligned} \sup\{\mathbb{E}_{\mu^N}(\mu(K_N)) : N \leq e^{(1-2\varepsilon)m}\} &\leq \mu(B_{(1-\varepsilon)m}(\mu)) + e^{(1-2\varepsilon)m} e^{-(1-\varepsilon)m} \\ &\leq \frac{\delta}{2} + e^{-\varepsilon m} \leq \delta, \end{aligned}$$

αν ικανοποιείται η $\varepsilon m \geq \ln(2/\delta)$. Εφόσον $m \geq c_1 n/L_\mu^2$, αυτή η συνθήκη ικανοποιείται αν $n/L_\mu^2 \geq c_2 \ln(2/\delta) \sqrt{\delta/\beta(\mu)}$. Από την επιλογή του ε συμπεραίνουμε ότι

$$\varrho_1(\mu, \delta) \geq \left(1 - \sqrt{8\beta(\mu)/\delta}\right) \frac{\mathbb{E}_\mu(\Lambda_\mu^*)}{n}.$$

(β) Αν $1/8 \leq \beta(\mu) < 1$ και $\beta(\mu) < \delta < 1$ τότε, επιλέγοντας $\varepsilon = \sqrt{\frac{2\beta(\mu)}{\beta(\mu)+\delta}}$ έχουμε ότι

$$\mu(B_{(1-\varepsilon)m}(\mu)) \leq \frac{\beta(\mu) + \delta}{2}.$$

Τότε, ακριβώς όπως στο (α), βλέπουμε ότι

$$\sup\{\mathbb{E}_{\mu^N}(\mu(K_N)) : N \leq e^{(1-\sqrt{\varepsilon})m}\} \leq \frac{\beta(\mu) + \delta}{2} + e^{(1-\sqrt{\varepsilon})m} e^{-(1-\varepsilon)m} \leq \frac{\beta(\mu) + \delta}{2} + e^{-(\sqrt{\varepsilon}-\varepsilon)m} \leq \delta,$$

αν ικανοποιείται η

$$(5.4.3) \quad (\sqrt{\varepsilon} - \varepsilon)m \geq \ln\left(\frac{2}{\delta - \beta(\mu)}\right).$$

Σημειώνουμε ότι $1 > \varepsilon \geq \sqrt{\beta(\mu)} \geq \frac{1}{2\sqrt{2}}$, και συνεπώς

$$\sqrt{\varepsilon} - \varepsilon = \frac{\sqrt{\varepsilon}}{(1 + \sqrt{\varepsilon})(1 + \varepsilon)}(1 - \varepsilon^2) \geq c'_1(1 - \varepsilon^2) = c'_1 \frac{\delta - \beta(\mu)}{\delta + \beta(\mu)} \geq c'_2(\delta - \beta(\mu)),$$

όπου $c'_i > 0$ είναι απόλυτες σταθερές. Αφού $m \geq c_1 n/L_\mu^2$, βλέπουμε ότι αν

$$n/L_\mu^2 \geq \frac{c_2}{\delta - \beta(\mu)} \ln\left(\frac{2}{\delta - \beta(\mu)}\right)$$

τότε ισχύει η (5.4.3). Συνεπώς, συμπεραίνουμε ότι

$$\varrho_1(\mu, \delta) \geq \left(1 - \sqrt[4]{\frac{2\beta(\mu)}{\beta(\mu) + \delta}}\right) \frac{\mathbb{E}_\mu(\Lambda_\mu^*)}{n}.$$

Συνοψίζουμε τα παραπάνω στο επόμενο θεώρημα.

Θεώρημα 5.4.4. Έστω μ ένα λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$.

(α) Έστω ότι $\beta(\mu) < 1/8$ και $8\beta(\mu) < \delta < 1$. Αν $n/L_\mu^2 \geq c_2 \ln(2/\delta) \sqrt{\delta/\beta(\mu)}$ τότε

$$\varrho_1(\mu, \delta) \geq \left(1 - \sqrt{8\beta(\mu)/\delta}\right) \frac{\mathbb{E}_\mu(\Lambda_\mu^*)}{n}.$$

(β) Έστω ότι $1/8 \leq \beta(\mu) < 1$ και $\beta(\mu) < \delta < 1$. Αν $n/L_\mu^2 \geq \frac{c_2}{\delta - \beta(\mu)} \ln\left(\frac{2}{\delta - \beta(\mu)}\right)$ τότε

$$\varrho_1(\mu, \delta) \geq \left(1 - \sqrt[4]{\frac{2\beta(\mu)}{\beta(\mu) + \delta}}\right) \frac{\mathbb{E}_\mu(\Lambda_\mu^*)}{n}.$$

Παρατήρηση 5.4.5. Οι Παούρης και Βαλέττας έχουν αποδείξει στο [52, Θεώρημα 5.6] ότι αν μ είναι ένα λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$ και p είναι μια κυρτή συνάρτηση στον $\mathbb{R}^n$ τότε

$$(5.4.4) \quad \mu\left(\left\{x : p(x) < M(p) - t\|p - M(p)\|_{L^1(\mu)}\right\}\right) \leq \frac{1}{2} \exp(-t/16)$$

για κάθε $t > 0$, όπου $M(p)$ είναι ένας μέσος Λένυ της p ως προς το μ . Θεωρούμε την παράμετρο

$$\tilde{\beta}(\mu) = \frac{\|\Lambda_\mu^* - \mathbb{E}(\Lambda_\mu^*)\|_{L^2(\mu)}}{M(\Lambda_\mu^*)}.$$

Υπενθυμίζουμε ότι η Λ_μ^* είναι κυρτή και θέτουμε $M = M(\Lambda_\mu^*)$. Αφού

$$\|\Lambda_\mu^* - M(\Lambda_\mu^*)\|_{L^1(\mu)} \leq \|\Lambda_\mu^* - \mathbb{E}(\Lambda_\mu^*)\|_{L^1(\mu)} \leq \|\Lambda_\mu^* - \mathbb{E}(\Lambda_\mu^*)\|_{L^2(\mu)},$$

από την (5.4.4) βλέπουμε ότι

$$(5.4.5) \quad \mu\left(\left\{x : \Lambda_\mu^*(x) < (1 - t\tilde{\beta}(\mu))M\right\}\right) \leq \frac{1}{2} \exp(-t/16)$$

για κάθε $t > 0$. Αυτό δείχνει ότι

$$\mu(B_{(1-t\tilde{\beta}(\mu))M}(\mu)) \leq \frac{\delta}{4}$$

αν $t \geq 16 \ln(2/\delta)$. Τότε, από το Λήμμα 5.4.3 βλέπουμε ότι

$$\begin{aligned} \sup\{\mathbb{E}_{\mu^N}(\mu(K_N)) : N \leq e^{(1-2t\tilde{\beta}(\mu))M}\} &\leq \mu(B_{(1-t\tilde{\beta}(\mu))M}(\mu)) + e^{(1-2t\tilde{\beta}(\mu))M} e^{-(1-t\tilde{\beta}(\mu))M} \\ &= \mu(B_{(1-t\tilde{\beta}(\mu))M}(\mu)) + e^{-t\tilde{\beta}(\mu)M} \leq \frac{\delta}{4} + e^{-t\tilde{\beta}(\mu)M} \leq \delta, \end{aligned}$$

αν ικανοποιείται η $t\tilde{\beta}(\mu)M \geq \ln(2/\delta)$. Τώρα, περιοριζόμαστε στην περίπτωση που το $\mu = \mu_K$ είναι το ομοιόμορφο μέτρο σε ένα κεντραρισμένο κυρτό σώμα K όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$. Τότε, το Λήμμα 5.4.1 δείχνει ότι

$$\tilde{\beta}(\mu_K)M(\Lambda_{\mu_K}^*) = \|\Lambda_{\mu_K}^* - \mathbb{E}(\Lambda_{\mu_K}^*)\|_{L^2(\mu)} \geq c_1/L_{\mu_K}^2$$

όπου $c_1 > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά. Επιλέγοντας $t = c_2 L_{\mu_K}^2 \ln(2/\delta)$ παίρνουμε

$$(5.4.6) \quad \varrho_1(\mu_K, \delta) \geq \left(1 - c_3 L_{\mu_K}^2 \ln(2/\delta) \tilde{\beta}(\mu_K)\right) \frac{M(\Lambda_{\mu_K}^*)}{n}.$$

Ένα φυσιολογικό ερώτημα είναι να εξετάσουμε πόσο κοντά βρίσκονται οι $\mathbb{E}(\Lambda_\mu^*)$ και $M(\Lambda_\mu^*)$. Αυτό θα μας επέτρεπε να συγκρίνουμε την (5.4.6) με το Θεώρημα 5.4.4 τουλάχιστον στην περίπτωση του ομοιόμορφου μέτρου σε ένα κυρτό σώμα. Γνωρίζουμε [16, Λήμμα 2.4.10] ότι

$$\frac{1}{2} \|\Lambda_\mu^* - \mathbb{E}(\Lambda_\mu^*)\|_{L^2(\mu)} \leq \|\Lambda_\mu^* - M(\Lambda_\mu^*)\|_{L^2(\mu)} \leq 3 \|\Lambda_\mu^* - \mathbb{E}(\Lambda_\mu^*)\|_{L^2(\mu)}$$

για κάθε Borel μέτρο πιθανότητας μ στον $\mathbb{R}^n$. Επομένως, αν υποθέσουμε ότι $\beta(\mu_K) \leq \eta$ για κάποιο αρκετά μικρό $\eta \in (0, 1)$, βλέπουμε ότι

$$M(\Lambda_\mu^*) \geq \|\Lambda_\mu^*\|_2 - 3\sqrt{\eta} \|\Lambda_\mu^*\|_1 \geq (1 - 3\sqrt{\eta}) \mathbb{E}(\Lambda_\mu^*).$$

Αυτό μας δίνει μια παραλλαγή του Θεωρήματος 5.4.4 με πολύ καλύτερη εξάρτηση από το δ .

Θεώρημα 5.4.6. Έστω K ένα κεντραρισμένο κυρτό σώμα όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$ και έστω $\delta \in (0, 1)$ και $\eta \in (0, 1/9)$. Αν $\beta(\mu_K) \leq \eta$ και $c_3 L_{\mu_K}^2 \ln(2/\delta) \tilde{\beta}(\mu_K) < 1$ τότε

$$\varrho_1(\mu, \delta) \geq \left(1 - c_3 L_{\mu_K}^2 \ln(2/\delta) \tilde{\beta}(\mu_K)\right) (1 - 3\sqrt{\eta}) \frac{\mathbb{E}(\Lambda_{\mu_K}^*)}{n}.$$

Για την απόδειξη του κάτω φράγματος κατωφλίου χρησιμοποιούμε το Λήμμα 4.4.7 το οποίο υπενθυμίζουμε κι εδώ.

Λήμμα 5.4.7. Για κάθε Borel υποσύνολο A του $\mathbb{R}^n$ ισχύει ότι

$$1 - \mu^K(K_N \supseteq A) \leq 2 \binom{N}{n} \left(1 - \inf_{x \in A} \varphi_\mu(x)\right)^{N-n}.$$

Συνεπώς,

$$\mathbb{E}[\mu(K_N)] \geq \mu(A) \left(1 - 2 \binom{N}{n} \left(1 - \inf_{x \in A} \varphi_\mu(x)\right)^{N-n}\right).$$

Προκειμένου να εφαρμόσουμε το Λήμμα 5.4.7 σημειώνουμε ότι αν $m := \mathbb{E}_\mu(\Lambda_\mu^*)$ τότε όπως πριν, για κάθε $\varepsilon \in (0, 1)$, από την ανισότητα Chebyshev έχουμε ότι

$$\mu(\{\Lambda_\mu^* \geq m + \varepsilon m\}) \leq \mu(\{|\Lambda_\mu^* - m| \geq \varepsilon m\}) \leq \frac{\beta(\mu)}{\varepsilon^2}.$$

Αν $\beta(\mu) < 1/2$ και $2\beta(\mu) < \delta < 1$ τότε, επιλέγοντας $\varepsilon = \sqrt{2\beta(\mu)/\delta}$ έχουμε ότι

$$\mu(B_{(1+\varepsilon)m}(\mu)) \geq 1 - \frac{\delta}{2}.$$

Επομένως, θα έχουμε ότι

$$\varrho_2(\mu, \delta) \leq (1 + 2\varepsilon)m/n$$

αν το κάτω φράγμα μας για το $\inf_{x \in B_{(1+\varepsilon)m}(\mu)} \varphi_\mu(x)$ δίνει

$$(5.4.7) \quad 2 \binom{N}{n} \left(1 - \inf_{x \in B_{(1+\varepsilon)m}(\mu)} \varphi_\mu(x) \right)^{N-n} \leq \frac{\delta}{2}$$

για κάθε $N \geq N_0 := \exp((1+2\varepsilon)m)$. Θυμηθείτε ότι στην περίπτωση του ομοιόμορφου μέτρου σε ένα κεντραρισμένο κυρτό σώμα όγκου 1, το Θεώρημα 5.2.2 δείχνει ότι

$$\inf_{x \in B_{(1+\varepsilon)m}(\mu_K)} \varphi_{\mu_K}(x) \geq \frac{1}{10} \exp(-(1+\varepsilon)m - 2\sqrt{n}).$$

Απαιτούμε τα n και m να είναι αρκετά μεγάλα ώστε $1/2^n < \delta/2$ και $2\sqrt{n} \leq \frac{\varepsilon m}{2}$. Χρησιμοποιώντας επίσης το γεγονός ότι $\binom{N}{n} \leq e^{-1} \left(\frac{eN}{n} \right)^n$ βλέπουμε ότι η (5.4.7) θα ικανοποιείται αν επιπλέον έχουμε

$$\left(\frac{2eN}{n} \right)^n e^{-\frac{N-n}{10}} e^{-(1+3\varepsilon/2)m} < 1.$$

Θέτοντας $x := N/n$ βλέπουμε ότι αυτή η τελευταία συνθήκη είναι ισοδύναμη με την

$$e^{(1+3\varepsilon/2)m} < \frac{x-1}{10 \ln(2ex)}.$$

Μπορούμε τώρα να ελέγξουμε ότι αν $N \geq \exp((1+2\varepsilon)m)$ τότε όλοι οι περιορισμοί ικανοποιούνται αν υποθέσουμε ότι $n/L_{\mu_K}^2 \geq c_2 \ln(2/\delta) \sqrt{\delta/\beta(\mu_K)}$. Με αυτόν τον τρόπο παίρνουμε το εξής.

Θεώρημα 5.4.8. Έστω $\beta, \delta > 0$ με $2\beta < \delta < 1$. Αν K είναι ένα κεντραρισμένο κυρτό σώμα όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$ με $\beta(\mu_K) = \beta$ και $n/L_{\mu_K}^2 \geq c_2 \ln(2/\delta) \sqrt{\delta/\beta}$ τότε

$$\varrho_2(\mu_K, \delta) \leq \left(1 + \sqrt{8\beta/\delta} \right) \frac{\mathbb{E}_{\mu_K}(\Lambda_{\mu_K}^*)}{n}.$$

Μπορούμε επίσης να δώσουμε μια εκτίμηση ανάλογη με αυτήν του Θεωρήματος 5.4.4 (β) αλλά δεν θα μπούμε στις λεπτομέρειες.

Για τυχόν λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την πρόσφατη εκτίμηση (5.2.6) των Μπραζιτίκου και Χασάπη. Χρησιμοποιώντας αυτό το κάτω φράγμα για την ποσότητα $\varphi_-(B_I(\mu))$ στη θέση του Θεωρήματος 5.2.2 καταλήγουμε σε παρόμοιο συμπέρασμα.

Θεώρημα 5.4.9. Έστω $\beta, \delta > 0$ με $128\beta < \delta < 1$. Αν $n \geq n_0(\beta, \delta)$ τότε για κάθε λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας μ στον $\mathbb{R}^n$ με $\beta(\mu) = \beta$ ισχύει ότι

$$\varrho_2(\mu, \delta) \leq \left(1 + c \sqrt{\beta(\mu)/\delta} \right) \frac{\mathbb{E}_\mu(\Lambda_\mu^*)}{n},$$

όπου $c > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

5.5 Παραδείγματα

Από τη συζήτηση που κάναμε στην προηγούμενη ενότητα είναι φανερό ότι η προσέγγισή μας μπορεί να δώσει καλά φράγματα για το εύρος κατωφλίου $\varrho(\mu, \delta)$ αν η παράμετρος $\beta(\mu)$ είναι μικρή, και ιδιαιτέρως εάν $\beta(\mu) = o_n(1)$ καθώς η διάσταση αυξάνει. Αυτό περιγράφεται από τα παραδείγματα που ακολουθούν.

