Εισαγωγή στη Συναρτησιακή Ανάλυση

Σημειώσεις

Τμημα Μαθηματικων
Πανεπιστημιο Αθηνων
Αθηνα, 2014

Περιεχόμενα

Μέρος I

Βασική θεωρία

Κεφάλαιο 1

Χώροι με νόρμα

1.1 Γραμμικοί χώροι

Ξεκινάμε υπενθυμίζοντας (χωρίς πολλές λεπτομέρειες) τις βασικές έννοιες των γραμμικών χώρων από τη Γραμμική Άλγεβρα.

Ορισμός 1.1.1. Ένα μη κενό σύνολο X λέγεται *γραμμικός χώρος* (ή *διανυσματικός χώρος*) πάνω από το $\mathbb{R}$ αν είναι εφοδιασμένο με δύο πράξεις

$+ : X \times X \to X$ (την πρόσθεση)

και

$\cdot : \mathbb{R} \times X \to X$ (τον πολλαπλασιασμό)

που ικανοποιούν τα εξής:

(I) *Αξιώματα της πρόσθεσης:* για κάθε $x, y, z \in X$,

(i) $x + y = y + x$.

(ii) $x + (y + z) = (x + y) + z$.

(iii) Υπάρχει ένα στοιχείο $\vec{0} \in X$ τέτοιο ώστε, για κάθε $x \in X$, $\vec{0} + x = x$.

(iv) Για κάθε $x \in X$ υπάρχει (μοναδικό) $-x \in X$ τέτοιο ώστε $x + (-x) = \vec{0}$.

Δηλαδή, το X είναι αντιμεταθετική ομάδα με την πράξη της πρόσθεσης.

(II) *Αξιώματα του πολλαπλασιασμού:* για κάθε $x, y \in X$ και $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$,

(i) $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$.

(ii) $1x = x$.

(iii) $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$.

(iv) $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$.

Άμεσες συνέπειες των αξιωμάτων του γραμμικού χώρου είναι, για παράδειγμα, οι

$$0x = \vec{0}, \quad \lambda\vec{0} = \vec{0}, \quad -x = (-1)x.$$

Στη συνέχεια θα χρησιμοποιούμε ελεύθερα τέτοιου είδους ιδιότητες (η δομή του γραμμικού χώρου θα θεωρηθεί, σε γενικές γραμμές, γνωστή). Τα στοιχεία του X θα λέγονται σημεία (ή και διανύσματα).

Παραδείγματα 1.1.2. (α) Ο $\mathbb{R}^m$ γίνεται γραμμικός χώρος με πράξεις τις

$$(\xi_1, \ldots, \xi_m) + (\eta_1, \ldots, \eta_m) = (\xi_1 + \eta_1, \ldots, \xi_m + \eta_m),$$

$$\lambda(\xi_1, \ldots, \xi_m) = (\lambda\xi_1, \ldots, \lambda\xi_m).$$

Εύκολα ελέγχουμε ότι $\vec{0} = (0, \ldots, 0)$ και $-(\xi_1, \ldots, \xi_m) = (-\xi_1, \ldots, -\xi_m)$.

(β) Το σύνολο $\mathcal{S}$ των ακολουθιών πραγματικών αριθμών γίνεται γραμμικός χώρος αν ορίσουμε πρόσθεση και πολλαπλασιασμό κατά συντεταγμένη: αν $x = (\xi_k)$, $y = (\eta_k)$, και $\lambda \in \mathbb{R}$, θέτουμε

$$x + y = (\xi_k + \eta_k) \quad , \quad \lambda x = (\lambda\xi_k).$$

(γ) Αν $A \neq \emptyset$ και $F(A)$ είναι το σύνολο όλων των συναρτήσεων $f : A \to \mathbb{R}$, τότε το $F(A)$ γίνεται γραμμικός χώρος αν ορίσουμε πρόσθεση και πολλαπλασιασμό κατά σημείο: αν $f, g \in F(A)$ και $\lambda \in \mathbb{R}$, ορίζουμε $f + g$, $\lambda f \in F(A)$ θέτοντας

$$(f + g)(t) = f(t) + g(t) \quad , \quad (\lambda f)(t) = \lambda f(t) \quad , \quad t \in A.$$

Ορισμός 1.1.3. Αν X είναι ένας γραμμικός χώρος και Y ένα μη κενό υποσύνολο του X, το Y λέγεται (γραμμικός) *υπόχωρος* του X αν για κάθε $x, y \in Y$ και $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ έχουμε $\lambda x + \mu y \in Y$.

Εύκολα ελέγχουμε ότι ο Y είναι υπόχωρος του X αν και μόνο αν ο Y είναι γραμμικός χώρος με πράξεις τους περιορισμούς των $+, \cdot$ στα $Y \times Y$ και $\mathbb{R} \times Y$ αντίστοιχα. Ο Y λέγεται *γνήσιος υπόχωρος* του X αν είναι υπόχωρος του X και $Y \neq \{0\}, X$.

Όπως θα δούμε και παρακάτω, πολλά από τα κλασικά παραδείγματα χώρων που παρουσιάζουν ενδιαφέρον για τη Συναρτησιακή Ανάλυση είναι υπόχωροι του $\mathcal{S}$ ή κάποιου $F(A)$.

Ορισμός 1.1.4. Αν $x_1, \ldots, x_m$ είναι διανύσματα του γραμμικού χώρου X, τότε *γραμμικός συνδυασμός* των x_i είναι κάθε διάνυσμα u της μορφής

$$u = \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_m x_m, \quad \lambda_i \in \mathbb{R}. \tag{1.1}$$

Αν $M \subseteq X$, $M \neq \emptyset$, τότε ο *υπόχωρος που παράγεται από το* M (γράφουμε $\mathrm{span}(M)$ ή $\langle M \rangle$) είναι το σύνολο όλων των γραμμικών συνδυασμών στοιχείων του M:

$$\mathrm{span}(M) = \{\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_m x_m : \lambda_i \in \mathbb{R}, x_i \in M, m \in \mathbb{N}\}. \tag{1.2}$$

Εύκολα βλέπουμε ότι ο $\mathrm{span}(M)$ είναι όντως υπόχωρος του X.

Ορισμός 1.1.5. Αν τα $x_1, \ldots, x_m$ είναι διανύσματα του γραμμικού χώρου X, λέμε ότι τα x_i είναι *γραμμικά ανεξάρτητα* αν

$$\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_m x_m = \vec{0} \Longrightarrow \lambda_1 = \ldots = \lambda_m = 0. \tag{1.3}$$

Ισοδύναμα, αν κανένα x_i δεν γράφεται σαν γραμμικός συνδυασμός των x_j, $j \neq i$. Λέμε ότι το πεπερασμένο σύνολο $\{x_1, \ldots, x_m\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο αν τα $x_1, \ldots, x_m$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Πιό γενικά, ένα μη κενό $M \subseteq X$ λέγεται *γραμμικά ανεξάρτητο* αν κάθε *πεπερασμένο* υποσύνολό του είναι γραμμικά ανεξάρτητο.

Τα $x_1, \ldots, x_m$ λέγονται *εξαρτημένα* αν υπάρχουν $\lambda_i \in \mathbb{R}$ όχι όλοι μηδέν, τέτοιοι ώστε $\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_m x_m = \vec{0}$. Ένα $M \neq \emptyset$ λέγεται *εξαρτημένο* αν έχει πεπερασμένο εξαρτημένο υποσύνολο, αν δηλαδή υπάρχουν εξαρτημένα $x_1, \ldots, x_m \in M$.

Παραδείγματα 1.1.6. (α) Στο χώρο $X = F\big([a,b]\big)$, το σύνολο

$$M = \{1, t, \dots, t^N, \dots\}$$

είναι γραμμικά ανεξάρτητο: Ας υποθέσουμε ότι $\lambda_0 + \lambda_1 t + \cdots + \lambda_N t^N = \vec{0}$ για κάποιο $N \in \mathbb{N}$, και $\lambda_N \neq 0$. Αυτό σημαίνει ότι το πολυώνυμο $P(t) = \lambda_0 + \lambda_1 t + \cdots + \lambda_N t^N$ μηδενίζεται ταυτοτικά στο $[a,b]$. Άρα και η N-στή του παράγωγος είναι ταυτοτικά 0 στο $[a,b]$. Όμως,

$$P^{(N)}(t) \equiv N! \lambda_N \neq 0,$$

άτοπο. Επομένως, το M είναι γραμμικά ανεξάρτητο (γιατί;).

(β) Ορίζουμε $\delta_{nk} = 0$ αν $n \neq k$ και $\delta_{nk} = 1$ αν $n = k$. Το σύνολο $M = \{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ (όπου $e_n = (\delta_{nk})_{k \in \mathbb{N}}$) είναι γραμμικά ανεξάρτητο στον $\mathcal{S}$ (εξηγήστε).

Ορισμός 1.1.7. Λέμε ότι ο χώρος X έχει *πεπερασμένη διάσταση* αν υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε

(i) Στον X υπάρχουν n το πλήθος γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα $x_1, \dots, x_n$.

(ii) Αν $k \geq n+1$, οποιαδήποτε k διανύσματα του X είναι γραμμικά εξαρτημένα.

Έπεται ότι τα $x_1, \dots, x_n$ παράγουν το χώρο: $X = \mathrm{span}\{x_1, \dots, x_n\}$ (άσκηση).

Ο X έχει άπειρη διάσταση αν $X \neq \{0\}$ και ο X δεν έχει πεπερασμένη διάσταση. Δηλαδή, αν περιέχει άπειρο γραμμικά ανεξάρτητο υποσύνολο.

Ορισμός 1.1.8. Ένα υποσύνολο M του X λέγεται *βάση* (Hamel βάση) του X αν είναι γραμμικά ανεξάρτητο και παράγει τον X.

Σχετικά με τις Hamel βάσεις ισχύει το εξής θεμελιώδες:

Θεώρημα 1.1.9. *Κάθε γραμμικός χώρος X έχει Hamel βάση.*

Το θεώρημα είναι γνωστό στην περίπτωση της πεπερασμένης διάστασης από τη Γραμμική Άλγεβρα. Για την απόδειξη στη γενική περίπτωση απαιτούνται περισσότερα συνολοθεωρητικά εργαλεία (Λήμμα του Zorn) και για αυτό την αναβάλλουμε ως το Κεφάλαιο 5. Επιπλέον, αποδεικνύεται ότι οποιεσδήποτε δύο βάσεις ενός γραμμικού χώρου X είναι ισοπληθικές (η απόδειξη παραλείπεται). Ορίζεται καλά λοιπόν το εξής:

Ορισμός 1.1.10. Αν X ένας γραμμικός χώρος, η *διάσταση* του X ($\mathrm{dim}X$) είναι ο πληθάριθμός μιας βάσης του.

1.2 Χώροι με νόρμα - Χώροι Banach

Υπενθυμίζουμε ότι μια *μετρική* σε ένα μη κενό σύνολο X είναι μια συνάρτηση $d : X \times X \to \mathbb{R}$ που ικανοποιεί τα εξής: για κάθε $x, y, z \in X$,

(M1) $d(x,y) \geq 0$,

(M2) $d(x,y) = 0$ αν και μόνο αν $x = y$,

(M3) $d(x,y) = d(y,x)$ και

(M4) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ (τριγωνική ανισότητα).

Τότε, το ζεύγος (X,d) λέγεται *μετρικός χώρος* και η ποσότητα $d(x,y)$ *απόσταση* των x και y. Θα θεωρήσουμε γνωστή στα παρακάτω τη θεωρία των μετρικών χώρων[1], εισάγουμε απλά τους εξής συμβολισμούς: αν (X,d) ένας μετρικός χώρος, $x_0 \in X$, $r > 0$,

(i) Η *ανοικτή μπάλα* κέντρου x_0 και ακτίνας r είναι το σύνολο

$$D(x_0,r) = \{y \in X : d(y,x_0) < r\}. \tag{1.4}$$

(ii) Η *κλειστή μπάλα* κέντρου x_0 και ακτίνας r είναι το σύνολο

$$B(x_0,r) = \{y \in X : d(y,x_0) \leq r\}. \tag{1.5}$$

(iii) Η *σφαίρα* κέντρου x_0 και ακτίνας r είναι το σύνολο

$$S(x_0,r) = \{y \in X : d(y,x_0) = r\} = B(x_0,r) \setminus D(x_0,r). \tag{1.6}$$

Στα παρακάτω θα μας απασχολήσει μια υποκλάση των μετρικών χώρων, οι *χώροι με νόρμα*. Δίνουμε τον εξής:

Ορισμός 1.2.1. Έστω X ένας γραμμικός χώρος. Μια συνάρτηση $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ λέγεται *νόρμα* αν ικανοποιεί τα εξής: για κάθε $x,y \in X$ και $\lambda \in \mathbb{R}$,

(N1) $\|x\| \geq 0$.

(N2) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

(N3) $\|\lambda x\| = |\lambda|\,\|x\|$.

(N4) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

(η νόρμα του διανύσματος x «μετράει» την απόσταση του x από το 0, και ζητάμε να έχει τις πιό φυσιολογικές ιδιότητες που η απόσταση θα έπρεπε να έχει.) Το ζεύγος $(X, \|\cdot\|)$ λέγεται χώρος με νόρμα.

Κάθε νόρμα επάγει μια *μετρική* στον X: για κάθε $x,y \in X$, ορίζουμε

$$d(x,y) = \|x-y\|. \tag{1.7}$$

Πρόταση 1.2.2. *Η d είναι μετρική.*

Απόδειξη. Ελέγχουμε τις ιδιότητες (M1)-(M4): αν $x,y,z \in X$,
(M1) $d(x,y) = \|x-y\| \geq 0$, από την (N1).
(M2) $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow \|x-y\| = 0 \Leftrightarrow x-y = 0 \Leftrightarrow x = y$, από την (N2).
(M3) $d(y,x) = \|y-x\| = \|(-1)(x-y)\| = |-1|\,\|x-y\| = \|x-y\| = d(x,y)$, από την (N3).
(M4) $d(x,z) = \|x-z\| = \|(x-y)+(y-z)\| \leq \|x-y\| + \|y-z\| = d(x,y) + d(y,z)$, από την (N4). □

[1] Για μια λεπτομερή παρουσίαση παραπέμπουμε στις Σημειώσεις Πραγματικής Ανάλυσης, Π. Βαλέττας.

Αποδεικνύουμε στη συνέχεια κάποιες βασικές ιδιότητες των χώρων με νόρμα και της επαγόμενης μετρικής:

Πρόταση 1.2.3. *Σε κάθε χώρο με νόρμα X, οι $\|\cdot\|$ και $+$, $\cdot$ είναι συνεχείς συναρτήσεις.*

Απόδειξη. Τι εννοούμε μ' αυτό: πρώτα-πρώτα, αν $x_n, x \in X$, τότε $x_n \to x$ στον X αν και μόνο αν $d(x_n, x) \to 0$, δηλαδή αν $\|x_n - x\| \to 0$. Κατόπιν, για να ελέγξουμε τη συνέχεια μιας συνάρτησης f, αρκεί να δείξουμε ότι

$$x_n \to x \Longrightarrow f(x_n) \to f(x).$$

(α) *Η $\|\cdot\|$ είναι συνεχής:* Ζητάμε, $x_n \to x \Longrightarrow \|x_n\| \to \|x\|$. Αυτό όμως έπεται από την

$$\big|\|x\| - \|x_n\|\big| \leq \|x - x_n\|,$$

αφού $\|x - x_n\| \to 0$.

(β) *Η $+$ είναι συνεχής:* Θέλουμε να δείξουμε ότι αν $x_n \to x$ και $y_n \to y$, τότε $x_n + y_n \to x + y$. Αυτό είναι συνέπεια της

$$\|(x_n + y_n) - (x + y)\| = \|(x_n - x) + (y_n - y)\| \leq \|x_n - x\| + \|y_n - y\| \to 0.$$

(γ) *Η $\cdot$ είναι συνεχής:* Θα δείξουμε ότι αν $\lambda_n \to \lambda$ και $x_n \to x$, τότε $\lambda_n x_n \to \lambda x$. Γράφουμε

$$(*) \qquad \|\lambda x - \lambda_n x_n\| = \|\lambda_n(x - x_n) + (\lambda - \lambda_n)x\| \leq |\lambda_n|\,\|x - x_n\| + \|x\|\,|\lambda - \lambda_n|.$$

Παρατηρήστε ότι, αφού $\lambda_n \to \lambda$, υπάρχει $M > 0$ τέτοιος ώστε $|\lambda_n| \leq M$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Οπότε, η $(*)$ γίνεται

$$\|\lambda x - \lambda_n x_n\| \leq M\|x - x_n\| + \|x\|\,|\lambda - \lambda_n| \to 0.$$

□

Κάθε μετρική που επάγεται από νόρμα έχει πρόσθετες ιδιότητες: είναι «καλή» μετρική (παρατηρήστε ότι στην απόδειξη της Πρότασης 1.2.2 δεν χρησιμοποιήθηκαν *όλες* οι ιδιότητες της νόρμας):

Πρόταση 1.2.4. *Έστω X χώρος με νόρμα, και d η επαγόμενη μετρική. Τότε, για κάθε $x, y, z \in X$ και κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$, έχουμε*

(i) $d(x + z, y + z) = d(x, y)$,

(ii) $d(\lambda x, \lambda y) = |\lambda| d(x, y)$.

Απόδειξη. (i) $d(x + z, y + z) = \|(x + z) - (y + z)\| = \|x - y\| = d(x, y)$.

(ii) $d(\lambda x, \lambda y) = \|\lambda x - \lambda y\| = \|\lambda(x - y)\| = |\lambda|\,\|x - y\| = |\lambda| d(x, y)$.

□

Παράδειγμα 1.2.5. Στον $\mathcal{S}$, αν $x = (\xi_k)$ και $y = (\eta_k)$ η συνάρτηση

$$d(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{|\xi_k - \eta_k|}{1 + |\xi_k - \eta_k|} \tag{1.8}$$

είναι μετρική. Ο $\mathcal{S}$ είναι γραμμικός χώρος, όμως η d δεν επάγεται από κάποια νόρμα $\|\cdot\|$ στον s: θα έπρεπε να ικανοποιεί την

$$d(2x,0)=\|2x\|=2\|x\|=2d(x,0),$$

δηλαδή για κάθε $x=(\xi_k)\in\mathcal{S}$ θα είχαμε

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}\frac{2|\xi_k|}{1+2|\xi_k|}=2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}\frac{|\xi_k|}{1+|\xi_k|}.$$

Αυτό δεν ισχύει (πάρτε, για παράδειγμα, $x=(1,0,\ldots)$.)

Ορισμός 1.2.6. Έστω X χώρος με νόρμα. Η *μοναδιαία μπάλα* B_X του X είναι η κλειστή μπάλα με κέντρο 0 και ακτίνα 1. Δηλαδή,

$$B_X=\{x\in X:\|x\|\leq 1\}. \tag{1.9}$$

Πρόταση 1.2.7. *Σε κάθε χώρο με νόρμα X, η μοναδιαία μπάλα B_X είναι σύνολο κλειστό, φραγμένο, κυρτό και συμμετρικό ως προς το 0, με μη κενό εσωτερικό.*

Απόδειξη. (α) Η B_X είναι φραγμένη: $B_X\subseteq D(0,2)$.

(β) Αν $\|x_n\|\leq 1$ και $x_n\to x$, τότε $\|x\|=\lim_n\|x_n\|\leq 1$. Δηλαδή, η B_X είναι κλειστό σύνολο.

(γ) Η B_X είναι κυρτή[2] : αν $x,y\in B_X$ και $\lambda\in(0,1)$, τότε

$$\|\lambda x+(1-\lambda)y\|\leq\|\lambda x\|+\|(1-\lambda)y\|\leq\lambda+(1-\lambda)=1,$$

δηλαδή, $\lambda x+(1-\lambda)y\in B_X$.

(δ) Αν $x\in B_X$, τότε $\|-x\|=\|x\|\leq 1$, δηλαδή $-x\in B_X$. Άρα, η B_X είναι συμμετρική ως προς το 0.

(ε) $D(0,1/2)\subseteq B_X$, άρα $B_X^{\circ}\neq\emptyset$. □

Έχουμε δεί τον ορισμό της *συγκλίνουσας ακολουθίας* σε ένα χώρο με νόρμα: αν $x_n,x\in X$, $n\in\mathbb{N}$, τότε λέμε ότι $x_n\to x$ αν $\|x_n-x\|\to 0$.

Τελείως ανάλογα, μια ακολουθία (x_n) στον X λέγεται *ακολουθία Cauchy* αν για κάθε $\varepsilon>0$ υπάρχει $n_0=n_0(\varepsilon)\in\mathbb{N}$ τέτοιος ώστε

$$n,m\geq n_0\Longrightarrow\|x_n-x_m\|<\varepsilon.$$

Ορισμός 1.2.8. *Χώρος Banach* είναι ένας πλήρης χώρος με νόρμα (δηλαδή, ένας γραμμικός χώρος με νόρμα που είναι πλήρης ως προς τη μετρική d που επάγεται από τη νόρμα.)

[2] Υπενθυμίζουμε ότι ένα $K\subseteq X$ είναι κυρτό αν για κάθε $x,y\in K$ και $\lambda\in(0,1)$ ισχύει και $\lambda x+(1-\lambda)y\in K$.

1.3 Παραδείγματα χώρων με νόρμα

Ορίζουμε παρακάτω μερικούς κλασικούς χώρους με νόρμα:

1. Στον $\mathbb{R}^m$ θεωρούμε την Ευκλείδεια νόρμα $\|\cdot\|_2 : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ με

$$\|x\|_2 = \left(\sum_{k=1}^{m} |\xi_k|^2\right)^{1/2}, \tag{1.10}$$

όπου $x = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_m) \in \mathbb{R}^m$. Η απόδειξη των ιδιοτήτων (N1)-(N3) της νόρμας είναι άμεση. Για την τριγωνική ανισότητα θα χρειαστούμε την ανισότητα Cauchy-Schwarz:

Πρόταση 1.3.1 (Ανισότητα Cauchy-Schwarz). *Έστω $x_1, x_2, ..., x_m$ και $y_1, y_2, ..., y_m$ πραγματικοί αριθμοί. Τότε, ισχύει η ανισότητα*

$$\sum_{i=1}^{m} |x_i y_i| \leq \left(\sum_{i=1}^{m} |x_i|^2\right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^{m} |y_i|^2\right)^{1/2}. \tag{1.11}$$

Απόδειξη. Η απόδειξη που παραθέτουμε οφείλεται στον Schwarz. Θεωρούμε τη συνάρτηση $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με

$$p(\lambda) = (|x_1|\lambda + |y_1|)^2 + ... + (|x_m|\lambda + |y_m|)^2 \geq 0.$$

Κάνοντας τις πράξεις, η p παίρνει τη μορφή

$$p(\lambda) = A\lambda^2 + 2B\lambda + C \geq 0,$$

όπου $A = \sum_{i=1}^m |x_i|^2$, $B = \sum_{i=1}^m |x_i y_i|$ και $C = \sum_{i=1}^m |y_i|^2$. Συνεπώς, η διακρίνουσα του τριωνύμου $p(\lambda)$ πρέπει να είναι μη θετική και άρα

$$(2B)^2 - 4AC \leq 0$$

ή ισοδύναμα $B \leq AC$ που είναι ακριβώς η ζητούμενη ανισότητα. □

Επιστρέφουμε στην απόδειξη της τριγωνικής ανισότητας για την $\|\cdot\|_2$: αν $x = (\xi_1, ..., \xi_m)$ και $y = (\eta_1, ..., \eta_m$ δύο διανύσματα του $\mathbb{R}^m$, τότε

$$\begin{aligned}
\|x+y\|_2^2 &= \sum_{k=1}^{m} |\xi_k + \eta_k|^2 \\
&= \sum_{k=1}^{m} |\xi_k|^2 + 2\sum_{k=1}^{m} \xi_k\eta_k + \sum_{k=1}^{m} |\eta_k|^2 \\
&\leq \|x\|_2^2 + 2\sum_{k=1}^{m} |\xi_k\eta_k| + \|y\|_2^2 \\
&\leq \|x\|_2^2 + 2\|x\|_2\|y\|_2 + \|y\|_2^2,
\end{aligned}$$

όπου στην τελευταία ανισότητα χρησιμοποιήσαμε την ανισότητα Cauchy-Schwarz. Έτσι,

$$\|x+y\|_2^2 \leq (\|x\|_2 + \|y\|_2)^2 \Longrightarrow \|x+y\|_2 \leq \|x\|_2 + \|y\|_2.$$

Συνεπώς, ο $\mathbb{R}^m$ εφοδιασμένος με την $\|\cdot\|_2$ γίνεται χώρος με νόρμα με επαγόμενη μετρική που ορίζεται από τη σχέση

$$d(x,y) = \left(\sum_{k=1}^{m} |\xi_k - \eta_k|^2\right)^{1/2}, \tag{1.12}$$

όπου $x = (\xi_1, ..., \xi_m)$ και $y = (\eta_1, ..., \eta_m)$.

Πρόταση 1.3.2. *Ο $\mathbb{R}^m$ με τη μετρική που ορίζεται από την (1.12) είναι πλήρης μετρικός χώρος, δηλαδή χώρος Banach.*

Απόδειξη. Έστω (x_n) ακολουθία Cauchy στον $\mathbb{R}^m$. Γράφουμε $x_n = (\xi_{n1}, \ldots, \xi_{nm})$, $\xi_{nk} \in \mathbb{R}$.

Έστω $\varepsilon > 0$. Η (x_n) είναι Cauchy, επομένως υπάρχει $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ με την ιδιότητα

$$n, s \geq n_0 \Longrightarrow d(x_n, x_s) < \varepsilon.$$

Στην περίπτωσή μας αυτό σημαίνει ότι

$$n, s \geq n_0 \Longrightarrow \left(\sum_{k=1}^{m} (\xi_{nk} - \xi_{sk})^2\right)^{1/2} < \varepsilon. \tag{$*$}$$

Η βασική παρατήρηση είναι ότι

$$\forall\ k = 1, \ldots, m, \qquad |\xi_{nk} - \xi_{sk}| \leq \left(\sum_{k=1}^{m} (\xi_{nk} - \xi_{sk})^2\right)^{1/2} < \varepsilon.$$

Επομένως, αν $n, s \geq m_0$, τότε για κάθε $k = 1, \ldots, m$ χωριστά έχουμε

$$|\xi_{nk} - \xi_{sk}| < \varepsilon.$$

Αυτό σημαίνει ότι: για κάθε $k = 1, \ldots, m$ η ακολουθία $(\xi_{nk})_n$ είναι Cauchy στο $\mathbb{R}$. Από την πληρότητα του $\mathbb{R}$ έπεται ότι υπάρχουν $\xi_1, \ldots, \xi_m \in \mathbb{R}$ τέτοιοι ώστε

$$\xi_{n1} \to \xi_1 \quad , \quad \ldots \quad , \quad \xi_{nm} \to \xi_m$$

καθώς $n \to \infty$. *Ορίζουμε* $x = (\xi_1, \ldots, \xi_m) \in \mathbb{R}^m$, και μένει να δείξουμε ότι $d(x_n, x) \to 0$ καθώς $n \to \infty$.

Επιστρέφουμε στην $(*)$: για κάθε $n, s \geq n_0$ έχουμε

$$\left(\sum_{k=1}^{m} (\xi_{nk} - \xi_{sk})^2\right)^{1/2} < \varepsilon.$$

Σταθεροποιούμε το n και αφήνουμε το s να πάει στο άπειρο:

$$\left(\sum_{k=1}^{m} (\xi_{nk} - \xi_{sk})^2\right)^{1/2} \to \left(\sum_{k=1}^{m} (\xi_{nk} - \xi_k)^2\right)^{1/2}.$$

Άρα, για κάθε $n \geq n_0$ έχουμε

$$d(x_n, x) = \left(\sum_{k=1}^{m} (\xi_{nk} - \xi_k)^2\right)^{1/2} \leq \varepsilon.$$

Αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, βλέπουμε ότι $d(x_n, x) \to 0$. Δηλαδή, $x_n \to x$.

$\square$

2. Ο χώρος $\ell_\infty = \ell_\infty(\mathbb{N})$ των φραγμένων ακολουθιών , δηλαδή

$$\ell_\infty = \{x = (\xi_n)_n : \text{ υπάρχει } M \equiv M(x) > 0 : |\xi_n| \leq M \text{ για κάθε } n\}. \tag{1.13}$$

Ο ℓ_∞ είναι γραμμικός υπόχωρος του $\mathcal{S}$ και η συνάρτηση $\|\cdot\|_\infty : \ell_\infty \to \mathbb{R}$ με

$$\|x\|_\infty = \sup\{|\xi_k| : \ k \in \mathbb{N}\} \tag{1.14}$$

για $x = (\xi_1, \xi_2, ...) \in \ell_\infty$ είναι νόρμα σε αυτόν. Αποδεικνύουμε μόνο την τριγωνική ανισότητα: αν $x = (\xi_1, \xi_2, ...)$ και $y = (\eta_1, \eta_2, ...)$, τότε για $k \in \mathbb{N}$:

$$|\xi(k) + \eta(k)| \leq |\xi(k)| + |\eta(k)| \leq \|x\|_\infty + \|y\|_\infty.$$

Συνεπώς, $\|x + y\|_\infty \leq \|x\|_\infty + \|y\|_\infty$. Συνεπώς ο ℓ_∞ έχει τη δομή χώρου με νόρμα με επαγόμενη μετρική που ορίζεται από τη σχέση

$$d(x, y) = \sup\{|\xi_k - \eta_k| : \ k \in \mathbb{N}\} \tag{1.15}$$

για $x = (\xi_k)$ και $y = (\eta_k)$.