Παράδειγμα 5.5.1 (Ομοιόμορφο μέτρο στον κύβο). Έστω μ_{C_n} το ομοιόμορφο μέτρο στον μοναδιαίο κύβο $C_n = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]^n$. Εφόσον $\mu_{C_n} = \mu_{C_1} \otimes \cdots \otimes \mu_{C_1}$, έχουμε

$$\text{Var}_{\mu_{C_n}}(\Lambda_{\mu_{C_n}}^*) = n \text{Var}_{\mu_{C_1}}(\Lambda_{\mu_{C_1}}^*) \quad \text{και} \quad \mathbb{E}_{\mu_{C_n}}(\Lambda_{\mu_{C_n}}^*) = n \mathbb{E}_{\mu_{C_1}}(\Lambda_{\mu_{C_1}}^*).$$

Συνεπώς,

$$\beta(\mu_{C_n}) = \frac{\text{Var}_{\mu_{C_n}}(\Lambda_{\mu_{C_n}}^*)}{(\mathbb{E}_{\mu_{C_n}}(\Lambda_{\mu_{C_n}}^*))^2} = \frac{\beta(\mu_{C_1})}{n} \rightarrow 0$$

όταν $n \rightarrow \infty$. Τότε, το Θεώρημα 5.4.4 και το Θεώρημα 5.4.8 δείχνουν ότι για κάθε $\delta \in (0, 1)$ υπάρχει $n_0(\delta)$ τέτοιος ώστε, για κάθε $n \geq n_0$,

$$\varrho_1(\mu_{C_n}, \delta) \geq \left(1 - \sqrt{\frac{8\beta_{\mu_{C_n}}}{\delta}}\right) \frac{\mathbb{E}(\Lambda_{\mu_{C_n}}^*)}{n} \geq \left(1 - \frac{c_1}{\sqrt{\delta n}}\right) \mathbb{E}(\Lambda_{\mu_{C_1}}^*)$$

και

$$\varrho_2(\mu_{C_n}, \delta) \leq \left(1 + \sqrt{\frac{8\beta_{\mu_{C_n}}}{\delta}}\right) \frac{\mathbb{E}(\Lambda_{\mu_{C_n}}^*)}{n} \leq \left(1 + \frac{c_2}{\sqrt{\delta n}}\right) \mathbb{E}(\Lambda_{\mu_{C_1}}^*),$$

απ' όπου έπεται ότι

$$\varrho(\mu_{C_n}, \delta) \leq \frac{c}{\sqrt{\delta n}},$$

όπου $c > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά. Αυτή η εκτίμηση μας δίνει ένα αυστηρό φαινόμενο κατωφλίου για το μέτρο ενός τυχαίου πολυτόπου K_N με ανεξάρτητες κορυφές ομοιόμορφα κατανεμημένες στον C_n . Δίνει μια ευθεία απόδειξη του αποτελέσματος των Dyer, Füredi και McDiarmid από το [25] με ισχυρότερη μάλιστα εκτίμηση για το «εύρος του κατωφλίου».

Παράδειγμα 5.5.2 (Μέτρο Gauss). Έστω γ_n το τυπικό n -διάστατο μέτρο Gauss με πυκνότητα $f_{\gamma_n}(x) = (2\pi)^{-n/2} e^{-|x|^2/2}$, $x \in \mathbb{R}^n$. Παρατηρήστε ότι $\gamma_n = \gamma_1 \otimes \cdots \otimes \gamma_1$, άρα μπορούμε να επιχειρηματολογήσουμε όπως στο προηγούμενο παράδειγμα. Μπορούμε επίσης, με απευθείας υπολογισμό, να δούμε ότι

$$\Lambda_{\gamma_n}(\xi) = \log \left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{\langle \xi, z \rangle} f_{\gamma_n}(z) dz \right) = \frac{1}{2} |\xi|^2$$

για κάθε $\xi \in \mathbb{R}^n$ και

$$\Lambda_{\gamma_n}^*(x) = \sup_{\xi \in \mathbb{R}^n} \{ \langle x, \xi \rangle - \Lambda_{\gamma_n}(\xi) \} = \frac{1}{2} |x|^2$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$. Έπεται ότι

$$B_t(\gamma_n) = \{x \in \mathbb{R}^n : \Lambda_{\gamma_n}^*(x) \leq t\} = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq \sqrt{2t}\} = \sqrt{2t}B_2^n.$$

Σημειώνουμε ότι αν $x \in \partial(B_t(\gamma_n))$ τότε

$$\varphi_{\gamma_n}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\sqrt{2t}}^{\infty} e^{-u^2/2} du \geq \frac{c}{\sqrt{t}} e^{-t}$$

για κάθε $t \geq 1$ (βλ. [37, σελ. 17] για μια πιο ακριβή μορφή του κάτω φράγματος που χρησιμοποιούμε). Από την κλασική εκτίμηση συγκέντρωσης για την Ευκλείδεια νόρμα ως προς το γ_n (βλ. [60, Θεώρημα 3.1.1]), έχουμε $\| |x| - \sqrt{n} \|_{\psi_2} \leq C$, όπου $C > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά, ή ισοδύναμα, για κάθε $s > 0$,

$$\gamma_n(\{|x \in \mathbb{R}^n : | |x| - \sqrt{n} | \geq s\sqrt{n}\}) \leq 2 \exp(-cs^2n),$$

όπου $c > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά. Αυτό δείχνει ότι

$$\max\{\gamma_n((1-s)\sqrt{n}B_2^n), 1 - \gamma_n((1+s)\sqrt{n}B_2^n)\} \leq 2 \exp(-cs^2n)$$

για κάθε $s \in (0, 1)$. Έστω $\varepsilon \in (0, 1/2)$. Εφαρμόζοντας το Λήμμα 5.4.3 με $t = (1-\varepsilon)n/2$ και $N \leq \exp((1/2 - \varepsilon)n)$ βλέπουμε ότι

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\gamma_n^N}(\gamma_n(K_N)) &\leq \gamma_n(\sqrt{(1-\varepsilon)n}B_2^n) + \exp(-\varepsilon n/2) \\ &\leq 2 \exp(-c\varepsilon^2n) + \exp(-\varepsilon n/2), \end{aligned}$$

χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι $\sqrt{1-\varepsilon} \leq 1-\varepsilon/2$. Έπεται ότι, για κάθε $\delta \in (0, 1)$, αν επιλέξουμε $\varepsilon = c_1 \sqrt{\ln(4/\delta)}/\sqrt{n}$ έχουμε

$$\sup \left\{ \mathbb{E}_{\gamma_n^N}(\gamma_n(K_N)) : N \leq e^{(\frac{1}{2}-\varepsilon)n} \right\} \leq \delta,$$

και συνεπώς

$$\varrho_1(\gamma_n, \delta) \geq \frac{1}{2} - \frac{c_1 \sqrt{\ln(4/\delta)}}{\sqrt{n}}.$$

Τώρα, έστω $N \geq \exp((1/2+\varepsilon)n)$. Εφαρμόζοντας το Λήμμα 5.4.7 με $A = B_t(\gamma_n)$ όπου $t = (1+\varepsilon)n/2$, βλέπουμε ότι $\gamma_n(B_t(\gamma_n)) = \gamma_n(\sqrt{(1+\varepsilon)n}B_2^n) \geq 1 - 2 \exp(-c\varepsilon^2n)$, διότι $\sqrt{1+\varepsilon} \geq 1 + \varepsilon/3$. Επίσης έχουμε

$$2 \binom{N}{n} \left(1 - \inf_{x \in B_t(\gamma_n)} \varphi_{\gamma_n}(x) \right)^{N-n} \leq \left(\frac{2eN}{n} \right)^n \exp \left(-\frac{c(N-n)}{\sqrt{n}} e^{-(1+\varepsilon)n/2} \right).$$

Έστω $\delta \in (0, 1)$. Επιλέγουμε $\varepsilon = c_2 \sqrt{\ln(4/\delta)}/\sqrt{n}$ και εισάγουμε αυτές τις εκτιμήσεις στο Λήμμα 5.4.7. Επιχειρηματολογώντας όπως στην απόδειξη της (5.4.7) βλέπουμε ότι αν $n \geq n_0(\delta)$ τότε

$$\inf \left\{ \mathbb{E}_{\gamma_n^N}(\gamma_n(K_N)) : N \geq e^{(\frac{1}{2}+\varepsilon)n} \right\} \geq 1 - \delta,$$

και συνεπώς

$$\varrho_2(\gamma_n, \delta) \leq \frac{1}{2} + \frac{c_2 \sqrt{\ln(4/\delta)}}{\sqrt{n}}.$$

Συνδυάζοντας τα παραπάνω παίρνουμε

$$\varrho(\gamma_n, \delta) \leq \frac{C \sqrt{\ln(4/\delta)}}{\sqrt{n}},$$

όπου $C > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

Κλείνουμε αυτήν την ενότητα με το παράδειγμα του ομοιόμορφου μέτρου στην Ευκλείδεια μπάλα. Στο [9] αποδείχθηκε ότι αν $\varepsilon \in (0, 1)$ και $K_N = \text{conv}\{x_1, \dots, x_N\}$ όπου τα $x_1, \dots, x_N$ είναι τυχαία σημεία ανεξάρτητα και ομοιόμορφα κατανεμημένα στην B_2^n τότε

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup \left\{ \frac{\mathbb{E}|K_N|}{|B_2^n|} : N \leq \exp \left((1 - \varepsilon) \left(\frac{n+1}{2} \right) \ln n \right) \right\} = 0$$

και

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \inf \left\{ \frac{\mathbb{E}|K_N|}{|B_2^n|} : N \geq \exp \left((1 + \varepsilon) \left(\frac{n+1}{2} \right) \ln n \right) \right\} = 1.$$

Θα αποδείξουμε παρόμοια εκτίμηση ακολουθώντας την προσέγγιση που έχουμε παρουσιάσει εδώ.

Θεώρημα 5.5.3. Έστω D_n η κεντραρισμένη Ευκλείδεια μπάλα όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$. Τότε, n ακολουθία $\mu_n := \mu_{D_n}$ εμφανίζει φαινόμενο κατωφλίου με σταθερά $\varrho = \frac{1}{n} \mathbb{E}_{\mu_n}(\Lambda_{\mu_n}^*)$ και $\varrho(\mu_n, \delta) \leq \frac{c}{\sqrt{\delta} \ln n} \varrho$, διότι $\varrho \approx n \ln n$. Για παράδειγμα, στην περίπτωση που ο n είναι άρτιος έχουμε ότι

$$\mathbb{E}_{\mu_n}(\Lambda_{\mu_n}^*) = \frac{(n+1)}{2} H_{\frac{n}{2}} + O(\sqrt{n})$$

όταν $n \rightarrow \infty$, όπου $H_m = \sum_{k=1}^m \frac{1}{k}$.

Απόδειξη. Σημειώνουμε ότι αν K είναι ένα κεντραρισμένο κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ και αν $r > 0$ τότε $\Lambda_{\mu_{rK}}^*(x) = \Lambda_{\mu_K}^*(x/r)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$, όπου μ_{rK} είναι το ομοιόμορφο μέτρο στο rK . Έπεται ότι

$$\frac{1}{|rK|} \int_{rK} [\Lambda_{\mu_{rK}}^*(x)]^p dx = \frac{1}{|K|} \int_K [\Lambda_{\mu_K}^*(x)]^p dx$$

για κάθε $p > 0$ και $r > 0$. Αυτό δείχνει ότι, προκειμένου να υπολογίσουμε την $\beta(\mu_{D_n})$, αρκεί να υπολογίσουμε τον λόγο

$$\beta(\mu_{D_n}) + 1 = \frac{\frac{1}{|B_2^n|} \int_{B_2^n} \Lambda^*(x)^2 dx}{\left(\frac{1}{|B_2^n|} \int_{B_2^n} \Lambda^*(x) dx \right)^2}$$

όπου $\Lambda^* := \Lambda_{\mu_{B_2^n}}^*$. Έχοντας υπ' όψιν μας το Λήμμα 5.4.2 ξεκινάμε υπολογίζοντας την $\tau(\mu_{B_2^n})$.

Θέτουμε $\omega := \omega_{\mu_{B_2^n}}$. Τότε, $\omega(x) = \ln(1/\varphi(x))$ όπου $\varphi(x) = F(|x|)$,

$$F(r) = c_n \int_r^1 (1-t^2)^{\frac{n-1}{2}} dt, \quad r \in [0, 1]$$

και $c_n = \pi^{-1/2} \Gamma(\frac{n}{2} + 1) / \Gamma(\frac{n+1}{2})$. Από το [9, Λήμμα 2.2] γνωρίζουμε ότι

$$F(r) = (1-r^2)^{\frac{n+1}{2}} h(r, n),$$

όπου

$$(5.5.1) \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi(n+2)}} \leq h(r, n) \leq \frac{1}{r \sqrt{2\pi n}}$$

για κάθε $r \in (0, 1]$. Υποθέτουμε ότι ο n είναι άρτιος (η περίπτωση όπου ο n είναι περιττός αντιμετωπίζεται με παρόμοιο τρόπο). Χρησιμοποιώντας πολικές συντεταγμένες υπολογίζουμε το

$$\begin{aligned} \frac{1}{|B_2^n|} \int_{B_2^n} \omega(x) dx &= -n \int_0^1 r^{n-1} \ln(F(r)) dr \\ &= -n \int_0^1 r^{n-1} \ln((1-r^2)^{\frac{n+1}{2}}) dr - n \int_0^1 r^{n-1} \ln(h(r, n)) dr. \end{aligned}$$

Ο κύριος όρος είναι ο πρώτος και μπορούμε να τον υπολογίσουμε ακριβώς. Κάνοντας την αλλαγή μεταβλητής $r^2 = u$, παίρνουμε

$$\begin{aligned} (5.5.2) \quad -n \int_0^1 r^{n-1} \ln((1-r^2)^{\frac{n+1}{2}}) dr &= -\frac{n(n+1)}{2} \int_0^1 r^{n-1} \ln(1-r^2) dr \\ &= -\frac{n(n+1)}{4} \int_0^1 u^{\frac{n-2}{2}} \ln(1-u) du = \frac{n(n+1)}{2n} H_{\frac{n}{2}}, \end{aligned}$$

χρησιμοποιώντας επίσης το Λήμμα 5.3.3. Για τον δεύτερο όρο υπενθυμίζουμε ότι σύμφωνα με την (5.5.1) ισχύει ότι $0 \leq -\ln(h(r, n)) \leq \frac{1}{2} \ln(2\pi(n+2)) \leq c_1 \ln n$, άρα

$$-n \int_0^1 r^{n-1} \ln(h(r, n)) dr \leq c_1 \ln n \int_0^1 nr^{n-1} dr = c_1 \ln n.$$

Συνεπώς,

$$(5.5.3) \quad \frac{1}{|B_2^n|} \int_{B_2^n} \omega(x) dx = \frac{n+1}{2} H_{\frac{n}{2}} + O(\ln n).$$

Χρησιμοποιώντας και πάλι πολικές συντεταγμένες γράφουμε

$$\begin{aligned} \frac{1}{|B_2^n|} \int_{B_2^n} (\omega(x))^2 dx &= n \int_0^1 r^{n-1} \ln^2(F(r)) dr \\ &= n \int_0^1 r^{n-1} \ln^2((1-r^2)^{\frac{n+1}{2}}) dr + n \int_0^1 r^{n-1} \ln^2(h(r, n)) dr \\ &\quad + 2n \int_0^1 r^{n-1} \ln((1-r^2)^{\frac{n+1}{2}}) \ln(h(r, n)) dr, \end{aligned}$$

Όπως πριν, ο κύριος όρος είναι ο πρώτος και μπορούμε να τον υπολογίσουμε ακριβώς. Κάνοντας την αλλαγή μεταβλητής $r^2 = u$, παίρνουμε

$$\begin{aligned} n \left(\frac{n+1}{2} \right)^2 \int_0^1 r^{n-1} \ln^2(1-r^2) dr &= n \frac{(n+1)^2}{8} \int_0^1 u^{\frac{n-2}{2}} \ln^2(1-u) du \\ &= n \frac{(n+1)^2}{8} \left(\frac{2}{n} H_{\frac{n}{2}}^2 + \frac{2}{n} \sum_{k=1}^{n/2} \frac{1}{k^2} \right). \end{aligned}$$

Από την άλλη πλευρά, από την (5.5.1) βλέπουμε ότι αν $h(r, n) \leq 1$ τότε $0 \leq -\ln(h(r, n)) \leq \frac{1}{2} \ln(2\pi(n+2)) \leq c_1 \ln n$, ενώ αν $h(r, n) > 1$ τότε $0 \leq \ln(h(r, n)) \leq \ln(1/r)$. Δηλαδή, $\ln^2(h(r, n)) \leq c_2(\ln n)^2 + \ln^2(r)$ για κάθε $r \in (0, 1]$. Έπεται ότι

$$n \int_0^1 r^{n-1} \ln^2(h(r, n)) dr \leq c_3(\ln n)^2 + n \int_0^1 r^{n-1} \ln^2 r dr \leq c_4(\ln n)^2.$$

Χρησιμοποιώντας πάλι το γεγονός ότι $\ln(h(r, n)^{-1}) \leq c_1 \ln n$ καθώς και την (5.5.2), ελέγχουμε ότι

$$2n \int_0^1 r^{n-1} \ln((1-r^2)^{\frac{n+1}{2}}) \ln(h(r, n)) dr \leq \frac{n(n+1)}{2n} H_{\frac{n}{2}}^2 \cdot c_1 \ln n \leq c_5 n (\ln n)^2.$$

Από αυτές τις εκτιμήσεις συμπεραίνουμε ότι

$$(5.5.4) \quad \frac{1}{|B_2^n|} \int_{B_2^n} (\omega(x))^2 dx = \frac{(n+1)^2}{4} H_{\frac{n}{2}}^2 + O(n^2).$$

Από τις (5.5.3) και (5.5.4) τελικά παίρνουμε

$$\tau(\mu_{B_2^n}) = O\left(\frac{n^2}{n^2 H_{\frac{n}{2}}^2}\right) = O\left(\frac{1}{(\ln n)^2}\right).$$

Τότε, το Λήμμα 5.4.2 και ένας απλός υπολογισμός δείχνουν ότι

$$\beta(\mu_{D_n}) = \left(\tau(\mu_{B_2^n}) + O(L_{\mu_{B_2^n}}^2 / \sqrt{n}) \right) \left(1 + O(L_{\mu_{B_2^n}}^2 / \sqrt{n}) \right) = O\left(\frac{1}{(\ln n)^2}\right),$$

διότι $L_{\mu_{B_2^n}} \approx 1$. Τέλος, παρατηρήστε ότι από την εκτίμηση (5.2.5) στο Πόρισμα 5.2.5 έχουμε

$$\mathbb{E}_{\mu_n}(\Lambda_{\mu_n}^*) = \frac{1}{|B_2^n|} \int_{B_2^n} \omega(x) dx + O(\sqrt{n}) = \frac{(n+1)}{2} H_{\frac{n}{2}} + O(\sqrt{n})$$

καθώς το $n \rightarrow \infty$. □

Σημείωση 5.5.4. Η συζητήση που προηγήθηκε αφήνει ανοικτό το εξής βασικό ερώτημα: να εκτιμήσουμε την παράμετρο

$$\beta_n^* := \sup\{\beta(\mu_K) : K \text{ κεντραρισμένο κυρτό σώμα όγκου 1 στον } \mathbb{R}^n\}$$

ή, πιο γενικά, την παράμετρο

$$\beta_n := \sup\{\beta(\mu) : \mu \text{ κεντραρισμένο λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας στον } \mathbb{R}^n\}.$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

Κορυφές με ανεξάρτητες συντεταγμένες

6.1 Ορισμοί και βοηθητικά αποτελέσματα

Θεωρούμε ένα άρτιο Borel μέτρο πιθανότητας μ στην πραγματική ευθεία και μια τυχαία μεταβλητή X , σε κάποιον χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, με κατανομή μ . Προκειμένου να αποφύγουμε τετριμμένες περιπτώσεις, υποθέτουμε ότι $\text{Var}_\mu(X) > 0$, δηλαδή ισοδύναμα ότι $p_\mu := \max\{P(X = x) : x \in \mathbb{R}\} < 1$. Υπενθυμίζουμε ότι το μ λέγεται άρτιο αν $\mu(-B) = \mu(B)$ για κάθε Borel υποσύνολο B του $\mathbb{R}$.

Για την απόδειξη του κεντρικού μας θεωρήματος πρέπει να κάνουμε κάποιες πρόσθετες υποθέσεις για το μ . Η πρώτη είναι ότι υπάρχει $r > 0$ τέτοιο ώστε

$$(6.1.1) \quad \mathbb{E}(e^{tX}) := \int_{\mathbb{R}} e^{tx} d\mu(x) < \infty$$

για κάθε $t \in (-r, r)$. Αυτή η υπόθεση μας εξασφαλίζει ότι η X έχει πεπερασμένες ροπές όλων των τάξεων.

Ορίζουμε $x^* := \sup\{x \in \mathbb{R} : \mu([x, \infty)) > 0\}$ και $I_\mu := (-x^*, x^*)$. Σημειώνουμε ότι μπορεί να συμβεί να έχουμε $x^* = \infty$. Η δεύτερη υπόθεση που κάνουμε είναι ότι αν $x^* < \infty$ τότε

$$(6.1.2) \quad P(X = x^*) = \mu(\{x^*\}) = 0.$$

Έστω $g(t) := \mathbb{E}(e^{tX})$ για $t \in \mathbb{R}$ και $\Lambda_\mu(t) := \ln g(t)$. Ελέγχουμε εύκολα ότι η Λ_μ είναι μια άρτια κυρτή συνάρτηση με $\Lambda_\mu(0) = 0$, άρα, η Λ_μ είναι μη αρνητική συνάρτηση. Η υπόθεση (6.1.1) συνεπάγεται ότι το διάστημα $J_\mu := \{\Lambda_\mu < \infty\}$ είναι ένα μη εκφυλισμένο συμμετρικό διάστημα, ενδεχομένως ολόκληρη η πραγματική ευθεία. Ορίζουμε $t^* = \sup J_\mu$. Τότε, η Λ_μ είναι C^∞ και γνησίως κυρτή στο $(-t^*, t^*)$ (για τον πρώτο ισχυρισμό βλ. [58, Παράγραφος 1.3] ή [30, Παράγραφος 2], ενώ η γνήσια κυρτότητα της Λ_μ προκύπτει από το γεγονός ότι η Λ'_μ είναι

γνησίως αύξουσα στο $(-t^*, t^*)$, όπως εξηγούμε παρακάτω).

Για κάθε $t \in (-t^*, t^*)$ ορίζουμε το μέτρο πιθανότητας P_t στον $(\Omega, \mathcal{F})$ με

$$P_t(A) := \mathbb{E}(e^{tX - \Lambda_\mu(t)} \mathbb{1}_A), \quad A \in \mathcal{F}.$$

Ορίζουμε επίσης $\mu_t(B) := P_t(X \in B)$ για κάθε Borel υποσύνολο B του $\mathbb{R}$. Από τις $dP_t = e^{tX - \Lambda_\mu(t)} dP$ και $\mathbb{E}_\mu(X^k e^{tX}) < +\infty$ για κάθε $k \geq 1$ και $t \in J_\mu$, βλέπουμε ότι το μ_t έχει πεπερασμένες ροπές όλων των τάξεων. Επίσης, παραγωγίζοντας δύο φορές την Λ_μ και παίρνοντας υπ' όψιν μας τον ορισμό του P_t , ελέγχουμε ότι

$$(6.1.3) \quad \mathbb{E}_t(X) = \Lambda'_\mu(t) \quad \text{και} \quad \text{Var}_t(X) = \Lambda''_\mu(t),$$

όπου $\mathbb{E}_t$ και Var_t είναι η μέση τιμή και η διασπορά ως προς P_t . Σημειώνουμε ότι $P_0 = P$ και $\mu_0 = \mu$. Αφού το μ είναι μη εκφυλισμένο, έχουμε ότι $\mu_t(\{c\}) \neq 1$ για κάθε $c \in \mathbb{R}$ και $t \in (-t^*, t^*)$, το οποίο συνεπάγεται ότι $\Lambda''_\mu(t) > 0$ για κάθε $t \in (-t^*, t^*)$. Έπεται ότι η Λ'_μ είναι γνησίως αύξουσα και, αφού επιπλέον $\Lambda'_\mu(0) = 0$, συμπεραίνουμε ότι η Λ_μ είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, t^*)$.

Έστω $m : [0, x^*) \rightarrow [0, \infty)$ η συνάρτηση

$$m(x) = -\ln \mu([x, \infty)).$$

Είναι σαφές ότι η m είναι αύξουσα. Παρατηρούμε ότι, από την ανισότητα Markov, για κάθε $x \in (0, x^*)$ και κάθε $t \geq 0$, έχουμε ότι $\mathbb{E}(e^{tX}) \geq e^{tx} \mu([x, \infty))$, και συνεπώς,

$$(6.1.4) \quad \Lambda_\mu(t) \geq tx - m(x).$$

Μια σημαντική περίπτωση στην οποία ικανοποιείται η (6.1.1) είναι όταν το μ είναι λογαριθμικά κοίλο.

Το επόμενο λήμμα περιγράφει τη συμπεριφορά της Λ_μ στα άκρα του J_μ για ένα λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας με μη φραγμένο φορέα στο $\mathbb{R}$.

Λήμμα 6.1.1. Έστω μ ένα άρτιο λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας στο $\mathbb{R}$ με

$$x^* = \sup \{x \in \mathbb{R} : \mu([x, \infty)) > 0\} = +\infty.$$

Αν το J_μ είναι φραγμένο διάστημα, τότε $J_\mu = (-t^*, t^*)$ για κάποιο $t^* > 0$ και $\lim_{t \uparrow t^*} \Lambda_\mu(t) = +\infty$.

Απόδειξη. Συμβολίζουμε με f την πυκνότητα του μ . Αφού $x^* = +\infty$, έχουμε ότι $\text{supp}(\mu) = \mathbb{R}$, άρα η f γράφεται ως $f = e^{-q}$, όπου $q : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι μια άρτια κυρτή συνάρτηση. Λόγω συμμετρίας, αρκεί να εξετάσουμε τη σύγκλιση της $\Lambda_\mu(t)$ για $t > 0$.

Σημειώνουμε ότι, αφού η q είναι άρτια και κυρτή στο $\mathbb{R}$, έχουμε $\lim_{x \rightarrow +\infty} q(x) = +\infty$ και η συνάρτηση $u(x) = \frac{q(x) - q(0)}{x}$ είναι αύξουσα στο $(0, \infty)$. Αρχικά, παρατηρούμε ότι δεν μπορούμε να έχουμε $\lim_{x \rightarrow \infty} u(x) = \infty$. Αν ίσχυε κάτι τέτοιο, τότε θα είχαμε $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{q(x)}{x} = \infty$, και

συνεπώς

$$\int_0^\infty e^{tx} f(x) dx = \int_0^\infty e^{x(t - \frac{q(x)}{x})} dx < \infty$$

για κάθε $t > 0$, δηλαδή $\Lambda_\mu(t) < \infty$ για κάθε $t > 0$, το οποίο δεν ισχύει στην περίπτωσή μας.

Άρα, αφού η u είναι αύξουσα, υπάρχει $t^* > 0$ τέτοιο ώστε

$$\lim_{x \rightarrow \infty} u(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{q(x) - q(0)}{x} = t^*.$$

Υποθέτουμε ότι $0 < t < t^*$. Αν το $\varepsilon > 0$ ικανοποιεί την $t + \varepsilon < t^*$ τότε υπάρχει $M > 0$ τέτοιο ώστε $u(x) - t > \varepsilon$ για κάθε $x \geq M$, και τότε

$$\int_0^\infty e^{tx} f(x) dx = e^{-q(0)} \int_0^\infty e^{-x(u(x)-t)} dx < \infty,$$

το οποίο δείχνει ότι $t \in J_\mu$, άρα $(-t^*, t^*) \subseteq J_\mu$.

Από την άλλη πλευρά, αν $t = t^*$ τότε χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι $u(x) \leq t^*$ για κάθε $x > 0$ παίρνουμε

$$\int_0^\infty e^{t^*x} f(x) dx = e^{-q(0)} \int_0^\infty e^{x(t^*-u(x))} dx = +\infty.$$

Αυτό αποδεικνύει ότι $J_\mu = (-t^*, t^*)$.

Τέλος, αν θεωρήσουμε μια γνησίως αύξουσα ακολουθία $t_n \rightarrow t^*$ τότε από το θεώρημα μονότονης σύγκλισης παίρνουμε

$$e^{\Lambda_\mu(t_n)} \geq \int_0^\infty e^{t_n x} f(x) dx \longrightarrow \int_0^\infty e^{t^* x} f(x) dx = +\infty,$$

το οποίο δείχνει ότι $\lim_{t \uparrow t^*} \Lambda_\mu(t) = +\infty$. □

Ορισμός 6.1.2. Έστω μ ένα άρτιο μέτρο πιθανότητας στο $\mathbb{R}$. Θα λέμε ότι το μ είναι *αποδεκτό* αν ικανοποιεί τις (6.1.1) και (6.1.2), καθώς και μία από τις ακόλουθες συνθήκες:

- (α) Το μ έχει συμπαγή φορέα, δηλαδή $x^* < +\infty$.
- (β) Ισχύουν οι $x^* = +\infty$ και $\{\Lambda_\mu < \infty\} = \mathbb{R}$.
- (γ) Ισχύει ότι $x^* = +\infty$, το σύνολο $\{\Lambda_\mu < \infty\}$ είναι φραγμένο και το μ είναι λογαριθμικά κοίλο.

Σημειώνουμε ότι αν $x^* < +\infty$ τότε $\{\Lambda_\mu < \infty\} = \mathbb{R}$. Παίρνοντας επίσης υπ' όψιν μας το Λήμμα 6.1.1 βλέπουμε ότι, σε όλες τις περιπτώσεις που θεωρούμε, το διάστημα $J_\mu = \{\Lambda_\mu < \infty\}$ είναι ανοικτό, δηλαδή $J_\mu = (-t^*, t^*)$ όπου $t^* = \sup J_\mu$.

Το επόμενο λήμμα περιγράφει τη συμπεριφορά της Λ'_μ για ένα αποδεκτό μέτρο μ . Η πρώτη περίπτωση είχε μελετηθεί στο [31].

Λήμμα 6.1.3. Έστω μ ένα αποδεκτό άρτιο Borel μέτρο πιθανότητας στην πραγματική ευθεία. Τότε, η $\Lambda'_\mu : J_\mu \rightarrow I_\mu$ είναι γνησίως αύξουσα και επί. Ειδικότερα,

$$\lim_{t \rightarrow \pm t^*} \Lambda'_\mu(t) = \pm x^*.$$

Απόδειξη. Έχουμε ήδη εξηγήσει ότι, εφόσον $(\Lambda'_\mu)'(t) = \Lambda''_\mu(t) = \text{Var}_t(X) > 0$, η συνάρτηση Λ'_μ είναι γνησίως αύξουσα. Τώρα, θεωρούμε τις τρεις περιπτώσεις του λήμματος χωριστά.

(α) Από την ανισότητα $-x^*e^{tX} \leq Xe^{tX} \leq x^*e^{tX}$, η οποία ισχύει με πιθανότητα 1 για κάθε σταθερό t , και από τον τύπο $\Lambda'_\mu(t) = \mathbb{E}(Xe^{tX})/\mathbb{E}(e^{tX})$, ελέγχουμε εύκολα ότι $\Lambda'_\mu(t) \in (-x^*, x^*)$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$.