Πρόταση 1.3.3. *Ο ℓ_∞ με τη μετρική που ορίζεται από την (1.15) είναι πλήρης μετρικός χώρος, δηλαδή χώρος Banach.*

Απόδειξη. Έστω (x_n) ακολουθία Cauchy στον ℓ_∞. Γράφουμε

$$x_n = (\xi_{nk}) = (\xi_{n1}, \ldots, \xi_{nk}, \ldots).$$

Έστω $\varepsilon > 0$. Η (x_n) είναι Cauchy, άρα υπάρχει $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ με την ιδιότητα

$$\forall\ n, s \geq n_0, \ \ \sup\{|\xi_{nk} - \xi_{sk}| : k \in \mathbb{N}\} < \varepsilon. \tag{$*$}$$

Επομένως, αν $n, s \geq n_0$ έχουμε για κάθε $k \in \mathbb{N}$ χωριστά

$$|\xi_{nk} - \xi_{sk}| < \varepsilon. \tag{$**$}$$

Αυτό σημαίνει ότι για κάθε $k \in \mathbb{N}$ η ακολουθία (ξ_{nk}) είναι Cauchy (ως προς n) στο $\mathbb{R}$. Άρα, υπάρχουν $\xi_k \in \mathbb{R}$ τέτοιοι ώστε

$$\xi_{n1} \to \xi_1 \quad , \quad \ldots \quad , \quad \xi_{nk} \to \xi_k, \ldots \quad (n \to \infty).$$

Ορίζουμε $x = (\xi_1, \ldots, \xi_k, \ldots)$. Πρέπει πρώτα να δείξουμε ότι $x \in \ell_\infty$.
Επιστρέφοντας στην $(*)$ και σταθεροποιώντας $s = n_0$, έχουμε

$$\forall\ n \geq n_0\ \forall k \in \mathbb{N}, \ \ |\xi_{nk} - \xi_{n_0k}| < \varepsilon$$

και, για κάθε $k \in \mathbb{N}$,

$$|\xi_{nk} - \xi_{n_0k}| \to |\xi_k - \xi_{n_0k}|$$

καθώς $n \to \infty$. Άρα, $|\xi_k - \xi_{n_0k}| \leq \varepsilon$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$, δηλαδή

$$\forall\ k \in \mathbb{N}, \ \ |\xi_k| \leq |\xi_{n_0k}| + \varepsilon.$$

Όμως $x_{n_0} \in \ell_\infty$. Άρα, υπάρχει $M > 0$ τέτοιος ώστε $|\xi_{n_0k}| \leq M$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Έπεται ότι $\sup_k |\xi_k| \leq M + \varepsilon$, δηλαδή $x \in \ell_\infty$.

Επίσης, από την $(**)$, αφήνοντας το $s \to \infty$ έχουμε:

$$\forall\ n \geq n_0\ \forall k \in \mathbb{N}, \ \ |\xi_{nk} - \xi_k| \leq \varepsilon,$$

δηλαδή, για κάθε $n \geq n_0$,

$$d(x_n, x) = \sup\{|\xi_{nk} - \xi_k| : k \in \mathbb{N}\} \leq \varepsilon.$$

Αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, $x_n \to x$ ως προς την d. $\square$

3. Οι χώροι c και c_0. Θεωρούμε τους χώρους:

$$c = \{x = (\xi_n)_n : \lim_{n\to\infty} \xi_n \in \mathbb{R}\} \tag{1.16}$$

των συγκλινουσών ακολουθιών και

$$c_0 = \{x = (\xi_n)_n : \lim_{n\to\infty} \xi_n = 0\} \tag{1.17}$$

των μηδενικών ακολουθιών. Είναι σαφές ότι και οι δύο είναι γραμμικοί χώροι και μάλιστα υπόχωροι του ℓ_∞. Συνεπώς, για να εξεταστεί αν είναι χώροι Banach αρκεί να εξεταστεί αν είναι κλειστοί στον ℓ_∞[3].

Πρόταση 1.3.4. *Οι χώροι c και c_0 είναι πλήρεις μετρικοί χώροι.*

Απόδειξη. Έστω $x = (\xi_k) \in \overline{c}$. Δηλαδή, υπάρχουν $x_n = (\xi_{nk}) \in c$ με $x_n \to x$. Πρέπει να δείξουμε ότι $x \in c$, δηλαδή ότι η (ξ_k) συγκλίνει στο $\mathbb{R}$. Αρκεί να δείξουμε ότι η (ξ_k) είναι Cauchy στο $\mathbb{R}$.

Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού $x_n \to x$, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε $d(x, x_n) < \varepsilon$ για κάθε $n \geq n_0$. Δηλαδή,

$$\forall\ n \geq n_0\ \forall\ k \in \mathbb{N},\ \ |\xi_k - \xi_{nk}| < \varepsilon. \tag{$*$}$$

Κρατάμε ένα μόνο n: τον n_0. Η $x_{n_0} = (\xi_{n_0k})$ ανήκει στον c, δηλαδή συγκλίνει, δηλαδή είναι Cauchy. Άρα, υπάρχει $k_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε

$$\forall\ s, r \geq k_0,\ \ |\xi_{n_0s} - \xi_{n_0r}| < \varepsilon. \tag{$**$}$$

Τότε, χρησιμοποιώντας τις (1) και (2) βλέπουμε ότι, για κάθε $s, r \geq k_0$,

$$\begin{aligned} |\xi_s - \xi_r| &\leq |\xi_s - \xi_{n_0s}| + |\xi_{n_0s} - \xi_{n_0r}| + |\xi_{n_0r} - \xi_r| \\ &< \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon = 3\varepsilon. \end{aligned}$$

Άρα, η (ξ_k) είναι Cauchy, δηλαδή $x \in c$. Αφού $\overline{c} \subseteq c$, ο c είναι κλειστό υποσύνολο του ℓ_∞.

Για το δεύτερο ισχυρισμό, έστω $x = (\xi_k) \in \overline{c_0}$. Δηλαδή, υπάρχουν $x_n = (\xi_{nk}) \in c_0$ με $x_n \to x$. Πρέπει να δείξουμε ότι $x \in c_0$, δηλαδή ότι $\xi_k \to 0$ όταν $k \to \infty$.

Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού $x_n \to x$, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε $d(x, x_n) < \varepsilon$ για κάθε $n \geq n_0$. Δηλαδή,

$$\forall\ n \geq n_0\ \forall\ k \in \mathbb{N},\ \ |\xi_k - \xi_{nk}| < \varepsilon. \tag{$\bullet$}$$

Η $x_{n_0} = (\xi_{n_0k})$ ανήκει στον c_0, άρα, υπάρχει $k_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε

$$\forall\ k \geq k_0,\ \ |\xi_{n_0k}| < \varepsilon. \tag{$\bullet\bullet$}$$

Τότε, χρησιμοποιώντας τις ($\bullet$) και ($\bullet\bullet$) βλέπουμε ότι, για κάθε $k \geq k_0$,

$$|\xi_k| \leq |\xi_k - \xi_{n_0k}| + |\xi_{n_0k}| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon.$$

Άρα, $\xi_k \to 0$ όταν $k \to \infty$, δηλαδή $x \in c_0$. □

[3] Θυμηθείτε ότι αν X πλήρης μετρικός χώρος και Y υπόχωρος του X, τότε ο Y είναι πλήρης αν και μόνο αν είναι κλειστό υποσύνολο του X.

4. Ο χώρος των p-αθροίσιμων ακολουθιών ℓ_p, για $1 \leq p < \infty$ είναι το σύνολο

$$\ell_p = \left\{ x = (\xi_n)_n : \sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n|^p < \infty \right\} \tag{1.18}$$

εφοδιασμένος με τη νόρμα $\|\cdot\|_p : \ell_p \to \mathbb{R}$ που ορίζεται ως

$$\|x\|_p = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p \right)^{1/p}, \tag{1.19}$$

για $x = (\xi_k) \in \ell_p$. Οι ιδιότητες (N1)-(N3) του ορισμού της νόρμας επαληθεύονται εύκολα. Επιπλέον η απόδειξη της (N4) στην περίπτωση $p = 1$ είναι απλή (να την κάνετε. Για την απόδειξη της τριγωνικής ανισότητας για $p > 1$ θα χρειαστούμε μια σειρά από κλασσικές ανισότητες:

Λήμμα 1.3.5 (Ανισότητα Young). *Αν $x, y \geq 0$ και $p, q > 1$ με $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$*[4]*, τότε*

$$xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q} \tag{1.20}$$

με ισότητα μόνο αν $x^p = y^q$.

Απόδειξη. Η συνάρτηση $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \ln x$ είναι γνησίως κοίλη. Αν λοιπόν $a_1, \ldots, a_m > 0$ και $t_j \in (0,1)$ με $t_1 + \cdots + t_m = 1$, τότε

$$\sum_{j=1}^{m} t_j \ln a_j \leq \ln(t_1 a_1 + \cdots + t_m a_m),$$

από την ανισότητα Jensen. Έπεται ότι

$$a_1^{t_1} a_2^{t_2} \cdots a_m^{t_m} \leq t_1 a_1 + \cdots + t_m a_m \tag{1.21}$$

με ισότητα μόνο αν $a_1 = \cdots = a_m$. Η ανισότητα αυτή γενικεύει την ανισότητα αριθμητικού-γεωμετρικού μέσου. Αν $t_1 = \cdots = t_m = 1/m$, παίρνουμε

$$\sqrt[m]{a_1 \cdots a_m} \leq \frac{a_1 + \cdots + a_m}{m}.$$

Εφαρμόζουμε την ανισότητα (1.21) με $a = x^p$, $b = y^q$. Αφού $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, συμπεραίνουμε ότι

$$xy = a^{1/p} b^{1/q} \leq \frac{a}{p} + \frac{b}{q} = \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}$$

με ισότητα μόνο αν $x^p = a = b = y^q$. □

Πρόταση 1.3.6 (Ανισότητα Hölder). *Έστω $p, q > 1$ ώστε $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Αν $x = (\xi_k) \in \ell_p$ και $y = (\eta_k) \in \ell_q$, τότε για την $z = (\xi_k \eta_k)$ ισχύει $z \in \ell_1$ και επιπλέον*

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k \eta_k| \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p \right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\eta_k|^q \right)^{1/q}, \tag{1.22}$$

δηλαδή $\|z\|_1 \leq \|x\|_p \|y\|_q$.

[4] Τότε οι p και q λέγονται *συζυγείς εκθέτες*.

Απόδειξη. Κάνουμε πρώτα την επιπλέον υπόθεση ότι

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p = \sum_{k=1}^{\infty} |\eta_k|^q = 1.$$

Για κάθε $k = 1, 2, \ldots$, από την ανισότητα Young έχουμε

$$|\xi_k \eta_k| = |\xi_k||\eta_k| \leq \frac{|\xi_k|^p}{p} + \frac{|\eta_k|^q}{q}.$$

Προσθέτοντας κατά μέλη παίρνουμε

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k \eta_k| &\leq \frac{1}{p}\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p + \frac{1}{q}\sum_{k=1}^{\infty} |\eta_k|^q \\ &= \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,\end{aligned}$$

δηλαδή την ανισότητα του Hölder σ' αυτή την ειδική περίπτωση (γιατί;).

Για τη γενική περίπτωση: μπορούμε να υποθέσουμε ότι $x, y \neq 0$ (γιατί;), οπότε ορίζουμε

$$\xi_k' = \frac{\xi_k}{\left(\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p\right)^{1/p}} \quad , \quad \eta_k' = \frac{\eta_k}{\left(\sum_{k=1}^{\infty} |\eta_k|^q\right)^{1/q}} \quad , \quad k \in \mathbb{N}.$$

Από τον τρόπο ορισμού τους, οι (ξ_k'), (η_k') ικανοποιούν τις

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k'|^p = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\xi_k|^p}{\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p} = 1 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\eta_k|^q}{\sum_{k=1}^{\infty} |\eta_k|^q} = \sum_{k=1}^{\infty} |\eta_k'|^q.$$

Από το πρώτο βήμα της απόδειξης (το εφαρμόζουμε για τις (ξ_k'), (η_k')), βλέπουμε ότι

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k' \eta_k'| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\xi_k \eta_k|}{\left(\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\eta_k|^q\right)^{1/q}} \leq 1,$$

δηλαδή

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k \eta_k| \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\eta_k|^q\right)^{1/q}.$$

□

Σχόλιο. Είναι εμφανές ότι στην περίπτωση $p = q = 2$ η ανισότητα Hölder είναι ακριβώς η ανισότητα Cauchy-Schwarz.

Πρόταση 1.3.7 (Ανισότητα Minkowski)**.** *Έστω $p > 1$. Αν $x = (\xi_k) \in \ell_p$ και $y = (\eta_k) \in \ell_p$, τότε $x + y \in \ell_p$ και μάλιστα*

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k + \eta_k|^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\eta_k|^p\right)^{1/p}, \tag{1.23}$$

δηλαδή $\|x + y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p$.

Απόδειξη. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} |\xi_k + \eta_k|^p &= \sum_{k=1}^{n} |\xi_k + \eta_k|^{p-1} |\xi_k + \eta_k| \\
&\leq \sum_{k=1}^{n} |\xi_k + \eta_k|^{p-1} \left(|\xi_k| + |\eta_k|\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} |\xi_k + \eta_k|^{p-1} |\xi_k| + \sum_{k=1}^{n} |\xi_k + \eta_k|^{p-1} |\eta_k|.
\end{aligned}$$

Για καθένα από τα δύο αθροίσματα εφαρμόζουμε την ανισότητα του Hölder με εκθέτες p, q (τα αθροίσματα έχουν n όρους, αλλά η ανισότητα ισχύει και σ' αυτή την περίπτωση - γιατί;). Τότε,

$$\begin{aligned}
S_n &:= \sum_{k=1}^{n} |\xi_k + \eta_k|^p \\
&\leq \left(\sum_{k=1}^{n} |\xi_k + \eta_k|^{q(p-1)}\right)^{1/q} \left[\left(\sum_{k=1}^{n} |\xi_k|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^{n} |\eta_k|^p\right)^{1/p}\right],
\end{aligned}$$

και επειδή $q(p-1) = qp - p = p$, παίρνουμε

$$S_n \leq S_n^{1/q} \left[\left(\sum_{k=1}^{n} |\xi_k|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^{n} |\eta_k|^p\right)^{1/p}\right].$$

Αν $S_n > 0$, διαιρούμε με $S_n^{1/q}$, και αφού $1 - \frac{1}{q} = \frac{1}{p}$, έχουμε

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{k=1}^{n} |\xi_k + \eta_k|^p\right)^{1/p} &\leq \left(\sum_{k=1}^{n} |\xi_k|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^{n} |\eta_k|^p\right)^{1/p} \\
&\leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\eta_k|^p\right)^{1/p}.
\end{aligned}$$

(Αν $S_n = 0$, τότε αυτή η τελευταία ανισότητα ισχύει ούτως ή άλλως.) Αφού το δεξιό μέλος είναι πεπερασμένο, το αριστερό παραμένει φραγμένο ανεξάρτητα από το n. Αφήνοντας το n να πάει στο άπειρο, συμπεραίνουμε ότι η $z = (\xi_k + \eta_k) \in \ell_p$ και

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k + \eta_k|^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\eta_k|^q\right)^{1/q}.$$

□

Έτσι, από την ανισότητα Minkowski, ο ℓ_p, $p \geq 1$, γίνεται (γραμμικός) χώρος με νόρμα και επαγόμενη μετρική την

$$d_p(x, y) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k - \eta_k|^p\right)^{1/p} \tag{1.24}$$

για $x = (\xi_k), y = (\eta_k) \in \ell_p$.

Πρόταση 1.3.8. *Για $1 \leq p < \infty$ οι χώροι $(\ell_p, \|\cdot\|_p)$ είναι πλήρεις μετρικοί χώροι, δηλαδή χώροι Banach.*

Απόδειξη. Θα μιμηθούμε την απόδειξη της Πρότασης 1.3.2. Έστω (x_n) ακολουθία Cauchy στον ℓ_p. Γράφουμε $x_n = (\xi_{nk}) = (\xi_{n1}, \ldots, \xi_{nk}, \ldots)$, $\xi_{nk} \in \mathbb{R}$.

Έστω $\varepsilon > 0$. Η (x_n) είναι Cauchy, επομένως υπάρχει $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ με την ιδιότητα

$$(*) \qquad n, s \geq n_0 \Longrightarrow \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_{nk} - \xi_{sk}|^p \right)^{1/p} < \varepsilon.$$

Άρα, για κάθε $n, s \geq n_0$ και κάθε $k \in \mathbb{N}$ έχουμε

$$|\xi_{nk} - \xi_{sk}| \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_{nk} - \xi_{sk}|^p \right)^{1/p} < \varepsilon.$$

Δηλαδή, για κάθε $k \in \mathbb{N}$ η ακολουθία (ξ_{nk}) είναι Cauchy (ως προς n) στο $\mathbb{R}$. Από την πληρότητα του $\mathbb{R}$, υπάρχουν $\xi_1, \ldots, \xi_k, \ldots \in \mathbb{R}$ τέτοιοι ώστε

$$\xi_{n1} \to \xi_1 \quad , \quad \ldots \quad , \quad \xi_{nk} \to \xi_k, \ldots$$

καθώς $n \to \infty$. *Ορίζουμε* $x = (\xi_1, \ldots, \xi_k, \ldots)$. Πρέπει πρώτα να δείξουμε ότι $x \in \ell_p$.

Κρατάμε $N \in \mathbb{N}$ σταθερό, και από την $(*)$ έχουμε

$$\forall\, n, s \geq m_0, \qquad \left(\sum_{k=1}^{N} |\xi_{nk} - \xi_{sk}|^p \right)^{1/p} < \varepsilon,$$

και

$$\left(\sum_{k=1}^{N} |\xi_{nk} - \xi_{sk}|^p \right)^{1/p} \to \left(\sum_{k=1}^{N} |\xi_{nk} - \xi_{k}|^p \right)^{1/p}$$

καθώς $s \to \infty$, οπότε

$$\forall\, n \geq n_0, \qquad \left(\sum_{k=1}^{N} |\xi_{nk} - \xi_{k}|^p \right)^{1/p} \leq \varepsilon,$$

και αφήνοντας το $N \to \infty$ παίρνουμε

$$(**) \qquad \forall n \geq n_0, \qquad \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_{nk} - \xi_{k}|^p \right)^{1/p} \leq \varepsilon.$$

Δηλαδή, π.χ. για $n = n_0$, η $(\xi_{n_0k} - \xi_k) \in \ell_p$, και αφού $(\xi_{n_0k}) \in \ell_p$, από την ανισότητα του Minkowski βλέπουμε ότι $x = (\xi_k) = ((\xi_k - \xi_{n_0k}) + \xi_{n_0k}) \in \ell_p$.

Επιπλέον, η $(**)$ είναι ισοδύναμη με την

$$\forall n \geq n_0, \;\; d(x, x_n) \leq \varepsilon,$$

απ' όπου συμπεραίνουμε ότι $x_n \to x$. □

5. Ο χώρος c_{00} των τελικά μηδενικών ακολουθιών

$$c_{00} = \{x = (\xi_n)_n : \text{ υπάρχει } n = n(x) \text{ ώστε } \xi_k = 0, \ \forall\, k \geq n\} \tag{1.25}$$

είναι ένας γραμμικός υπόχωρος του ℓ_∞ (γιατί;). Συνεπώς, όπως κάναμε και για τους c, c_0 για να εξετάσουμε αν είναι κλειστός, πρέπει να εξετάσουμε αν είναι κλειστός υπόχωρος αυτού.

Ισχυρισμός. Ο c_{00} δεν είναι κλειστός στον ℓ_∞.

Απόδειξη. Για $n \in \mathbb{N}$ θεωρούμε τις

$$x_n = \left(1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{n}, 0, 0, \dots\right) \in c_{00}$$

καθώς και την

$$x = \left(1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}, \dots\right) \in \ell_\infty.$$

Είναι εμφανές ότι $x \notin c_{00}$ ενώ

$$\|x_n - x\|_\infty = \left\| \left(0, 0, \dots, 0, \frac{1}{n+1}, \frac{1}{n+2}, \dots\right) \right\|_\infty = \frac{1}{n+1} \to 0,$$

δηλαδή $x_n \to x$ στον ℓ_∞. Βρήκαμε λοιπόν μια ακολουθία (x_n) στον c_{00} και ένα στοιχείο $x \in \ell_\infty$ με $x_n \to x$ αλλά $x \notin c_{00}$, και άρα έπεται το ζητούμενο. □

Έπεται λοιπόν ότι ο c_{00} είναι χώρος με νόρμα αλλά όχι χώρος Banach.

Σημείωση: Θα δούμε παρακάτω ότι ο c_{00} δε μπορεί να γίνει χώρος Banach με *οποιαδήποτε* νόρμα κι αν εφοδιαστεί: αυτό θα προκύψει ως συνέπεια του ότι έχει αριθμήσιμη Hamel βάση σε συνδυασμό με το Θεώρημα Baire.

6. Ο χώρος των συνεχών συναρτήσεων σε ένα κλειστό διάστημα $[a, b]$ του $\mathbb{R}$

$$\mathcal{C}[a, b] = \{f : [a, b] \to \mathbb{R} : \ f \text{ συνεχής}\} \tag{1.26}$$

εφοδιασμένο με τη supremum νόρμα

$$\|f\|_\infty = \sup\{|f(t)| : \ t \in [a, b]\}. \tag{1.27}$$

Εφ' όσον η f είναι συνεχής, το supremum αυτό είναι καλά ορισμένο και μάλιστα είναι maximum. Αφήνεται ως άσκηση ο έλεγχος των ιδιοτήτων (N1)-(N4) για την $\|\cdot\|_\infty$. Η νόρμα αυτή επάγει την εξής μετρική: για $f, g \in \mathcal{C}[a, b]$

$$d_\infty(f, g) = \|f - g\|_\infty = \sup\{|f(t) - g(t)| : \ t \in [a, b]\}. \tag{1.28}$$

Πρόταση 1.3.9. *Ο $\mathcal{C}[a, b]$ εφοδιασμένος με τη supremum νόρμα είναι πλήρης μετρικός χώρος, δηλαδή χώρος Banach.*

Απόδειξη. Η απόδειξη είναι ανάλογη αυτής της Πρότασης 1.3.3 και αφήνεται ως άσκηση. □

7. Κλείνουμε αυτή την ενότητα με ένα ακόμη παράδειγμα ενός χώρου με νόρμα ο οποίος δεν είναι χώρος Banach. Συγκεκριμένα, θεωρούμε και πάλι το χώρο $X = \mathcal{C}[a,b]$ του προηγούμενου παραδείγματος εφοδιασμένο με τη συνάρτηση $\|\cdot\|_1 : X \to \mathbb{R}$ που ορίζεται ως

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f(t)|\, dt \tag{1.29}$$

για $f \in \mathcal{C}[a,b]$. Εύκολα βλέπουμε (να το επαληθεύσετε) ότι η $\|\cdot\|_1$ ορίζει μια νόρμα στο $\mathcal{C}[a,b]$ με επαγόμενη μετρική την:

$$d_1(f,g) = \int_a^b |f(t) - g(t)|\, dt, \tag{1.30}$$

όπου $f, g \in \mathcal{C}[a,b]$.

Ισχυρισμός. Ο $(\mathcal{C}[0,1], \|\cdot\|_1)$ δεν είναι πλήρης.

Απόδειξη. Ορίζουμε μια ακολουθία συνεχών συναρτήσεων (f_n), $n \geq 3$, στον X ως εξής:

$$f_n(t) = \begin{cases} 0 & , 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ n\left(t - \frac{1}{2}\right) & , \frac{1}{2} < t < a_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{n}, \\ 1 & , a_n \leq t \leq 1. \end{cases}$$

(1) Η (f_n) είναι ακολουθία Cauchy ως προς την d_1: έστω $n > m$. Τότε,

$$a_m = \frac{1}{2} + \frac{1}{m} > \frac{1}{2} + \frac{1}{n} = a_n,$$

και (κάντε ένα σχήμα),

$$\begin{aligned} d_1(f_n, f_m) &= \int_0^{1/2} |f_n - f_m| + \int_{1/2}^{a_m} |f_n - f_m| + \int_{a_m}^1 |f_n - f_m| \\ &= \int_{1/2}^{a_m} |f_n - f_m| \leq a_m - \frac{1}{2} = \frac{1}{m}. \end{aligned}$$

Έστω τώρα $\varepsilon > 0$. Υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ με $\frac{1}{n_0} < \varepsilon$, και αν $n, m \geq n_0$, τότε

$$d_1(f_n, f_m) \leq \frac{1}{m} \leq \frac{1}{n_0} < \varepsilon,$$

δηλαδή, η (f_n) είναι Cauchy.

(2) Ας υποθέσουμε ότι $f_n \to f$ (ως προς την d_1) για κάποια συνεχή $f : [0,1] \to \mathbb{R}$. Δηλαδή,

$$\int_0^1 |f_n(t) - f(t)| dt \to 0$$

καθώς $n \to \infty$. Ειδικότερα,

$$0 \leq \int_0^{1/2} |f(t)| dt = \int_0^{1/2} |f_n(t) - f(t)| dt \leq \int_0^1 |f_n(t) - f(t)| dt \to 0,$$

και αφού η f είναι συνεχής στο $[0,1]$, πρέπει να ισχύει $f(t)=0$, $t\in[0,1/2]$.

Έστω τώρα $\delta\in(1/2,1)$. Υπάρχει $n_0\in\mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $\frac{1}{2}+\frac{1}{n}<\delta$ για κάθε $n\geq n_0$. Τότε, για κάθε $n\geq n_0$ έχουμε

$$f_n(t)=1, \qquad t\in[\delta,1].$$

Όμως,

$$0\leq\int_\delta^1|f_n(t)-f(t)|dt\leq\int_0^1|f_n(t)-f(t)|dt\to 0,$$

άρα

$$\int_\delta^1|1-f(t)|dt=0$$

(γιατί;). Από τη συνέχεια της f, συμπεραίνουμε ότι $f(t)=1$ για κάθε $t\in[\delta,1]$, και αφού το δ ήταν τυχόν στο $(1/2,1)$, έπεται ότι $f(t)=1$ για κάθε $t\in(1/2,1]$. Έπεται ότι η f είναι ασυνεχής στο σημείο $t_0=1/2$, το οποίο είναι άτοπο αφού η f υποτέθηκε συνεχής στο $[0,1]$.

Βρήκαμε ακολουθία Cauchy (f_n) στον X, η οποία δεν συγκλίνει (ως προς την d) σε στοιχείο του X. Άρα, ο (X,d) δεν είναι πλήρης. □

1.4 Σύγκλιση σειρών

Ο X είναι γραμμικός χώρος, επομένως μπορούμε να *προσθέτουμε* τους όρους μιάς ακολουθίας στον X. Αυτό οδηγεί σε μια φυσιολογική γενίκευση της έννοιας της *συγκλίνουσας σειράς* σε αυθαίρετο χώρο με νόρμα:

Ορισμός (α) Έστω (x_k) ακολουθία στον X. Η ακολουθία (s_n) των *μερικών αθροισμάτων* της (x_k) ορίζεται από την

$$s_n=x_1+\cdots+x_n, \qquad n=1,2,\dots \tag{1.31}$$

Αν υπάρχει $x\in X$ τέτοιο ώστε $s_n\to x$, τότε λέμε ότι *η σειρά* $\sum_{k=1}^\infty x_k$ *συγκλίνει στο* x, και γράφουμε

$$x=\sum_{k=1}^\infty x_k. \tag{1.32}$$

(β) Λέμε ότι *η σειρά* $\sum_{k=1}^\infty x_k$ *συγκλίνει απολύτως*, αν

$$\sum_{k=1}^\infty\|x_k\|<+\infty \tag{1.33}$$

(δηλαδή, αν η σειρά πραγματικών αριθμών $\|x_1\|+\|x_2\|+\cdots$ συγκλίνει στο $\mathbb{R}$.)

Πρόταση 1.4.1. *Έστω X ένας χώρος Banach. Αν η $\sum_{k=1}^\infty x_k$ συγκλίνει απολύτως στον X, τότε συγκλίνει στον X.*

Απόδειξη. Έστω (x_k) ακολουθία στον X, με την ιδιότητα $\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\| < \infty$. Αν μάς δώσουν $\varepsilon > 0$, υπάρχει $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε, για κάθε $n > m \geq n_0$,

$$\|x_{m+1}\| + \cdots + \|x_n\| < \varepsilon.$$

Τότε, αν $n > m \geq n_0$,

$$\|s_n - s_m\| = \|x_{m+1} + \cdots + x_n\| \leq \|x_{m+1}\| + \cdots + \|x_n\| < \varepsilon.$$

Το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, άρα η (s_n) είναι Cauchy. Ο X είναι πλήρης, άρα η s_n συγκλίνει σε κάποιο $x \in X$. Αυτό εξ' ορισμού σημαίνει ότι η $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ συγκλίνει στο x. □

Η ιδιότητα της Πρότασης 1.4.1 δίνει έναν πολύ χρήσιμο χαρακτηρισμό των χώρων Banach:

Πρόταση 1.4.2. *Αν σε ένα χώρο X με νόρμα, κάθε απολύτως συγκλίνουσα σειρά συγκλίνει, τότε ο X είναι πλήρης (είναι χώρος Banach).*

Απόδειξη. Θα χρησιμοποιήσουμε το εξής (γνωστό) αποτέλεσμα:

Αν μια ακολουθία Cauchy σε ένα μετρικό χώρο έχει συγκλίνουσα υπακολουθία, τότε είναι και η ίδια συγκλίνουσα.