Μένει να δείξουμε ότι η Λ'_μ είναι επί του I_μ . Έστω $x \in (0, x^*)$ και $y \in (x, x^*)$. Εφόσον $\Lambda_\mu(t) \geq ty - m(y)$ για κάθε $t \geq 0$, έχουμε ότι $\Lambda_\mu(m(y)/(y-x)) \geq xm(y)/(y-x)$. Έπεται ότι αν θεωρήσουμε τη συνάρτηση $q_x(t) := tx - \Lambda_\mu(t)$, τότε $q_x(0) = 0$ και $q_x(m(y)/(y-x)) \leq 0$. Αφού η q_x είναι κοίλη και $q'_x(0) = x > 0$, αυτό δείχνει ότι η q_x παίρνει τη μέγιστη τιμή της σε κάποιο σημείο στο ανοικτό διάστημα $(0, m(y)/(y-x))$, και συνεπώς, $\Lambda'_\mu(t) = x$ για κάποιο t σε αυτό το διάστημα. Το ίδιο επιχείρημα εφαρμόζεται για όλα τα $x \in (-x^*, 0)$. Τέλος, για $x = 0$ έχουμε ότι $\Lambda'_\mu(0) = x$.

(β) Εφαρμόζουμε το ίδιο επιχείρημα όπως στο (α).

(γ) Υποθέτουμε ότι η Λ'_μ είναι άνω φραγμένη. Τότε, υπάρχει $x > 0$ τέτοιο ώστε $\Lambda'_\mu(t) < x$ για κάθε $t \in J_\mu$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $q_x : J_\mu \rightarrow \mathbb{R}$ με $q_x(t) = tx - \Lambda_\mu(t)$. Τότε, η q_x είναι γνησίως αύξουσα. Όμως, $\lim_{t \uparrow t^*} q_x(t) = -\infty$ διότι $\lim_{t \uparrow t^*} \Lambda_\mu(t) = +\infty$ από το Λήμμα 6.1.1, και αυτό οδηγεί σε αντίφαση. $\square$

Έστω μ ένα αποδεκτό άρτιο Borel μέτρο πιθανότητας στην πραγματική ευθεία. Το Λήμμα 6.1.3 μας επιτρέπει να ορίσουμε τη συνάρτηση $h : I_\mu \rightarrow J_\mu$ με $h := (\Lambda'_\mu)^{-1}$. Παρατηρήστε ότι η h είναι μια γνησίως αύξουσα C^∞ συνάρτηση και

$$(6.1.5) \quad h'(x) = \frac{1}{\Lambda''_\mu(h(x))}.$$

Κατόπιν, θεωρούμε τον μετασχηματισμό Legendre της Λ_μ , δηλαδή τη συνάρτηση

$$\Lambda_\mu^*(x) := \sup \{ tx - \Lambda_\mu(t) : t \in \mathbb{R} \}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Μάλιστα, αφού $tx - \Lambda_\mu(t) < 0$ για $t < 0$ όταν $x \in [0, x^*)$, έχουμε ότι $\Lambda_\mu^*(x) = \sup \{ tx - \Lambda_\mu(t) : t \geq 0 \}$ σε αυτήν την περίπτωση, και όμοια $\Lambda_\mu^*(x) = \sup \{ tx - \Lambda_\mu(t) : t \leq 0 \}$ όταν $x \in (-x^*, 0]$.

Οι βασικές ιδιότητες της Λ_μ^* περιγράφονται στο επόμενο λήμμα (για μια απόδειξη, βλ. [30, Πρόταση 2.12]).

Λήμμα 6.1.4. Έστω μ ένα αποδεκτό άρτιο μέτρο πιθανότητας στο $\mathbb{R}$. Τότε,

(α) $\Lambda_\mu^* \geq 0$, $\Lambda_\mu^*(0) = 0$ και $\Lambda_\mu^*(x) = \infty$ για $x \in \mathbb{R} \setminus [-x^*, x^*]$.

(β) Για κάθε $x \in I_\mu$ έχουμε $\Lambda_\mu^*(x) = tx - \Lambda_\mu(t)$ αν και μόνο αν $\Lambda'_\mu(t) = x$. Άρα,

$$\Lambda_\mu^*(x) = xh(x) - \Lambda_\mu(h(x)) \quad \text{για } x \in I_\mu.$$

(γ) Η Λ_μ^* είναι γνησίως κυρτή C^∞ συνάρτηση στο I_μ , και

$$(\Lambda_\mu^*)'(x) = h(x).$$

(δ) Η Λ_μ^* έχει μοναδικό σημείο ελαχίστου στο I_μ , το $x = 0$.

(ε) $\Lambda_\mu^*(x) \leq m(x)$ για κάθε $x \in [0, x^*)$. Αυτό είναι άμεση συνέπεια της (6.1.4).

Πόρισμα 6.1.5. Ισχύει ότι $\lim_{x \uparrow x^*} \Lambda_\mu^*(x) = +\infty$.

Απόδειξη. Αν $x^* = +\infty$ τότε η κυρτότητα της Λ_μ^* και το γεγονός ότι $(\Lambda_\mu^*)'(x) > 0$ για κάθε $x > 0$ (το οποίο είναι συνέπεια του Λήμματος 6.1.4 (δ) και της παρατήρησης ότι $(\Lambda_\mu^*)'' = h' > 0$) συνεπάγονται ότι $\lim_{x \uparrow x^*} \Lambda_\mu^*(x) = +\infty$.

Στη συνέχεια, υποθέτουμε ότι $x^* < +\infty$. Εφόσον $\Lambda'_\mu(t) \leq x^*$ για κάθε t , η συνάρτηση $t \mapsto tx^* - \Lambda_\mu(t)$ είναι αύξουσα. Συνεπώς,

$$\Lambda_\mu^*(x^*) = \sup_{t \in \mathbb{R}} [tx^* - \Lambda_\mu(t)] = \lim_{t \uparrow \infty} [tx^* - \Lambda_\mu(t)].$$

Όμως,

$$\lim_{t \uparrow \infty} e^{-(tx^* - \Lambda_\mu(t))} = \lim_{t \uparrow \infty} e^{-tx^*} g(t) = \lim_{t \uparrow \infty} \mathbb{E}(e^{t(X-x^*)}) = \mathbb{E}\left(\lim_{t \uparrow \infty} e^{t(X-x^*)}\right) = P(X = x^*),$$

όπου η τρίτη ισότητα προκύπτει από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης. Έπεται ότι $\Lambda_\mu^*(x^*) = -\ln P(X = x^*) = +\infty$. Αφού η Λ_μ^* είναι κάτω ημισυνεχής στο $\mathbb{R}$ ως το κατά σημείο supremum των συνεχών συναρτήσεων $x \mapsto tx - \Lambda_\mu(t)$, $t \in \mathbb{R}$, βλέπουμε ότι $\lim_{x \uparrow x^*} \Lambda_\mu^*(x) = +\infty$. $\square$

Το επόμενο αποτέλεσμα γενικεύει, στην περίπτωση που το μ είναι άρτιο, την Πρόταση 5.3.7 σύμφωνα με την οποία η Λ_μ^* έχει πεπερασμένες ροπές κάθε τάξης αν το μ είναι απολύτως συνεχές ως προς το μέτρο Lebesgue. Ο πιο γενικός ισχυρισμός της επόμενης πρότασης εμφανίζεται ως άσκηση στο [22].

Πρόταση 6.1.6. Έστω μ ένα άρτιο μέτρο πιθανότητας στο $\mathbb{R}$. Τότε,

$$\int_{I_\mu} e^{\Lambda_\mu^*(x)/2} d\mu(x) \leq 4.$$

Ειδικότερα, για κάθε $p \geq 1$ έχουμε ότι $\int_{I_\mu} (\Lambda_\mu^*(x))^p d\mu(x) < +\infty$.

Περιγραφή της απόδειξης. Ορίζουμε $F(x) = \mu((-\infty, x])$ και για κάθε σταθερό $z > 0$ θέτουμε $\alpha(x) = F(x) - F(z)$ και $\beta(x) = \exp(I(x)/2)$ όπου $I(x) = 0$ αν $x \leq 0$ και $I(x) = \Lambda_\mu^*(x)$ αν

$x > 0$. Σημειώνουμε ότι η α είναι συνεχής από δεξιά και αύξουσα, και ότι η β είναι αύξουσα. Εφαρμόζοντας το [35, Θεώρημα 21.67 (iv)] γράφουμε

$$\int_0^z \beta(x) d\alpha(x) + \int_0^z \alpha(x-) d\beta(x) = \alpha(z) e^{I(z+)/2} - \alpha(0-) e^{I(0-)/2},$$

όπου, για μια συνάρτηση f , θέτουμε $f(x+) = \lim_{y \rightarrow x^+} f(y)$ και $f(x-) = \lim_{y \rightarrow x^-} f(y)$. Έπεται ότι, για κάθε $0 < z < x^*$,

$$\begin{aligned} \int_0^z e^{\Lambda_\mu^*(x)/2} d\mu(x) &= \int_0^z \beta(x) d\alpha(x) = - \int_0^z \alpha(x-) d\beta(x) + \alpha(z) e^{I(z+)/2} - \alpha(0-) e^{I(0-)/2} \\ &\leq \int_0^z e^{-I(x)} d\beta(x) + 1, \end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι $-\alpha(x-) = \mu([x, z]) \leq e^{-\Lambda_\mu^*(x)}$ και $I(0-) = 0$, $-\alpha(0-) \leq 1$. Τέλος, παρατηρούμε ότι

$$\int_0^z e^{-I(x)} d\beta(x) + 1 = \int_0^z \beta(x)^{-2} d\beta(x) + 1 \leq \int_1^\infty t^{-2} dt + 1 = 2,$$

διότι η β είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο $[0, z]$ και $\beta(0) = 1$. Τώρα το αποτέλεσμα έπεται λόγω συμμετρίας. $\square$

Κλείνουμε αυτήν την ενότητα υπενθυμίζοντας την Λ^* -συνθήκη.

Ορισμός 6.1.7. Έστω μ ένα αποδεκτό άρτιο Borel μέτρο πιθανότητας στην πραγματική ευθεία. Υπενθυμίζουμε ότι $\Lambda_\mu^*(x) \leq m(x)$ για κάθε $x \in [0, x^*)$. Θα λέμε ότι το μ ικανοποιεί την Λ^* -συνθήκη αν

$$\lim_{x \uparrow x^*} \frac{m(x)}{\Lambda_\mu^*(x)} = 1.$$

6.2 Φαινόμενα κατωφλίου για αποδεκτά μέτρα

Σε αυτή την ενότητα αποδεικνύουμε το ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 6.2.1. Έστω μ ένα αποδεκτό άρτιο μέτρο πιθανότητας στο $\mathbb{R}$ το οποίο ικανοποιεί την Λ^* -συνθήκη. Τότε, για κάθε $\delta \in (0, \frac{1}{2})$ και κάθε $\varepsilon \in (0, 1)$ υπάρχει $n_0(\mu, \delta, \varepsilon)$ τέτοιος ώστε

$$\varrho_1(\mu_n, \delta) \geq (1 - \varepsilon) \mathbb{E}_\mu(\Lambda_\mu^*) \quad \text{και} \quad \varrho_2(\mu_n, \delta) \leq (1 + \varepsilon) \mathbb{E}_\mu(\Lambda_\mu^*)$$

για κάθε $n \geq n_0(\mu, \delta, \varepsilon)$. Ειδικότερα, η ακολουθία $\{\mu_n\}_{n=1}^\infty$ εμφανίζει ισχυρό φαινόμενο κατωφλίου, δηλαδή $\lim_{n \rightarrow \infty} \varrho(\mu_n, \delta) = 0$, με «σταθερά κατωφλίου» $\mathbb{E}_\mu(\Lambda_\mu^*)$.

Έστω μ ένα αποδεκτό άρτιο Borel μέτρο πιθανότητας στην πραγματική ευθεία. Υπενθυμίζουμε ότι $\mu_n = \mu \otimes \cdots \otimes \mu$ (n φορές), συνεπώς ο φορέας του μ_n είναι το $I_{\mu_n} = I_\mu^n$. Ο

λογαριθμικός μετασχηματισμός Laplace του μ_n ορίζεται από την

$$\Lambda_{\mu_n}(\xi) = \ln \left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{\langle \xi, z \rangle} d\mu_n(z) \right), \quad \xi \in \mathbb{R}^n$$

και ο μετασχηματισμός Cramér του μ_n είναι ο μετασχηματισμός Legendre της Λ_{μ_n} , που ορίζεται από την

$$\Lambda_{\mu_n}^*(x) = \sup_{\xi \in \mathbb{R}^n} \{ \langle x, \xi \rangle - \Lambda_{\mu_n}(\xi) \}, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Εφόσον το μ_n είναι μέτρο γινόμενο, μπορούμε να ελέγξουμε εύκολα ότι $\Lambda_{\mu_n}^*(x) = \sum_{i=1}^n \Lambda_{\mu}^*(x_i)$ για κάθε $x = (x_1, \dots, x_n) \in I_{\mu_n}$, το οποίο συνεπάγεται ότι

$$\int_{I_{\mu_n}} e^{\Lambda_{\mu_n}^*(x)/2} d\mu_n(x) = \prod_{i=1}^n \left(\int_{I_{\mu}} e^{\Lambda_{\mu}^*(x_i)/2} d\mu(x_i) \right) < +\infty.$$

Ειδικότερα, για κάθε $p \geq 1$ έχουμε ότι $\int_{I_{\mu_n}} (\Lambda_{\mu_n}^*(x))^p d\mu_n(x) < +\infty$. Ορίζουμε επίσης την παράμετρο

$$(6.2.1) \quad \beta(\mu_n) = \frac{\text{Var}_{\mu_n}(\Lambda_{\mu_n}^*)}{(\mathbb{E}_{\mu_n}(\Lambda_{\mu_n}^*))^2}.$$

Εφόσον $\mu_n = \mu \otimes \dots \otimes \mu$, βλέπουμε ότι $\text{Var}_{\mu_n}(\Lambda_{\mu_n}^*) = n \text{Var}_{\mu}(\Lambda_{\mu}^*)$ και $\mathbb{E}_{\mu_n}(\Lambda_{\mu_n}^*) = n \mathbb{E}_{\mu}(\Lambda_{\mu}^*)$. Συνεπώς,

$$\beta(\mu_n) = \frac{\text{Var}_{\mu_n}(\Lambda_{\mu_n}^*)}{(\mathbb{E}_{\mu_n}(\Lambda_{\mu_n}^*))^2} = \frac{\beta(\mu)}{n},$$

όπου $\beta(\mu)$ είναι μια πεπερασμένη θετική σταθερά η οποία είναι ανεξάρτητη από το n . Ειδικότερα, $\beta(\mu_n) \rightarrow 0$ καθώς $n \rightarrow \infty$.

Για να εκτιμήσουμε τις $\varrho_i(\mu_n, \delta)$, $i = 1, 2$, θα ακολουθήσουμε την προσέγγιση του προηγούμενου κεφαλαίου. Για κάθε $r > 0$ ορίζουμε

$$B_r(\mu_n) := \{x \in \mathbb{R}^n : \Lambda_{\mu_n}^*(x) \leq r\}.$$

Σημειώνουμε ότι, αφού $\Lambda_{\mu_n}^*(x) = \sum_{i=1}^n \Lambda_{\mu}^*(x_i)$ για κάθε $x = (x_1, \dots, x_n)$ και η $\Lambda_{\mu}^*(y)$ αυξάνει στο $+\infty$ καθώς $y \uparrow x^*$, για κάθε $r > 0$ υπάρχει $0 < M_r < x^*$ τέτοιος ώστε $B_r(\mu_n) \subseteq [-M_r, M_r]^n \subseteq I_{\mu}^n$, άρα το $B_r(\mu_n)$ είναι ένα συμπαγές υποσύνολο του I_{μ}^n .

Για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$ συμβολίζουμε με $\mathcal{H}(x)$ το σύνολο όλων των ημιχώρων H του $\mathbb{R}^n$ που περιέχουν το x και θεωρούμε τη συνάρτηση Tukey

$$\varphi_{\mu_n}(x) = \inf \{ \mu_n(H) : H \in \mathcal{H}(x) \}.$$

Ξεκινάμε με το άνω φράγμα κατωφλίου. Σημειώνουμε ότι η Λ^* -συνθήκη δεν είναι απαραίτητη γι' αυτό το αποτέλεσμα.