(Θυμηθείτε την απόδειξη αυτού του ισχυρισμού.) Έστω (x_n) ακολουθία Cauchy στον X. Για $\varepsilon = \frac{1}{2^k}$, $k = 1, 2, \ldots$, μπορούμε να βρούμε (γιατί;) $n_1 < n_2 < \ldots < n_k < \ldots$ τέτοια ώστε

$$\forall n > m \geq n_k, \quad \|x_n - x_m\| < \frac{1}{2^k}.$$

Ειδικότερα,

$$n_2 > n_1 \geq n_1 \Longrightarrow \|x_{n_2} - x_{n_1}\| < \frac{1}{2},$$

$$n_3 > n_2 \geq n_2 \Longrightarrow \|x_{n_3} - x_{n_2}\| < \frac{1}{2^2},$$

και, γενικά,

$$n_{k+1} > n_k \geq n_k \Longrightarrow \|x_{n_{k+1}} - x_{n_k}\| < \frac{1}{2^k}$$

για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Άρα,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|x_{n_{k+1}} - x_{n_k}\| < 1 < +\infty.$$

Η $\sum_{k=1}^{\infty} (x_{n_{k+1}} - x_{n_k})$ συγκλίνει απολύτως, οπότε (από την υπόθεσή μας) συγκλίνει: υπάρχει $x \in X$ τέτοιο ώστε

$$\sum_{k=1}^{m} (x_{n_{k+1}} - x_{n_k}) \to x,$$

δηλαδή, $x_{n_{m+1}} - x_{n_1} \to x$. Άρα, $x_{n_k} \to x + x_{n_1}$. Δείξαμε ότι η (x_n) έχει συγκλίνουσα υπακολουθία. Είναι όμως και ακολουθία Cauchy. Συνεπώς είναι συγκλίνουσα και άρα έπεται ότι ο X είναι πλήρης. □

Έχοντας στη διάθεσή μας την έννοια της συγκλίνουσας σειράς, μπορούμε να ορίσουμε μια έννοια «βάσης» διαφορετική από αυτήν της Hamel βάσης:

Ορισμός 1.4.3. Μια ακολουθία (e_n) λέγεται *βάση Schauder* του χώρου X, αν $e_n \in X$, $n \in \mathbb{N}$, και κάθε $x \in X$ γράφεται κατά μοναδικό τρόπο στη μορφή

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n.$$

(υπάρχουν δηλαδή μοναδικοί $a_n = a_n(x) \in \mathbb{R}$ τέτοιοι ώστε

$$\|x - (a_1 e_1 + \ldots + a_m e_m)\| \to 0$$

καθώς $m \to \infty$.) Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n$ είναι το *ανάπτυγμα* του x ως προς τη βάση (e_n).

Παράδειγμα 1.4.4. Αν $1 \leq p < \infty$, η ακολουθία (e_n) με $e_n = (\delta_{nk})$ είναι μια βάση Schauder του ℓ_p.

Απόδειξη. Έστω $x = (\xi_k)_k \in \ell_p$. Για $m \in \mathbb{N}$, θέτουμε $a_m(x) = \xi_m$ και παρατηρούμε ότι

$$\|x - \xi_1 e_1 - \ldots - \xi_m e_m\|_p = \left(\sum_{k=m+1}^{\infty} |\xi_k|^p \right)^{1/p} \to 0.$$

Για τη μοναδικότητα, αν $(a_k) \in \mathcal{S}$, τότε για κάθε $t \in \mathbb{N}$ και $m \geq t$:

$$|\xi_t - a_t| \leq \|x - a_1 e_1 - \ldots - a_m e_m\|_p$$

και κατά συνέπεια, αν $\|x - a_1 e_1 - \ldots - a_m e_m\|_p \to 0$, αναγκαστικά είναι $a_t = \xi_t$ για κάθε t. $\square$

Πρόταση 1.4.5. *Έστω X χώρος με νόρμα. Αν ο X έχει βάση Schauder $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$, τότε ο X είναι διαχωρίσιμος.*

Απόδειξη: Ορίζουμε $M = \{\sum_{n=1}^{m} q_n e_n : m \in \mathbb{N}, q_n \in \mathbb{Q}\}$. Το M είναι αριθμήσιμο. Έστω $x \in X$ και $\varepsilon > 0$. Υπάρχουν $a_n \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ τέτοιοι ώστε

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n,$$

άρα υπάρχει $m \in \mathbb{N}$ με την ιδιότητα

$$\Big\|x - \sum_{n=1}^{m} a_n e_n\Big\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Για κάθε $n = 1, \ldots, m$, βρίσκουμε $q_n \in \mathbb{Q}$ τέτοιους ώστε

$$|q_n - a_n|\,\|e_n\| < \frac{\varepsilon}{2m}.$$

Τότε, $\sum_{n=1}^{m} q_n e_n \in M$, και

$$\begin{aligned} \Big\|x - \sum_{n=1}^{m} q_n e_n\Big\| &\leq \Big\|x - \sum_{n=1}^{m} a_n e_n\Big\| + \Big\|\sum_{n=1}^{m} (a_n - q_n) e_n\Big\| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{n=1}^{m} |a_n - q_n|\,\|e_n\| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + m\frac{\varepsilon}{2m} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Άρα, $\overline{M} = X$. □

Σημείωση: Το 1936, ο Mazur ρώτησε αν ισχύει το αντίστροφο της Πρότασης 1.4.5: αν δηλαδή, κάθε διαχωρίσιμος χώρος Banach έχει βάση Schauder. Το ερώτημα αποδείχθηκε εξαιρετικά δύσκολο: το 1973, ο Per Enflo έδωσε αρνητική απάντηση.

1.5 Ασκήσεις

Ομάδα Α΄

1. Αν Y και Z είναι υπόχωροι του X, δείξτε ότι ο $Y \cap Z$ είναι υπόχωρος του X, ενώ ο $Y \cup Z$ είναι υπόχωρος του X αν και μόνο αν είτε $Y \subseteq Z$ είτε $Z \subseteq Y$.

2. Έστω X χώρος με νόρμα. Δείξτε ότι η κλειστή θήκη $\overline{Y}$ ενός γραμμικού υποχώρου Y του X είναι γραμμικός υπόχωρος του X.

3. Δείξτε ότι σε έναν χώρο με νόρμα $(X, \|\cdot\|)$, για κάθε $x \in X$ και $r > 0$ ισχύουν

$$B(x,r) = \overline{D(x,r)}, \quad \mathrm{int}\,(B(x,r)) = D(x,r) \quad \text{και} \quad \partial B(x,r) = \partial D(x,r) = S(x,r).$$

4. Έστω X γραμμικός χώρος, και $\|\cdot\|$, $\|\cdot\|'$ δύο νόρμες στον X. Δείξτε ότι $\|x\| \leq \|x\|'$ για κάθε $x \in X$, αν και μόνο αν $B_{(X,\|\cdot\|')} \subseteq B_{(X,\|\cdot\|)}$.

5. Θεωρούμε τον c_{00} σαν υπόχωρο του ℓ_∞. Έστω $y_n = \left(0,\dots,0,\frac{1}{n^2},0,\dots\right)$, $n \in \mathbb{N}$. Δείξτε ότι η $\sum_n \|y_n\|$ συγκλίνει, αλλά η $\sum_n y_n$ δεν συγκλίνει στον Y. Τι συμπεραίνετε;

Ομάδα Β΄

6. (α) Δείξτε ότι, αν $1 \leq p < r \leq \infty$, τότε για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$ ισχύει

$$\|x\|_r \leq \|x\|_p \leq n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{r}}\|x\|_r.$$

Βρείτε διανύσματα x για τα οποία ισχύει ισότητα στις παραπάνω ανισότητες.

(β) Δείξτε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε: αν $N < p < +\infty$, τότε για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$ ισχύει

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_p \leq (1+\varepsilon)\|x\|_\infty.$$

7. Έστω X χώρος με νόρμα, και Y ένας γραμμικός υπόχωρος του X. Δείξτε ότι αν $Y^\circ \neq \emptyset$, τότε $Y = X$.

8. Ο c_{00} περιέχεται σε κάθε ℓ_p, $1 \leq p \leq \infty$. Δείξτε ότι είναι πυκνός στον ℓ_p, $1 \leq p < +\infty$, όχι όμως στον ℓ_∞.

9. Θεωρούμε το $S = \{x \in \ell_\infty : \sum_{k=1}^\infty |\xi_k| \leq 1\}$. Δείξτε ότι το S είναι κλειστό στον ℓ_1 (και στον ℓ_∞) ως προς την $\|x\| = \sup\{|\xi_k| : k \in \mathbb{N}\}$ και έχει κενό εσωτερικό.

Δείξτε ότι ο ℓ_1 με νόρμα την $\|x\| = \sup\{|\xi_k| : k \in \mathbb{N}\}$ δεν είναι χώρος Banach.

10. Στον ℓ_1 ορίζουμε

$$\|x\|' = 2\left|\sum_{k=1}^\infty \xi_k\right| + \sum_{k=2}^\infty \left(1+\frac{1}{k}\right)|\xi_k|.$$

Δείξτε ότι η $\|\cdot\|'$ είναι νόρμα. Είναι ισοδύναμη με την $\|x\| = \sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|$; Είναι ο $(\ell_1, \|\cdot\|')$ χώρος Banach;

11. Έστω X n-διάστατος πραγματικός γραμμικός χώρος, και $x_1, \ldots, x_m$ διανύσματα που παράγουν τον X. Τότε, για κάθε $x \in X$ υπάρχουν $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ (όχι αναγκαστικά μοναδικά), τέτοια ώστε $x = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_i$. Ορίζουμε

$$\|x\| = \inf\left\{ \sum_{i=1}^{m} |\lambda_i| : \lambda_i \in \mathbb{R}, x = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_i \right\}.$$

Δείξτε ότι ο $(X, \|\cdot\|)$ είναι χώρος με νόρμα.

12. Έστω $\mathcal{C}^1[0,1]$ ο χώρος των συνεχώς παραγωγίσιμων $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, με νόρμα την

$$\|f\| = \max\left\{ \max_{0 \leq t \leq 1} |f(t)|, \max_{0 \leq t \leq 1} |f'(t)| \right\}.$$

Δείξτε ότι η $\|\cdot\|$ είναι όντως νόρμα, και ότι ο $(\mathcal{C}^1[0,1], \|\cdot\|)$ είναι χώρος Banach. Γενικεύστε στο χώρο $\mathcal{C}^k[0,1]$ των συναρτήσεων $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ με συνεχή $k-$οστή παράγωγο.

13. Στον c_0 θεωρούμε την $\|x\|' = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\xi_k|}{2^k}$. Δείξτε ότι ο $(c_0, \|\cdot\|')$ είναι χώρος με νόρμα, αλλά δεν είναι χώρος Banach.

Ομάδα Γ′

14. Έστω $B(x_n, r_n)$ μια φθίνουσα ακολουθία από κλειστές μπάλες σε έναν χώρο Banach X. Δείξτε ότι $\bigcap_{n=1}^{\infty} B(x_n, r_n) \neq \emptyset$. [*Υπόδειξη:* Δείξτε πρώτα ότι $\|x_{n+1} - x_n\| \leq r_n - r_{n+1}$.]

15. Έστω $f : [0,1] \to \mathbb{R}$. Η *κύμανση* της f ορίζεται από την

$$V(f) = \sup\left\{ \sum_{i=1}^{n} |f(t_i) - f(t_{i-1})| : \; n \in \mathbb{N}, \; 0 = t_0 < t_1 < ... < t_n = 1 \right\}.$$

Αν $V(f) < \infty$, η συνάρτηση f καλείται *συνάρτηση φραγμένης κύμανσης*. Θεωρούμε το χώρο $BV[0,1]$ όλων των συναρτήσεων φραγμένης κύμανσης $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, οι οποίες είναι συνεχείς από δεξιά και ικανοποιούν την $f(0) = 0$. Δείξτε ότι η $\|f\| = V(f)$ είναι νόρμα στον $BV[0,1]$ και ότι ο $(BV[0,1], \|\cdot\|)$ είναι χώρος Banach.

16. Έστω $1 \leq p < \infty$ και K κλειστό και φραγμένο υποσύνολο του ℓ_p. Αποδείξτε ότι το K είναι συμπαγές αν και μόνο αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n \geq n_0$ και κάθε $x = (\xi_k) \in K$ να ισχύει

$$\sum_{k=n}^{\infty} |\xi_k|^p < \varepsilon.$$

17. Έστω $x = (\xi_n) \in \ell_\infty$. Αποδείξτε ότι η απόσταση του x από τον c_0 είναι

$$d(x, c_0) = \limsup_n |\xi_n|.$$

Κεφάλαιο 2

Χώροι πεπερασμένης διάστασης

2.1 Βασικές ιδιότητες

Η πρώτη κλάση χώρων με νόρμα που θα μελετήσουμε είναι αυτή των χώρων που, σαν γραμμικοί χώροι, έχουν πεπερασμένη διάσταση. Είναι λογικό να περιμένει κανείς ότι η δομή τους θα είναι απλούστερη. Στο Κεφάλαιο αυτό θα δούμε αρκετές καλές τους ιδιότητες, καθώς και μερικές σημαντικές διαφορές τους από τους χώρους άπειρης διάστασης.

Το πρώτο βασικό αποτέλεσμα αυτού του Κεφαλαίου (Θεώρημα 2.1.2) λέει ότι κάθε υπόχωρος πεπερασμένης διάστασης ενός χώρου με νόρμα είναι αναγκαστικά πλήρης. Για την απόδειξη αυτού του αποτελέσματος θα χρειαστούμε το εξής βασικό:

Λήμμα 2.1.1. *Έστω X χώρος με νόρμα, και έστω $x_1, \ldots, x_m$ γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα στον X. Υπάρχει μια σταθερά $c > 0$ (που εξαρτάται από τη νόρμα και από τα $x_1, \ldots, x_m$), τέτοια ώστε για κάθε $a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{R}$ να ισχύει*

$$c\left(|a_1| + \cdots + |a_m|\right) \leq \|a_1x_1 + \cdots + a_mx_m\|. \tag{2.1}$$

(δηλαδή, αν οι συντελεστές a_i είναι «μεγάλοι», τότε το διάνυσμα $a_1x_1 + \cdots + a_mx_m$ δεν μπορεί να έχει «αυθαίρετα» μικρή νόρμα.)

Απόδειξη. Θα δείξουμε πρώτα ότι υπάρχει $c > 0$ τέτοιος ώστε

$$\sum_{i=1}^{m} |\beta_i| = 1 \Longrightarrow \|\beta_1x_1 + \cdots + \beta_mx_m\| \geq c. \tag{$*$}$$

Ας υποθέσουμε ότι αυτό δεν ισχύει. Τότε, για κάθε $k \in \mathbb{N}$ υπάρχουν $\beta_1^{(k)}, \ldots, \beta_m^{(k)} \in \mathbb{R}$ με $\sum_{i=1}^{m} |\beta_i^{(k)}| = 1$ και

$$\|\beta_1^{(k)}x_1 + \cdots + \beta_m^{(k)}x_m\| < \frac{1}{k}.$$

Δηλαδή, αν θέσουμε $y^{(k)} = \sum_{i=1}^{m} \beta_i^{(k)}x_i$, έχουμε $\|y^{(k)}\| \to 0$.

Σκεφτόμαστε ως εξής: αφού για κάθε k ισχύει η $\sum_{i=1}^m |\beta_i^{(k)}| = 1$, ειδικότερα για κάθε k έχουμε $|\beta_1^{(k)}| \leq 1$. Άρα, υπάρχει υπακολουθία $(\beta_1^{(k_s)})$ της $(\beta_1^{(k)})$ που συγκλίνει σε κάποιον $\beta_1 \in \mathbb{R}$.

Κοιτάμε τώρα την $(\beta_2^{(k_s)})$: πάλι, $|\beta_2^{(k_s)}| \leq 1$, επομένως υπάρχει υπακολουθία $(\beta_2^{(k_{l_s})})$ της $(\beta_2^{(k_s)})$ με $\beta_2^{(k_{l_s})} \to \beta_2 \in \mathbb{R}$. Όμως τότε, $\beta_1^{(k_{l_s})} \to \beta_1$ (είναι υπακολουθία της $(\beta_1^{(k_s)})$.)

Κάνοντας m βήματα, βρίσκουμε $\beta_1, \ldots, \beta_m \in \mathbb{R}$ και $k_1 < k_2 < \ldots < k_n < \ldots$ τέτοιους ώστε

$$\forall\ i = 1, \ldots, m, \qquad \beta_i^{(k_n)} \to \beta_i.$$

Ορίζουμε $y = \beta_1 x_1 + \cdots + \beta_m x_m$. Τότε,

$$\|y - y^{(k_n)}\| = \|\sum_{i=1}^m (\beta_i - \beta_i^{(k_n)}) x_i\| \leq \sum_{i=1}^m |\beta_i - \beta_i^{(k_n)}|\ \|x_i\| \to 0.$$

Άρα, $y^{(k_n)} \to y$ και αφού $\|y^{(k_n)}\| \to 0$,

$$\|y\| = \lim_{n\to\infty} \|y^{(k_n)}\| = 0,$$

δηλαδή, $y = \beta_1 x_1 + \cdots + \beta_m x_m = \vec{0}$. Τα $x_1, \ldots, x_m$ έχουν υποτεθεί γραμμικά ανεξάρτητα, άρα $\beta_1 = \beta_2 = \ldots = \beta_m = 0$. Όμως,

$$\sum_{i=1}^m |\beta_i| = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^m |\beta_i^{(k_n)}| = \lim_{n\to\infty} 1 = 1,$$

το οποίο είναι άτοπο. Αυτό αποδεικνύει την $(*)$.

Έστω τώρα τυχόντες $a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{R}$. Αν $a_1 = \ldots = a_m = 0$, τότε

$$0 = \|a_1 x_1 + \cdots + a_m x_m\| \geq c \sum_{i=1}^m |a_i| = 0.$$

Αν $A = \sum_{i=1}^m |a_i| \neq 0$, ορίζουμε $\beta_i = a_i / A$. Τότε, $\sum_{i=1}^m |\beta_i| = 1$, οπότε η $(*)$ δίνει

$$\Big\|\frac{1}{A}(a_1 x_1 + \cdots + a_m x_m)\Big\| = \|\beta_1 x_1 + \cdots + \beta_m x_m\| \geq c,$$

ή, ισοδύναμα,

$$\|a_1 x_1 + \cdots + a_m x_m\| \geq cA = c \sum_{i=1}^m |a_i|.$$

□

Χρησιμοποιώντας αυτό το Λήμμα, δείχνουμε κάποιες βασικές ιδιότητες των χώρων πεπερασμένης διάστασης:

Θεώρημα 2.1.2. *Έστω X χώρος με νόρμα, και έστω Y υπόχωρος του X που έχει πεπερασμένη διάσταση. Τότε, ο Y είναι πλήρης. Ειδικότερα, κάθε χώρος πεπερασμένης διάστασης με νόρμα είναι πλήρης.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι $\dim Y = n$, και σταθεροποιούμε μια βάση $\{e_1, \ldots, e_n\}$ του Y. Έστω $(y^{(m)})$ ακολουθία Cauchy στον Y. Κάθε $y^{(m)}$ γράφεται μονοσήμαντα σαν γραμμικός συνδυασμός των e_i:

$$y^{(m)} = \sum_{i=1}^{n} a_i^{(m)} e_i.$$

Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού η $(y^{(m)})$ είναι ακολουθία Cauchy, υπάρχει $m_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε: αν $m, s \geq m_0$, τότε $\|y^{(m)} - y^{(s)}\| < \varepsilon$. Δηλαδή, για κάθε $m, s \geq m_0$,

$$\Big\|\sum_{i=1}^{n}(a_i^{(m)} - a_i^{(s)})e_i\Big\| < \varepsilon.$$

Τα e_i είναι γραμμικά ανεξάρτητα, άρα, από το Λήμμα υπάρχει $c > 0$ τέτοιος ώστε: για κάθε $m, s \geq m_0$,

$$c\sum_{i=1}^{n}|a_i^{(m)} - a_i^{(s)}| \leq \Big\|\sum_{i=1}^{n}(a_i^{(m)} - a_i^{(s)})e_i\Big\| < \varepsilon.$$

Ειδικότερα, για κάθε $i = 1, \ldots, n$ και κάθε $m, s \geq m_0$,

$$|a_i^{(m)} - a_i^{(s)}| < \frac{\varepsilon}{c}$$

(γιατί;). Άρα, για κάθε $i = 1, \ldots, n$, η $(a_i^{(m)})$ είναι ακολουθία Cauchy στο $\mathbb{R}$. Οπότε, υπάρχουν $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ τέτοιοι ώστε

$$a_1^{(m)} \to a_1 \quad , \quad \ldots \quad , \quad a_n^{(m)} \to a_n.$$

Ορίζουμε $y = a_1e_1 + \cdots + a_ne_n \in Y$. Τότε,

$$\|y - y^{(m)}\| \leq \sum_{i=1}^{n}|a_i - a_i^{(m)}|\,\|e_i\| \to 0,$$

δηλαδή, $y^{(m)} \to y$. Άρα, ο Y είναι πλήρης. □

Σημείωση: Γνωρίζουμε ότι αν (X, d) είναι ένας μετρικός χώρος, τότε κάθε πλήρης υπόχωρός του είναι κλειστός. Η παρατήρηση αυτή και το Θεώρημα 2.1.2 έχουν την εξής άμεση συνέπεια:

Θεώρημα 2.1.3. *Έστω X χώρος με νόρμα, και έστω Y υπόχωρος του X που έχει πεπερασμένη διάσταση. Τότε, ο Y είναι κλειστός στον X.*

Απόδειξη. Από το Θεώρημα 2.1.2, ο Y είναι πλήρης. □

Εφαρμογή 2.1.4. Αν X είναι ένας απειροδιάστατος χώρος Banach, τότε κάθε βάση Hamel του X είναι υπεραριθμήσιμη.

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι ο X έχει άπειρη αριθμήσιμη βάση Hamel

$$e_1, e_2, \ldots, e_n, \ldots$$

Ορίζουμε $Y_n = \langle e_1, \ldots, e_n \rangle$. Κάθε Y_n έχει πεπερασμένη διάσταση, επομένως είναι κλειστός υπόχωρος του X.

Από την άλλη πλευρά, κάθε $x \in X$ είναι *πεπερασμένος* γραμμικός συνδυασμός των e_n, άρα

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} Y_n. \tag{2.2}$$

Όμως, ο X είναι *πλήρης*. Το Θεώρημα του Baire μας λέει ότι κάποιος Y_n έχει *μη κενό εσωτερικό*. Υπάρχουν δηλαδή $n \in \mathbb{N}$, $x \in Y_n$ και $r > 0$ τέτοια ώστε

$$D(x, r) = \{z \in X : \|z - x\| < r\} \subseteq Y_n.$$

Αυτό οδηγεί σε άτοπο: έστω $w \in X$. Υπάρχει $\lambda > 0$ για το οποίο $\|\lambda w\| < r$. Τότε, $x + \lambda w \in Y_n$ (γιατί;). Όμως $x \in Y_n$, και ο Y_n είναι γραμμικός υπόχωρος του X. Άρα,

$$w = \frac{1}{\lambda}\left((x + \lambda w) - x\right) \in Y_n.$$

Έπεται ότι $Y_n = X$. Αυτό όμως είναι άτοπο, γιατί ο X είναι απειροδιάστατος. □

Συνέπεια: Αν X είναι ένας γραμμικός χώρος που έχει άπειρη αριθμήσιμη διάσταση, τότε όποια νόρμα κι αν ορίσουμε στον X αποκλείεται να πάρουμε χώρο Banach. Τέτοια παραδείγματα είναι ο χώρος $P[a, b]$ των πολυωνύμων στο $[a, b]$ καθώς και ο c_{00} (εξηγήστε).

Ορισμός 2.1.5. Έστω X ένας γραμμικός χώρος. Δύο νόρμες $\|\cdot\|$ και $\|\cdot\|'$ στον X λέγονται *ισοδύναμες* αν υπάρχουν θετικοί αριθμοί a, b τέτοιοι ώστε, για κάθε $x \in X$

$$a\|x\| \leq \|x\|' \leq b\|x\|. \tag{2.3}$$

Πρόταση 2.1.6. *Έστω $\|\cdot\|$ και $\|\cdot\|'$ ισοδύναμες νόρμες στον X. Αν $x_n, x \in X$, τότε*

$$\|x - x_n\| \to 0 \Leftrightarrow \|x - x_n\|' \to 0. \tag{2.4}$$

(δηλαδή, $x_n \to x$ στον $(X, \|\cdot\|)$ αν και μόνο αν $x_n \to x$ στον $(X, \|\cdot\|')$: οι δύο χώροι έχουν ακριβώς τις ίδιες συγκλίνουσες ακολουθίες.)

Απόδειξη. Αν $\|x - x_n\|' \to 0$, τότε

$$\|x - x_n\| \leq \frac{1}{a}\|x - x_n\|' \to 0.$$

Δηλαδή, $\|x - x_n\| \to 0$. Όμοια, αν $\|x - x_n\| \to 0$, τότε

$$\|x - x_n\|' \leq b\|x - x_n\| \to 0,$$

δηλαδή $\|x - x_n\|' \to 0$. □

Πρόταση 2.1.7. *Έστω $\|\cdot\|$ και $\|\cdot\|'$ ισοδύναμες νόρμες στον X. Αν $A \subseteq X$, τότε το A είναι κλειστό στον $(X, \|\cdot\|)$ αν και μόνο αν το A είναι κλειστό στον $(X, \|\cdot\|')$.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι το A είναι κλειστό στον $(X, \|\cdot\|)$. Έστω $x_n \in A$ με $x_n \to x$ ως προς την $\|\cdot\|'$. Από την Πρόταση 2.1.6, $x_n \to x$ ως προς την $\|\cdot\|$, και αφού το A είναι κλειστό ως προς την $\|\cdot\|$, έπεται ότι $x \in A$. Άρα, το A είναι κλειστό ως προς την $\|\cdot\|'$. Η αντίστροφη συνεπαγωγή αποδεικνύεται εντελώς ανάλογα. □

Οι δύο αυτές Προτάσεις οδηγούν στο εξής:

Θεώρημα 2.1.8. *Δύο ισοδύναμες νόρμες στον γραμμικό χώρο X ορίζουν την ίδια τοπολογία στον X.*

Απόδειξη. Ένα $A \subseteq X$ είναι ανοιχτό ως προς την $\|\cdot\|$ αν και μόνο αν είναι ανοιχτό ως προς την $\|\cdot\|'$ (γιατί;). □

Αυτό που μπορεί να δείξει κανείς είναι ότι, σε ένα χώρο πεπερασμένης διάστασης οποιεσδήποτε δύο νόρμες είναι ισοδύναμες:

Θεώρημα 2.1.9. *Έστω X γραμμικός χώρος πεπερασμένης διάστασης. Αν $\|\cdot\|$ και $\|\cdot\|'$ είναι δύο νόρμες στον X, τότε υπάρχουν $a, b > 0$ με την ιδιότητα: για κάθε $x \in X$,*

$$a\|x\| \leq \|x\|' \leq b\|x\|. \tag{2.5}$$

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι $\dim X = n$, και έστω $\{e_1, \dots, e_n\}$ μια βάση του X. Από το Λήμμα 2.1.1 (το εφαρμόζουμε για την $\|\cdot\|$ *και* για την $\|\cdot\|'$), υπάρχουν c, c' τέτοια ώστε, για κάθε $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$,

$$c\sum_{i=1}^n |a_i| \leq \|a_1e_1 + \cdots + a_ne_n\|,$$

και

$$c'\sum_{i=1}^n |a_i| \leq \|a_1e_1 + \cdots + a_ne_n\|'.$$

Έστω $x \in X$. Υπάρχουν $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ τέτοιοι ώστε $x = a_1e_1 + \cdots + a_ne_n$. Τότε,

$$\begin{aligned}
\|x\| &= \|a_1e_1 + \cdots + a_ne_n\| \leq \sum_{i=1}^n |a_i|\, \|e_i\| \\
&\leq \left(\max_{i\leq n} \|e_i\|\right) \sum_{i=1}^n |a_i| \\
&\leq \frac{\max \|e_i\|}{c'} c' \sum_{i=1}^n |a_i| \\
&\leq \frac{\max \|e_i\|}{c'} \|a_1e_1 + \cdots + a_ne_n\|' \\
&= \frac{1}{a}\|x\|',
\end{aligned}$$

όπου $a = c'/\max\|e_i\|$. Όμοια,

$$\|x\|' = \|a_1e_1 + \cdots + a_ne_n\|' \leq \frac{\max\|e_i\|'}{c}\|x\| = b\|x\|.$$

Άρα το ζητούμενο ισχύει με

$$a = \frac{c'}{\max \|e_i\|} \quad , \quad b = \frac{\max \|e_i\|'}{c}.$$

□

Το Θεώρημα 2.1.9 μας λέει λοιπόν ότι σε ένα χώρο πεπερασμένης διάστασης, όλες οι νόρμες επάγουν *την ίδια τοπολογία*: ένα σύνολο είναι ανοιχτό ως προς όλες τις δυνατές νόρμες στον X ή δεν είναι ανοιχτό για καμία απ' αυτές.