Θεώρημα 6.2.2. Έστω μ ένα άρτιο μέτρο πιθανότητας στο $\mathbb{R}$. Τότε, για κάθε $\delta \in (0, \frac{1}{2})$

υπάρχουν $c(\mu, \delta) > 0$ και $n_0(\mu, \delta) \in \mathbb{N}$ ώστε

$$\varrho_1(\mu_n, \delta) \geq \left(1 - \frac{c(\mu, \delta)}{\sqrt{n}}\right) \mathbb{E}_\mu(\Lambda_\mu^*).$$

Απόδειξη. Η συνήθης μέθοδος με την οποία προσπαθούμε να εξασφαλίσουμε το άνω φράγμα κατωφλίου βασίζεται στο ακόλουθο αποτέλεσμα το οποίο ισχύει γενικά, για κάθε Borel μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$, και το οποίο έχουμε ήδη χρησιμοποιήσει στο προηγούμενο κεφάλαιο (βλ. Λήμμα 5.4.3). Για κάθε $r > 0$ και κάθε $N > n$ έχουμε ότι

$$(6.2.2) \quad \mathbb{E}_{\mu_n^N}(\mu_n(K_N)) \leq \mu_n(B_r(\mu_n)) + N \exp(-r).$$

Αυτή η εκτίμηση εμφανίστηκε αρχικά στο [25] και προκύπτει από την παρατήρηση ότι (από τον ορισμό της φ_{μ_n} , την ανισότητα Markov και τον ορισμό της $\Lambda_{\mu_n}^*$) για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$ ισχύει ότι

$$(6.2.3) \quad \varphi_{\mu_n}(x) \leq \exp(-\Lambda_{\mu_n}^*(x)).$$

Χρησιμοποιούμε την (6.2.2) με τον ακόλουθο τρόπο. Θέτουμε $T_1 := \mathbb{E}_\mu(\Lambda_\mu^*)$ και $T_n := \mathbb{E}_{\mu_n}(\Lambda_{\mu_n}^*) = T_1 n$. Τότε, για κάθε $\zeta \in (0, 1)$, από την ανισότητα Chebyshev έχουμε ότι

$$\mu_n(\{\Lambda_{\mu_n}^* \leq T_n - \zeta T_n\}) \leq \mu_n(\{|\Lambda_{\mu_n}^* - T_n| \geq \zeta T_n\}) \leq \frac{\mathbb{E}_{\mu_n} |\Lambda_{\mu_n}^* - T_n|^2}{\zeta^2 T_n^2} = \frac{\beta(\mu_n)}{\zeta^2} = \frac{\beta(\mu)}{\zeta^2 n}.$$

Ισοδύναμα,

$$\mu_n(B_{(1-\zeta)T_n}(\mu_n)) \leq \frac{\beta(\mu)}{\zeta^2 n}.$$

Έστω $\delta \in (0, \frac{1}{2})$. Μπορούμε να βρούμε $n_0(\mu, \delta)$ τέτοιον ώστε αν $n \geq n_0(\mu, \delta)$ να έχουμε $8\beta(\mu)/n < \delta < 1/2$. Επιλέγουμε $\zeta = \sqrt{2\beta(\mu)/n\delta}$, το οποίο συνεπάγεται ότι

$$\mu(B_{(1-\zeta)T_n}(\mu_n)) \leq \frac{\delta}{2}.$$

Από την (6.2.2) βλέπουμε ότι

$$\begin{aligned} \sup\{\mathbb{E}_{\mu_n^N}(\mu_n(K_N)) : N \leq e^{(1-2\zeta)T_n}\} &\leq \mu_n(B_{(1-\zeta)T_n}(\mu_n)) + e^{(1-2\zeta)T_n} e^{-(1-\zeta)T_n} \\ &\leq \frac{\delta}{2} + e^{-\zeta T_n} \leq \delta, \end{aligned}$$

εάν ικανοποιείται η $\zeta T_n \geq \ln(2/\delta)$. Λόγω της $T_n = T_1 n$, η τελευταία συνθήκη παίρνει τη μορφή $T_1 n \geq c_1 \ln(2/\delta) \sqrt{\delta n/\beta(\mu)}$ και ασφαλώς ικανοποιείται αν $n \geq n_0(\mu)$, όπου ο $n_0(\mu)$ εξαρτάται μόνο από την παράμετρο $\beta(\mu)$ διότι η συνάρτηση $\sqrt{\delta} \ln(2/\delta)$ είναι φραγμένη στο διάστημα $(0, \frac{1}{2})$. Από την επιλογή του ζ συμπεραίνουμε ότι

$$\varrho_1(\mu_n, \delta) \geq \left(1 - \sqrt{8\beta(\mu)/n\delta}\right) \mathbb{E}_\mu(\Lambda_\mu^*)$$

όπως θέλαμε. $\square$

Για την απόδειξη του κάτω φράγματος κατωφλίου θα χρειαστούμε το γνωστό λήμμα που χρησιμοποιείται σε όλες τις μέχρι τώρα αποδείξεις παρόμοιων φραγμάτων.

Λήμμα 6.2.3. Για κάθε Borel υποσύνολο A του $\mathbb{R}^n$ ισχύει ότι

$$1 - \mu_n^N(K_N \supseteq A) \leq \binom{N}{n} p_\mu^{N-n} + 2 \binom{N}{n} \left(1 - \inf_{x \in A} \varphi_{\mu_n}(x)\right)^{N-n}.$$

όπου $p_\mu = \max\{P(X = x) : x \in \mathbb{R}\} < 1$. Συνεπώς,

$$(6.2.4) \quad \mathbb{E}_{\mu_n^N} [\mu_n(K_N)] \geq \mu_n(A) \left(1 - \binom{N}{n} p_\mu^{N-n} - 2 \binom{N}{n} \left(1 - \inf_{x \in A} \varphi_{\mu_n}(x)\right)^{N-n}\right).$$

Θέλουμε να εφαρμόσουμε το Λήμμα 6.2.3 με $A = B_{(1+\varepsilon)T_n}(\mu_n)$, χρησιμοποιώντας την ανισότητα Chebyshev ακριβώς όπως στην απόδειξη του Θεωρήματος 6.2.2. Από την (6.2.4) είναι φανερό ότι θα χρειαστούμε επίσης ένα κάτω φράγμα για το $\inf_{x \in B_{(1+\varepsilon)T_n}(\mu_n)} \varphi_{\mu_n}(x)$ το οποίο να εξασφαλίζει ότι

$$2 \binom{N}{n} \left(1 - \inf_{x \in B_{(1+\varepsilon)T_n}(\mu_n)} \varphi_{\mu_n}(x)\right)^{N-n} = o_n(1).$$

Το κύριο τεχνικό βήμα είναι να αποδείξουμε την ακόλουθη ανισότητα.

Θεώρημα 6.2.4. Έστω μ ένα αποδεκτό άρτιο μέτρο πιθανότητας στο $\mathbb{R}$ το οποίο ικανοποιεί την Λ^* -συνθήκη, δηλαδή $m(x) \sim \Lambda_\mu^*(x)$ καθώς $x \uparrow x^*$. Τότε, για κάθε $\zeta > 0$, υπάρχει $n_0(\mu, \zeta) \in \mathbb{N}$, που εξαρτάται μόνο από τα ζ και μ , ώστε για κάθε $r > 0$ και κάθε $n \geq n_0(\mu, \zeta)$ να έχουμε ότι

$$\inf_{x \in B_r(\mu_n)} \varphi_{\mu_n}(x) \geq \exp(-(1 + \zeta)r - 2\zeta n).$$

Απόδειξη. Έστω $x \in B_r(\mu_n)$ και H_1 ένας κλειστός ημίχωρος με $x \in \partial H_1$. Υπάρχει $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ τέτοιο ώστε $H_1 = \{y \in \mathbb{R}^n : \langle v, y - x \rangle \geq 0\}$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $q : B_r(\mu_n) \rightarrow \mathbb{R}$, $q(w) = \langle v, w \rangle$. Εφόσον η q είναι συνεχής και το $B_r(\mu_n)$ είναι συμπαγές, η q παίρνει μέγιστη τιμή σε κάποιο σημείο $z \in B_r(\mu_n)$. Ορίζουμε $H = \{y \in \mathbb{R}^n : \langle v, y - z \rangle \geq 0\}$. Τότε, $z \in \partial(H)$ και για κάθε $w \in B_r(\mu_n)$ έχουμε $\langle v, w \rangle \leq \langle v, z \rangle$, το οποίο αποδεικνύει ότι το υπερεπίπεδο $\partial(H)$ στηρίζει το $B_r(\mu_n)$ στο z . Επιπλέον, $H \subseteq H_1$ και άρα $P(\vec{X} \in H) \leq P(\vec{X} \in H_1)$. Αυτό αποδεικνύει ότι το $\inf\{\varphi_{\mu_n}(x) : x \in B_r(\mu_n)\}$ υλοποιείται από κάποιον ημίχωρο H του οποίου το συνοριακό υπερεπίπεδο στηρίζει το $B_r(\mu_n)$. Συνεπώς, για την απόδειξη του θεωρήματος αρκεί να δείξουμε ότι για τυχόν δοθέν $\zeta > 0$ μπορούμε να βρούμε $n_0(\mu, \zeta)$ ώστε αν $n \geq n_0(\mu, \zeta)$ τότε να έχουμε

$$(6.2.5) \quad P(\vec{X} \in H) \geq \exp(-(1 + \zeta)r - 2\zeta n)$$

για κάθε κλειστό ημίχωρο H του οποίου το συνοριακό υπερεπίπεδο στηρίζει το $B_r(\mu_n)$.

Έστω H ένας τέτοιος ημίχωρος. Τότε, υπάρχει $x \in \partial(B_r(\mu_n))$ τέτοιο ώστε

$$P(\vec{X} \in H) = P\left(\sum_{i=1}^n t_i(X_i - x_i) \geq 0\right),$$

όπου $t_i = h(x_i)$, διότι το κάθετο διάνυσμα στον H είναι το $\nabla \Lambda_{\mu_n}^*(x)$ και $(\Lambda_{\mu}^*)' = h$ από το Λήμμα 6.1.4 (γ). Σταθεροποιούμε αυτό το x για το υπόλοιπο της απόδειξης. Λόγω συμμετρίας και ανεξαρτησίας μπορούμε να υποθέσουμε ότι $x_i \geq 0$ για κάθε $1 \leq i \leq n$. Υπενθυμίζουμε ότι $\Lambda_{\mu}^*(0) = 0$ και ότι το μ ικανοποιεί την Λ^* -συνθήκη: έχουμε $m(x) \sim \Lambda_{\mu}^*(x)$ καθώς $x \uparrow x^*$. Συνεπώς, μπορούμε να βρούμε $M > \tau > 0$ με τις ακόλουθες ιδιότητες:

(α) Αν $0 \leq x \leq \tau$ τότε $0 \leq \Lambda_{\mu}^*(x) \leq \zeta$.

(β) Αν $M < x < x^*$ τότε $P(X \geq x) \geq \exp(-\Lambda_{\mu}^*(x)(1 + \zeta))$.

Θέτουμε $[n] = \{1, \dots, n\}$. Θεωρούμε τα σύνολα δεικτών

$$\begin{aligned} A_1 &= A_1(x) := \{i \in [n] : x_i < \tau\}, \\ A_2 &= A_2(x) := \{i \in [n] : \tau \leq x_i \leq M\}, \\ A_3 &= A_3(x) := \{i \in [n] : x_i > M\} \end{aligned}$$

και τις πιθανότητες

$$P_j = P_j(x) := P\left(\sum_{i \in A_j} t_i(X_i - x_i) \geq 0\right) \quad j = 1, 2, 3.$$

Λόγω ανεξαρτησίας έχουμε ότι

$$P(\vec{X} \in H) = P\left(\sum_{i=1}^n t_i(X_i - x_i) \geq 0\right) \geq P_1 P_2 P_3.$$

Θα δώσουμε κάτω φράγματα για τις P_1 , P_2 και P_3 χωριστά.

Λήμμα 6.2.5. *Ισχύει ότι*

$$P_1 \geq \exp\left(-\sum_{i \in A_1} (\Lambda_{\mu}^*(x_i) + \zeta) - c_1 \ln|A_1| - c_2\right),$$

όπου οι σταθερές $c_1, c_2 > 0$ εξαρτώνται μόνο από τα ζ και μ .

Απόδειξη. Γράφουμε

$$(6.2.6) \quad P_1 = P\left(\sum_{i \in A_1} t_i(X_i - x_i) \geq 0\right) \geq P\left(\sum_{i \in A_1} t_i(X_i - \tau) \geq 0\right),$$

και χρησιμοποιούμε το εξής αποτέλεσμα (βλ. [31, Λήμμα 4.3]): Για κάθε $\tau \in (0, x^*)$, υπάρχει $c(\tau) > 0$ που εξαρτάται μόνο από τα τ και μ , τέτοιο ώστε για κάθε $k \in \mathbb{N}$ και κάθε $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}$ με $\sum_{i=1}^k v_i > 0$ να ισχύει ότι

$$P\left(\sum_{i=1}^k v_i(X_i - \tau) \geq 0\right) \geq c(\tau) k^{-3/2} e^{-k\Lambda_\mu^*(\tau)}.$$

Συνδυάζοντας το παραπάνω με την (6.2.6) και χρησιμοποιώντας το απλό φράγμα $\Lambda_\mu^*(\tau) \leq \zeta \leq \Lambda_\mu^*(x) + \zeta$ για x στο $[0, \tau]$, ολοκληρώνουμε την απόδειξη του λήμματος. $\square$

Λήμμα 6.2.6. *Ισχύει ότι*

$$P_3 \geq \exp\left(-(1 + \zeta) \sum_{i \in A_3} \Lambda_\mu^*(x_i)\right).$$

Απόδειξη. Λόγω ανεξαρτησίας, μπορούμε να γράψουμε

$$P_3 = P\left(\sum_{i \in A_3} t_i(X_i - x_i) \geq 0\right) \geq \prod_{i \in A_3} P(X_i \geq x_i).$$

Από την επιλογή του M βλέπουμε ότι

$$P(X_i \geq x_i) \geq e^{-\Lambda_\mu^*(x_i)(1+\zeta)}$$

για κάθε $i \in A_3$, και αυτό μας δίνει αμέσως τον ισχυρισμό του λήμματος. $\square$

Λήμμα 6.2.7. *Υπάρχουν σταθερές $c_3, c_4 > 0$ που εξαρτώνται μόνο από τα ζ, M και μ , τέτοιες ώστε*

$$P\left(\sum_{i \in A_2} t_i(X_i - x_i) \geq 0\right) \geq \exp\left(-\sum_{i \in A_2} \Lambda_\mu^*(x_i) - c_3 \sqrt{|A_2|} - c_4\right).$$

Η απόδειξη αυτής της εκτίμησης απαιτεί κάποια προεργασία. Χωρίς περιορισμό της γενικότητας, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $A_2 = \{1, \dots, k\}$ για κάποιον $k \leq n$. Υπενθυμίζουμε ότι $t_i = h(x_i)$ για κάθε i , και ότι αυτή η σχέση είναι ισοδύναμη με το να έχουμε $x_i = \Lambda'_\mu(t_i)$ για κάθε i (βλ. Λήμμα 6.1.4(β)). Ορίζουμε το μέτρο πιθανότητας $P_{x_1, \dots, x_k}$ στον $(\Omega, \mathcal{F})$, θέτοντας

$$P_{x_1, \dots, x_k}(A) := \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_A \cdot \exp\left(\sum_{i=1}^k (t_i X_i - \Lambda_\mu(t_i))\right)\right]$$

για $A \in \mathcal{F}$. Απευθείας υπολογισμός δείχνει ότι, ως προς το $P_{x_1, \dots, x_k}$, οι τυχαίες μεταβλητές $t_1 X_1, \dots, t_k X_k$ είναι ανεξάρτητες, με μέση τιμή, διασπορά και απόλυτη τρίτη ροπή που δίνονται

από τις

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_{x_1, \dots, x_k}(t_i X_i) &= t_i \Lambda'_\mu(t_i) = t_i x_i, \\ \mathbb{E}_{x_1, \dots, x_k}(|t_i(X_i - x_i)|^2) &= t_i^2 \Lambda''_\mu(t_i), \\ \mathbb{E}_{x_1, \dots, x_k}(|t_i(X_i - x_i)|^3) &= |t_i|^3 \mathbb{E}_{t_i}(|X - \Lambda'_\mu(t_i)|^3),\end{aligned}$$

αντίστοιχα. Ορίζουμε $\sigma_i^2 := t_i^2 \Lambda''_\mu(t_i)$,

$$s_k^2 := \sum_{i=1}^k \mathbb{E}_{x_1, \dots, x_k}(|t_i(X_i - x_i)|^2) = \sum_{i=1}^k t_i^2 \Lambda''_\mu(t_i) = \sum_{i=1}^k \sigma_i^2$$

και

$$S_k := \sum_{i=1}^k t_i(X_i - x_i),$$

και συμβολίζουμε με $F_k: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τη συνάρτηση κατανομής της τυχαίας μεταβλητής S_k/s_k ως προς το $P_{x_1, \dots, x_k}$: $F_k(x) := P_{x_1, \dots, x_k}(S_k \leq x s_k)$ ($x \in \mathbb{R}$). Συμβολίζουμε επίσης με ν_k το μέτρο πιθανότητας στο $\mathbb{R}$ που ορίζεται από την $\nu_k(-\infty, x] := F_k(x)$ ($x \in \mathbb{R}$). Παρατηρούμε ότι $\mathbb{E}_{x_1, \dots, x_k}(S_k/s_k) = 0$ και $\text{Var}_{x_1, \dots, x_k}(S_k/s_k) = 1$.