Κλείνουμε αυτή την παράγραφο με ένα παράδειγμα νορμών που *δεν* είναι ισοδύναμες. Θεωρούμε τον γραμμικό χώρο c_{00} του προηγούμενου Κεφαλαίου και ορίζουμε δύο νόρμες σε αυτόν:

$$\|x\|_\infty = \max\{|\xi_k| : k \in \mathbb{N}\} \quad , \quad \|x\|_1 = \sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|. \tag{2.6}$$

Προφανώς, $\|x\|_\infty \leq \|x\|_1$. Θα δείξουμε ότι δεν υπάρχει $b > 0$ τέτοιος ώστε

$$\forall\, x \in X, \qquad \|x\|_1 \leq b\|x\|_\infty.$$

Αν υπήρχε τέτοιος b, θέτοντας $x_n = (1, \ldots, 1, 0, \ldots)$ θα είχαμε

$$n = \|x_n\|_1 \leq b\|x_n\|_\infty = b,$$

κι αυτό για κάθε $n \in \mathbb{N}$, άτοπο. Ο X είναι βέβαια απειροδιάστατος.

2.2 Συμπάγεια και πεπερασμένη διάσταση

Ο ορισμός της συμπάγειας που θα χρησιμοποιήσουμε είναι αυτός της *ακολουθιακής συμπάγειας*[1]: Έστω X χώρος με νόρμα. Ένα μη κενό υποσύνολο M του X λέγεται *συμπαγές* αν για κάθε ακολουθία (x_m) στο M υπάρχουν $x \in M$ και υπακολουθία (x_{k_m}) της (x_m) τέτοια ώστε $\|x - x_{k_m}\| \to 0$.

Πρόταση 2.2.1. *Αν το M είναι συμπαγές, τότε είναι κλειστό και φραγμένο.*

Απόδειξη. (α) Το M είναι κλειστό: έστω $x \in \overline{M}$. Υπάρχει (x_m) στο M με $x_m \to x$. Αφού το M είναι συμπαγές, υπάρχουν $y \in M$ και $x_{k_m} \to y$. Αφού όμως $x_m \to x$, θα πρέπει $x_{k_m} \to x$. Άρα, $x = y \in M$. Δηλαδή, $\overline{M} \subseteq M$.

(β) Θα δείξουμε ότι υπάρχει $A > 0$ τέτοιος ώστε $\|x\| \leq A$ για κάθε $x \in M$. Αλλιώς υπάρχουν $x_m \in M$, $m \in \mathbb{N}$, με $\|x_m\| > m$. Από συμπάγεια, υπάρχουν $x \in M$ και $x_{k_m} \to x$. Τότε, $\|x_{k_m}\| \to \|x\|$. Όμως, από την επιλογή των x_m, $\|x_{k_m}\| \to \infty$: ατοπο. □

[1] Η ισοδυναμία αυτού του ορισμού με τον αντίστοιχο τοπολογικό ορισμό καθώς και διάφορες ιδιότητες των συμπαγών χώρων υπάρχουν στις Σημειώσεις Πραγματικής Ανάλυσης, Π. Βαλέττας.

Το αντίστροφο της Πρότασης 2.2.1 δεν είναι σωστό. Για παράδειγμα, ας θεωρήσουμε το $M = \{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ στον ℓ_1. Αν $n \neq m$, τότε $\|e_n - e_m\|_1 = 2$.

Το M είναι κλειστό και φραγμένο (δείξτε το), αλλά δεν είναι συμπαγές. Η ακολουθία (e_n) στο M δεν έχει συγκλίνουσα υπακολουθία: αν είχε, οι όροι της θα έπρεπε να είναι τελικά ο ένας κοντά στον άλλον, ενώ οποιοιδήποτε δύο απ' αυτούς έχουν απόσταση ίση με 2.

Θεώρημα 2.2.2. *Έστω X χώρος πεπερασμένης διάστασης με νόρμα, και έστω $\emptyset \neq M \subseteq X$. Τότε, το M είναι συμπαγές αν και μόνο αν είναι κλειστό και φραγμένο.*

Απόδειξη. ($\Leftarrow$) Υποθέτουμε ότι $\dim X = n$, και έστω $\{e_1, \ldots, e_n\}$ μιά βάση του X. Έστω $x_m = a_1^{(m)} e_1 + \cdots + a_n^{(m)} e_n$, ακολουθία στο M.

Το M είναι φραγμένο, άρα υπάρχει $A > 0$ τέτοιος ώστε

$$\|a_1^{(m)} e_1 + \cdots + a_n^{(m)} e_n\| = \|x_m\| \leq A, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Από το βασικό Λήμμα 2.1.1, υπάρχει $c > 0$ τέτοιος ώστε

$$c \sum_{i=1}^{n} |a_i^{(m)}| \leq \|x_m\| \leq A, \quad m \in \mathbb{N},$$

και, όπως ακριβώς στην απόδειξη του Λήμματος 2.1.1, βρίσκουμε $k_1 < k_2 < \ldots < k_m < \ldots$ και $a_i \in \mathbb{R}$ τέτοιους ώστε

$$a_1^{(k_m)} \to a_1 \quad , \quad \ldots \quad , \quad a_n^{(k_m)} \to a_n.$$

Ορίζουμε $x = a_1 e_1 + \cdots + a_n e_n$. Τότε,

$$\|x - x_{k_m}\| = \Big\| \sum_{i=1}^{n} (a_i - a_i^{(k_m)}) e_i \Big\| \leq \sum_{i=1}^{n} |a_i - a_i^{(k_m)}| \, \|e_i\| \to 0,$$

δηλαδή $x_{k_m} \to x$. Τέλος, $x \in M$ αφού $x_{k_m} \in M$ και το M είναι κλειστό. Κάθε ακολουθία του M έχει συγκλίνουσα (στο M) υπακολουθία, άρα το M είναι συμπαγές.

Η αντίστροφη κατεύθυνση είναι ακριβώς η Πρόταση 2.2.1 και ισχύει χωρίς την υπόθεση της πεπερασμένης διάστασης. □

Σε χώρους πεπερασμένης διάστασης, τα συμπαγή είναι ακριβώς τα κλειστά και φραγμένα σύνολα. Στους απειροδιάστατους χώρους αυτό παύει να ισχύει. Και μάλιστα, η μοναδιαία μπάλα B_X ενός απειροδιάστατου χώρου X δεν είναι *ποτέ* συμπαγής. Η απόδειξη αυτού του αποτελέσματος βασίζεται σε ένα γεωμετρικό λήμμα:

Λήμμα 2.2.3 (F. Riesz). *Έστω X χώρος με νόρμα, και Y, Z υπόχωροι του X. Υποθέτουμε ότι ο Y είναι κλειστός, γνήσιος υπόχωρος του Z. Τότε, για κάθε $\theta \in (0,1)$ υπάρχει $z \in Z$ τέτοιο ώστε $\|z\| = 1$ και*

$$d(z, Y) = \inf\{\|z - y\| : y \in Y\} \geq \theta. \tag{2.7}$$

Απόδειξη. Ο Y είναι γνήσιος υπόχωρος του Z, άρα υπάρχει $v \in Z \setminus Y$. Ο Y είναι κλειστός και $v \notin Y$, επομένως υπάρχει $r > 0$ τέτοιος ώστε $D(v, r) \cap Y = \emptyset$. Δηλαδή, $\|v - y\| \geq r$ για κάθε $y \in Y$. Έπεται ότι

$$d(v, Y) = \inf\{\|v - y\| : y \in Y\} = a > 0.$$

Αφού $\theta \in (0,1)$, έχουμε $a/\theta > a$. Άρα, υπάρχει $y_0 \in Y$ τέτοιο ώστε

$$\|v - y_0\| < \frac{a}{\theta}.$$

Ορίζουμε $z = \frac{v-y_0}{\|v-y_0\|}$ (προφανώς $y_0 \neq v$, άρα $\|v - y_0\| \neq 0$.) Τότε, $\|z\| = 1$, και $z \in Z$ γιατί $v, y_0 \in Z$ και ο Z είναι γραμμικός υπόχωρος του X.

Θα δείξουμε ότι $\|z - y\| \geq \theta$ για κάθε $y \in Y$. Πράγματι, αν $y \in Y$ έχουμε:

$$\begin{aligned} \|z-y\| &= \left\| \frac{v-y_0}{\|v-y_0\|} - y \right\| = \left\| \frac{v-(y_0+\|v-y_0\|y)}{\|v-y_0\|} \right\| \\ &= \frac{\|v-(y_0+\|v-y_0\|y)\|}{\|v-y_0\|} \geq \frac{\|v-(y_0+\|v-y_0\|y)\|}{a/\theta} \\ &\geq \frac{a}{a/\theta} = \theta, \end{aligned}$$

γιατί $y_0 + \|v - y_0\|y \in Y$ (ο Y είναι υπόχωρος). □

Θεώρημα 2.2.4. *Έστω X χώρος με νόρμα. Ο X έχει πεπερασμένη διάσταση αν και μόνο αν η B_X είναι συμπαγής.*

Απόδειξη. Αν ο X έχει πεπερασμένη διάσταση, τότε η B_X είναι συμπαγής: έχουμε δεί ότι η B_X είναι πάντα κλειστό και φραγμένο σύνολο, οπότε το συμπέρασμα έπεται από το Θεώρημα 2.2.2.

Μένει να δείξουμε ότι αν ο X είναι απειροδιάστατος, τότε η B_X δεν είναι συμπαγής. Θα το δείξουμε κατασκευάζοντας μιά ακολουθία (x_n) στον X με $\|x_n\| = 1$, $n \in \mathbb{N}$, που ικανοποιεί την

$$n \neq m \Longrightarrow \|x_n - x_m\| \geq \frac{1}{2}. \tag{2.8}$$

(τότε, η (x_n) περιέχεται στην B_X και είναι φανερό ότι δεν έχει συγκλίνουσα υπακολουθία.)

1. Σαν x_1 επιλέγουμε οποιοδήποτε διάνυσμα του X με $\|x_1\| = 1$.

2. *Επιλογή του x_2:* Ο $Y_1 = \langle x_1 \rangle$ έχει πεπερασμένη διάσταση, άρα είναι κλειστός υπόχωρος του X. Αφού ο X είναι απειροδιάστατος, ο Y_1 είναι γνήσιος υπόχωρος του X. Εφαρμόζουμε το Λήμμα του Riesz με $Y = Y_1$, $Z = X$ και $\theta = \frac{1}{2}$: υπάρχει $x_2 \in X$ με $\|x_2\| = 1$ και $d(x_2, Y_1) \geq 1/2$. Ειδικότερα, αφού $x_1 \in Y_1$, βλέπουμε ότι $\|x_2 - x_1\| \geq \frac{1}{2}$.

3. *Επαγωγικό βήμα:* Υποθέτουμε ότι έχουν επιλεγεί τα $x_1, \ldots, x_k$ έτσι ώστε $\|x_n - x_m\| \geq 1/2$ αν $n \neq m$, $n, m \in \{1, \ldots k\}$. Ορίζουμε $Y_k = \langle x_1, \ldots, x_k \rangle$. Όπως πριν, ο Y_k έχει πεπερασμένη διάσταση, άρα είναι κλειστός και γνήσιος υπόχωρος του X. Από το Λήμμα του Riesz με $Y = Y_k$, $Z = X$ και $\theta = \frac{1}{2}$, υπάρχει $x_{k+1} \in X$ με $\|x_{k+1}\| = 1$ και $d(x_{k+1}, Y_k) \geq 1/2$. Αφού $x_1, \ldots, x_k \in Y_k$, έπεται ότι

$$\|x_{k+1} - x_j\| \geq \frac{1}{2}, \quad j = 1, \ldots, k.$$

Μαζί με την επαγωγική υπόθεση, αυτό σημαίνει ότι

$$\|x_1\| = \|x_2\| = \ldots = \|x_{k+1}\| = 1,$$

και, αν $n \neq m$ στο $\{1, \dots, k+1\}$, τότε

$$\|x_n - x_m\| \geq \frac{1}{2}.$$

Επαγωγικά, ορίζουμε ακολουθία (x_n) με τις ιδιότητες που θέλουμε. $\square$

Ας θυμηθούμε τώρα μερικές ιδιότητες της συμπάγειας σχετικά με τις συνεχείς συναρτήσεις μεταξύ μετρικών χώρων:

(α) *Αν $T : (X, d) \to (Y, \rho)$ συνεχής συνάρτηση, και $M \subseteq X$ συμπαγές, τότε το $T(M)$ είναι συμπαγές.*

Απόδειξη. Έστω (y_k) ακολουθία στο $T(M)$. Για κάθε k υπάρχει $x_k \in M$ τέτοιο ώστε $T(x_k) = y_k$. Το M είναι συμπαγές, άρα υπάρχουν (x_{k_n}) και $x \in M$ με $x_{k_n} \to x$. Η T είναι συνεχής, άρα $T(x_{k_n}) \to T(x)$. Όμως, $T(x_{k_n}) = y_{k_n}$. Άρα,

$$y_{k_n} \to T(x) \in T(M),$$

όπως θέλαμε. $\square$

(β) *Αν $T : (X, d) \to (\mathbb{R}, |\cdot|)$ συνεχής και $M \subseteq X$ συμπαγές, τότε η T παίρνει μέγιστη και ελάχιστη τιμή στο M.*

Απόδειξη. Το $T(M)$ είναι συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}$, άρα κλειστό και φραγμένο. Αφού είναι φραγμένο έχει sup και inf, και αφού είναι κλειστό, το sup είναι max και το inf είναι min. Δηλαδή, υπάρχουν $a, b \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $a \leq T(x) \leq b$ για κάθε $x \in M$, και τα a, b είναι τιμές της T στο M: Υπάρχουν $x_1, x_2 \in M$ τέτοια ώστε

$$T(x_1) = a \leq T(x) \leq b = T(x_2)$$

για κάθε $x \in M$. $\square$

Σύμφωνα με το Θεώρημα 2.2.4, πρέπει κανείς να είναι πολύ προσεκτικός με αντίστοιχες προτάσεις για κλειστά και φραγμένα υποσύνολα απειροδιάστατων χώρων: τα κλειστά και φραγμένα δεν είναι πάντα συμπαγή, και η συμπάγεια ήταν πολύ ουσιαστική για την απόδειξη των (α) και (β).

2.3 Ασκήσεις

Ομάδα Α΄

1. Έστω $\|\cdot\|$ και $\|\cdot\|'$ δύο ισοδύναμες νόρμες στο γραμμικό χώρο X. Να δείξετε ότι αν (x_n) μια ακολουθία στοιχείων του X και $x \in X$, τότε $\|x_n - x\| \to 0$ αν και μόνο αν $\|x_n - x\|' \to 0$.

2. Έστω $\|\cdot\|$ και $\|\cdot\|'$ δύο ισοδύναμες νόρμες στο γραμμικό χώρο X. Δείξτε ότι υπάρχει ομοιομορφισμός $f : B_{(X,\|\cdot\|)} \to B_{(X,\|\cdot\|')}$. Δηλαδή, η f είναι συνεχής, ένα προς ένα και επί, και η f^{-1} είναι συνεχής.

3. Αποδείξτε ότι ο χώρος $\mathbb{R}^{m\times n}$ των $m \times n$ πραγματικών πινάκων είναι γραμμικός χώρος διάστασης mn. Συμπεράνετε ότι όλες οι νόρμες στο χώρο αυτό είναι ισοδύναμες. Ποιά θα ήταν τα ανάλογα των $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ και $\|\cdot\|_\infty$ σε αυτό το χώρο;

Ομάδα Β′

4. (α) Δείξτε ότι για κάθε $1 \leq p < q < +\infty$, ο ℓ_p περιέχεται γνήσια στον ℓ_q, και ο ℓ_q περιέχεται γνήσια στον c_0.
(β) Εξετάστε αν οι νόρμες $\|\cdot\|_p$ και $\|\cdot\|_q$ είναι ισοδύναμες στον ℓ_p $(p < q)$.
(γ) Εξετάστε αν ισχύει $c_0 = \bigcup_{1\leq p<+\infty} \ell_p$.

5. Στον χώρο $\mathcal{C}[0,1]$ θεωρούμε τη συνήθη νόρμα $\|f\| = \max_{t\in[0,1]} |f(t)|$. Σε κάθε μία από τις παρακάτω περιπτώσεις, βρείτε το σύνολο

$$\{g \in K : \|f - g\| = d(f, K)\}.$$

(α) K είναι το σύνολο των σταθερών συναρτήσεων, f τυχούσα στον $\mathcal{C}[0,1]$.
(β) $K = \{ax : a \in \mathbb{R}\}$, f σταθερή.
(γ) $K = \{g \in \mathcal{C}[0,1] :\ g \geq 0,\ \int_0^1 g(t)dt \geq g(0) + 1\}$, $f \equiv 0$.

Ομάδα Γ′

6. Δείξτε την εξής παραλλαγή του Λήμματος του Riesz: αν ο Y είναι υπόχωρος του X που έχει πεπερασμένη διάσταση, τότε υπάρχει $x \in X$ με $\|x\| = 1$ και $d(x, Y) = 1$. [*Υπόδειξη:* Πάρτε $v \in X\setminus Y$. Ο Y είναι κλειστός, άρα $d(v, Y) = a > 0$. Βρείτε $y_n \in Y$ τέτοια ώστε $a \leq \|v - y_n\| < a + \frac{1}{n}$. Η (y_n) περιέχεται σε κατάλληλη κλειστή μπάλα του Y, η οποία είναι *συμπαγής*.]

7. Έστω X χώρος με νόρμα και $0 < \theta < 1$. Ένα $A \subseteq B_X$ λέγεται *$\theta-$δίκτυο* για την B_X αν για κάθε $x \in B_X$ υπάρχει $a \in A$ με $\|x - a\| < \theta$. Αν το A είναι $\theta-$δίκτυο για την B_X, δείξτε ότι για κάθε $x \in X$ υπάρχουν $a_n \in A, n \in \mathbb{N}$, ώστε

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \theta^n.$$

8. Έστω $X = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ και ένα $\varepsilon > 0$.

(α) Έστω $x_1, x_2, ..., x_k \in B_X$ με την ιδιότητα $\|x_i - x_j\| \geq \varepsilon$ αν $i \neq j$. Να δείξετε ότι $k \leq (1 + 2/\varepsilon)^n$. [*Υπόδειξη:* Οι μπάλες $B(x_i, \varepsilon/2)$ περιέχονται στην $B(0, 1 + \varepsilon/2)$ και έχουν ξένα εσωτερικά.

(β) Δείξτε ότι υπάρχει $\varepsilon-$δίκτυο για την B_X με πληθάριθμο $N \leq (1 + 2/\varepsilon)^n$.

9. Έστω X απειροδιάστατος χώρος με νόρμα.

(α) Δείξτε ότι υπάρχουν $x_1, x_2, ..., x_n, ... \in B_X$ ώστε $x_n + \frac{1}{4}B_X \subseteq B_X$ και τα $x_n + \frac{1}{4}B_X$ να είναι ξένα.

(β) Το ερώτημα απαιτεί κάποια γνώση Θεωρίας Μέτρου. Αποδείξτε ότι *δεν* υπάρχει μέτρο Borel μ στον X που να ικανοποιεί τα εξής:

1. Το μ είναι αναλλοίωτο στις μεταφορές, δηλαδή $\mu(x + A) = \mu(A)$ για κάθε $x \in X$ και κάθε Borel υποσύνολο A του X.
2. $\mu(A) > 0$ για κάθε ανοικτό, μη κενό $A \subseteq X$.
3. Υπάρχει μη κενό ανοικτό $A_0 \subseteq X$ με $\mu(A_0) < \infty$.

Κεφάλαιο 3

Τελεστές και συναρτησοειδή

3.1 Φραγμένοι γραμμικοί τελεστές

Έστω X και Y δύο χώροι με νόρμα. *Γραμμικός τελεστής* από τον X στον Y είναι μια απεικόνιση $T : X \to Y$ που ικανοποιεί την

$$T(\lambda x_1 + \mu x_2) = \lambda T(x_1) + \mu T(x_2) \tag{3.1}$$

για κάθε $x_1, x_2 \in X$ και $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Για συντομία θα γράφουμε Tx_1, Tx_2 κλπ, αντί για $T(x_1), T(x_2)$.

Ο *πυρήνας* του T είναι το σύνολο $\mathrm{Ker}(T) = \{x \in X : Tx = 0\}$, και η *εικόνα* του T είναι το σύνολο $\mathcal{R}(T) = \{y \in Y | \exists x \in X : Tx = y\} = \{Tx : x \in X\}$. Ο πυρήνας και η εικόνα ενός γραμμικού τελεστή $T : X \to Y$ είναι γραμμικοί υπόχωροι των X και Y αντίστοιχα.

Οι X και Y έχουν τοπολογία που επάγεται από τις νόρμες τους, μας ενδιαφέρει λοιπόν να δούμε πότε ένας γραμμικός τελεστής $T : X \to Y$ είναι *συνεχής*. Ξεκινάμε με τον ορισμό του *φραγμένου* τελεστή:

Ορισμοί 3.1.1. Έστω X και Y χώροι με νόρμα.

(i) Ένας γραμμικός τελεστής $T : X \to Y$ λέγεται *φραγμένος* αν υπάρχει σταθερά $c > 0$ τέτοια ώστε

$$\|Tx\|_Y \leq c\|x\|_X \tag{3.2}$$

για κάθε $x \in X$ (χωρίς κίνδυνο σύγχυσης, στο εξής θα γράφουμε απλώς $\|\cdot\|$ και για τις δύο νόρμες.)

(ii) Αν ο T είναι φραγμένος, ορίζουμε τη *νόρμα* $\|T\|$ του T σαν τη μικρότερη σταθερά c για την οποία η (3.2) ισχύει για κάθε $x \in X$.

• Αυτό το min υπάρχει: θεωρούμε το σύνολο

$$C_T = \{c \geq 0 : \forall\, x \in X,\ \|Tx\| \leq c\|x\|\}.$$

Αν ο T είναι φραγμένος, αυτό το σύνολο είναι μη κενό και κάτω φραγμένο από το 0. Άρα, ορίζεται το $\inf C_T$ και ισχύει $\inf C_T \in C_T$ γιατί το C_T είναι κλειστό (άσκηση). Άρα, η

$$\|T\| = \min\{c \geq 0 : \forall x \in X, \quad \|Tx\| \leq c\|x\|\} \tag{3.3}$$

ορίζεται καλά, και ικανοποιεί την

$$\|Tx\| \leq \|T\| \, \|x\|, \quad x \in X. \tag{3.4}$$

Ένας άλλος, εξίσου χρήσιμος, τρόπος ορισμού της νόρμας του T δίνεται από την ακόλουθη πρόταση:

Πρόταση 3.1.2. *Έστω $T : X \to Y$ φραγμένος τελεστής. Τότε,*

$$\|T\| = \sup_{x\neq 0} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} = \sup_{x\in B_X} \|Tx\| = \sup_{\|x\|=1} \|Tx\|. \tag{3.5}$$

Απόδειξη. Αν $x \neq 0$, τότε το $y = x/\|x\|$ έχει νόρμα $\|y\| = 1$. Άρα,

$$\frac{\|Tx\|}{\|x\|} = \left\|T\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\right\| = \|Ty\| \leq \sup_{\|x\|=1} \|Tx\|.$$

Αφού το $x \neq 0$ ήταν τυχόν, και αφού $\{x : \|x\| = 1\} \subseteq B_X$,

$$\sup_{x\neq 0} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} \leq \sup_{\|x\|=1} \|Tx\| \leq \sup_{x\in B_X} \|Tx\|. \tag{1}$$

Από την άλλη πλευρά, αν $x \in B_X \setminus \{0\}$, τότε

$$\|Tx\| \leq \frac{\|Tx\|}{\|x\|} \leq \sup_{x\neq 0} \frac{\|Tx\|}{\|x\|},$$

άρα

$$\sup_{x\in B_X} \|Tx\| \leq \sup_{x\neq 0} \frac{\|Tx\|}{\|x\|}. \tag{2}$$

Από τις (1) και (2) έπεται ότι τα τρία sup της Πρότασης είναι ίσα.

Από τον ορισμό της νόρμας έχουμε $\|Tx\| \leq \|T\| \, \|x\| \leq \|T\|$ για κάθε $x \in B_X$, επομένως

$$\sup_{x\in B_X} \|Tx\| \leq \|T\|. \tag{3}$$

Τέλος, αφού η $\|T\|$ είναι η μικρότερη σταθερά για την οποία $\|Tx\| \leq c\|x\|$ για κάθε $x \in X$, και αφού

$$\|Tw\| \leq \left(\sup_{x\neq 0} \frac{\|Tx\|}{\|x\|}\right) \|w\|$$

για κάθε $w \in X$, έχουμε

$$\|T\| \leq \sup_{x\neq 0} \frac{\|Tx\|}{\|x\|}. \tag{4}$$

Η πρώτη ισότητα της Πρότασης έπεται τώρα από τις (3) και (4). □

Η επόμενη Πρόταση δικαιολογεί τον όρο «νόρμα τελεστή»:

Πρόταση 3.1.3. *Έστω $\mathcal{B}(X,Y)$ το σύνολο των φραγμένων τελεστών $T : X \to Y$. Το $\mathcal{B}(X,Y)$ είναι γραμμικός χώρος, και η $\|\cdot\| : \mathcal{B}(X,Y) \to \mathbb{R}$ με $T \to \|T\|$ είναι νόρμα.*

Απόδειξη. Αν $T, S : X \to Y$ φραγμένοι τελεστές και $\lambda \in \mathbb{R}$, τότε
(α) $\|(\lambda T)x\| = \|\lambda Tx\| = |\lambda|\,\|Tx\| \leq |\lambda|\,\|T\|\,\|x\|$, δηλαδή ο λT είναι φραγμένος και $\|\lambda T\| \leq |\lambda|\,\|T\|$. Επιπλέον,

$$\|\lambda T\| = \sup_{\|x\|=1} \|\lambda Tx\| = \sup_{\|x\|=1} |\lambda|\,\|Tx\| = |\lambda| \sup_{\|x\|=1} \|Tx\| = |\lambda|\,\|T\|.$$

Άρα, ικανοποιείται το (N3).
(β) $\|(T+S)x\| = \|Tx+Sx\| \leq \|Tx\|+\|Sx\| \leq \|T\|\,\|x\|+\|S\|\,\|x\| = (\|T\| + \|S\|)\,\|x\|$, δηλαδή ο $T + S$ είναι φραγμένος, και

$$\|T + S\| \leq \|T\| + \|S\|.$$

Έπεται το (N4), και το ότι ο $B(X,Y)$ είναι γραμμικός χώρος (σε συνδυασμό με το προηγούμενο).
Τέλος $\|T\| \geq 0$ (προφανές), και αν $\|T\| = 0$, τότε $0 \leq \|Tx\| \leq \|T\|\,\|x\| = 0$ για κάθε $x \in X$, δηλαδή $\|Tx\| = 0 \Longrightarrow Tx = 0$ για κάθε $x \in X$. Άρα, $\|T\| = 0 \Longrightarrow T \equiv 0$. □

Παραδείγματα 3.1.4. (α) Η *ταυτοτική απεικόνιση* $I : X \to X$ είναι φραγμένος τελεστής, και

$$\|I\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ix\| = \sup_{\|x\|=1} \|x\| = 1.$$

(β) Θεωρούμε το γραμμικό χώρο $P[0,1]$ των πολυωνύμων $p : [0,1] \to \mathbb{R}$, και ορίζουμε $T : P[0,1] \to P[0,1]$ με $Tp = p'$ (η παράγωγος πολυωνύμου είναι πολυώνυμο, άρα ο T ορίζεται καλά.)

Εύκολα ελέγχουμε ότι ο T είναι γραμμικός τελεστής:

$$T(\lambda p + \mu q) = (\lambda p + \mu q)' = \lambda p' + \mu q' = \lambda Tp + \mu Tq.$$

Όμως ο T δεν είναι φραγμένος: έστω $p_n(t) = t^n$. Στον $P[0,1]$ θεωρούμε ως συνήθως την $\|p\| = \max_{t\in[0,1]} |p(t)|$, άρα $\|p_n\| = 1$, $n \in \mathbb{N}$. Αλλά $p_n'(t) = nt^{n-1}$, άρα $\|p_n'\| = n$. Έπεται ότι

$$\sup_{\|p\|=1} \|Tp\| \geq \|Tp_n\| = \|p_n'\| = n$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$, άρα ο T δεν είναι φραγμένος (γιατί;).

(γ) *Ολοκληρωτικοί τελεστές.* Θεωρούμε τον $\mathcal{C}[0,1]$ με νόρμα την

$$\|f\| = \max_{t\in[0,1]} |f(t)|,$$

και μια συνεχή συνάρτηση

$$K : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}.$$

Ορίζουμε $T : \mathcal{C}[0,1] \to \mathcal{C}[0,1]$ με

$$(Tf)(t) = \int_0^1 K(t,s)f(s)ds. \tag{3.6}$$

Η K λέγεται *πυρήνας* του T. Πρέπει να δείξουμε ότι ο T είναι καλά ορισμένος, δηλαδή ότι η Tf είναι συνεχής: έχουμε

$$\begin{aligned} |(Tf)(t)-(Tf)(t')| &= \left|\int_0^1 \{K(t,s)-K(t',s)\}f(s)ds\right| \\ &\leq \int_0^1 |K(t,s)-K(t',s)|\,|f(s)|ds \\ &\leq \|f\|\int_0^1 |K(t,s)-K(t',s)|ds. \end{aligned}$$

Όμως, η K είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[0,1]\times[0,1]$, άρα αν μάς δώσουν $\varepsilon>0$ υπάρχει $\delta>0$ τέτοιος ώστε

$$|t-t'|<\delta \Longrightarrow \forall s,\ |K(t,s)-K(t',s)|<\varepsilon.$$

Άρα,

$$|t-t'|<\delta \Longrightarrow |(Tf)(t)-(Tf)(t')|\leq \|f\|\varepsilon,$$

κι αυτό αποδεικνύει τη συνέχεια της Tf. Η γραμμικότητα του T ελέγχεται εύκολα. Για να δείξουμε ότι ο T είναι φραγμένος, παρατηρούμε ότι λόγω συνέχειας του πυρήνα K υπάρχει $M>0$ με την ιδιότητα $|K(t,s)|\leq M$ για κάθε $(t,s)\in[0,1]\times[0,1]$, οπότε

$$\begin{aligned} |(Tf)(t)| &= \left|\int_0^1 K(t,s)f(s)ds\right| \leq \int_0^1 |K(t,s)||f(s)|ds \\ &\leq M\|f\|\int_0^1 ds = M\|f\| \end{aligned}$$

για κάθε $t\in[0,1]$, άρα $\|Tf\|\leq M\|f\|$.

Η Πρόταση που ακολουθεί περιγράφει τους φραγμένους γραμμικούς τελεστές που ορίζονται σε χώρους πεπερασμένης διάστασης:

Θεώρημα 3.1.5. *Έστω X,Y χώροι με νόρμα, $\dim X=n<\infty$, και $T:X\to Y$ γραμμικός τελεστής. Τότε, ο T είναι φραγμένος.*

Απόδειξη. Έστω $\{e_1,\ldots,e_n\}$ μια βάση του X. Από το βασικό Λήμμα του Κεφαλαίου 2, αν $x=a_1e_1+\cdots+a_ne_n\in X$, τότε

$$c\sum_{i=1}^n |a_i| \leq \|a_1e_1+\cdots+a_ne_n\| = \|x\|,$$

όπου $c>0$ σταθερά που εξαρτάται μόνο από τη νόρμα και τη βάση του X. Έπεται ότι

$$\begin{aligned} \|Tx\| &= \Big\|T(\sum_{i=1}^n a_ie_i)\Big\| = \Big\|\sum_{i=1}^n a_iTe_i\Big\| \\ &\leq \sum_{i=1}^n |a_i|\,\|Te_i\| \leq \left(\max_{1\leq i\leq n}\|Te_i\|\right)\sum_{i=1}^n |a_i| \\ &\leq \frac{\max\|Te_i\|}{c}\|x\|. \end{aligned}$$

Άρα ο T είναι φραγμένος, με $\|T\|\leq(\max_i\|Te_i\|)/c$. □

Φυσιολογικά, ένας γραμμικός τελεστής $T : X \to Y$ θα λέγεται *συνεχής* αν για κάθε $x_0 \in X$ και $\varepsilon > 0$, υπάρχει $\delta = \delta(\varepsilon, x_0) > 0$ τέτοιος ώστε

$$\|x - x_0\| < \delta \Longrightarrow \|Tx - Tx_0\| < \varepsilon.$$

Ισοδύναμα, αν: $x_n \to x$ στον $X \Longrightarrow Tx_n \to Tx$ στον Y. Θα δείξουμε ότι ένας γραμμικός τελεστής $T : X \to Y$ είναι συνεχής αν και μόνο αν είναι φραγμένος.

Θεώρημα 3.1.6. *Έστω X, Y χώροι με νόρμα, και $T : X \to Y$ γραμμικός τελεστής.*

(i) Ο T είναι συνεχής αν και μόνο αν είναι φραγμένος.

(ii) Αν ο T είναι συνεχής σε ένα σημείο x_0, τότε είναι παντού συνεχής.

Απόδειξη. (i) Έστω ότι ο T είναι συνεχής. Τότε, είναι συνεχής στο 0. Παίρνοντας $\varepsilon = 1 > 0$, βρίσκουμε $\delta > 0$ τέτοιο ώστε

$$\|x\| < \delta \Longrightarrow \|Tx\| < 1.$$

Όμως τότε, για κάθε $y \neq 0$ θεωρούμε το $\delta y / 2\|y\|$ (που έχει νόρμα μικρότερη από δ), και γράφουμε

$$\left\| T\left(\frac{\delta y}{2\|y\|}\right) \right\| < 1 \Longrightarrow \|Ty\| < \frac{2}{\delta}\|y\|.$$

Έπεται ότι ο T είναι φραγμένος, και $\|T\| \leq \frac{2}{\delta}$.

Αντίστροφα: υποθέτουμε ότι ο T είναι φραγμένος, και θεωρούμε τυχόν $x_0 \in X$. Αν $x_n \to x_0$, τότε

$$\|Tx_n - Tx_0\| = \|T(x_n - x_0)\| \leq \|T\| \, \|x_n - x_0\| \to 0,$$

άρα $Tx_n \to Tx_0$. Δηλαδή, ο T είναι συνεχής.

(ii) Υποθέτουμε ότι ο T είναι συνεχής στο x_0. Έστω $y_0 \in X$ και $y_n \to y_0$. Θέλουμε να δείξουμε ότι $Ty_n \to Ty_0$. Όμως, $y_n - y_0 + x_0 \to x_0$ (γιατί;), άρα

$$T(y_n - y_0 + x_0) = Ty_n - Ty_0 + Tx_0 \to Tx_0,$$

απ' όπου έπεται η $Ty_n \to Ty_0$.

□

Κλείνουμε αυτή την παράγραφο με μερικές απλές παρατηρήσεις πάνω στους φραγμένους τελεστές:

1. Αν ο $T : X \to Y$ είναι φραγμένος, τότε ο $\mathrm{Ker}T$ είναι *κλειστός* υπόχωρος του X.
2. Αν ο $T : X \to Y$ είναι φραγμένος, και X' είναι ένας υπόχωρος του X, τότε ο περιορισμός του T στον X' είναι φραγμένος τελεστής.
3. Έστω Y χώρος Banach, και $T_0 : X_0 \to Y$ φραγμένος τελεστής που ορίζεται σ' έναν πυκνό υπόχωρο X_0 του X. Τότε, ο T_0 επεκτείνεται κατά μοναδικό τρόπο σε φραγμένο τελεστή $T : X \to Y$ με $\|T\| = \|T_0\|$.

Η απόδειξη αυτών των ισχυρισμών αφήνεται σαν άσκηση στον αναγνώστη.

3.2 Γραμμικά συναρτησοειδή

Έστω X γραμμικός χώρος. *Συναρτησοειδές* είναι ένας γραμμικός τελεστής $F : X \to \mathbb{R}$. Αν ο X είναι χώρος με νόρμα, τότε το συναρτησοειδές F λέγεται *φραγμένο* αν είναι φραγμένος τελεστής από τον $(X, \|\cdot\|)$ στον $(\mathbb{R}, |\cdot|)$. Επομένως, ό,τι αποδείξαμε στην προηγούμενη παράγραφο μεταφέρεται αυτούσιο εδώ:

Θεώρημα 3.2.1. *Έστω X χώρος με νόρμα, και $F : X \to \mathbb{R}$ γραμμικό συναρτησοειδές. Το F είναι φραγμένο αν υπάρχει $c > 0$ τέτοιος ώστε, για κάθε $x \in X$,*

$$|F(x)| \leq c\|x\|.$$

Η νόρμα του F είναι η μικρότερη τέτοια σταθερά, και ισούται με

$$\|F\| = \sup_{\|x\|=1} |F(x)|. \quad \square$$

Παραδείγματα 3.2.2. (α) Η νόρμα του χώρου $X \neq \{0\}$, $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ *δεν* είναι γραμμικό συναρτησοειδές. Αν ήταν, θα είχαμε $\|x\| + \|-x\| = \|x + (-x)\|$, δηλαδή $2\|x\| = 0$ για κάθε $x \in X$.

(β) Θεωρούμε τον $X = \mathbb{R}^n$, και σταθεροποιούμε $a = (a_1, \ldots, a_n) \in X\setminus\{0\}$. Ορίζουμε $F : X \to \mathbb{R}$, με

$$F(x) = F(\xi_1, \ldots, \xi_n) = a_1\xi_1 + \cdots + a_n\xi_n. \tag{3.7}$$

Η F είναι γραμμικό συναρτησοειδές (το «εσωτερικό γινόμενο» με το a). Αν στον $\mathbb{R}^n$ θεωρήσουμε την Ευκλείδεια νόρμα $\|\cdot\|$, τότε από την ανισότητα Cauchy-Schwarz παίρνουμε

$$\begin{aligned} |F(x)| &= |a_1\xi_1 + \cdots + a_n\xi_n| \\ &\leq \left(\sum_{i=1}^n |a_i|^2\right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^n |\xi_i|^2\right)^{1/2} \\ &= \|a\|\,\|x\|. \end{aligned}$$

Δηλαδή, το F είναι φραγμένο συναρτησοειδές, και $\|F\| \leq \|a\|$. Επιπλέον,

$$|F(a)| = a_1^2 + \cdots + a_n^2 = \|a\|^2,$$

άρα

$$\|F\| = \sup_{x\neq 0} \frac{|F(x)|}{\|x\|} \geq \frac{|F(a)|}{\|a\|} = \|a\|.$$

Δηλαδή, $\|F\| = \|a\|$.

(γ) Ορίζουμε $F : \mathcal{C}[a,b] \to \mathbb{R}$ με $F(g) = \int_a^b g(t)dt$. Το F είναι γραμμικό συναρτησοειδές στον $\mathcal{C}[a,b]$, και

$$|F(g)| \leq \int_a^b |g(t)|dt \leq \left(\max_{t\in[a,b]} |g(t)|\right)(b-a) = (b-a)\|g\|.$$

Άρα, το F είναι φραγμένο και $\|F\| \leq b-a$. Αν πάρουμε σαν g_0 τη σταθερή συνάρτηση $g_0(t)=1$, τότε $\|g_0\|=1$ και

$$\|F\| = \sup_{\|g\|=1} |F(g)| \geq |F(g_0)| = b-a.$$

Άρα, $\|F\| = b-a$.

(δ) Θεωρούμε πάλι τον $X = \mathcal{C}[a,b]$ με νόρμα την $\|g\| = \max_{t\in[a,b]} |g(t)|$, σταθεροποιούμε κάποιο $t_0 \in [a,b]$, και ορίζουμε $F : \mathcal{C}[a,b] \to \mathbb{R}$ με $F(g) = g(t_0)$.

Η F είναι γραμμικό συναρτησοειδές, και $|F(g)| = |g(t_0)| \leq \|g\|$. Άρα, $\|F\| \leq 1$. Παίρνοντας $g_0 \equiv 1$, ελέγχουμε ότι $\|F\| = 1$.

Ορισμός 3.2.3. Έστω X χώρος με νόρμα. Ο *δυϊκός χώρος* του X είναι ο γραμμικός χώρος X^* των φραγμένων γραμμικών συναρτησοειδών $F : X \to \mathbb{R}$. Δηλαδή,

$$X^* = \mathcal{B}(X, \mathbb{R}). \tag{3.8}$$

Ο X^* είναι μη κενός: η $F : X \to \mathbb{R}$ με $F(x) = 0$ για κάθε $x \in X$, είναι φραγμένο γραμμικό συναρτησοειδές. Τα παραδείγματα που προηγήθηκαν δείχνουν ότι αν π.χ. $X = \mathbb{R}^n$ ή $\mathcal{C}[a,b]$, τότε ο X^* είναι πολύ «πλουσιότερος» από το $\{0\}$. Στην πραγματικότητα, για κάθε χώρο X με νόρμα, ο X^* περιέχει πολλά μη τετριμμένα φραγμένα συναρτησοειδή. Αυτό όμως απαιτεί αρκετή δουλειά (Θεώρημα Hahn-Banach).

Ορισμός 3.2.4. Έστω X γραμμικός χώρος, και W γραμμικός υπόχωρος του X. Ορίζουμε το *χώρο πηλίκο* X/W σα γραμμικό χώρο ως εξής: ορίζουμε πρώτα μια σχέση ισοδυναμίας $\sim$ στον X, θέτοντας

$$x \sim y \iff x - y \in W. \tag{3.9}$$

Τότε, ο X/W είναι ο χώρος των κλάσεων ισοδυναμίας $[x] = x + W$ με πράξεις τις $\lambda[x] = [\lambda x]$ και $[x]+[y] = [x+y]$. Παρατηρήστε ότι $[x] = 0$ αν και μόνο αν $x \in W$.

Λέμε ότι ο W έχει *συνδιάσταση* 1 στον X αν για το χώρο πηλίκο X/W έχουμε $\dim(X/W) = 1$. Αν ο W έχει συνδιάσταση 1 και $x_0 \in X$, τότε το $x_0 + W$ λέγεται *υπερεπίπεδο*.

Η Πρόταση που ακολουθεί, δίνει τη σχέση ανάμεσα σε υποχώρους συνδιάστασης 1 και γραμμικά συναρτησοειδή:

Πρόταση 3.2.5. *Έστω X γραμμικός χώρος, και W γραμμικός υπόχωρος του X. Ο W έχει συνδιάσταση 1 αν και μόνο αν υπάρχει μη μηδενικό γραμμικό συναρτησοειδές $f : X \to \mathbb{R}$ με $\mathrm{Ker} f = W$. Δύο γραμμικά συναρτησοειδή f, g έχουν τον ίδιο πυρήνα αν και μόνο αν υπάρχει $\beta \neq 0$ τέτοιο ώστε $g = \beta f$.*

Απόδειξη. Έστω $f : X \to \mathbb{R}$, $f \neq 0$ γραμμικό συναρτησοειδές. Ο πυρήνας $W = \mathrm{Ker} f$ του f είναι γραμμικός υπόχωρος του X, και η $\tilde{f} : X/W \to \mathbb{R}$ με $\tilde{f}(x+W) = f(x)$ είναι ισομορφισμός γραμμικών χώρων (γιατί;). Άρα, $\dim(X/W) = 1$.

Αντίστροφα, αν ο W έχει συνδιάσταση 1 στον X, τότε υπάρχει ισομορφισμός $T : X/W \to \mathbb{R}$. Ορίζουμε $f : X \to \mathbb{R}$ με $f(x) = T(x+W)$. Το f είναι γραμμικό συναρτησοειδές, $f \neq 0$, και $\mathrm{Ker} f = W$.

Για το δεύτερο ισχυρισμό, αν $g = \beta f$, $\beta \neq 0$, τότε προφανώς $\mathrm{Ker} f = \mathrm{Ker} g$. Αντίστροφα, έστω $f, g : X \to \mathbb{R}$ γραμμικά συναρτησοειδή με $\mathrm{Ker} f = \mathrm{Ker} g$. Αν

$f \equiv 0$, δεν έχουμε τίποτα να αποδείξουμε. Έστω λοιπόν $x_0 \in X$ με $f(x_0) = 1$ (υπάρχει, γιατί;). Έπεται ότι $g(x_0) \neq 0$. Τότε, για κάθε $x \in X$ έχουμε

$$x - f(x)x_0 \in \mathrm{Ker}f \Longrightarrow g(x - f(x)x_0) = 0 \Longrightarrow g(x) = g(x_0)f(x).$$

Δηλαδή, $g = \beta f$, με $\beta = g(x_0)$. □

Ας υποθέσουμε τώρα ότι έχουμε και μια νόρμα $\|\cdot\|$ στον X.

Πρόταση 3.2.6. *Έστω X χώρος με νόρμα, και έστω W υπόχωρος του X συνδιάστασης 1. Τότε, ένα από τα δύο συμβαίνει: Είτε ο W είναι κλειστός στον X ή ο W είναι πυκνός στον X.*

Απόδειξη. Ο $\overline{W}$ είναι κι αυτός γραμμικός υπόχωρος του X. Αν ο W δεν είναι κλειστός, τότε υπάρχει $x \in \overline{W} \setminus W$, και αφού ο W έχει συνδιάσταση 1 έχουμε $[z] \in \mathrm{span}([x])$ (δηλαδή $z = \lambda x + w$ για κάποια $\lambda \in \mathbb{R}$ και $w \in W$) για κάθε $z \in X$ (γιατί;), άρα $\overline{W} = X$. □

Παρατήρηση: Οι κλειστοί γραμμικοί υπόχωροι συνδιάστασης 1 είναι ακριβώς οι πυρήνες των φραγμένων γραμμικών συναρτησοειδών: αν $f : X \to \mathbb{R}$ είναι φραγμένο γραμμικό συναρτησοειδές, τότε από τη συνέχεια του f είναι φανερό ότι ο $W = \mathrm{Ker}f = f^{-1}\{0\}$ είναι κλειστός γραμμικός υπόχωρος του X, και από την Πρόταση 3.2.5 ο W έχει συνδιάσταση 1. Θα αποδείξουμε τον αντίστροφο ισχυρισμό σαν συνέπεια του Θεωρήματος Hahn-Banach.

3.3 Χώροι τελεστών - δυϊκοί χώροι

Έστω X, Y δύο χώροι με νόρμα. Στην Παράγραφο 3.1 είδαμε ότι ο χώρος $\mathcal{B}(X,Y)$ των φραγμένων γραμμικών τελεστών $T : X \to Y$ είναι γραμμικός χώρος με νόρμα, όπου

$$\|T\| = \sup_{\|x\|=1} \|Tx\|, \quad T \in \mathcal{B}(X,Y).$$

Το Θεώρημα που ακολουθεί απαντά στο ερώτημα: πότε ο $\mathcal{B}(X,Y)$ είναι πλήρης;

Θεώρημα 3.3.1. *Έστω X και Y χώροι με νόρμα. Αν ο Y είναι χώρος Banach, τότε ο $\mathcal{B}(X,Y)$ είναι χώρος Banach.*

Απόδειξη. Έστω (T_n) ακολουθία Cauchy στον $\mathcal{B}(X,Y)$, και έστω $\varepsilon > 0$. Υπάρχει $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε, αν $n, m \geq n_0$ τότε

$$(*) \qquad \|T_n - T_m\| < \varepsilon.$$

Σταθεροποιούμε $x \in X$. Αν $n, m \geq n_0$, τότε

$$\|T_n x - T_m x\| = \|(T_n - T_m)x\| \leq \|T_n - T_m\| \, \|x\| \leq \varepsilon \|x\|.$$

Αυτό σημαίνει ότι η $(T_n x)$ είναι ακολουθία Cauchy στον Y (γιατί;), και αφού ο Y είναι πλήρης, υπάρχει $y_x \in Y$ τέτοιο ώστε $T_m x \to y_x$ καθώς $m \to \infty$.
Ορίζουμε $T : X \to Y$ με

$$Tx = y_x = \lim_{m\to\infty} T_m x.$$

Ο T είναι γραμμικός τελεστής: αν $x_1, x_2 \in X$ και $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, τότε

$$\begin{aligned} T(\lambda x_1 + \mu x_2) &= \lim_{m\to\infty} T_m(\lambda x_1 + \mu x_2) \\ &= \lim_{m\to\infty} (\lambda T_m x_1 + \mu T_m x_2) \\ &= \lambda \lim_{m\to\infty} T_m x_1 + \mu \lim_{m\to\infty} T_m x_2 \\ &= \lambda T x_1 + \mu T x_2. \end{aligned}$$

Επιστρέφουμε στην $(*)$. Έστω $x \in X$ με $\|x\| = 1$. Αν $n, m \geq n_0$, τότε

$$\|T_n x - T_m x\| \leq \varepsilon \|x\| = \varepsilon,$$

και αφήνοντας το m να πάει στο άπειρο, παίρνουμε

$$\|T_n x - Tx\| \leq \varepsilon, \quad \|x\| = 1,$$

δηλαδή,

$$(**) \qquad \|T_n - T\| = \sup_{\|x\|=1} \|T_n x - Tx\| \leq \varepsilon.$$

Αυτό δείχνει δύο πράγματα: (α) για κάθε $n \geq n_0$, $T_n - T \in \mathcal{B}(X, Y)$, και αφού ο $\mathcal{B}(X, Y)$ είναι γραμμικός χώρος και $T_n \in \mathcal{B}(X, Y)$,

$$T = T_n - (T_n - T) \in B(X, Y).$$

(β) Από την $(**)$, για κάθε $n \geq n_0(\varepsilon)$ έχουμε $\|T_n - T\| \leq \varepsilon$. Άρα, $T_n \to T$ στον $\mathcal{B}(X, Y)$. □

Πόρισμα 3.3.2. *Αν ο X είναι χώρος με νόρμα, τότε ο X^* με νόρμα την $\|F\| = \sup_{\|x\|=1} |F(x)|$ είναι χώρος Banach.*

Απόδειξη. Ο X^* είναι ο $B(X, \mathbb{R})$. Ο $\mathbb{R}$ είναι πλήρης ως προς την $|\cdot|$, οπότε το ζητούμενο προκύπτει αμέσως από το Θεώρημα 3.3.1. □

Ορισμός 3.3.3. (i) Ο $T : X \to Y$ λέγεται *ισομορφισμός* αν είναι γραμμικός, ένα προς ένα και επί τελεστής, και οι $T : X \to Y$, $T^{-1} : Y \to X$ είναι φραγμένοι τελεστές.
(ii) Ο $T : X \to Y$ λέγεται *ισομετρικός ισομορφισμός* αν είναι ισομορφισμός και, επιπλέον, για κάθε $x \in X$ ισχύει $\|Tx\| = \|x\|$.

Παρατηρήσεις. (α) Ο T είναι ένα προς ένα αν και μόνο αν $\mathrm{Ker}T = \{0\}$.
(β) Αν ο $T : X \to Y$ είναι γραμμικός, ένα προς ένα και επί, και $\|Tx\| = \|x\|$, $x \in X$, τότε ο T είναι ισομετρικός ισομορφισμός.

Δύο χώροι X και Y με νόρμα λέγονται *ισομετρικά ισομορφικοί* αν υπάρχει ισομετρικός ισομορφισμός $T : X \to Y$. Από τη σκοπιά της Συναρτησιακής Ανάλυσης, δύο τέτοιοι χώροι *ταυτίζονται*: έχουν την ίδια γραμμική και τοπολογική δομή, αφού τα σημεία τους βρίσκονται σε ένα προς ένα αντιστοιχία που διατηρεί τις αποστάσεις και τη γραμμική δομή του χώρου. Για δύο τέτοιους χώρους θα γράφουμε $X \simeq Y$.

Με τη βοήθεια της έννοιας του ισομετρικού ισομορφισμού μπορούμε να δώσουμε πολύ συγκεκριμένη περιγραφή του δυϊκού χώρου για αρκετά κλασικά παραδείγματα χώρων Banach:

Θεώρημα 3.3.4. *Θεωρούμε τον $\mathbb{R}^n$ με την Ευκλείδεια νόρμα. Ο δυϊκός του χώρος είναι ισομετρικά ισομορφικός με τον $\mathbb{R}^n$. Γράφουμε $(\mathbb{R}^n)^* \simeq \mathbb{R}^n$.*

Απόδειξη. Ορίζουμε $T : (\mathbb{R}^n)^* \to \mathbb{R}^n$ ως εξής: απεικονίζουμε το $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ στην n-άδα $(f(e_1), \ldots, f(e_n)) \in \mathbb{R}^n$, όπου $\{e_1, \ldots, e_n\}$ η συνήθης ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^n$.

Παρατηρήστε ότι το f προσδιορίζεται πλήρως από το διάνυσμα $Tf = (f(e_i))_{i \leq n}$: αν $x = (\xi_i) \in \mathbb{R}^n$, τότε $x = \sum_{i=1}^n \xi_i e_i \Longrightarrow f(x) = \sum_{i=1}^n \xi_i f(e_i)$, δηλαδή ξέρουμε το $f(x)$ αν μάς δώσουν τις συντεταγμένες του x.

Δείχνουμε πρώτα ότι ο T είναι γραμμικός, ένα προς ένα και επί:
(α) Για τη γραμμικότητα,

$$\begin{aligned} T(\lambda f + \mu g) &= ((\lambda f + \mu g)(e_1), \ldots, (\lambda f + \mu g)(e_n)) \\ &= (\lambda f(e_1) + \mu g(e_1), \ldots, \lambda f(e_n) + \mu g(e_n)) \\ &= \lambda(f(e_1), \ldots, f(e_n)) + \mu(g(e_1), \ldots, g(e_n)) \\ &= \lambda Tf + \mu Tg. \end{aligned}$$

(β) Για το ένα προς ένα,

$$\begin{aligned} Tf = \vec{0} &\Longrightarrow \forall\, i = 1, \ldots, n, \quad f(e_i) = 0 \\ &\Longrightarrow \forall\, x \in \mathbb{R}^n, \quad f(x) = \sum_{i=1}^n \xi_i f(e_i) = 0 \\ &\Longrightarrow f \equiv 0. \end{aligned}$$

(γ) Αν $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$, ορίζουμε $f(x) = \sum_{i=1}^n \xi_i a_i$. Τότε, $f \in (\mathbb{R}^n)^*$ και $f(e_i) = a_i$, $i = 1, \ldots, n$. Άρα, $Tf = a$. Αυτό δείχνει ότι ο T είναι επί.

Μένει να δείξουμε ότι ο T είναι ισομετρικός ισομορφισμός. Έστω $f \in (\mathbb{R}^n)^*$. Τότε, $f(x) = \sum_{i=1}^n \xi_i f(e_i)$, και έχουμε δεί (Παράδειγμα 3.2.2(β» ότι ένα συναρτησοειδές αυτής της μορφής έχει νόρμα

$$\|f\| = \|(f(e_1), \ldots, f(e_n))\| = \|Tf\|.$$

□

Θεώρημα 3.3.5. *Ο $(\ell_1)^*$ είναι ισομετρικά ισομορφικός με τον ℓ_∞.*

Απόδειξη. Ορίζουμε $T : \ell_1^* \to \ell_\infty$ ως εξής: Έστω $e_k = (\delta_{kn})$ και $f : \ell_1 \to \mathbb{R}$ φραγμένο γραμμικό συναρτησοειδές. Ελέγξτε τους παρακάτω ισχυρισμούς:

(i) Η (e_k) είναι βάση Schauder του ℓ_1, δηλαδή, κάθε $x = (\xi_k) \in \ell_1$ γράφεται (μονοσήμαντα) στη μορφή $x = \sum_{k=1}^\infty \xi_k e_k$.

(ii) Το f είναι συνεχές, άρα $f(x) = \sum_{k=1}^\infty \xi_k f(e_k)$, $x \in X$.

Ορίζουμε $T(f) = (f(e_1), \ldots, f(e_k), \ldots)$. Θα δείξουμε ότι ο T είναι ισομετρικός ισομορφισμός.

(α) *Ο T είναι καλά ορισμένος.* Για κάθε $k \in \mathbb{N}$ έχουμε $|f(e_k)| \leq \|f\|\,\|e_k\| = \|f\|$ (γιατί $\|e_k\| = 1$.) Άρα,

$$(*) \qquad \|Tf\|_\infty \leq \|f\|.$$

Ειδικότερα, $Tf \in \ell_\infty$.

(β) Αν $\|x\|_1 = \sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k| = 1$, τότε

$$\begin{aligned} |f(x)| &= \left|\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k f(e_k)\right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|\,|f(e_k)| \\ &\leq \left(\sup_k |f(e_k)|\right) \sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k| = \|Tf\|_\infty. \end{aligned}$$

Άρα,

$$(**) \qquad \|f\| = \sup_{\|x\|_1=1} |f(x)| \leq \|Tf\|_\infty.$$

Από τις $(*)$ και $(**)$, για κάθε $f \in \ell_1^*$ ισχύει $\|Tf\|_\infty = \|f\|$ (δηλαδή, ο T είναι ισομετρία.)

(γ) Η γραμμικότητα του T ελέγχεται εύκολα.

(δ) Αν $Tf = 0$, τότε για κάθε $k \in \mathbb{N}$ έχουμε $f(e_k) = 0$. Άρα, για κάθε $x \in \ell_1$,

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k f(e_k) = 0 \Longrightarrow f \equiv 0.$$

Αφού $\mathrm{Ker}T = \{0\}$, ο T είναι ένα προς ένα.

(ε) Έστω $a = (a_1, \ldots, a_k, \ldots) \in \ell_\infty$ (υπάρχει λοιπόν $M > 0$ τέτοιος ώστε $|a_k| \leq M$, $k \in \mathbb{N}$.) Ορίζουμε $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k a_k$. Τότε,

$$|f(x)| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|\,|a_k| \leq (\sup_k |a_k|) \sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k| \leq M\|x\|_1.$$

Άρα, $f \in \ell_1^*$, και αφού $f(e_k) = a_k$, $Tf = a$. Δηλαδή ο T είναι επί. □

Θεώρημα 3.3.6. *Αν $1 < p < +\infty$, τότε ο ℓ_p^* είναι ισομετρικά ισομορφικός με τον ℓ_q, όπου q ο συζυγής εκθέτης του p.*

Απόδειξη. Η (e_k) είναι βάση Schauder του ℓ_p (ελέγξτε το). Κάθε $x = (\xi_k) \in \ell_p$ γράφεται μονοσήμαντα στη μορφή $x = \sum_k \xi_k e_k$, και αν $f : \ell_p \to \mathbb{R}$ είναι φραγμένο γραμμικό συναρτησοειδές, τότε $f(x) = \sum_k \xi_k f(e_k)$.