Λήμμα 6.2.8. *Ισχύει η ακόλουθη ταυτότητα:*

$$P\left(\sum_{i=1}^k t_i(X_i - x_i) \geq 0\right) = \left(\int_{[0, \infty)} e^{-s_k u} d\nu_k(u)\right) \exp\left(-\sum_{i=1}^k \Lambda_\mu^*(x_i)\right).$$

Απόδειξη. Από τον ορισμό του μέτρου $P_{x_1, \dots, x_k}$, έχουμε ότι

$$P\left(\sum_{i=1}^k t_i(X_i - x_i) \geq 0\right) = P(S_k \geq 0) = \mathbb{E}_{x_1, \dots, x_k}\left[\mathbf{1}_{[0, \infty)}(S_k) \cdot \exp\left(-\sum_{i=1}^k (t_i X_i - \Lambda_\mu(t_i))\right)\right].$$

Έπεται ότι

$$P\left(\sum_{i=1}^k t_i(X_i - x_i) \geq 0\right) = \int_{[0, \infty)} e^{-s_k u} d\nu_k(u) \cdot \exp\left(\sum_{i=1}^k (\Lambda_\mu(t_i) - t_i x_i)\right),$$

και το λήμμα προκύπτει τώρα από το Λήμμα 6.1.4 (β). □

Θα χρησιμοποιήσουμε επίσης την εξής συνέπεια του θεωρήματος Berry-Esseen (βλ. [26], σελ. 544).

Λήμμα 6.2.9. *Για κάθε $a, b > 0$, υπάρχουν $k_0 \in \mathbb{N}$ και $\vartheta > 0$ με την ακόλουθη ιδιότητα: Αν $k \geq k_0$, και αν $Y_1, \dots, Y_k$ είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές με*

$$\mathbb{E}(Y_i) = 0, \quad \sigma_i^2 := \mathbb{E}(Y_i^2) \geq a, \quad \mathbb{E}(|Y_i|^3) \leq b,$$

τότε

$$\mathbb{P}\left(0 \leq \sum_{i=1}^k Y_i \leq \sigma\right) \geq \vartheta,$$

όπου $\sigma^2 = \sigma_1^2 + \dots + \sigma_k^2$.

Απόδειξη του Λήμματος 6.2.7. Θεωρούμε τις τυχαίες μεταβλητές $Y_i := t_i(X_i - x_i)$, $i \in A_2 = \{1, \dots, k\}$, οι οποίες είναι ανεξάρτητες ως προς το $P_{x_1, \dots, x_k}$ και ικανοποιούν την $\mathbb{E}_{x_1, \dots, x_k}(Y_i) = 0$ για κάθε $1 \leq i \leq k$. Θέτουμε $J_\mu^* = (\Lambda_\mu')^{-1}([\tau, M])$. Εφόσον $\tau \leq x_i \leq M$ για κάθε $1 \leq i \leq k$, βλέπουμε ότι

$$\sigma_i^2 = \mathbb{E}_{x_1, \dots, x_k}(Y_i^2) = t_i^2 \Lambda_\mu''(t_i) \geq \min_{t \in J_\mu^*} t^2 \Lambda_\mu''(t) =: a_1 > 0$$

και

$$\mathbb{E}_{x_1, \dots, x_k}(|Y_i|^3) = |t_i|^3 \mathbb{E}_{t_i}(|X - \Lambda_\mu'(t_i)|^3) \leq \max_{t \in J_\mu^*} |t|^3 \mathbb{E}_t(|X - \Lambda_\mu'(t)|^3) =: b_1 < +\infty$$

για κάθε $1 \leq i \leq k$. Εφαρμόζοντας το Λήμμα 6.2.9 βρίσκουμε $\vartheta > 0$ και $k_0 \in \mathbb{N}$ τέτοια ώστε, αν $k \geq k_0$ τότε

$$(6.2.7) \quad \mathbb{P}_{x_1, \dots, x_k}\left(0 \leq \sum_{i=1}^k Y_i \leq s_k\right) \geq \vartheta.$$

Τώρα, διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

Περίπτωση 1: Υποθέτουμε ότι $k < k_0$. Τότε, δουλεύοντας όπως για το A_3 , βλέπουμε ότι

$$P\left(\sum_{i \in A_2} t_i(X_i - x_i) \geq 0\right) \geq \prod_{i \in A_2} P(X_i \geq x_i) \geq \prod_{i \in A_2} P(X_i \geq M) = e^{-m(M)k} \geq e^{-m(M)k_0}.$$

Περίπτωση 2: Υποθέτουμε ότι $k \geq k_0$. Από το Λήμμα 6.2.8 έχουμε

$$(6.2.8) \quad \begin{aligned} P\left(\sum_{i \in A_2} t_i(X_i - x_i) \geq 0\right) &= \left(\int_{[0, \infty)} e^{-s_k u} d\nu_k(u)\right) \exp\left(-\sum_{i=1}^k \Lambda_\mu^*(x_i)\right) \\ &\geq e^{-s_k} \nu_k([0, 1]) \exp\left(-\sum_{i \in A_2} \Lambda_\mu^*(x_i)\right). \end{aligned}$$

Από την (6.2.7) βλέπουμε ότι

$$\nu_k([0, 1]) = P_{x_1, \dots, x_k}(0 \leq S_k \leq s_k) = \mathbb{P}\left(0 \leq \sum_{i=1}^k Y_i \leq s_k\right) \geq \vartheta.$$

Επιπλέον, $s_k \leq c\sqrt{k}$. Συνδυάζοντας τις δύο περιπτώσεις παίρνουμε την εκτίμηση του Λήμματος 6.2.7 για την P_2 . $\square$

Μπορούμε τώρα να ολοκληρώσουμε την απόδειξη του Θεωρήματος 6.2.4. Συνδυάζοντας

τις εκτιμήσεις από το Λήμμα 6.2.5, το Λήμμα 6.2.6 και το Λήμμα 6.2.7, μπορούμε να γράψουμε

$$\begin{aligned}
P\left(\sum_{i=1}^n t_i(X_i - x_i) \geq 0\right) &\geq \prod_{j=1}^3 P\left(\sum_{i \in A_j} t_i(X_i - x_i) \geq 0\right) \\
&\geq \exp\left(-\sum_{i=1}^n \Lambda_\mu^*(x_i)\right) \\
&\quad \times \exp\left(-\zeta|A_1| - c_1 \ln|A_1| - c_2 - \zeta \sum_{i \in A_3} \Lambda_\mu^*(x_i) - c_3 \sqrt{|A_2|} - c_4\right) \\
&\geq \exp\left(-\sum_{i=1}^n \Lambda_\mu^*(x_i) - \zeta \sum_{i=1}^n \Lambda_\mu^*(x_i) - 2\zeta n\right),
\end{aligned}$$

αν υποθέσουμε ότι $n \geq n(\mu, \zeta)$ για κατάλληλο $n(\mu, \zeta) \in \mathbb{N}$ που εξαρτάται μόνο από τα ζ και μ . Αυτό αποδεικνύει την (6.2.5). $\square$

Μπορούμε τώρα να δώσουμε ένα άνω φράγμα για την παράμετρο $\varrho_2(\mu_n, \delta)$.

Θεώρημα 6.2.10. Έστω μ ένα αποδεκτό άρτιο μέτρο πιθανότητας στο $\mathbb{R}$ το οποίο ικανοποιεί την Λ^* -συνθήκη, δηλαδή $m(x) \sim \Lambda_\mu^*(x)$ καθώς $x \uparrow x^*$. Τότε, για κάθε $\delta \in (0, \frac{1}{2})$ και $\varepsilon \in (0, 1)$ μπορούμε να βρούμε $n_0(\mu, \delta, \varepsilon)$ τέτοιο ώστε

$$\varrho_2(\mu_n, \delta) \leq (1 + \varepsilon) \mathbb{E}_\mu(\Lambda_\mu^*)$$

για κάθε $n \geq n_0(\mu, \delta, \varepsilon)$.

Απόδειξη. Θεωρούμε $\varepsilon \in (0, 1)$ και ορίζουμε $\zeta = T_1\varepsilon/(3T_1 + 4)$. Σημειώνουμε ότι αν $T_n := \mathbb{E}_{\mu_n}(\Lambda_{\mu_n}^*)$ τότε, όπως στην απόδειξη του Θεωρήματος 6.2.2, η ανισότητα Chebyshev μας δίνει

$$\mu_n(\{\Lambda_{\mu_n}^* \geq T_n + \zeta T_n\}) \leq \mu_n(\{|\Lambda_{\mu_n}^* - T_n| \geq \zeta T_n\}) \leq \frac{\beta(\mu)}{\zeta^2 n}.$$

Εφόσον το ζ εξαρτάται μόνο από τα ε και μ , μπορούμε να βρούμε $n_0(\mu, \delta, \varepsilon)$ τέτοιο ώστε

$$\frac{\beta(\mu)}{\zeta^2 n} \leq \frac{\delta}{2},$$

άρα

$$\mu_n(B_{(1+\zeta)T_n}(\mu_n)) \geq 1 - \frac{\delta}{2}$$

για κάθε $n \geq n_0(\mu, \delta, \varepsilon)$. Υποθέτουμε ότι $N \geq \exp((1 + \varepsilon)T_n) = \exp((1 + 3\zeta)T_n + 4\zeta n)$. Εφαρμόζοντας την (6.2.4) με $A = B_{(1+\zeta)T_n}(\mu_n)$ και χρησιμοποιώντας την εκτίμηση του Θεωρήματος 6.2.4 παίρνουμε

$$(6.2.9) \quad \mathbb{E}_{\mu_n^N}[\mu_n(K_N)] \geq \mu_n(B_{(1+\zeta)T_n}(\mu_n)) \left(1 - \binom{N}{n} p_\mu^{N-n} - 2 \binom{N}{n} (1 - \exp(-(1 + \zeta)^2 T_n - 2\zeta n))^{N-n}\right).$$

Συνεπώς, παίρνοντας υπόψη μας το γεγονός ότι $(1 + \zeta)^2 < 1 + 3\zeta$ για $\zeta < 1$, θα έχουμε ότι

$$\varrho_2(\mu_n, \delta) \leq (1 + \varepsilon)T_1$$

αν ελέγξουμε ότι ικανοποιείται η

$$\binom{N}{n} p_\mu^{N-n} + 2 \binom{N}{n} (1 - \exp(-(1 + 3\zeta)T_1 n - 2\zeta n))^{N-n} \leq \frac{\delta}{2}.$$

Αρχικά, ισχυριζόμαστε ότι υπάρχει $n_1(\mu, \delta)$ τέτοιος ώστε

$$\binom{N}{n} p_\mu^{N-n} < \frac{\delta}{4}$$

για κάθε $n \geq n_1(\mu, \delta)$. Πράγματι, δεδομένου ότι $\binom{N}{n} \leq (eN/n)^n$, αρκεί να ελέγξουμε ότι

$$(6.2.10) \quad 1 + \ln\left(\frac{N}{n}\right) + \frac{N-n}{n} \ln p_\mu < \frac{1}{n} \ln(\delta/4).$$

Θέτουμε $x := N/n$. Τότε, η (6.2.10) είναι ισοδύναμη με την

$$(x-1) \ln(1/p_\mu) - \ln x > 1 + \frac{1}{n} \ln(4/\delta).$$

Τότε, ο ισχυρισμός έπεται από το γεγονός ότι η συνάρτηση στο αριστερό μέλος αυξάνει στο άπειρο καθώς $x \rightarrow \infty$, και την παρατήρηση ότι $x = N/n \geq \exp((1+3\zeta)T_1 n + 4\zeta n)/n \geq e^{4\zeta n}/n \rightarrow \infty$ καθώς $n \rightarrow \infty$.

Στη συνέχεια, ελέγχουμε ότι υπάρχει $n_2(\mu, \delta, \varepsilon)$ τέτοιος ώστε

$$2 \binom{N}{n} [1 - \exp(-(1 + 3\zeta)T_1 n - 2\zeta n)]^{N-n} < \frac{\delta}{4}$$

για κάθε $n \geq n_2(\mu, \delta, \varepsilon)$. Εφόσον $1 - y \leq e^{-y}$, αρκεί να ελέγξουμε ότι

$$(6.2.11) \quad \left(\frac{2eN}{n}\right)^n \exp(-(N-n) \exp(-(1 + 3\zeta)T_1 n - 2\zeta n)) < \frac{\delta}{4}$$

για κάθε $n \geq n_2$. Θέτοντας $x := N/n$, βλέπουμε ότι αυτή η ανισότητα είναι ισοδύναμη με την

$$\exp((1 + 3\zeta)T_1 n + 2\zeta n) < \frac{x-1}{\ln x + \ln(2e) + n^{-1} \ln(4/\delta)}.$$

Δεδομένου ότι $N \geq \exp((1+3\zeta)T_1 n + 4\zeta n)$, εύκολα ελέγχουμε ότι το δεξιό μέλος είναι μεγαλύτερο από $\exp((1 + 3\zeta)T_1 n + 3\zeta n)$ εάν $n \geq n_2(\mu, \zeta, \delta) = n_2(\mu, \varepsilon, \delta)$, και έτσι παίρνουμε την (6.2.11). Συνδυάζοντας τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι

$$\varrho_2(\mu_n, \delta) \leq (1 + \varepsilon)T_1$$

για κάθε $n \geq n_0$, όπου το $n_0 = n_0(\mu, \delta, \varepsilon)$ εξαρτάται μόνο από τα μ, δ και ε . $\square$

Απόδειξη του Θεωρήματος 6.2.1. Έστω $\delta \in (0, \frac{1}{2})$ και $\varepsilon \in (0, 1)$. Από τις εκτιμήσεις του Θεωρήματος 6.2.2 και του Θεωρήματος 6.2.10 βλέπουμε ότι υπάρχει $n_0(\mu, \delta, \varepsilon)$ τέτοιος ώστε αν $n \geq n_0$ να έχουμε $\frac{c(\mu, \delta)}{\sqrt{n}} < \varepsilon$ (όπου $c(\mu, \delta)$ είναι η σταθερά στο Θεώρημα 6.2.2) και

$$\varrho_1(\mu_n, \delta) \geq \left(1 - \frac{c(\mu, \delta)}{\sqrt{n}}\right) \mathbb{E}_\mu(\Lambda_\mu^*)$$

και επίσης

$$\varrho_2(\mu_n, \delta) \leq (1 + \varepsilon) \mathbb{E}_\mu(\Lambda_\mu^*).$$

Συνεπώς,

$$\varrho(\mu_n, \delta) \leq 2\varepsilon \mathbb{E}_\mu(\Lambda_\mu^*)$$

για κάθε $n \geq n_0$. Εφόσον το $\varepsilon \in (0, 1)$ ήταν τυχόν, βλέπουμε ότι $\lim_{n \rightarrow \infty} \varrho(\mu_n, \delta) = 0$, όπως ισχυριστήκαμε στο Θεώρημα 6.2.1. $\square$

6.3 Φαινόμενα κατωφλίου για τα p -μέτρα

Γράφουμε ν για τη συμμετρική εκθετική κατανομή στο $\mathbb{R}$. Δηλαδή, ν είναι το μέτρο πιθανότητας με πυκνότητα $\frac{1}{2} \exp(-|x|)$. Γενικότερα, για κάθε $p \geq 1$ συμβολίζουμε με ν_p την κατανομή πιθανότητας στο $\mathbb{R}$ με πυκνότητα $(2\gamma_p)^{-1} \exp(-|x|^p)$, όπου $\gamma_p = \Gamma(1 + 1/p)$. Σημειώνουμε ότι $\nu_1 = \nu$. Το μέτρο γινόμενο $\nu_p^n = \nu_p^{\otimes n}$ έχει πυκνότητα $(2\gamma_p)^{-n} \exp(-\|x\|_p^p)$, όπου $\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{1/p}$ είναι η ℓ_p^n -νόρμα.