Ορίζουμε $T : \ell_p^* \to \ell_q$ με $Tf = (f(e_1), \ldots, f(e_k), \ldots)$.

(α) *Ο T είναι καλά ορισμένος:* Πρέπει να δείξουμε ότι, για κάθε $f \in \ell_p^*$ ισχύει $\sum_k |f(e_k)|^q < +\infty$. Έστω $N \in \mathbb{N}$. Ορίζουμε $\gamma_k = |f(e_k)|^q / f(e_k)$ αν $f(e_k) \neq 0$, και $\gamma_k = 0$ αλλιώς. Τότε,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{N} |f(e_k)|^q &= \sum_{k=1}^{N} \gamma_k f(e_k) = f\left(\sum_{k=1}^{N} \gamma_k e_k\right) \\ &\leq \|f\| \left(\sum_{k=1}^{N} |\gamma_k|^p\right)^{1/p} \\ &= \|f\| \left(\sum_{k=1}^{N} |f(e_k)|^{(q-1)p}\right)^{1/p} \\ &= \|f\| \left(\sum_{k=1}^{N} |f(e_k)|^q\right)^{1/p}. \end{aligned}$$

Έπεται ότι

$$\left(\sum_{k=1}^{N}|f(e_k)|^q\right)^{1-\frac{1}{p}} \leq \|f\| \Longrightarrow \left(\sum_{k=1}^{N}|f(e_k)|^q\right)^{1/q} \leq \|f\|,$$

και αφήνοντας το $N\to\infty$, παίρνουμε

$$(*) \qquad \|Tf\|_q = \left(\sum_{k=1}^{\infty}|f(e_k)|^q\right)^{1/q} \leq \|f\|,$$

το οποίο βέβαια δείχνει και ότι $Tf \in \ell_q$.

(β) Αν $f \in \ell_p^*$, χρησιμοποιώντας την ανισότητα του Hölder βλέπουμε ότι

$$\begin{aligned} |f(x)| &= \Big|\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k f(e_k)\Big| \leq \sum_{k=1}^{\infty}|\xi_k|\,|f(e_k)| \\ &\leq \left(\sum_{k=1}^{\infty}|\xi_k|^p\right)^{1/p}\left(\sum_{k=1}^{\infty}|f(e_k)|^q\right)^{1/q} \\ &= \|x\|_p\,\|Tf\|_q. \end{aligned}$$

Άρα,

$$(**) \qquad \|f\| = \sup_{\|x\|_p=1}|f(x)| \leq \|Tf\|_q.$$

Από τις $(*)$ και $(**)$ βλέπουμε ότι ο T είναι ισομετρία: για κάθε $f\in\ell_p^*$, $\|Tf\| = \|f\|$.

(γ) Εύκολα ελέγχουμε ότι ο T είναι γραμμικός και ένα προς ένα τελεστής.

(δ) Έστω $a = (a_1,\ldots,a_k,\ldots)\in\ell_q$. Δηλαδή, $\sum_k |a_k|^q < +\infty$. Ορίζουμε $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty}\xi_k a_k$. Τότε,

$$\begin{aligned} |f(x)| &\leq \sum_{k=1}^{\infty}|\xi_k|\,|a_k| \\ &\leq \left(\sum_{k}|a_k|^q\right)^{1/q}\left(\sum_{k=1}^{\infty}|\xi_k|^p\right)^{1/p} \\ &= \|a\|_q\,\|x\|_p. \end{aligned}$$

Άρα, $f\in\ell_p^*$, και αφού $f(e_k) = a_k$, $Tf = a$. Δηλαδή ο T είναι επί. □

Θεώρημα 3.3.7. *Θεωρούμε τον c_0 με τη supremum νόρμα $\|\cdot\|_\infty$. Ο δυϊκός του χώρος $(c_0)^*$ είναι ισομετρικά ισόμορφος με τον ℓ_1.*

Απόδειξη. Η απόδειξη είναι όμοια με αυτή των προηγούμενων θεωρημάτων και αφήνεται ως άσκηση. □

3.4 Ασκήσεις

Ομάδα Α′

1. Ορίζουμε $T : \ell_2 \to \ell_2$ τον τελεστή της δεξιάς μετατόπισης ως εξής: αν $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k, \ldots)$, θέτουμε $Tx = (\xi_2, \xi_3, \ldots)$.

(α) Δείξτε ότι ο T ορίζεται καλά, και είναι φραγμένος γραμμικός τελεστής.

(β) Ορίζουμε $T_n = T \circ T \circ \cdots \circ T$ (n φορές). Βρείτε την $\|T_n\|$, $n \in \mathbb{N}$, και το $\lim_n \|T_n\|$.

(γ) Αν $x \in \ell_2$, βρείτε το $\lim_n \|T_n x\|$.

2. Ορίζουμε $F : \ell_1 \to \mathbb{R}$ με $F(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k$. Δείξτε ότι το F είναι γραμμικό συναρτησοειδές. Είναι φραγμένο; Αν ναι, ποιά είναι η νόρμα του;

3. Έστω $T : \mathcal{C}[0,1] \to \mathcal{C}[0,1]$, με $(Tf)(t) = \int_0^t f(s)ds$, $t \in [0,1]$.

(α) Δείξτε ότι ο T είναι φραγμένος, γραμμικός και ένα προς ένα τελεστής.

(β) Βρείτε την εικόνα $\mathrm{im}(T)$ του T.

(γ) Είναι ο $T^{-1} : \mathrm{im}(T) \to \mathcal{C}[0,1]$ φραγμένος;

(δ) Βρείτε την $\|T\|$.

4. Στον $\mathcal{C}[-1,1]$ ορίζουμε $\|f\| = \max_{-1 \leq t \leq 1} |f(t)|$. Υπολογίστε τις νόρμες των παρακάτω συναρτησοειδών $F : \mathcal{C}[-1,1] \to \mathbb{R}$:

(α) $F(g) = \int_{-1}^{1} g(s)ds - g(0)$.

(β) $F(g) = \frac{g(1/2) + g(-1/2) - 2g(0)}{2}$.

5. Έστω X ο χώρος όλων των φραγμένων συναρτήσεων $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με νόρμα την $\|f\| = \sup_{t \in \mathbb{R}} |f(t)|$. Ορίζουμε $T : X \to X$, με $(Tf)(t) = f(t-a)$, όπου $a > 0$ δοσμένη σταθερά. Είναι ο T γραμμικός; Φραγμένος;

6. Έστω X, Y χώροι με νόρμα και $T : X \to Y$ ένας τελεστής που ικανοποιεί την ανισότητα $\|Tx\| \geq m\|x\|$ για κάθε $x \in X$, όπου $m > 0$ μια σταθερά. Να δείξετε ότι ορίζεται ο $T^{-1} : T(X) \to X$ και είναι φραγμένος. Τι μπορείτε να πείτε για τη νόρμα του;

7. Έστω X, Y χώροι με νόρμα, και $T : X \to Y$ ένα προς ένα, φραγμένος γραμμικός τελεστής. Δείξτε ότι ο T είναι ισομετρικός ισομορφισμός αν και μόνο αν $T(B_X) = B_Y$.

Ομάδα Β′

8. Ορίζουμε $T, S : \mathcal{C}[0,1] \to \mathcal{C}[0,1]$ με

$$(Tf)(t) = t \int_0^1 f(s)ds \quad , \quad (Sf)(t) = tf(t).$$

(α) Δείξτε ότι οι T, S είναι φραγμένοι γραμμικοί τελεστές.
(β) Βρείτε τους $T \circ S$ και $S \circ T$. Είναι σωστό ότι $T \circ S = S \circ T$;
(γ) Υπολογίστε τις $\|T\|$, $\|S\|$, $\|T \circ S\|$ και $\|S \circ T\|$.

9. Θεωρούμε το τρίγωνο $\Delta = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, a \leq y \leq x\}$, και μια συνεχή συνάρτηση $\phi : \Delta \to \mathbb{R}$. Ορίζουμε $T : \mathcal{C}[a,b] \to \mathcal{C}[a,b]$ με

$$(Tf)(x) = \int_a^x \phi(x,y)f(y)dy.$$

Δείξτε ότι ο T είναι φραγμένος γραμμικός τελεστής, και

$$\|T\| \leq (b-a)\max\{|\phi(x,y)| : (x,y) \in \Delta\}.$$

10. Θεωρούμε το χώρο $\mathcal{C}^1[0,1]$ των συνεχώς παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο $[0,1]$. Στον $C^1[0,1]$ θεωρούμε τις νόρμες

$$\|f\|_2 = \left(\int_0^1 |f|^2\right)^{1/2} \quad , \quad \|f\|_{1,2} = \left(\int_0^1 |f'|^2\right)^{1/2} + |f(0)|.$$

Δείξτε ότι ο ταυτοτικός τελεστής $I : (\mathcal{C}^1[0,1], \|\cdot\|_{1,2}) \to (\mathcal{C}^1[0,1], \|\cdot\|_2)$ είναι φραγμένος.
[*Υπόδειξη:* Περιοριστείτε πρώτα στον χώρο $\{f \in \mathcal{C}^1[0,1] : f(0) = 0\}$, και εφαρμόστε την ανισότητα Cauchy-Schwarz.]

11. Έστω X, Y χώροι με νόρμα, $T_n, T \in \mathcal{B}(X,Y)$ και $x_n, x \in X$. Δείξτε ότι, αν $T_n \to T$ και $x_n \to x$, τότε $T_n x_n \to Tx$.

12. Έστω $F : X \to \mathbb{R}$ μη μηδενικό γραμμικό συναρτησοειδές. Δείξτε ότι το F είναι φραγμένο αν και μόνο αν υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $F(B(0,\delta)) \neq \mathbb{R}$.

13. Έστω X χώρος με νόρμα, και $F \in X^*$, $F \neq 0$. Δείξτε ότι

$$\|F\| = \frac{1}{\inf\{\|x\| : F(x) = 1\}}.$$

14. Έστω $T : X \to Y$ γραμμικός τελεστής με την εξής ιδιότητα: αν $x_n \to 0$ στον X, τότε η $\{\|Tx_n\|\}$ είναι φραγμένη. Δείξτε ότι ο T είναι φραγμένος.

15. Έστω X χώρος με νόρμα και $\emptyset \neq M \subseteq X$. Ο *μηδενιστής* $\mathrm{Ann}(M)$ του M ορίζεται να είναι το σύνολο όλων των φραγμένων γραμμικών συναρτησοειδών του X που μηδενίζονται στο M. Έτσι ισχύει $\mathrm{Ann}(M) \subseteq X^*$. Αποδείξτε ότι ο $\mathrm{Ann}(M)$ είναι κλειστός διανυσματικός υπόχωρος του X^*. Ποιοί είναι οι $\mathrm{Ann}(0)$ και $\mathrm{Ann}(X)$;

16. Έστω X χώρος με νόρμα και $M^* \subseteq X^*$. Ορίζουμε

$$N(M^*) = \{x \in X : \forall F \in M^*, \ \ F(x) = 0\}.$$

Δείξτε ότι το $N(M^*)$ είναι κλειστός γραμμικός υπόχωρος του X.

Ομάδα Γ΄

17. Έστω X απειροδιάστατος χώρος με νόρμα. Δείξτε ότι υπάρχει γραμμικό συναρτησοειδές $F : X \to \mathbb{R}$ που δεν είναι φραγμένο.

18. Αποδείξτε ότι αν ο χώρος με νόρμα X έχει διάσταση n και M υπόχωρος διάστασης m του X, τότε ο μηδενιστής $\mathrm{Ann}(M)$ είναι διάστασης $n - m$.

19. Αποδείξτε το Θεώρημα 3.3.7.

20. Ορίστε μια νόρμα $\|\cdot\|$ στον c_{00} με την εξής ιδιότητα: η $\|\cdot\|$ δεν είναι ισοδύναμη με την $\|\cdot\|_\infty$ αλλά οι χώροι $(c_{00}, \|\cdot\|)$ και $(c_{00}, \|\cdot\|_\infty)$ είναι ισομετρικά ισόμορφοι. [*Υπόδειξη:* Αν $T : c_{00} \to c_{00}$ ένας γραμμικός ισομορφισμός, τότε η $\|x\| = \|Tx\|_\infty$ είναι νόρμα στον c_{00}.]

21. (Κριτήριο του Schur) Έστω $(a_{ij})_{i,j=1}^\infty$ ένας άπειρος πίνακας με $a_{ij} \geq 0$ για κάθε i, j. Υποθέτουμε ότι υπάρχουν $b, c > 0$ και $p_i > 0$ ώστε για κάθε i, j να ισχύουν οι

$$\sum_{i=1}^\infty a_{ij} p_i \leq b p_j \quad \text{και} \quad \sum_{j=1}^\infty a_{ij} p_j \leq c p_i.$$

Δείξτε ότι ο τελεστής $T : \ell_2 \to \ell_2$ που ορίζεται από τη σχέση

$$T\left((\xi_i)_i\right) = \left(\sum_{j=1}^\infty a_{ij}\xi_j\right)_i$$

είναι φραγμένος και $\|T\| \leq \sqrt{bc}$.

22. (Ανισότητα του Hilbert) Αν $x_0, x_1, ..., x_n \in \mathbb{R}$, τότε

$$\left| \sum_{i,j=0}^n \frac{x_i x_j}{i+j+1} \right| \leq \pi \sum_{i=0}^n x_i^2.$$

[*Υπόδειξη:* Ίσως σας χρησιμεύσει το κριτήριο του Schur και η ανισότητα

$$\sum_{i=0}^\infty \frac{1}{i+\frac{1}{2}+j+\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{i+\frac{1}{2}}} < \int_0^\infty \frac{dx}{(x+j+\frac{1}{2})\sqrt{x}} = \frac{\pi}{\sqrt{j+\frac{1}{2}}}.]$$

Κεφάλαιο 4

Χώροι Hilbert

4.1 Χώροι με εσωτερικό γινόμενο

Ορισμός 4.1.1. Έστω X γραμμικός χώρος. Μια συνάρτηση $\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \to \mathbb{R}$ λέγεται *εσωτερικό γινόμενο* αν ικανοποιεί τα εξής:

(i) $\langle x, x \rangle \geq 0$, για κάθε $x \in X$.

(ii) $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = \vec{0}$.

(iii) $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$, για κάθε $x, y \in X$.

(iv) $\langle \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, y \rangle = \lambda_1 \langle x_1, y \rangle + \lambda_2 \langle x_2, y \rangle$, για κάθε $x_1, x_2, y \in X$ και $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$.

Από τις (i)-(ii) έπεται ότι $\langle x, \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 \rangle = \lambda_1 \langle x, y_1 \rangle + \lambda_2 \langle x, y_2 \rangle$ για κάθε $y_1, y_2, x \in X$ και $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$. Επίσης, $x = \vec{0} \Leftrightarrow \langle x, y \rangle = 0$ για κάθε $y \in X$.

Παραδείγματα 4.1.2. (α) Στον $\mathbb{R}^N$, αν $x = (\xi_k)$, $y = (\eta_k)$, ορίζουμε

$$\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^{N} \xi_k \eta_k. \tag{4.1}$$

(β) Στον ℓ_2, αν $x = (\xi_k)$, $y = (\eta_k)$, ορίζουμε

$$\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \eta_k. \tag{4.2}$$

(Η σειρά $\sum_k \xi_k \eta_k$ συγκλίνει απολύτως, από την ανισότητα Cauchy-Schwarz και από το γεγονός ότι $\sum_k \xi_k^2 < +\infty$, $\sum_k \eta_k^2 < +\infty$.)

(γ) Στον $\mathcal{C}[a, b]$, αν $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$, ορίζουμε

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(t) g(t) dt. \tag{4.3}$$

Οι ιδιότητες (i)-(iv) του εσωτερικού γινομένου επαληθεύονται εύκολα και στα τρία παραδείγματα.

Πρόταση 4.1.3. *(Ανισότητα Cauchy-Schwarz) Έστω X χώρος με εσωτερικό γινόμενο. Αν $x, y \in X$, τότε*

$$|\langle x, y\rangle| \leq \sqrt{\langle x, x\rangle}\sqrt{\langle y, y\rangle}. \tag{4.4}$$

Ισότητα ισχύει αν και μόνο αν τα x και y είναι γραμμικά εξαρτημένα.

Απόδειξη. Αν $y = \vec{0}$, τότε η ανισότητα ισχύει σαν ισότητα, και τα $\vec{0}, x$ είναι γραμμικά εξαρτημένα.

Έστω $y \neq \vec{0}$. Ορίζουμε $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $P(\lambda) = \langle x - \lambda y, x - \lambda y\rangle$. Τότε, $P(\lambda) \geq 0$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$, δηλαδή

$$\langle x, x\rangle - 2\lambda\langle x, y\rangle + \lambda^2\langle y, y\rangle \geq 0, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Αυτό σημαίνει ότι η διακρίνουσα του τριωνύμου $P(\lambda)$ είναι μικρότερη ή ίση του 0. Δηλαδή, $4\langle x, y\rangle^2 - 4\langle x, x\rangle\langle y, y\rangle \leq 0$, απ' όπου παίρνουμε την

$$|\langle x, y\rangle| \leq \sqrt{\langle x, x\rangle}\sqrt{\langle y, y\rangle}.$$

Ισότητα έχουμε αν και μόνο αν η διακρίνουσα του P είναι 0, δηλαδή, αν και μόνο αν το P έχει διπλή ρίζα λ_0. Όμως,

$$P(\lambda_0) = 0 \Longleftrightarrow x = \lambda_0 y,$$

δηλαδή, αν τα x, y είναι γραμμικά εξαρτημένα. □

Ορίζουμε $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ με $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$. Η ανισότητα Cauchy-Schwarz μάς επιτρέπει να δείξουμε ότι η $\|\cdot\|$ είναι νόρμα:

Πρόταση 4.1.4. *Έστω X χώρος με εσωτερικό γινόμενο. Η $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$, με $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$ είναι νόρμα.*

Απόδειξη. Ελέγχουμε τις ιδιότητες της νόρμας ως εξής:
(α) $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle} \geq 0$, και $\|x\| = 0 \Leftrightarrow \langle x, x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = \vec{0}$.
(β) $\|\lambda x\| = \sqrt{\langle \lambda x, \lambda x\rangle} = \sqrt{\lambda^2\langle x, x\rangle} = |\lambda|\sqrt{\langle x, x\rangle} = |\lambda|\,\|x\|$.
(γ) $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2\langle x, y\rangle + \|y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\|x\|\,\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2$, από τις ιδιότητες του εσωτερικού γινομένου και την ανισότητα Cauchy-Schwarz. □

Ο $(X, \|\cdot\|)$ είναι χώρος με νόρμα, και έχουμε δεί ότι οι $(x, y) \to x + y$, $(\lambda, x) \to \lambda x$ είναι συνεχείς ως προς την $\|\cdot\|$. Το εσωτερικό γινόμενο είναι κι αυτό συνεχές ως προς την $\|\cdot\|$:

Πρόταση 4.1.5. *Έστω X χώρος με εσωτερικό γινόμενο, και $\|\cdot\|$ η επαγόμενη νόρμα. Αν $x_n \to x$ και $y_n \to y$ ως προς την $\|\cdot\|$, τότε*

$$\langle x_n, y_n\rangle \to \langle x, y\rangle.$$

Απόδειξη. Γράφουμε

$$\begin{aligned} |\langle x_n, y_n\rangle - \langle x, y\rangle| &= |\langle x_n, y_n - y\rangle + \langle x_n - x, y\rangle| \\ &\leq |\langle x_n, y_n - y\rangle| + |\langle x_n - x, y\rangle| \\ &\leq \|x_n\|\,\|y_n - y\| + \|x_n - x\|\,\|y\|. \end{aligned}$$

Η (x_n) συγκλίνει άρα είναι φραγμένη, και $\|y_n - y\| \to 0$, $\|x_n - x\| \to 0$. Άρα,

$$\langle x_n, y_n \rangle \to \langle x, y \rangle.$$

□

Οι παρακάτω ταυτότητες είναι απλές συνέπειες του ορισμού της $\|\cdot\|$ (να τις επαληθεύσετε):

(i) **Κανόνας του παραλληλογράμμου.** Για κάθε $x, y \in X$,

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2. \tag{4.5}$$

(ii) **Πυθαγόρειο θεώρημα.** Αν $x, y \in X$ και $\langle x, y \rangle = 0$, τότε

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2. \tag{4.6}$$

Παρατήρηση: Μια νόρμα $\|\cdot\|$ στον γραμμικό χώρο X, προέρχεται από εσωτερικό γινόμενο αν και μόνο αν ικανοποιεί τον κανόνα του παραλληλογράμμου. (*Υπόδειξη:* υποθέστε ότι η $\|\cdot\|$ ικανοποιεί τον κανόνα του παραλληλογράμμου, και ορίστε

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{4}\{\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\}. \tag{4.7}$$

Δείξτε ότι είναι εσωτερικό γινόμενο, και επαληθεύστε ότι η $\|\cdot\|$ είναι η επαγόμενη νόρμα.)

Ορισμός 4.1.6. Ένας χώρος με εσωτερικό γινόμενο λέγεται *χώρος Hilbert* αν είναι πλήρης ως προς τη νόρμα $\|\cdot\|$ που επάγεται από το εσωτερικό γινόμενο.

Παραδείγματα 4.1.7. (α) Έχουμε δεί ότι ο Ευκλείδειος χώρος $\mathbb{R}^n$ και ο ℓ_2 είναι πλήρεις ως προς την $\|x\| = \sqrt{\sum_k \xi_k^2}$. Άρα, είναι χώροι Hilbert.

(β) Στον $\mathcal{C}[a,b]$, η $\|f\|_2 = \sqrt{\int_a^b [f(t)]^2 dt}$ προέρχεται από εσωτερικό γινόμενο, αλλά δεν είναι πλήρης (θυμηθείτε ανάλογο επιχείρημα για την $\|f\|_1 = \int_a^b |f(t)| dt$.)

(γ) Ο $\mathcal{C}[a,b]$ με την $\|f\|_\infty = \max_{t\in[a,b]} |f(t)|$ είναι πλήρης, αλλά η $\|\cdot\|_\infty$ δεν προέρχεται από εσωτερικό γινόμενο, γιατί δεν ικανοποιεί τον κανόνα του παραλληλογράμμου (πάρτε π.χ. $f(t) = 1 - t$, $g(t) = t$ στον $\mathcal{C}[0,1]$.)

4.2 Καθετότητα

Ορισμοί 4.2.1. Έστω X ένας χώρος με εσωτερικό γινόμενο.

(i) Λέμε ότι δύο διανύσματα x, y του χώρου με εσωτερικό γινόμενο X είναι *ορθογώνια* (*ή κάθετα*), και γράφουμε $x \perp y$, αν $\langle x, y \rangle = 0$.

(ii) Μιά οικογένεια $\{e_i : i \in I\} \subseteq X$ λέγεται *ορθοκανονική*, αν

$$\langle e_i, e_j \rangle = \begin{cases} 1 & , i = j, \\ 0 & , i \neq j. \end{cases} \tag{4.8}$$

Παρατηρήσεις: (α) Το $\vec{0}$ είναι κάθετο σε κάθε $x \in X$, και είναι το μοναδικό στοιχείο του X που έχει αυτήν την ιδιότητα (γιατί;).

(β) Αν $\{e_i : i \in I\}$ είναι μια ορθοκανονική οικογένεια στον X, τότε το $\{e_i : i \in I\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο σύνολο. Πράγματι, αν $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_{i_k} = \vec{0}$, τότε για κάθε $j = 1, \ldots, n$ έχουμε

$$0 = \langle \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_{i_k}, e_{i_j} \rangle = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \langle e_{i_k}, e_{i_j} \rangle = \lambda_j.$$

Αν $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ είναι μια γραμμικά ανεξάρτητη ακολουθία στον X, τότε με τη *διαδικασία Gram-Schmidt* που περιγράφεται στην επόμενη Πρόταση, βρίσκουμε ορθοκανονική ακολουθία $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ στον X που είναι «ισοδύναμη» με την $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ με την εξής έννοια:

Πρόταση 4.2.2. *Έστω X χώρος με εσωτερικό γινόμενο, και $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ γραμμικά ανεξάρτητη ακολουθία στον X. Υπάρχει ορθοκανονική ακολουθία $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ με την ιδιότητα: για κάθε $k \in \mathbb{N}$,*

$$\text{span}\{e_1, \ldots, e_k\} = \text{span}\{x_1, \ldots, x_k\}. \tag{4.9}$$

Απόδειξη. Ορίζουμε τα e_k επαγωγικά: παρατηρήστε ότι $x_n \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$. Για $k = 1$, θέτουμε $e_1 = x_1/\|x_1\|$. Προφανώς, $\|e_1\| = 1$ και $\text{span}\{x_1\} = \text{span}\{e_1\}$.

Υποθέτουμε ότι έχουν οριστεί τα $e_1, \ldots, e_k$ έτσι ώστε: $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$, $i, j \leq k$, και $\text{span}\{x_1, \ldots, x_k\} = \text{span}\{e_1, \ldots, e_k\}$.

Θέτουμε $y_{k+1} = x_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} \langle x_{k+1}, e_i \rangle e_i$. Παρατηρούμε ότι $y_{k+1} \neq 0$, αλλιώς θα είχαμε $x_{k+1} \in \text{span}\{e_1, \ldots, e_k\} = \text{span}\{x_1, \ldots, x_k\}$, άτοπο αφού τα $x_1, \ldots, x_k, x_{k+1}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Επίσης, για $j = 1, \ldots, k$,

$$\begin{aligned} \langle y_{k+1}, e_j \rangle &= \langle x_{k+1}, e_j \rangle - \sum_{i=1}^{k} \langle x_{k+1}, e_i \rangle \langle e_i, e_j \rangle \\ &= \langle x_{k+1}, e_j \rangle - \langle x_{k+1}, e_j \rangle = 0. \end{aligned}$$

Άρα, το $e_{k+1} = y_{k+1}/\|y_{k+1}\|$ ορίζεται καλά, και τα $e_1, \ldots, e_{k+1}$ είναι ορθοκανονικά. Τέλος,

$$e_{k+1} \in \text{span}\{x_{k+1}, e_1, \ldots, e_k\} \subseteq \text{span}\{x_1, \ldots, x_{k+1}\},$$

και

$$x_{k+1} \in \text{span}\{y_{k+1}, e_1, \ldots, e_k\} \subseteq \text{span}\{e_1, \ldots, e_k, e_{k+1}\}.$$

Άρα, $\text{span}\{e_1, \ldots, e_{k+1}\} = \text{span}\{x_1, \ldots, x_{k+1}\}$. □

Ειδική περίπτωση: Αν X χώρος με εσωτερικό γινόμενο, και F υπόχωρος πεπερασμένης διάστασης ($\text{dim} F = n < \infty$), τότε ο F έχει βάση $\{x_1, \ldots, x_n\}$, και η ορθοκανονικοποίηση Gram-Schmidt μάς δίνει μιά ορθοκανονική βάση $\{e_1, \ldots, e_n\}$ του F. Κάθε $x \in F$ γράφεται στη μορφή $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$, και

$$\langle x, e_j \rangle = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \langle e_i, e_j \rangle = \lambda_j, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Δηλαδή,

$$x=\sum_{i=1}^{n}\langle x,e_i\rangle e_i,\quad x\in F. \tag{4.10}$$

Από το Πυθαγόρειο Θεώρημα,

$$\|x\|^2=\sum_{i=1}^{n}\|\langle x,e_i\rangle e_i\|^2=\sum_{i=1}^{n}\langle x,e_i\rangle^2,\quad x\in F. \tag{4.11}$$

Στη συνέχεια, μελετάμε το εξής πρόβλημα: δίνονται ένας χώρος X με νόρμα, ένας υπόχωρος F του X πεπερασμένης διάστασης, και για κάθε $x\in X$ ορίζουμε

$$d(x,F)=\inf\{\|x-y\|:y\in F\}, \tag{4.12}$$

την *απόσταση του x από τον F*. Θα δείξουμε ότι υπάρχει $y_0\in F$ στο οποίο «πιάνεται» η απόσταση: $\|x-y_0\|=d(x,F)$.

Πράγματι, από τον ορισμό της $d(x,F)$, μπορούμε να βρούμε $y_n\in F$ τέτοια ώστε

$$d(x,F)\leq\|x-y_n\|<d(x,F)+\frac{1}{n}.$$

Ειδικότερα, $y_n\in B(y_1,2(d+1))\cap F$, το οποίο είναι συμπαγές σύνολο γιατί ο F έχει πεπερασμένη διάσταση, άρα υπάρχει υπακολουθία $y_{k_n}\to y_0\in F$. Έπεται ότι

$$\|x-y_0\|=\lim_n\|x-y_{k_n}\|=d(x,F).$$

Το y_0 μπορεί να μην είναι μοναδικό: στον $\mathbb{R}^2$ με νόρμα την

$$\|(\xi_1,\xi_2)\|=\max\{|\xi_1|,|\xi_2|\},$$

αν πάρουμε $x=(1,1)$ και $F=\{(\xi_1,0),\xi_1\in\mathbb{R}\}$, τότε $d(x,F)=1$, και $\|x-y\|=1$ αν $y=(\xi_1,0)$ με $0\leq\xi_1\leq 2$.

Θα δούμε ότι αν η $\|\cdot\|$ προέρχεται από εσωτερικό γινόμενο, τότε το πλησιέστερο προς το x σημείο του F είναι μονοσήμαντα ορισμένο:

Πρόταση 4.2.3. *Έστω X χώρος με εσωτερικό γινόμενο, και F υπόχωρος του X διάστασης n, με ορθοκανονική βάση την $\{e_1,\ldots,e_n\}$. Αν $x\in X$, τότε το πλησιέστερο προς το x σημείο του F είναι το $\sum_{i=1}^{n}\langle x,e_i\rangle e_i$. Επιπλέον, το $x-\sum_{i=1}^{n}\langle x,e_i\rangle e_i$ είναι κάθετο στον F.*

Απόδειξη. Παρατηρούμε πρώτα ότι το $x-\sum_{i=1}^{n}\langle x,e_i\rangle e_i$ είναι κάθετο στον F. Αρκεί να δείξουμε ότι είναι κάθετο σε κάθε e_j, $j=1,\ldots,n$. Όμως,

$$\begin{aligned}\langle x-\sum_{i=1}^{n}\langle x,e_i\rangle e_i,e_j\rangle &= \langle x,e_j\rangle-\sum_{i=1}^{n}\langle x,e_i\rangle\langle e_i,e_j\rangle\\ &= \langle x,e_j\rangle-\langle x,e_j\rangle=0.\end{aligned}$$

Έστω $y\in F$. Υπάρχουν $\lambda_1,\ldots,\lambda_n\in\mathbb{R}$ τέτοια ώστε $y=\sum_{i=1}^{n}\lambda_ie_i$. Τότε,

$$\Big\|x-\sum_{i=1}^{n}\lambda_ie_i\Big\|^2=\Big\|(x-\sum_{i=1}^{n}\langle x,e_i\rangle e_i)+\sum_{i=1}^{n}(\langle x,e_i\rangle-\lambda_i)e_i\Big\|^2,$$

και τα δύο διανύσματα είναι ορθογώνια, οπότε το Πυθαγόρειο Θεώρημα μάς δίνει

$$\begin{aligned}\|x-\sum_{i=1}^{n}\lambda_i e_i\|^2 &= \Big\|x-\sum_{i=1}^{n}\langle x,e_i\rangle e_i\Big\|^2+\sum_{i=1}^{n}(\langle x,e_i\rangle-\lambda_i)^2\\ &\geq \|x-\sum_{i=1}^{n}\langle x,e_i\rangle e_i\|^2.\end{aligned}$$

Επιπλέον, ισότητα μπορεί να ισχύει μόνο αν $\lambda_i = \langle x, e_i\rangle$, $i = 1,\ldots,n$, δηλαδή αν $y=\sum_{i=1}^{n}\langle x,e_i\rangle e_i$. □

Σημαντική συνέπεια της Πρότασης 4.2.3 είναι η *ανισότητα του Bessel*:

Πρόταση 4.2.4 (Ανισότητα Bessel). *Έστω $\{e_n : n\in\mathbb{N}\}$ ορθοκανονική ακολουθία σε έναν χώρο X με εσωτερικό γινόμενο. Τότε, για κάθε $x\in X$ η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}|\langle x,e_n\rangle|^2$ συγκλίνει, και*

$$\sum_{n=1}^{\infty}|\langle x,e_n\rangle|^2\leq\|x\|^2. \tag{4.13}$$

Απόδειξη. Έστω $N\in\mathbb{N}$. Θεωρούμε τον υπόχωρο $F_N=\mathrm{span}\{e_1,\ldots,e_N\}$, και εφαρμόζουμε την Πρόταση 4.2.3. Το πλησιέστερο προς το x σημείο του F_N είναι το $\sum_{n=1}^{N}\langle x,e_n\rangle e_n$, και το $x-\sum_{n=1}^{N}\langle x,e_n\rangle e_n$ είναι κάθετο στον F_N. Άρα,

$$\begin{aligned}\|x\|^2 &= \|x-\sum_{n=1}^{N}\langle x,e_n\rangle e_n\|^2+\|\sum_{n=1}^{N}\langle x,e_n\rangle e_n\|^2\\ &\geq \|\sum_{n=1}^{N}\langle x,e_n\rangle e_n\|^2=\sum_{n=1}^{N}|\langle x,e_n\rangle|^2.\end{aligned}$$

Αφού η ανισότητα ισχύει για κάθε N, παίρνουμε

$$\sum_{n=1}^{\infty}|\langle x,e_n\rangle|^2\leq\|x\|^2.$$

□

4.3 Ορθογώνιο συμπλήρωμα - προβολές

Έστω H χώρος Hilbert, και έστω M κλειστός γραμμικός υπόχωρος του H (ενδεχομένως απειροδιάστατος). Θα δείξουμε ότι, και σ' αυτήν την περίπτωση, το πρόβλημα της βέλτιστης προσέγγισης έχει μοναδική λύση:

Πρόταση 4.3.1. *Έστω H χώρος Hilbert, M κλειστός γραμμικός υπόχωρος του H, και $x\in H$. Υπάρχει μοναδικό $y_0\in M$ τέτοιο ώστε*

$$\|x-y_0\|=d(x,M)=\inf\{\|x-y\|:y\in M\}. \tag{4.14}$$

Το μοναδικό αυτό $y_0\in M$ συμβολίζεται με $P_M(x)$, και ονομάζεται προβολή του x στον M.

Απόδειξη. Θέτουμε $\delta = d(x, M)$. Υπάρχει ακολουθία (y_n) στον M τέτοια ώστε

$$\|x - y_n\| \to \delta.$$

Από τον κανόνα του παραλληλογράμμου,

$$\begin{aligned} \|y_n - y_m\|^2 &= \|(y_n - x) + (x - y_m)\|^2 \\ &= 2\|y_n - x\|^2 + 2\|y_m - x\|^2 - \|(y_n + y_m) - 2x\|^2 \\ &= 2\|y_n - x\|^2 + 2\|y_m - x\|^2 - 4\Big\|\frac{y_n + y_m}{2} - x\Big\|^2. \end{aligned}$$

Όμως, $\frac{y_n+y_m}{2} \in M$, άρα $\|\frac{y_n+y_m}{2} - x\| \geq \delta$. Επομένως,

$$\|y_n - y_m\|^2 \leq 2\|y_n - x\|^2 + 2\|y_m - x\|^2 - 4\delta^2 \to 2\delta^2 + 2\delta^2 - 4\delta^2 = 0.$$

Άρα, η (y_n) είναι ακολουθία Cauchy στον H. Ο H είναι πλήρης, άρα υπάρχει $y_0 \in H$ τέτοιο ώστε $y_n \to y_0$. Έπεται ότι $y_0 \in M$ (ο M είναι κλειστός), και $\|x - y_0\| = \lim_n \|x - y_n\| = \delta$.

Για τη μοναδικότητα, χρησιμοποιούμε και πάλι τον κανόνα του παραλληλογράμμου. Αν $\|x - y\| = \delta = \|x - y'\|$, τότε

$$\begin{aligned} 0 \leq \|y - y'\|^2 &= 2\|x - y'\|^2 + 2\|x - y\|^2 - 4\Big\|\frac{y + y'}{2} - x\Big\|^2 \\ &\leq 2\delta^2 + 2\delta^2 - 4\delta^2 = 0. \end{aligned}$$

Άρα, $y = y'$. □

Παρατήρηση: Στην παραπάνω απόδειξη δε χρησιμοποιήσαμε πλήρως το γεγονός ότι το M ήταν υπόχωρος, παρά μόνο ότι για $y_1, y_2 \in M$ είναι και $\frac{y_1+y_2}{2} \in M$. Συνεπώς, το αντίστοιχο αποτέλεσμα ισχύει και στην περίπτωση που το M είναι κλειστό και κυρτό υποσύνολο του H. Το ίδιο ισχύει φυσικά και για τα αποτελέσματα που ακολουθούν (και χρησιμοποιούν την Πρόταση 4.3.1).

Το $x - P_M(x)$ είναι και στην «απειροδιάστατη περίπτωση» κάθετο στον M:

Πρόταση 4.3.2. *Με τις υποθέσεις της Πρότασης 4.3.1, $x - P_M(x) \perp M$.*

Απόδειξη. Θα χρησιμοποιήσουμε την πεπερασμένη περίπτωση. Θέτουμε $z = x - P_M(x)$, και δείχνουμε ότι $\langle z, y\rangle = 0$ για κάθε $y \in M$. Έστω $y \in M$. Θεωρούμε τον $F = \mathrm{span}\{y, P_M(x)\} \subseteq M$. Τότε,

$$d(x, F) \leq \|z\| = d(x, M) \leq d(x, F),$$

όπου η τελευταία ανισότητα ισχύει γιατί $F \subseteq M$, και η πρώτη γιατί $P_M(x) \in F$. Έτσι $\|x - P_M(x)\| = d(x, F)$, και ο F έχει πεπερασμένη διάσταση, έχουμε

$$x - P_M(x) \perp F.$$

Ειδικότερα, $x - P_M(x) \perp y$, δηλαδή $\langle z, y\rangle = 0$. □

Πόρισμα 4.3.3. *Αν H χώρος Hilbert και M κλειστός γνήσιος υπόχωρος του H, τότε υπάρχει $z \in H$, $z \neq 0$, τέτοιο ώστε $z \perp M$.*

Απόδειξη. Έστω $x \in H \backslash M$. Παίρνουμε $z = x - P_M(x) \neq 0$. □

Πόρισμα 4.3.4. *Ένας γραμμικός υπόχωρος F του H είναι πυκνός αν και μόνο αν το μοναδικό διάνυσμα του H που είναι κάθετο στον F είναι το 0.*

Απόδειξη. ($\Rightarrow$) Υποθέτουμε ότι ο F είναι πυκνός στον H, και ότι $\langle z, x\rangle = 0$ για κάθε $x \in F$.

Έστω $y \in H$. Αφού ο F είναι πυκνός, υπάρχει ακολουθία $(y_n) \in F$ με $y_n \to y$. Τότε, $0 = \langle z, y_n\rangle \to \langle z, y\rangle$. Άρα, $\langle z, y\rangle = 0$. Αφού $\langle z, y\rangle = 0$ για κάθε $y \in H$, έχουμε $z = 0$.

($\Leftarrow$) Ας υποθέσουμε ότι ο F δεν είναι πυκνός στον H. Τότε, ο $\overline{F}$ είναι γνήσιος κλειστός υπόχωρος του H. Άρα, υπάρχει $z \neq 0$, $z \perp \overline{F}$. Ειδικότερα, $z \perp F$, άτοπο. □

Παρατήρηση 4.3.5. Αν ο X είναι χώρος με εσωτερικό γινόμενο, αλλά όχι πλήρης, τότε το Πόρισμα 4.3.3 μπορεί να μην ισχύει.

Για παράδειγμα, θεωρούμε τον χώρο c_{00} των τελικά μηδενικών ακολουθιών, με εσωτερικό γινόμενο το $\langle x, y\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \eta_k$. Ορίζουμε $f : c_{00} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \sum_k \frac{\xi_k}{k}$. Το f είναι γραμμικό συναρτησοειδές, και είναι φραγμένο γιατί

$$\begin{aligned} |f(x)| &= |\sum_k \frac{\xi_k}{k}| \leq \left(\sum_k \frac{1}{k^2}\right)^{1/2} \left(\sum_k \xi_k^2\right)^{1/2} \\ &= \left(\sum_k \frac{1}{k^2}\right)^{1/2} \|x\|. \end{aligned}$$

Άρα, ο πυρήνας του f, $M = \{x \in c_{00} : \sum_k \frac{\xi_k}{k} = 0\}$ είναι κλειστός γραμμικός υπόχωρος του c_{00}. Επίσης, ο M είναι προφανώς γνήσιο υποσύνολο του c_{00}.

Ας υποθέσουμε ότι $z \perp M$, $z = (\zeta_1, \zeta_2, \ldots)$. Αφού $y_n = e_1 - ne_n \in M$, έχουμε

$$\langle z, y_n\rangle = \zeta_1 - n\zeta_n = 0, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Αν $\zeta_1 \neq 0$, τότε $\zeta_n = \zeta_1/n \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$, άτοπο, γιατί το z θα είχε όλες του τις συντεταγμένες μη μηδενικές. Άρα, $\zeta_1 = 0$, κι αυτό μάς δίνει $\zeta_n = \zeta_1/n = 0$, $n \in \mathbb{N}$, δηλαδή $z = 0$.

Βλέπουμε λοιπόν ότι, αν και ο M είναι κλειστός, το μόνο διάνυσμα του c_{00} που είναι κάθετο στον M είναι το 0.

Ορισμός 4.3.6. Έστω H χώρος Hilbert, και $A \subseteq H$, $A \neq \emptyset$. Ορίζουμε

$$A^{\perp} = \{x \in H : \forall\, a \in A,\ \langle x, a\rangle = 0\}. \tag{4.15}$$

Ο $A^{\perp}$ είναι κλειστός γραμμικός υπόχωρος του H (άσκηση).

Θεώρημα 4.3.7. *Έστω H χώρος Hilbert, και M κλειστός γραμμικός υπόχωρος του H. Τότε, $H = M \oplus M^{\perp}$. Δηλαδή, κάθε $x \in H$ γράφεται μονοσήμαντα στη μορφή*

$$x = x_1 + x_2, \quad x_1 \in M,\ x_2 \in M^{\perp}. \tag{4.16}$$

Απόδειξη. Έστω $x \in H$. Γράφουμε $x = P_M(x) + (x - P_M(x))$. Από τη συζήτηση που έχει προηγηθεί, $P_M(x) \in M$ και $x - P_M(x) \in M^{\perp}$.

Αν $x_1 + x_2 = x_1' + x_2'$ και $x_1, x_1' \in M$, $x_2, x_2' \in M^\perp$, τότε το

$$y = x_1 - x_1' = x_2 - x_2' \in M \cap M^\perp$$

γιατί οι $M, M^\perp$ είναι υπόχωροι, άρα $y \perp y$, το οποίο σημαίνει ότι $y = 0$. Άρα, $x_1 = x_1'$ και $x_2 = x_2'$, απ' όπου έπεται η μοναδικότητα του τρόπου γραφής. $\square$

Πόρισμα 4.3.8. *Έστω $M \neq \{0\}$ κλειστός γραμμικός υπόχωρος του χώρου Hilbert H. Ορίζουμε $P_M : H \to H$ με $P_M(x) = P_M(x_1 + x_2) = x_1$, όπου $x = x_1 + x_2$ όπως στο Θεώρημα. Ο P_M είναι φραγμένος γραμμικός τελεστής, και $\|P_M\| = 1$.*

Απόδειξη. Αν $x = x_1 + x_2$, $x' = x_1' + x_2'$ και $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, τότε

$$\lambda x + \mu x' = (\lambda x_1 + \mu x_1') + (\lambda x_2 + \mu x_2') \in M + M^\perp,$$

οπότε

$$P_M(\lambda x + \mu x') = \lambda x_1 + \mu x_1' = \lambda P_M(x) + \mu P_M(x'),$$

άρα ο P_M είναι γραμμικός τελεστής. Επίσης,

$$\|P_M(x)\|^2 = \|x_1\|^2 \leq \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2 = \|x_1 + x_2\|^2 = \|x\|^2,$$

δηλαδή ο P_M είναι φραγμένος, και $\|P_M\| \leq 1$. Αν $x_0 \in M$, $x_0 \neq 0$, τότε $P_M(x_0) = x_0$. Άρα,

$$\|P_M\| \geq \frac{\|P_M(x_0)\|}{\|x_0\|} = 1.$$

$\square$

4.4 Το Θεώρημα αναπαράστασης του Riesz

Έστω $H \neq \{0\}$ χώρος Hilbert. Σε αυτή την παράγραφο θα δούμε ότι ο H^* περιέχει «πολλά» συναρτησοειδή, τα οποία αναπαρίστανται με πολύ συγκεκριμένο τρόπο από τα στοιχεία του H.

Λήμμα 4.4.1. *Για κάθε $a \in H$, η $f_a : H \to \mathbb{R}$ με $f_a(x) = \langle x, a\rangle$ ανήκει στον H^*, και $\|f_a\|_{H^*} = \|a\|_H$.*

Απόδειξη. Έχουμε

$$f_a(\lambda x + \mu y) = \langle \lambda x + \mu y, a\rangle = \lambda\langle x, a\rangle + \mu\langle y, a\rangle = \lambda f_a(x) + \mu f_a(y),$$

και

$$|f_a(x)| = |\langle x, a\rangle| \leq \|a\| \, \|x\|.$$

Άρα, $f_a \in H^*$ και $\|f_a\| \leq \|a\|$. Τέλος, αν $a \neq 0$,

$$\|f_a\| \geq \frac{|f_a(a)|}{\|a\|} = \frac{|\langle a, a\rangle|}{\|a\|} = \|a\|.$$

Αν $a = 0$, προφανώς $\|f_a\| = 0$ ($f_a \equiv 0$). $\square$

Το Θεώρημα του Riesz μάς λέει ότι κάθε $f \in H^*$ αναπαρίσταται σαν $f = f_a$ για κάποιο $a \in H$:

Θεώρημα 4.4.2. *(Θεώρημα αναπαράστασης του Riesz) Έστω H χώρος Hilbert, και $f \in H^*$. Υπάρχει μοναδικό $a \in H$ τέτοιο ώστε $f = f_a$.*

Απόδειξη. Ορίζουμε $M = \mathrm{Ker} f = \{x \in H : f(x) = 0\}$. Ο M είναι κλειστός γραμμικός υπόχωρος του H.

Αν $M = H$, τότε $f \equiv 0$ και $f = f_0$.

Αν $M \neq H$, τότε υπάρχει $z \neq 0$, $z \in H$ που είναι κάθετο στον M (γιατί;). Τότε, για κάθε $y \in H$ έχουμε

$$f(f(z)y - f(y)z) = f(z)f(y) - f(y)f(z) = 0.$$

Άρα $f(z)y - f(y)z \in M$, και αφού $z \perp M$ παίρνουμε

$$\begin{aligned} \langle f(z)y - f(y)z, z\rangle = 0 \quad &\Longrightarrow \quad f(z)\langle y, z\rangle = f(y)\langle z, z\rangle \\ &\Longrightarrow \quad f(y) = \Big\langle y, \frac{f(z)z}{\|z\|^2}\Big\rangle = f_a(y), \end{aligned}$$

όπου $a = f(z)z/\|z\|^2$. Η μοναδικότητα του a είναι απλή. Αν $f(y) = \langle y, a\rangle = \langle y, a'\rangle$ για κάθε $y \in H$, τότε $a - a' \perp y$ για κάθε $y \in H$. Άρα, $a = a'$. □

Πόρισμα 4.4.3. *Έστω H χώρος Hilbert. Η απεικόνιση $T : H \to H^*$ με $T(a) = f_a$ είναι γραμμική ισομετρία επί (ισομετρικός ισομορφισμός).*

Απόδειξη. (α) Για τη γραμμικότητα της T, παρατηρούμε ότι

$$f_{\lambda a + \mu a'}(x) = \langle x, \lambda a + \mu a'\rangle = \lambda\langle x, a\rangle + \mu\langle x, a'\rangle = \lambda f_a(x) + \mu f_{a'}(x),$$

άρα

$$T(\lambda a + \mu a') = f_{\lambda a + \mu a'} = \lambda f_a + \mu f_{a'} = \lambda T(a) + \mu T(a').$$

(β) Από το Λήμμα, $\|T(a)\| = \|f_a\| = \|a\|$. Δηλαδή, η T είναι ισομετρία.
(γ) Αν $f \in H^*$, υπάρχει $a \in H$ τέτοιο ώστε $T(a) = f_a = f$, από το Θεώρημα αναπαράστασης του Riesz. Δηλαδή, η T είναι επί. □

4.5 Ορθοκανονικές βάσεις

Ορισμός 4.5.1. Έστω X διαχωρίσιμος χώρος με εσωτερικό γινόμενο. Μια ορθοκανονική ακολουθία $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ λέγεται *ορθοκανονική βάση* του X, αν

$$X = \overline{\mathrm{span}\{e_n : n \in \mathbb{N}\}}. \tag{4.17}$$

Σημείωση: Αυτό δεν σημαίνει ότι η $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ είναι βάση Hamel του X. Για παράδειγμα, η συνήθης ορθοκανονική ακολουθία (e_n) στον ℓ_2 είναι ορθοκανονική βάση (γιατί;), όχι όμως αλγεβρική του βάση.

Πρόταση 4.5.2. *Κάθε διαχωρίσιμος χώρος X με εσωτερικό γινόμενο, έχει ορθοκανονική βάση.*

Απόδειξη. Ο X είναι διαχωρίσιμος, δηλαδή υπάρχει αριθμήσιμο πυκνό υποσύνολο $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ του X. Ορίζουμε $Y = \mathrm{span}\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$, οπότε $\overline{Y} = X$.

Παραλείποντας διαδοχικά εκείνα τα x_n τα οποία γράφονται σαν γραμμικοί συνδυασμοί των προηγουμένων τους, παίρνουμε ένα γραμμικά ανεξάρτητο $\{y_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ τέτοιο ώστε

$$Y = \mathrm{span}\{y_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

Με τη διαδικασία Gram-Schmidt, βρίσκουμε ορθοκανονική ακολουθία $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ τέτοια ώστε $\mathrm{span}\{y_1, \dots, y_k\} = \mathrm{span}\{e_1, \dots, e_k\}$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Ειδικότερα, $Y = \mathrm{span}\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$. Άρα,

$$X = \overline{Y} = \overline{\mathrm{span}\{e_n : n \in \mathbb{N}\}}.$$

□

Παρατήρηση: Αντίστροφα, αν ο X έχει ορθοκανονική βάση $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$, τότε είναι διαχωρίσιμος. Το $M = \{\sum_{n=1}^{N} a_n e_n : N \in \mathbb{N}, a_n \in \mathbb{Q}\}$ είναι αριθμήσιμο πυκνό υποσύνολο του X.

Πρόταση 4.5.3. *Έστω X χώρος με εσωτερικό γινόμενο, και $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ ορθοκανονική βάση του X. Τότε, αν $x \in X$ έχουμε*

(i) $x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n\rangle e_n$,

(ii) $\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_n\rangle|^2$.

Απόδειξη. Έστω $x \in X$, και $\varepsilon > 0$. Αφού $X = \overline{\mathrm{span}\{e_n : n \in \mathbb{N}\}}$, υπάρχουν $N \in \mathbb{N}$ και $\lambda_1, \dots, \lambda_N \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε

$$\Big\|x - \sum_{n=1}^{N} \lambda_n e_n\Big\| < \varepsilon.$$

Όμως, στον $F_N = \mathrm{span}\{e_1, \dots, e_N\}$ έχουμε

$$\Big\|x - \sum_{n=1}^{N} \langle x, e_n\rangle e_n\Big\| \leq \Big\|x - \sum_{n=1}^{N} \lambda_n e_n\Big\| < \varepsilon.$$

Δηλαδή,

$$\|x\|^2 - \sum_{n=1}^{N} \langle x, e_n\rangle^2 = \Big\|x - \sum_{n=1}^{N} \langle x, e_n\rangle e_n\Big\|^2 < \varepsilon^2.$$

(ελέγξτε την τελευταία ισότητα ξεκινώντας από το δεξιό μέλος.) Τότε, για κάθε $M \geq N$,

$$\begin{aligned} 0 &\leq \Big\|x - \sum_{n=1}^{M} \langle x, e_n\rangle e_n\Big\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{n=1}^{M} \langle x, e_n\rangle^2 \\ &\leq \|x\|^2 - \sum_{n=1}^{N} \langle x, e_n\rangle^2 = \Big\|x - \sum_{n=1}^{N} \langle x, e_n\rangle e_n\Big\|^2 \\ &< \varepsilon^2. \end{aligned}$$

Αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, αυτό σημαίνει ότι

(i) $\sum_{n=1}^{M} \langle x, e_n \rangle e_n \to x$ καθώς $M \to \infty$, δηλαδή

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle e_n. \tag{4.18}$$

(ii) $\|x\|^2 - \sum_{n=1}^{M} \langle x, e_n \rangle^2 \to 0$ καθώς $M \to \infty$, δηλαδή

$$\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_n \rangle|^2. \tag{4.19}$$

□

Αν λοιπόν η $\{e_n\}$ είναι ορθοκανονική βάση του X, τότε κάθε $x \in X$ έχει *ανάπτυγμα* ως προς την $\{e_n\}$, με *συντελεστές Fourier* τους $\langle x, e_n \rangle$, και η νόρμα του x υπολογίζεται από την $\|x\|^2 = \sum_n \langle x, e_n \rangle^2$.

Πόρισμα 4.5.4. *Κάθε διαχωρίσιμος χώρος Hilbert H είναι ισομετρικά ισομορφικός με τον ℓ_2.*

Απόδειξη. Ο H έχει ορθοκανονική βάση $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$. Ορίζουμε $T : H \to \ell_2$ με

$$T(x) = (\langle x, e_1 \rangle, \ldots, \langle x, e_n \rangle, \ldots). \tag{4.20}$$

(α) Ο T είναι καλά ορισμένος, γιατί $\sum_n \langle x, e_n \rangle^2 = \|x\|^2 < +\infty$, άρα $T(x) \in \ell_2$.
(β) Η γραμμικότητα του T ελέγχεται εύκολα.
(γ) $\|T(x)\|_{\ell_2}^2 = \sum_n \langle x, e_n \rangle^2 = \|x\|^2$, άρα ο T είναι ισομετρία (άρα και ένα προς ένα).
(δ) Έστω $(a_1, \ldots, a_n, \ldots) \in \ell_2$. Ορίζουμε $x_N = \sum_{n=1}^{N} a_n e_n$. Τότε, αν $N > M$ έχουμε

$$\|x_N - x_M\|^2 = \sum_{n=M+1}^{N} a_n^2 \to 0$$

καθώς $N, M \to \infty$, και αυτό δείχνει ότι η (x_N) είναι ακολουθία Cauchy στον H. Ο H είναι πλήρης, άρα υπάρχει $x \in H$ τέτοιο ώστε $x_N \to x$.

Έχουμε $\langle x_N, e_m \rangle \to \langle x, e_m \rangle$ καθώς $N \to \infty$, και αν $N > m$,

$$\langle x_N, e_m \rangle = \langle \sum_{n=1}^{N} a_n e_n, e_m \rangle = a_m.$$

Άρα, $\langle x, e_m \rangle = a_m$, $m \in \mathbb{N}$. Τέλος,

$$T(x) = (\langle x, e_m \rangle)_{m \in \mathbb{N}} = (a_m)_{m \in \mathbb{N}},$$

άρα ο T είναι επί. □

4.6 Συζυγείς τελεστές σε χώρους Hilbert

Σε αυτή την ενότητα θα ορίσουμε τον συζυγή ενός γραμμικού τελεστή $T \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$, όπου H_1, H_2 δύο χώροι Hilbert, ο οποίος γενικεύει την έννοια του ανάστροφου πίνακα από τη Γραμμική Άλγεβρα. Θα χρειαστούμε τον εξής:

Ορισμός 4.6.1. Έστω X και Y δύο διανυσματικοί χώροι. Μια *διγραμμική μορφή* στο $X \times Y$ είναι μια συνάρτηση $h : X \times Y \to \mathbb{R}$ που ικανοποιεί τα εξής:

(i) $h(x_1 + x_2, y) = h(x_1, y) + h(x_2, y)$, για κάθε $x_1, x_2 \in X, y \in Y$.

(ii) $h(x, y_1 + y_2) = h(x, y_1) + h(x, y_2)$, για κάθε $x \in X, y_1, y_2 \in Y$.

(iii) $h(ax, y) = ah(x, y)$, για κάθε $x \in X, y \in Y$ και $a \in \mathbb{R}$.

(iv) $h(x, by) = bh(x, y)$, για κάθε $x \in X, y \in Y$ και $b \in \mathbb{R}$.

Αν επιπλέον οι X και Y είναι χώροι με νόρμα και υπάρχει ένας πραγματικός αριθμός c ώστε για κάθε $x \in X$ και $y \in Y$ να ισχύει

$$|h(x, y)| \leq c\|x\|\|y\|, \tag{4.21}$$

λέμε ότι η h είναι φραγμένη και η σταθερά

$$\|h\| = \sup_{\substack{x \in X \setminus \{0\} \\ y \in Y \setminus \{0\}}} \frac{|h(x, y)|}{\|x\|\|y\|} = \sup_{\substack{\|x\|=1 \\ \|y\|=1}} |h(x, y)| \tag{4.22}$$

λέγεται *νόρμα* της h.

Για παράδειγμα, ένα εσωτερικό γινόμενο είναι μια φραγμένη διγραμμική μορφή. Έχει ενδιαφέρον το γεγονός ότι μπορούμε να περιγράψουμε πλήρως τις φραγμένες διγραμμικές μορφές σε χώρους Hilbert, ακριβώς όπως κάναμε με τα φραγμένα γραμμικά συναρτησοειδή στην ενότητα 4.4.

Πρόταση 4.6.2. *(Θεώρημα αναπαράστασης του Riesz για διγραμμικές μορφές) Έστω H_1, H_2 δύο χώροι Hilbert και $h : H_1 \times H_2 \to \mathbb{R}$ μια φραγμένη διγραμμική μορφή. Τότε υπάρχει φραγμένος τελεστής $S \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$ ώστε*

$$h(x, y) = \langle Sx, y \rangle, \tag{4.23}$$

για κάθε $x \in H_1, y \in H_2$. Ο S καθορίζεται μοναδικά από την h και έχει νόρμα $\|S\| = \|h\|$.