Στόχος μας σε αυτήν την ενότητα είναι να δείξουμε ότι το ν_p ικανοποιεί την Λ^* -συνθήκη.

Θεώρημα 6.3.1. Για κάθε $p \geq 1$ ισχύει ότι $-\ln(\nu_p[x, \infty)) \sim \Lambda_{\nu_p}^*(x)$ καθώς $x \rightarrow \infty$. Με άλλα λόγια,

$$(6.3.1) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-\ln(\nu_p[x, \infty))}{\Lambda_{\nu_p}^*(x)} = 1.$$

Σημειώνουμε ότι το μέτρο ν_p είναι αποδεκτό για κάθε $1 \leq p < \infty$. Ικανοποιεί τη συνθήκη (γ) του Ορισμού 6.1.2 αν $p = 1$ και τη συνθήκη (β) του Ορισμού 6.1.2 για κάθε $1 < p < \infty$. Συνεπώς, το Θεώρημα 6.3.1 συνεπάγεται ότι αν K_N είναι η κυρτή θήκη N (όπου $N > n$) ανεξάρτητων τυχαίων διανυσμάτων $\vec{X}_1, \dots, \vec{X}_N$ με κατανομή ν_p^n τότε η μέση τιμή $\mathbb{E}_{(\nu_p^n)^N}(\nu_p^n(K_N))$ εμφανίζει αυστηρό φαινόμενο κατωφλίου γύρω στο $N = \exp((1 \pm \varepsilon)\mathbb{E}_{\nu_p}(\Lambda_{\nu_p}^*)n)$: για κάθε $\delta \in (0, \frac{1}{2})$ έχουμε ότι $\lim_{n \rightarrow \infty} \varrho(\nu_p^n, \delta) = 0$.

Απόδειξη του Θεωρήματος 6.3.1 για την περίπτωση $p = 1$. Ξεκινάμε με την περίπτωση $p = 1$ η οποία είναι απλή διότι η Λ_ν^* υπολογίζεται ακριβώς. Απευθείας υπολογισμός δείχνει ότι

$$\Lambda_\nu^*(x) = \sqrt{1+x^2} - 1 - \ln\left(\frac{\sqrt{1+x^2}+1}{2}\right), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Έπεται ότι $\Lambda_{\nu}^*(x) \sim x$ καθώς $x \rightarrow \infty$. Από την άλλη πλευρά, $\nu([x, \infty)) = \frac{1}{2}e^{-x}$ για κάθε $x > 0$, το οποίο αποδεικνύει ότι $-\ln(\nu([x, \infty))) = x + \ln 2$, συνεπώς $-\ln(\nu([x, \infty))) \sim x$ καθώς $x \rightarrow \infty$. Συνδυάζοντας τα παραπάνω βλέπουμε αμέσως ότι η (6.3.1) ικανοποιείται για $p = 1$. $\square$

Στο υπόλοιπο αυτής της ενότητας σταθεροποιούμε κάποιον $p > 1$. Ακολουθώντας το [8] λέμε ότι μια μη αρνητική συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μεταβάλλεται ομαλά με δείκτη $s \in \mathbb{R}$, και γράφουμε $f \in R_s$, αν $\lim_{x \rightarrow \infty} f(\lambda x)/f(x) = \lambda^s$ για κάθε $\lambda > 0$. Στο [8, Θεώρημα 4.12.10] αποδεικνύεται ότι αν $f \in R_s$ για κάποιον $s > 0$ τότε

$$-\ln\left(\int_x^\infty e^{-f(t)} dt\right) \sim f(x)$$

καθώς $x \rightarrow \infty$. Θέτουμε $f_p(x) = |x|^p$, $x \geq 0$. Είναι σαφές ότι $f_p \in R_p$, άρα

$$-\ln(\nu_p[x, \infty)) = -\ln\left((2\gamma_p)^{-1} \int_x^\infty e^{-f_p(t)} dt\right) = \ln(2\gamma_p) - \ln\left(\int_x^\infty e^{-f_p(t)} dt\right) \sim f_p(x)$$

καθώς $x \rightarrow \infty$. Έτσι, έχουμε αποδείξει το εξής.

Λήμμα 6.3.2. Για κάθε $p \geq 1$ ισχύει ότι $-\ln(\nu_p[x, \infty)) \sim x^p$ καθώς $x \rightarrow \infty$.

Το Λήμμα 6.3.2 δείχνει ότι για να ολοκληρώσουμε την απόδειξη του θεωρήματος 6.3.1 μένει να δείξουμε ότι $\Lambda_{\nu_p}^*(x) \sim x^p$ καθώς $x \rightarrow \infty$. Θέτουμε $g_p(x) = x^2$ για $0 \leq x < 1$ και $g_p(x) = x^p$ για $x \geq 1$. Είναι γνωστό από το [45] ότι για κάθε $p \geq 1$ και $x \in \mathbb{R}$ ισχύει η διπλή ανισότητα

$$\Lambda_{\nu_p}^*(x/c) \leq g_p(|x|) \leq \Lambda_{\nu_p}^*(cx)$$

όπου $c > 1$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

Για την απόδειξη της $\Lambda_{\nu_p}^*(x) \sim x^p$ καθώς $x \rightarrow \infty$ θα εφαρμόσουμε τη μέθοδο Laplace. Ακριβέστερα, θα χρησιμοποιήσουμε την ακόλουθη παραλλαγή του λήμματος του Watson (βλ. την εξίσωση (2.34) στο [47, Παράγραφος 2.2]).

Πρόταση 6.3.3. Έστω $S < a < T \leq \infty$ και $g, h : [S, T] \rightarrow \mathbb{R}$, όπου η g είναι συνεχής και αναπτύσσεται σε σειρά Taylor σε μια περιοχή του a , και η h είναι δύο φορές συνεχώς παραγωγίσιμη, παίρνει μέγιστη τιμή στο a και ικανοποιεί τις $h'(a) = 0$ και $h''(a) < 0$. Υποθέτουμε επίσης ότι το ολοκλήρωμα

$$\int_S^T g(x) e^{th(x)} dx$$

συγκλίνει για μεγάλες τιμές του t . Τότε,

$$\int_S^T g(x) e^{th(x)} dx \sim g(a) \left(-\frac{2\pi}{th''(a)} \right)^{1/2} e^{th(a)} + e^{th(a)} O(t^{-3/2})$$

καθώς $t \rightarrow +\infty$.

Εφαρμόζοντας την Πρόταση 6.3.3 παίρνουμε την ακόλουθη ασυμπτωτική εκτίμηση.

Λήμμα 6.3.4. Έστω $p > 1$ και q ο συζυγής εκθέτης του p . Τότε, θέτοντας $y = t^q$ έχουμε ότι

$$I(t) := \int_0^\infty e^{tx-x^p} dx \sim y^{\frac{1}{p}} e^{yh(a)} \left[\left(-\frac{2\pi}{yh''(a)} \right)^{1/2} + O(y^{-3/2}) \right]$$

καθώς $t \rightarrow +\infty$, όπου $h(s) = s - s^p$ στο $[0, \infty)$ και $a = p^{-q/p}$.

Απόδειξη. Θέτουμε $x = \lambda s$ και $t = \lambda^{p-1}$. Τότε,

$$I(t) = I(\lambda^{p-1}) = \lambda \int_0^\infty e^{\lambda^p(s-s^p)} ds.$$

Τώρα, θέτουμε $y = \lambda^p = t^q$. Τότε,

$$I(t) = y^{1/p} \int_0^\infty e^{y(s-s^p)} ds.$$

Έχουμε $h'(s) = 1 - ps^{p-1}$, άρα η h παίρνει τη μέγιστη τιμή της στο $a = (1/p)^{\frac{1}{p-1}} = p^{-q/p}$. Τώρα, εφαρμόζοντας την Πρόταση 6.3.3 με $g \equiv 1$ βλέπουμε ότι

$$\int_0^\infty e^{yh(s)} ds \sim e^{yh(a)} \left[\left(-\frac{2\pi}{yh''(a)} \right)^{1/2} + O(y^{-3/2}) \right],$$

και έπεται ο ισχυρισμός του λήμματος. □

Προχωράμε στη μελέτη της ασυμπτωτικής συμπεριφοράς της $\Lambda_{\nu_p}(t)$. Υπενθυμίζουμε ότι

$$\Lambda_{\nu_p}(t) = \ln \left(c_p \int_{-\infty}^\infty e^{tx-|x|^p} dx \right),$$

όπου $c_p = (2\Gamma(1+1/p))^{-1}$. Από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης,

$$\int_{-\infty}^0 e^{tx-|x|^p} dx \rightarrow 0$$

καθώς $t \rightarrow +\infty$. Συνεπώς, από το Λήμμα 6.3.4,

$$c_p \int_{-\infty}^\infty e^{tx-|x|^p} dx \sim c_p \int_0^\infty e^{tx-x^p} dx \sim c_p y^{\frac{1}{p}} e^{yh(a)} \left[\left(-\frac{2\pi}{yh''(a)} \right)^{1/2} + O(y^{-3/2}) \right],$$

όπου $h(s) = s - s^p$ στο $[0, \infty)$, $a = p^{-q/p}$ και $y = t^q$. Τώρα,

$$\ln \left(c_p y^{\frac{1}{p}} e^{yh(a)} \left[\left(-\frac{2\pi}{yh''(a)} \right)^{1/2} + O(y^{-3/2}) \right] \right) = \ln c_p + \frac{1}{p} \ln y + yh(a) + O(\ln y) \sim yh(a).$$

Έπεται ότι $\Lambda_{\nu_p}(t) \sim yh(a) = (p^{-q/p} - p^{-q})t^q$, όπου q είναι ο συζυγής εκθέτης του p . Ξαναγράφουμε αυτή τη σχέση ως εξής.

Λήμμα 6.3.5. Έστω $p > 1$ και q ο συζυγής εκθέτης του p . Τότε,

$$\Lambda_{\nu_p}(t) \sim \frac{p-1}{p^q} t^q \quad \text{καθώς } t \rightarrow +\infty.$$

Το Λήμμα 6.3.5 μας επιτρέπει να προσδιορίσουμε την ασυμπτωτική συμπεριφορά της $\Lambda_{\nu_p}^*(x)$ καθώς $x \rightarrow \infty$. Θα χρειαστούμε ένα λήμμα το οποίο εμφανίζεται στα [20] και [51].

Λήμμα 6.3.6. Έστω $q \geq 1$, $a > 0$ και $f : [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση τέτοια ώστε η f' να είναι αύξουσα στο $[a, \infty)$ και $f(t) \sim t^q$ καθώς $t \rightarrow +\infty$. Τότε, $f'(t) \sim qt^{q-1}$ καθώς $t \rightarrow +\infty$.

Περιγραφή της απόδειξης. Έστω $\varepsilon \in (0, 1)$. Υπάρχουν $b > a$ και $\eta : [b, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ώστε $|\eta(t)| \leq \varepsilon$ και $f(t) = t^q(1 + \eta(t))$ για κάθε $t > b$. Εφόσον η f' είναι αύξουσα, για κάθε $s > 0$ έχουμε ότι

$$\begin{aligned} sf'(t) &\leq \int_t^{t+s} f'(u) du = f(t+s) - f(t) = ((t+s)^q - t^q) + ((t+s)^q \eta(t+s) - t^q \eta(t)) \\ &\leq sq(t+s)^{q-1} + 2\varepsilon(t+s)^q. \end{aligned}$$

Θέτουμε $s = \sqrt{\varepsilon}t$. Τότε,

$$f'(t) \leq qt^{q-1}((1 + \sqrt{\varepsilon})^{q-1} + 2q^{-1}\sqrt{\varepsilon}(1 + \sqrt{\varepsilon})^q)$$

για κάθε $t > b$. Με τον ίδιο τρόπο βλέπουμε ότι

$$f'(t) \geq qt^{q-1}((1 - \sqrt{\varepsilon})^{q-1} - 2q^{-1}\sqrt{\varepsilon})$$

για κάθε $t > b/(1 - \sqrt{\varepsilon})$, και έπεται ο ισχυρισμός του λήμματος. $\square$

Χρειαζόμαστε επίσης το επόμενο απλό λήμμα.

Λήμμα 6.3.7. Έστω $a > 0$ και $f : [a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ μια γνησίως αύξουσα συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι για κάποιους $C > 0$ και $p > 1$ έχουμε $f(x) \sim Cx^p$ καθώς $x \rightarrow +\infty$, και ότι $\lim_{y \rightarrow +\infty} f^{-1}(y) = +\infty$. Τότε, $f^{-1}(y) \sim (y/C)^{1/p}$ καθώς $y \rightarrow +\infty$.

Απόδειξη. Μπορούμε να γράψουμε $f(x) = Cx^p g(x)$ για κάποια συνάρτηση $g : [a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 1$. Τότε, για αρκετά μεγάλα x έχουμε ότι $x = \left(\frac{f(x)}{C} \cdot \frac{1}{g(x)}\right)^{1/p}$. Έπεται ότι, για αρκετά μεγάλα y ,

$$f^{-1}(y) = \left(\frac{y}{C} \frac{1}{g(f^{-1}(y))}\right)^{1/p},$$

και το λήμμα έπεται από το γεγονός ότι $\lim_{y \rightarrow +\infty} f^{-1}(y) = +\infty$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 1$. $\square$

Απόδειξη του Θεωρήματος 6.3.1 για την περίπτωση $p > 1$. Μπορούμε τώρα να δείξουμε ότι

$$(6.3.2) \quad \Lambda_{\nu_p}^*(x) \sim x^p$$

καθώς $x \rightarrow \infty$. Γνωρίζουμε ότι $\Lambda_{\nu_p}^*(x) = xh(x) - \Lambda_{\nu_p}(h(x))$ όπου $h(x) = (\Lambda'_{\nu_p})^{-1}(x)$. Από το Λήμμα 6.3.5 και το Λήμμα 6.3.6 βλέπουμε ότι $\Lambda'_{\nu_p}(t) \sim p^{-(q-1)}t^{q-1}$, και το Λήμμα 6.3.7 εξασφαλίζει ότι

$$h(x) \sim px^{\frac{1}{q-1}} = px^{p-1},$$

αν χρησιμοποιήσουμε επίσης το γεγονός ότι $(p-1)(q-1) = 1$. Έπεται ότι

$$\frac{\Lambda_{\nu_p}^*(x)}{x^p} = \frac{h(x)}{x^{p-1}} - \frac{\Lambda_{\nu_p}(h(x))}{x^p} = \frac{h(x)}{x^{p-1}} - \frac{\Lambda_{\nu_p}(h(x))}{h(x)^{\frac{p}{p-1}}} \left(\frac{h(x)^{\frac{1}{p-1}}}{x} \right)^p \longrightarrow p - \frac{p-1}{p^q} \cdot p^q = 1$$

καθώς $x \rightarrow \infty$. Αυτό αποδεικνύει την (6.3.2) και ολοκληρώνει την απόδειξη του Θεωρήματος 6.3.1. $\square$

Βιβλιογραφία

- [1] S. Brazitikos, A. Giannopoulos and M. Pafis, *Half-space depth of log-concave probability measures*, Probability Theory and Related Fields **188** (2024), 309–336.
- [2] S. Brazitikos, A. Giannopoulos and M. Pafis, *Threshold for the expected measure of random polytopes*, Mathematische Annalen **388** (2024), no. 3, 2991–3024.
- [3] M. Pafis, *Threshold for the expected measure of the convex hull of random points with independent coordinates*, Bulletin of the London Mathematical Society **56** (2024), no. 1, 240–262.
- [4] E. Artin, *The gamma function*, Athena Series: Selected Topics in Mathematics, Holt, Rinehart and Winston, New York-Toronto-London, 1964 vii+39 pp.
- [5] S. Artstein-Avidan, A. Giannopoulos and V. D. Milman, *Asymptotic Geometric Analysis, Vol. I*, Mathematical Surveys and Monographs **202**, American Mathematical Society, Providence, RI, 2015.
- [6] F. Barthe, O. Guédon, S. Mendelson and A. Naor, *A probabilistic approach to the geometry of the ℓ_p^n -ball*, Ann. Prob. **33** (2005), 480–513.
- [7] F. Besau, M. Ludwig and E. Werner, *Weighted floating bodies and polytopal approximation*, Trans. Amer. Math. Soc. **370** (2018), 7129–7148.
- [8] N. H. Bingham, C. M. Goldie and J. L. Teugels, *Regular Variation*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, 27. Cambridge University Press, Cambridge, 1989. xx+494 pp.
- [9] G. Bonnet, G. Chasapis, J. Grote, D. Temesvari and N. Turchi, *Threshold phenomena for high-dimensional random polytopes*, Commun. Contemp. Math. **21** (2019), no. 5, 1850038, 30 pp.
- [10] G. Bonnet, Z. Kabluchko and N. Turchi, *Phase transition for the volume of high-dimensional random polytopes*, Random Structures Algorithms **58** (2021), no. 4, 648–663.
- [11] C. Borell, *Complements of Lyapunov's inequality*, Math. Ann. **205** (1973), 323–331.
- [12] C. Borell, *Convex measures on locally convex spaces*, Ark. Mat. **12** (1974), 239–252.
- [13] C. Borell, *Convex set functions in d -space*, Period. Math. Hungar. **6** (1975), 111–136.
- [14] J. Bourgain, *On the distribution of polynomials on high dimensional convex sets*, Lecture Notes in Mathematics **1469**, Springer, Berlin (1991), 127–137.
- [15] S. Brazitikos and G. Chasapis, *Sharp estimates for the Cramér transform of log-concave measures and geometric applications*, Preprint (<https://arxiv.org/abs/2405.07253>).
- [16] S. Brazitikos, A. Giannopoulos, P. Valettas and B-H. Vritsiou, *Geometry of isotropic convex bodies*, Mathematical Surveys and Monographs, 196. American Mathematical Society, Providence, RI, 2014. xx+594 pp.
- [17] S. Bubeck and R. Eldan, *The entropic barrier: exponential families, log-concave geometry, and self-concordance*, Math. Oper. Res. **44** (2019), no. 1, 264–276.
- [18] D. Chakraborti, T. Tkocz and B-H. Vritsiou, *A note on volume thresholds for random polytopes*, Geom. Dedicata **213** (2021), 423–431.

- [19] Y. Chen, *An almost constant lower bound of the isoperimetric coefficient in the KLS conjecture*, Geom. Funct. Anal. **31** (2021), 34–61.
- [20] N. G. de Bruijn, *Asymptotic methods in analysis*, Corrected reprint of the third edition. Dover Publications, Inc., New York, 1981. xii+200 pp.
- [21] A. Dembo and O. Zeitouni, *Large Deviations Techniques and Applications*, Springer, New York, 1998.
- [22] J-D. Deuschel and D. Stroock, *Large deviations*, Pure and Applied Mathematics, 137. Academic Press, Inc., Boston, MA, 1989. xiv+307 pp.
- [23] D. L. Donoho and M. Gasko, *Breakdown properties of location estimates based on halfspace depth and projected outlyingness*, Ann. Statist. **20** (1982), 1803–1827.
- [24] M. E. Dyer, Z. Füredi and C. McDiarmid, *Random volumes in the n -cube*, Polyhedral combinatorics (Morristown, NJ, 1989), 33–38, DIMACS Ser. Discrete Math. Theoret. Comput. Sci., 1, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1990.
- [25] M. E. Dyer, Z. Füredi and C. McDiarmid, *Volumes spanned by random points in the hypercube*, Random Structures Algorithms 3 (1992), 91–106.
- [26] W. Feller, *An Introduction to Probability and its Applications* Vol. II, Second edition John Wiley & Sons, Inc., New York-London-Sydney 1971 xxiv+669 pp.
- [27] M. Fradelizi, *Sections of convex bodies through their centroid*, Arch. Math. (Basel) **69** (1997), no. 6, 515–522.
- [28] M. Fradelizi, M. Madiman and L. Wang, *Optimal concentration of information content for log-concave densities*, High dimensional probability VII. Vol. 71. Progr. Probab. Springer (2016), 45–60.
- [29] A. Frieze, W. Pegden and T. Tkocz, *Random volumes in d -dimensional polytopes*, Discrete Anal. 2020, Paper No. 15, 17 pp.
- [30] D. Gatzouras and A. Giannopoulos, *A large deviations approach to the geometry of random polytopes*, Mathematika 53 (2006), 173–210.
- [31] D. Gatzouras and A. Giannopoulos, *Threshold for the volume spanned by random points with independent coordinates*, Israel J. Math. 169 (2009), 125–153.
- [32] A. Gorban, B. Grechuk and I. Tyukin, *Stochastic separation theorems: how geometry may help to correct AI errors*, Notices Amer. Math. Soc. **70** (2023), no. 1, 25–33.
- [33] Q. Y. Guan, *A note on Bourgain’s slicing problem*, Preprint (<https://arxiv.org/abs/2412.09075>).
- [34] O. Guédon and E. Milman, *Interpolating thin-shell and sharp large-deviation estimates for isotropic log-concave measures*, Geom. Funct. Anal. **21** (2011), 1043–1068.
- [35] E. Hewitt and K. Stromberg, *Real and abstract analysis. A modern treatment of the theory of functions of a real variable*, Third printing. Graduate Texts in Mathematics, No. 25. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1975. x+476 pp.
- [36] J. L. Hodges Jr., *A bivariate sign test*, Ann. Math. Statist. **26** (1955), 523–527.
- [37] K. Ito and H. P. McKean, *Diffusion processes and their sample paths*, Springer-Verlag, 1965.
- [38] B. Klartag, *On convex perturbations with a bounded isotropic constant*, Geom. Funct. Anal. **16** (2006), 1274–1290.
- [39] B. Klartag, *Uniform almost sub-Gaussian estimates for linear functionals on convex sets*, Algebra i Analiz **19** (2007), no. 1, 109–148; reprinted in St. Petersburg Math. J. **19** (2008), no. 1, 77–106.
- [40] B. Klartag, *A central limit theorem for convex sets*, Invent. Math. **168** (2007), 91–131.
- [41] B. Klartag, *Logarithmic bounds for isoperimetry and slices of convex sets*, Ars Inven. Anal. (2023), Paper No. 4, 17 pp.
- [42] B. Klartag and J. Lehec, *Bourgain’s slicing problem and KLS isoperimetry up to polylog*, Geom. Funct. Anal. **32** (2022), no. 5, 1134–1159.

- [43] B. Klartag and J. Lehec, *Affirmative resolution of Bourgain's slicing problem using Guan's bound*, Preprint (<https://arxiv.org/abs/2412.15044>).
- [44] B. Klartag and E. Milman, *Centroid bodies and the logarithmic Laplace transform – a unified approach*, J. Funct. Analysis **262** (2012), 10–34.
- [45] R. Latała and J. O. Wojtaszczyk, *On the infimum convolution inequality*, Studia Math. **189** (2008), 147–187.
- [46] Mathoverflow, *Expected value of Tukey's half-space depth for log-concave measures*, Question asked in <https://mathoverflow.net/questions/386972/>.
- [47] J. D. Murray, *Asymptotic analysis*, Second edition. Applied Mathematical Sciences, 48. Springer-Verlag, New York, 1984. vii+164 pp.
- [48] S. Nagy, C. Schütt and E. M. Werner, *Halfspace depth and floating body*, Stat. Surv. **13** (2019), 52–118.
- [49] A. Naor and D. Romik, *Projecting the surface measure of the sphere of ℓ_p^n* , Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist. **39** (2003), 241–261.
- [50] V. H. Nguyen, *Dimensional variance inequalities of Brascamp-Lieb type and a local approach to dimensional Prékopa's theorem*, J. Funct. Anal. **266** (2014), 931–955.
- [51] F. W. J. Olver, *Asymptotics and special functions*, Computer Science and Applied Mathematics. Academic Press [Harcourt Brace Jovanovich, Publishers], New York-London, 1974. xvi+572 pp.
- [52] G. Paouris and P. Valettas, *Variance estimates and almost Euclidean structure*, Adv. Geom. **19** (2019), no. 2, 165–189.
- [53] P. Pivovarov, *Volume thresholds for Gaussian and spherical random polytopes and their duals*, Studia Math. **183** (2007), no. 1, 15–34.
- [54] R. T. Rockafellar, *Convex analysis*, Princeton Mathematical Series **28**, Princeton University Press, Princeton, NJ (1970).
- [55] R. Schneider, *Convex Bodies: The Brunn-Minkowski Theory*, Second expanded edition. Encyclopedia of Mathematics and its Applications, 151. Cambridge University Press, Cambridge, 2014. xxii+736 pp.
- [56] C. Schütt and E. M. Werner, *The convex floating body*, Math. Scand. **66** (1990), no.2, 275–290.
- [57] C. G. Small, *Measures of centrality for multivariate and directional distributions*, Canad. J. Statist. **15** (1987), 31–39.
- [58] D. Stroock, *Probability Theory. An Analytic View*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1993.
- [59] J. W. Tukey, *Mathematics and the picturing of data*, In Proceedings of the International Congress of Mathematicians (Vancouver, B. C., 1974), Vol. 2 523–531. Canad. Math. Congress, Montreal, Que.
- [60] R. Vershynin, *High-dimensional probability. An introduction with applications in data science*, Cambridge Series in Statistical and Probabilistic Mathematics, 47. Cambridge University Press, Cambridge, 2018.
- [61] L. Wang, *Heat capacity bound, energy fluctuations and convexity*, Ph.D. Thesis, Yale University, 2014.

Abstract

This thesis is devoted to the study of high-dimensional log-concave probability measures. Our main goal is to establish a sharp threshold for the expected measure of random polytopes with independent vertices that have the same, arbitrary, log-concave distribution.

Our first main results concern Tukey's half-space depth, a notion that plays a key role in the study of the threshold problem. Given a probability measure μ on $\mathbb{R}^n$ and any $x \in \mathbb{R}^n$, the half-space depth is defined by $\varphi_\mu(x) = \inf\{\mu(H) : H \in \mathcal{H}(x)\}$, where $\mathcal{H}(x)$ is the set of all closed half-spaces H of $\mathbb{R}^n$ containing x . We show that if μ is a non-degenerate log-concave probability measure on $\mathbb{R}^n$ then

$$e^{-c_1 n} \leq \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_\mu(x) d\mu(x) \leq e^{-c_2 n/L_\mu^2}$$

where L_μ is the isotropic constant of μ and $c_1, c_2 > 0$ are absolute constants. This answers a question of Gorban, Grechuk and Tyukin about stochastic separability which has applications to machine learning. The proof of these bounds involves large deviations techniques and estimates for families of bodies, e.g. the L_q -centroid bodies, associated to log-concave probability measures. We also obtain general estimates for the expected measure of random polytopes whose vertices have a log-concave distribution. We show that there exists an absolute constant $C > 0$ such that

$$\inf_{\mu} \left(\inf \left\{ \mathbb{E}_{\mu^N}[\mu(K_N)] : N \geq \exp(C(n \ln n)^2 u(n)) \right\} \right) \rightarrow 1$$

as $n \rightarrow \infty$, where the first infimum is over all log-concave probability measures μ on $\mathbb{R}^n$ and $u(n)$ is any function with $u(n) \rightarrow \infty$ as $n \rightarrow \infty$.

In the second part of the thesis we propose a general approach to the threshold problem for the measure of random polytopes. Consider a log-concave probability measure μ on $\mathbb{R}^n$ and let $X_1, X_2, \dots$ be a sequence of independent random points in $\mathbb{R}^n$ distributed according to μ . For any $N > n$ consider the random polytope $K_N = \text{conv}\{X_1, \dots, X_N\}$. Given $\delta \in (0, 1)$, define

$$\varrho_1(\mu, \delta) = \sup\{\varrho_1 : \sup\{\mathbb{E}_{\mu^N}[\mu(K_N)] : N \leq \exp(\varrho_1 n)\} \leq \delta\}$$

and

$$\varrho_2(\mu, \delta) = \inf\{\varrho_2 : \inf\{\mathbb{E}_{\mu^N}[\mu(K_N)] : N \geq \exp(\varrho_2 n)\} \geq 1 - \delta\}.$$

The question is to obtain upper bounds for the difference

$$\varrho(\mu, \delta) := \varrho_2(\mu, \delta) - \varrho_1(\mu, \delta)$$

for any fixed $\delta \in (0, \frac{1}{2})$. Our approach is based on the Cramér transform Λ_μ^* of μ ; this is the Legendre transform of the log-Laplace transform Λ_μ of μ . Assuming that $\|\Lambda_\mu^*\|_{L^2(\mu)} < \infty$ we show that the expected measure $\mathbb{E}_{\mu^N}(K_N)$ exhibits a threshold around the value $\mathbb{E}_\mu(\Lambda_\mu^*)$ provided

that the parameter

$$\beta(\mu) = \frac{\text{Var}_\mu(\Lambda_\mu^*)}{(\mathbb{E}_\mu(\Lambda_\mu^*))^2}$$

is $o_n(1)$. In the case where $\mu = \mu_K$ is the uniform measure on a convex body K in $\mathbb{R}^n$, we obtain the estimate

$$\varrho(\mu, \delta) \leq c \sqrt{\beta(\mu)/\delta} \frac{\mathbb{E}_\mu(\Lambda_\mu^*)}{n}$$

where $c > 0$ is an absolute constant. The main technical step for this estimate is an inequality comparing the Cramér transform with Tukey's half-space depth. It is a classical fact that $\varphi_\mu(x) \leq \exp(-\Lambda_\mu^*(x))$ for any x . We show that if K is a centered convex body of volume 1 in $\mathbb{R}^n$ then, the reverse inequality

$$\varphi_{\mu_K}(x) \geq c \exp(-\Lambda_\mu^*(x) - 2\sqrt{n})$$

holds true. An interesting issue that one has to address is if the condition $\|\Lambda_\mu^*\|_{L^2(\mu)} < \infty$ is satisfied in full generality. We show that if $\mu = \mu_K$ is the uniform measure on a convex body K then Λ_μ^* has finite moments of all orders, therefore the “threshold constant” and the parameter $\beta(\mu)$ are finite. In fact, we show that $c_1 n \leq \mathbb{E}_{\mu_K}(\Lambda_{\mu_K}^*) \leq c_2 n \log n$; both bounds are of the right order.

In the third part of this thesis we study the threshold problem for product measures. Here, μ is an even Borel probability measure on $\mathbb{R}$ and for every $N > n$ we consider N independent random vectors $\vec{X}_1, \dots, \vec{X}_N$ in $\mathbb{R}^n$, with independent coordinates having distribution μ . Under the assumption that the Cramér transform Λ_μ^* of μ satisfies the condition $\lim_{x \uparrow x^*} \frac{-\ln \mu([x, \infty))}{\Lambda_\mu^*(x)} = 1$, where $x^* = \sup\{x \in \mathbb{R} : \mu([x, \infty)) > 0\}$, we prove that for any $\delta \in (0, \frac{1}{2})$ and any $\varepsilon \in (0, 1)$ there exists $n_0(\mu, \delta, \varepsilon)$ such that

$$\varrho_1(\mu_n, \delta) \geq (1 - \varepsilon) \mathbb{E}_\mu(\Lambda_\mu^*) \quad \text{and} \quad \varrho_2(\mu_n, \delta) \leq (1 + \varepsilon) \mathbb{E}_\mu(\Lambda_\mu^*)$$

for every $n \geq n_0(\mu, \delta, \varepsilon)$. In particular, $\{\mu_n\}_{n=1}^\infty$ exhibits a sharp threshold, i.e. $\lim_{n \rightarrow \infty} \varrho(\mu_n, \delta) = 0$, with “threshold constant” $\mathbb{E}_\mu(\Lambda_\mu^*)$. An application is a sharp threshold for the case of the product measure $\nu_p^n = \nu_p^{\otimes n}$, $p \geq 1$ with density $(2\gamma_p)^{-n} \exp(-\|x\|_p^p)$, where $\|\cdot\|_p$ is the ℓ_p^n -norm and $\gamma_p = \Gamma(1 + 1/p)$. We show that for any $p \geq 1$ the measure ν_p satisfies the condition $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-\ln(\nu_p([x, \infty))}{\Lambda_{\nu_p}^*(x)} = 1$, which then implies that for any $\delta \in (0, \frac{1}{2})$ one has that $\lim_{n \rightarrow \infty} \varrho(\nu_p^n, \delta) = 0$.