Απόδειξη. Θα χρησιμοποιήσουμε το Θεώρημα αναπαράστασης του Riesz. Σταθεροποιούμε ένα $x \in H_1$. Τότε η απεικόνιση $H_2 \to \mathbb{R}$ με $y \mapsto h(x, y)$ είναι γραμμική και φραγμένη (γιατί;) και άρα, υπάρχει ένα μοναδικό στοιχείο $S_x \in H_2$ ώστε

$$h(x, y) = \langle S_x, y \rangle,$$

για κάθε $y \in H_2$. Θεωρούμε τον τελεστή $S : H_1 \to H_2$ με $S(x) = S_x$.

Ο S είναι γραμμικός. Πράγματι, για $x_1, x_2 \in H_1, y \in H_2$ και $a, b \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$\begin{aligned} \langle S(ax_1 + bx_2), y \rangle &= h(ax_1 + bx_2, y) \\ &= ah(x_1, y) + bh(x_2, y) \\ &= a\langle Sx_1, y \rangle + b\langle Sx_2, y \rangle \\ &= \langle aSx_1 + bSx_2, y \rangle. \end{aligned}$$

Αφού η παραπάνω ισχύει για κάθε $y \in H_2$, συμπεραίνουμε τελικά ότι

$$S(ax_1 + bx_2) = aSx_1 + bSx_2.$$

Ο S είναι φραγμένος. Πράγματι, ισχύει ότι

$$\begin{aligned} \|S\| &= \sup_{x\in X\setminus\{0\}} \frac{\|Sx\|}{\|x\|} = \sup_{x\in X\setminus\{0\}} \frac{\langle Sx, Sx\rangle}{\|x\|\|Sx\|} \\ &\leq \sup_{\substack{x\in X\setminus\{0\}\\ y\in Y\setminus\{0\}}} \frac{\langle Sx, y\rangle}{\|x\|\|y\|} = \sup_{\substack{x\in X\setminus\{0\}\\ y\in Y\setminus\{0\}}} \frac{|h(x,y)|}{\|x\|\|y\|} = \|h\|. \end{aligned}$$

Μάλιστα ισχύει η ισότητα, αφού εφαρμόζοντας την ανισότητα Cauchy-Schwarz έχουμε

$$\|h\| = \sup_{\substack{\|x\|=1\\ \|y\|=1}} |\langle Sx, y\rangle| \leq \sup_{\substack{\|x\|=1\\ \|y\|=1}} \|S\|\|x\|\|y\| = \|S\|.$$

Τέλος, είναι προφανές ότι ο S καθορίζεται μονοσήμαντα από την h από την αντίστοιχη μοναδικότητα στο Θεώρημα 4.4.2. □

Ορισμός 4.6.3. Έστω H_1, H_2 δύο χώροι Hilbert και $T \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$ ένας φραγμένος τελεστής. Ένας *συζυγής τελεστής* του T είναι ένας φραγμένος τελεστής $T^* \in \mathcal{B}(H_2, H_1)$ για τον οποίο ισχύει η σχέση

$$\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^*y\rangle \tag{4.24}$$

για κάθε $x \in X$ και $y \in Y$.

Το πρώτο που πρέπει να δείξουμε είναι ότι ο παραπάνω ορισμός έχει νόημα, δηλαδή ότι για έναν δοσμένο T, ο T^* υπάρχει.

Πρόταση 4.6.4. *Δοσμένου ενός $T \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$, υπάρχει μοναδικός συζυγής τελεστής T^* που ικανοποιεί τις απαιτήσεις του παραπάνω ορισμού, για τον οποίο μάλιστα ισχύει και $\|T^*\| = \|T\|$.*

Απόδειξη. Θα αποδείξουμε την ύπαρξη του T^* χρησιμοποιώντας το Θεώρημα αναπαράστασης του Riesz στη διγραμμική μορφή της σχέσης (4.24). Πιο συγκεκριμένα, θεωρούμε την απεικόνιση $h : H_2 \times H_1 \to \mathbb{R}$ που ορίζεται από τη σχέση

$$h(y, x) = \langle y, Tx\rangle, \quad y \in H_2, x \in H_1.$$

Η h είναι προφανώς διγραμμική και μάλιστα φραγμένη, αφού

$$|h(y, x)| = |\langle y, Tx\rangle| \leq \|y\|\|T\|\|x\|.$$

Ειδικότερα, ισχύει $\|h\| = \|T\|$ (γιατί;). Συνεπώς, υπάρχει μοναδικός τελεστής $T^* \in \mathcal{B}(H_2, H_1)$ ώστε $h(y, x) = \langle T^*y, x\rangle$ για κάθε $x \in X, y \in Y$, για τον οποίο επιπλέον ισχύει

$$\|T^*\| = \|h\| = \|T\|.$$

Από τη συμμετρία του εσωτερικού γίνομένου συμπεραίνουμε ότι η (4.24) αληθεύει. □

Παραδείγματα 4.6.5. (α) Έστω $H_1 = H_2 = \mathbb{R}^n$ με το σύνηθες εσωτερικό γινόμενο

$$\langle x, y\rangle = x^t y, \quad x, y \in \mathbb{R}^n \equiv \mathbb{R}^{n\times 1}.$$

Αν $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ ένας $n \times n$ πίνακας είναι

$$\langle Ax, y\rangle = (Ax)^t y = x^t(A^t y) = \langle x, A^t y\rangle,$$

για $x, y \in \mathbb{R}^n$, δηλαδή $A^* = A^t$, ο ανάστροφος πίνακας του A.

(β)Έστω $H = \ell_2$ και $S \in \mathcal{B}(\ell_2)$ ο τελεστής δεξιάς μετατόπισης: αν $x = (\xi_k) \in \ell_2$ έχουμε

$$Sx = (0, \xi_1, \xi_2, ...).$$

Θα υπολογίσουμε τον S^*. Θέτοντας $x = e_i$, παίρνουμε ότι

$$\langle S^* y, e_i \rangle = \langle y, Se_i \rangle = \langle y, e_{i+1} \rangle = y_{i+1} = \langle (y_2, y_3, y_4, ...), e_i \rangle$$

για κάθε $y = (y_k) \in \ell_2$ και $i = 1, 2, ...$ Συνεπώς,

$$S^*(y) = (y_2, y_3, ...),$$

ο τελεστής αριστερής μετατόπισης.

Περιγράφουμε τώρα σε μια πρόταση τις βασικές ιδιότητες του συζυγούς τελεστή.

Πρόταση 4.6.6. *Έστω H_1, H_2 δύο χώροι Hilbert, $T, S \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$ δύο φραγμένοι γραμμικοί τελεστές και ένα $a \in \mathbb{R}$. Τότε έχουμε:*
(i) $(T + S)^* = T^* + S^*$.
(ii) $(aT)^* = aT^*$.
(iii) $(T^*)^* = T$.
(iv) Ισχύει η C^*-ιδιότητα: $\|T^*T\| = \|TT^*\| = \|T\|^2$.
(v) Αν επιπλέον $H_1 = H_2$, τότε $(TS)^* = S^*T^*$.

Απόδειξη. (i) Για $x \in H_1$ και $y \in H_2$ έχουμε

$$\begin{aligned} \langle x, (T+S)^* y \rangle &= \langle (T+S)x, y \rangle \\ &= \langle Tx, y \rangle + \langle Sx, y \rangle \\ &= \langle x, T^* y \rangle + \langle x, S^* y \rangle \\ &= \langle x, (T^* + S^*) y \rangle \end{aligned}$$

και άρα το ζητούμενο έπεται από τη μοναδικότητα της προηγούμενης πρότασης.
(ii) Προκύπτει όμοια με την (i) και αφήνεται ως άσκηση.
(iii) Για $x \in H_1$ και $y \in H_2$ υπολογίζουμε

$$\langle (T^*)^* x, y \rangle = \langle x, T^* y \rangle = \langle Tx, y \rangle$$

και άρα πράγματι $T^{**} = (T^*)^* = T$.
(iv) Από την ανισότητα Cauchy-Schwarz έχουμε

$$\|Tx\|^2 = \langle Tx, Tx \rangle = \langle T^*Tx, x \rangle \leq \|T^*Tx\| \|x\| \leq \|T^*T\| \|x\|^2$$

και παίρνοντας supremum ως προς όλα τα x με $\|x\| = 1$ έχουμε ότι $\|T\|^2 \leq \|T^*T\|$. Συνεπώς

$$\|T\|^2 \leq \|T^*T\| \leq \|T^*\| \|T\| = \|T\|^2,$$

απ΄ όπου έπεται ότι $\|T^*T\| = \|T\|^2$. Αντικαθιστώντας τον T με τον T^* τώρα, παίρνουμε ότι

$$\|T^{**}T^*\| = \|T^*\|^2 = \|T\|^2,$$

το οποίο ολοκληρώνει την απόδειξη.

(v) Τέλος, για $x, y \in H_1 = H_2$ έχουμε

$$\begin{aligned} \langle x, (TS)^* y\rangle &= \langle TSx, y\rangle \\ &= \langle Sx, T^* y\rangle \\ &= \langle x, S^* T^* y\rangle, \end{aligned}$$

και άρα πράγματι $(TS)^* = S^* T^*$. □

Με τη βοήθεια του συζυγούς τελεστή τώρα, μπορούμε να ορίσουμε πολλές ενδιαφέρουσες κλάσεις τελεστών:

Ορισμός 4.6.7. Έστω H ένας χώρος Hilbert και $T \in \mathcal{B}(H)$ ένας φραγμένος γραμμικός τελεστής. Γράφουμε $\mathcal{B}(H)$ αντί για $\mathcal{B}(H, H)$ για συντομία.

(i) Ο T λέγεται *αυτοσυζυγής* αν $T^* = T$, δηλαδή εάν

$$\langle Tx, y\rangle = \langle x, Ty\rangle, \quad x, y \in H. \tag{4.25}$$

(ii) Ο T λέγεται *μοναδιαίος* αν $T^* = T^{-1}$.

(iii) Ο T λέγεται *φυσιολογικός* αν $T^* T = TT^*$.

Παρατηρήστε ότι στην περίπτωση $H = \mathbb{R}^n$, ο παραπάνω ορισμός επεκτείνει τις γνωστές έννοιες του συμμετρικού, μοναδιαίου και κανονικού πίνακα αντίστοιχα. Είναι άμεσο ότι, κάθε αυτοσυζυγής ή μοναδιαίος τελεστής είναι και φυσιολογικός. Το αντίστροφο δεν ισχύει: για παράδειγμα, ο τελεστής που ορίζει ο πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$$

είναι φυσιολογικός αλλά δεν είναι ούτε αυτοσυζυγής ούτε κανονικός.

Ενδιαφέροντα κριτήρια για το πότε ένας φραγμένος τελεστής είναι αυτοσυζυγής, μοναδιαίος και φυσιολογικός μπορούν να δοθούν στην περίπτωση που μελετάμε *μιγαδικούς* χώρους Hilbert. Αυτές οι κλάσεις τελεστών είναι ιδιαίτερα ενδιαφέρουσες αφού σε αυτές μπορεί να επεκτείνει κανείς την έννοια της διαγωνιοποίησης που είναι γνωστή από τη Γραμμική Άλγεβρα μέσω του Φασματικού Θεωρήματος. Η θεωρία αυτή είναι αντικείμενο της Θεωρίας Τελεστών και ξεφεύγει από τους σκοπούς αυτών των σημειώσεων.

4.7 Ασκήσεις

Ομάδα Α΄

1. Έστω X χώρος με εσωτερικό γινόμενο, και έστω $x, y \in X$. Δείξτε ότι
(α) $x \perp y$ αν και μόνο αν $\|x + ay\| = \|x - ay\|$ για κάθε $a \in \mathbb{R}$.
(β) $x \perp y$ αν και μόνο αν $\|x + ay\| \geq \|x\|$ για κάθε $a \in \mathbb{R}$.

2. Έστω H χώρος Hilbert, x_n, y_n στη μοναδιαία μπάλα του H, και $\langle x_n, y_n\rangle \to 1$. Δείξτε ότι $\|x_n - y_n\| \to 0$.

3. Έστω H χώρος Hilbert, και $x_n, x \in H$ με τις ιδιότητες: $\|x_n\| \to \|x\|$, και, για κάθε $y \in H$, $\langle x_n, y\rangle \to \langle x, y\rangle$. Δείξτε ότι $\|x_n - x\| \to 0$.

4. Έστω H_1, H_2 χώροι Hilbert, $T \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$ και υποσύνολα $M_1 \subseteq H_1$ και $M_2 \subseteq H_2$. Αν ισχύει $T(M_1) \subseteq M_2$, αποδείξτε ότι $M_1^{\perp} \supseteq T^*\left(M_2^{\perp}\right)$. Αποδείξτε επιπλέον ότι αν οι M_1, M_2 είναι κλειστοί, τότε ισχύει και το αντίστροφο αυτής.

5. Έστω $T \in \mathcal{B}(H)$ και $S = I + T^*T \in \mathcal{B}(H)$, όπου H ένας χώρος Hilbert. Να δείξετε ότι ορίζεται ο $S^{-1} : S(H) \to H$.

6. Έστω H χώρος Hilbert και $T_n \in \mathcal{B}(H)$, μια ακολουθία από φραγμένους τελεστές στον H. Αν $T_n \to T$ ως προς την νόρμα του $\mathcal{B}(H)$, να δείξετε ότι ισχύει και $T_n^* \to T^*$.

7. Έστω H χώρος Hilbert και $T, S \in \mathcal{B}(H)$ μοναδιαίοι τελεστές. Να αποδείξετε ότι:

(α) Ο T είναι ισομετρία.

(β) Ισχύει $\|T\| = 1$.

(γ) Οι τελεστές T^{-1} και TS είναι κι αυτοί μοναδιαίοι.

Ομάδα Β΄

8. Έστω X χώρος με εσωτερικό γινόμενο, και A, B μη κενά υποσύνολα του X, με $A \subseteq B$. Δείξτε ότι
(α) $A \subseteq A^{\perp\perp}$, (β) $B^{\perp} \subseteq A^{\perp}$, (γ) $A^{\perp\perp\perp} = A^{\perp}$.

9. Έστω H χώρος Hilbert, και Y υπόχωρος του H. Δείξτε ότι ο Y είναι κλειστός αν και μόνο αν $Y = Y^{\perp\perp}$.

10. Έστω M, N κλειστοί υπόχωροι ενός χώρου Hilbert. Δείξτε ότι

$$(M+N)^{\perp} = M^{\perp} \cap N^{\perp} \quad , \quad (M \cap N)^{\perp} = \overline{M^{\perp} + N^{\perp}}.$$

11. Δώστε παράδειγμα χώρου Hilbert H και γραμμικού υπόχωρου F του H με την ιδιότητα $H \neq F + F^{\perp}$.

12. Έστω H χώρος Hilbert, και W, Z κλειστοί υπόχωροι του H με την ιδιότητα: αν $w \in W$ και $z \in Z$, τότε $w \perp z$ (οι W και Z είναι *κάθετοι*). Δείξτε ότι ο $W + Z$ είναι κλειστός υπόχωρος του H.

13. Σε έναν χώρο Hilbert H, θεωρούμε δύο κλειστούς υποχώρους M, N, και τις αντίστοιχες ορθογώνιες προβολές P_M, P_N. Εξετάστε αν ισχύει πάντα $P_M \circ P_N = P_N \circ P_M$.

14. Θεωρούμε τον $\mathcal{C}[-1,1]$ με εσωτερικό γινόμενο το $\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)dt$. Βρείτε το ορθοκανονικό σύνολο που προκύπτει αν εφαρμόσουμε τη διαδικασία Gram-Schmidt στις $1, t, t^2$.

Βρείτε $a, b, c \in \mathbb{R}$ τέτοιους ώστε να ελαχιστοποιείται το

$$\int_{-1}^{1} (t^4 - a - bt - ct^2)^2 dt.$$

15. Έστω $T : H \to H$ φραγμένος γραμμικός τελεστής, του οποίου η εικόνα είναι μονοδιάστατη. Δείξτε ότι υπάρχουν $u, v \in H$ τέτοια ώστε

$$T(x) = \langle x, u\rangle v, \quad x \in H.$$

[*Υπόδειξη:* Υπάρχει $v \in H$ τέτοιο ώστε $T(x) = \lambda_x v$, $x \in H$. Δείξτε ότι η $x \mapsto \lambda_x$ είναι φραγμένο γραμμικό συναρτησοειδές, και χρησιμοποιήστε το θεώρημα αναπαράστασης του Riesz.]

16. Έστω W κλειστός γραμμικός υπόχωρος του χώρου Hilbert H, και $f \in W^*$. Δείξτε ότι υπάρχει μοναδικό $\tilde{f} \in H^*$ τέτοιο ώστε $\tilde{f}|_W = f$ και $\|\tilde{f}\|_{H^*} = \|f\|_{W^*}$. [*Υπόδειξη:* Θεώρημα αναπαράστασης του Riesz στον W.]

17. Έστω X χώρος με εσωτερικό γινόμενο, και $\{e_k\}$ ορθοκανονική ακόλουθία στον X. Αν $x, y \in X$, δείξτε ότι

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\langle x, e_k\rangle \langle y, e_k\rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|.$$

18. Έστω Y κλειστός υπόχωρος του χώρου Hilbert H, και $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ ορθοκανονική βάση του Y. Δείξτε ότι αν $x \in H$, τότε το πλησιέστερο σημείο του Y προς το x είναι το $\sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n\rangle e_n$.

19. Δείξτε ότι η συνήθης ορθοκανονική βάση του ℓ_2 έχει την εξής ιδιότητα:

$$\forall f \in \ell_2^*, \quad f(e_n) \to 0.$$

20. Αποδείξτε ότι αν $T \in \mathcal{B}(H)$, όπου H χώρος Hilbert, αυτοσυζυγής τελεστής με $T \neq 0$, τότε είναι και $T^n \neq 0$ για κάθε $n = 1, 2, \ldots$

21. Αποδείξτε ότι αν ο $T \in \mathcal{B}(H)$, όπου H χώρος Hilbert, είναι μια ισομετρία, τότε $T^*T = I$, ο ταυτοτικός τελεστής στον H.

22. Αποδείξτε ότι αν H χώρος Hilbert και $T \in \mathcal{B}(H)$ μια ισομετρία που δεν είναι μοναδιαίος τελεστής, τότε η εικόνα του T είναι ένας γνήσιος κλειστός υπόχωρος του H.

23. Αποδείξτε ότι αν X χώρος με εσωτερικό γινόμενο πεπερασμένης διάστασης και $T \in \mathcal{B}(X)$ μια ισομετρία, τότε ο T είναι μοναδιαίος τελεστής.

Ομάδα Γ′

24. Έστω H χώρος Hilbert, και (x_n) ορθογώνια ακολουθία στον H (δηλαδή, αν $n \neq m$, τότε $x_n \perp x_m$.) Τότε, η $\sum_n x_n$ συγκλίνει αν και μόνο αν η $\sum_n \|x_n\|^2$ συγκλίνει.

25. Έστω X χώρος με εσωτερικό γινόμενο και (e_k) μια ορθοκανονική ακολουθία στον X. Αποδείξτε ότι για κάθε $x \in X$ ισχύει

$$|\{k \in \mathbb{N} : \ |\langle x, e_k\rangle| > 1/m\} < m^2 \|x\|^2,$$

όπου με $|A|$ συμβολίζουμε το πλήθος των στοιχείων ενός συνόλου A.

26. Έστω X χώρος με εσωτερικό γινόμενο, και $x_1, \ldots, x_n \in X$. Δείξτε ότι

$$\sum_{i \neq j} \|x_i - x_j\|^2 = n \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^2 - \left\| \sum_{i=1}^{n} x_i \right\|^2.$$

Αν $\|x_i - x_j\| \geq 2$ για $i \neq j$, δείξτε ότι αν μιά μπάλα περιέχει όλα τα x_i, πρέπει να έχει ακτίνα τουλάχιστον $\sqrt{2(n-1)/n}$.

27. Έστω X χώρος με εσωτερικό γινόμενο, και $x_1, \ldots, x_n \in X$. Δείξτε ότι

$$\sum_{\varepsilon_i = \pm 1} \left\| \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i x_i \right\|^2 = 2^n \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^2,$$

όπου το εξωτερικό άθροισμα είναι πάνω από όλες τις ακολουθίες $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) \in \{-1, 1\}^n$.

28. Έστω H χώρος Hilbert και M, N κλειστοί υπόχωροι του H. Να δείξετε ότι, για κάθε $x \in H$ είναι

$$P_{M \cap N} x = \lim_{n \to \infty} (P_M \circ P_N \circ P_M)^n x.$$

Κεφάλαιο 5

Το Θεώρημα Hahn - Banach

5.1 Το Λήμμα του Zorn

Έστω M ένα μη κενό σύνολο. Μια σχέση $\leq$ στο M λέγεται *μερική διάταξη* αν ικανοποιεί τα εξής:

(1) για κάθε $a \in M$, $a \leq a$ (ανακλαστική ιδιότητα).

(2) αν $a \leq b$ και $b \leq a$, τότε $a = b$ (αντισυμμετρική ιδιότητα).

(3) αν $a \leq b$ και $b \leq c$, τότε $a \leq c$ (μεταβατική ιδιότητα).

Το M λέγεται τότε *μερικά διατεταγμένο σύνολο* (ως προς την $\leq$). Από τον ορισμό φαίνεται ότι μπορεί στο M να υπάρχουν a και b για τα οποία να μην ισχύει καμμία από τις $a \leq b$ και $b \leq a$ (τότε, λέμε ότι τα a και b *δεν συγκρίνονται.*) Τα a και b *συγκρίνονται* αν ισχύει τουλάχιστον μία από τις $a \leq b$ ή $b \leq a$.

(α) Ένα μη κενό υποσύνολο A του M λέγεται *ολικά διατεταγμένο* (ή *αλυσίδα*) αν οποιαδήποτε δύο στοιχεία του συγκρίνονται.

(β) Αν $W \neq \emptyset$, $W \subseteq M$ και $u \in M$, λέμε ότι το u είναι *άνω φράγμα* για το W αν: για κάθε $x \in W$ ισχύει $x \leq u$. Ένα υποσύνολο W του M μπορεί να έχει ή να μην έχει άνω φράγμα.

(γ) Το $r \in M$ λέγεται *μέγιστο στοιχείο* του M αν για κάθε $x \in M$ ισχύει $x \leq r$. Αν το M έχει μέγιστο στοιχείο, τότε αυτό είναι μοναδικό (γιατί;).

(δ) Το $m \in M$ λέγεται *μεγιστικό στοιχείο* του M αν: για κάθε $x \in M$ με $m \leq x$ ισχύει $m = x$. Δηλαδή, αν δεν υπάρχει στοιχείο του M γνήσια μεγαλύτερο από το m. Ένα μερικά διατεταγμένο σύνολο M μπορεί να έχει ή να μην έχει μεγιστικά στοιχεία. Αν το M έχει μέγιστο στοιχείο, τότε αυτό είναι το μοναδικό μεγιστικό στοιχείο του M (γιατί;).

Παραδείγματα 5.1.1. (α) Το σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών με τη συνήθη διάταξη είναι ένα ολικά διατεταγμένο σύνολο που δεν περιέχει μεγιστικά στοιχεία.

(β) Έστω $X \neq \emptyset$ και $M = \mathcal{P}(X)$ το σύνολο όλων των υποσυνόλων του X (το *δυναμοσύνολο* του X). Ορίζουμε $\leq$ στο M ως εξής:

$$A \leq B \iff A \subseteq B. \tag{5.1}$$

Η $\leq$ είναι μερική διάταξη στο M (και αν το X έχει περισσότερα από ένα στοιχεία, τότε υπάρχουν $A, B \in M$ που δεν συγκρίνονται: πάρτε π.χ. A μη κενό, γνήσιο υποσύνολο του X, και $B = X \setminus A$.) Το M έχει *ένα* (ακριβώς) μεγιστικό στοιχείο, το X (το οποίο είναι το μέγιστο στοιχείο του M).

(γ) Θεωρούμε το σύνολο $M = \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, των διατεταγμένων n-άδων πραγματικών αριθμών. Αν $x = (\xi_1, \ldots, \xi_n), y = (\eta_1, \ldots, \eta_n)$, λέμε ότι $x \leq y$ αν $\xi_i \leq \eta_i$ για κάθε $i = 1, \ldots, n$. Το M είναι μερικά διατεταγμένο ως προς την $\leq$, και δεν περιέχει μεγιστικά στοιχεία.

(δ) Θεωρούμε το σύνολο $M = \mathbb{N}$ των φυσικών αριθμών, και λέμε ότι $m \leq n$ αν ο m διαιρεί τον n. Η $\leq$ είναι μερική διάταξη στο $\mathbb{N}$ (τα στοιχεία 3 και 7 του $\mathbb{N}$ δεν συγκρίνονται.) Το $A = \{3 \cdot 2^k : k = 0, 1, 2, \ldots\}$ είναι ολικά διατεταγμένο υποσύνολο του $\mathbb{N}$. Το $\mathbb{N}$ δεν περιέχει μεγιστικά στοιχεία ως προς την $\leq$.

Αν θεωρήσουμε το σύνολο $P = \{2, 3, 5, 7, 11, \ldots\}$ των *πρώτων αριθμών* με την ίδια διάταξη $\leq$, τότε κάθε στοιχείο του P είναι μεγιστικό. Πάλι με την $\leq$, το $\{2, 3, 4, 8\}$ έχει *δύο* μεγιστικά στοιχεία: το 3 και το 8 (ελέγξτε τους παραπάνω ισχυρισμούς.)

Λήμμα του Zorn. *Έστω $M \neq \emptyset$ ένα μερικά διατεταγμένο σύνολο (ως προς την $\leq$). Υποθέτουμε ότι κάθε αλυσίδα $A \subseteq M$ έχει άνω φράγμα στο M. Τότε, το M έχει τουλάχιστον ένα μεγιστικό στοιχείο.*

Ας δοκιμάσουμε να «αποδείξουμε» αυτήν την πρόταση: το M είναι μη κενό, παίρνουμε λοιπόν κάποιο $x_1 \in M$. Αν το x_1 είναι μεγιστικό έχουμε το ζητούμενο, αλλιώς υπάρχει $x_2 \in M$ με $x_1 < x_2$, και το $\{x_1, x_2\}$ είναι αλυσίδα. Αν το x_2 είναι μεγιστικό έχουμε το ζητούμενο, αλλιώς υπάρχει $x_3 \in M$ με $x_1 < x_2 < x_3$ και το $\{x_1, x_2, x_3\}$ είναι αλυσίδα. Συνεχίζοντας έτσι, βρίσκουμε μεγιστικό στοιχείο x_n ή φτιάχνουμε αλυσίδα $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Αυτή έχει άνω φράγμα, έστω y_1 από την υπόθεση. Αν το y_1 είναι μεγιστικό, τελειώσαμε. Αλλιώς; Συνεχίζουμε όπως και πριν. Αυτό που δεν είναι φανερό είναι αν αυτή η διαδικασία θα μας δώσει κάποια στιγμή μεγιστικό στοιχείο του M.

Για την ακρίβεια, η μέθοδος αυτή δεν μπορεί να δώσει απόδειξη: το Λήμμα του Zorn είναι *ισοδύναμο* με το αξίωμα της επιλογής, και θα το δεχτούμε σαν *αξίωμα* στη μελέτη μας.

Ο τρόπος με τον οποίο χρησιμοποιείται το Λήμμα του Zorn θα γίνει καθαρός με την απόδειξη του εξής θεωρήματος (την οποία είχαμε αναβάλλει):

Θεώρημα 5.1.2. *Κάθε γραμμικός χώρος $X \neq \{0\}$ έχει βάση Hamel.*

Απόδειξη. Θεωρούμε το σύνολο M όλων των γραμμικά ανεξάρτητων υποσυνόλων του X. Το M είναι μη κενό: αφού $X \neq \{0\}$, υπάρχει $x \in X$, $x \neq 0$. Το $\{x\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο, άρα $\{x\} \in M$.

Ορίζουμε διάταξη $\leq$ στο M, θέτοντας $A \leq B \Leftrightarrow A \subseteq B$. Η $\leq$ είναι μερική διάταξη (παρατηρήστε ότι σε έναν γραμμικό χώρο, μπορούμε να έχουμε δύο *ξένα*, άρα μη συγκρίσιμα, γραμμικά ανεξάρτητα σύνολα.)

Ισχυρισμός. Το $(M, \leq)$ ικανοποιεί την υπόθεση του Λήμματος του Zorn.

Απόδειξη: Έστω $\mathcal{A} \subseteq M$ ολικά διατεταγμένο. Γράφουμε $\mathcal{A} = \{A_i : i \in I\}$, όπου κάθε A_i είναι γραμμικά ανεξάρτητο υποσύνολο του X, και, αν $i, j \in I$, τότε είτε $A_i \subseteq A_j$ είτε $A_j \subseteq A_i$.

Ορίζουμε $U = \bigcup_{i\in I} A_i$. Προφανώς, $U \subseteq X$ και $A_i \subseteq U$ για κάθε $i \in I$. Δείχνουμε ότι $U \in M$, δηλαδή ότι το U είναι γραμμικά ανεξάρτητο. Αυτό θα δείξει ότι το U είναι άνω φράγμα του $\mathcal{A}$ στο M.

Έστω $x_1, \dots, x_m \in U$. Αφού $x_k \in U$, $k = 1, \dots, m$, υπάρχουν $A_{i_1}, \dots, A_{i_m}$ τέτοια ώστε $x_k \in A_{i_k}$. Το $\mathcal{A}$ είναι ολικά διατεταγμένο, άρα τα A_{i_k} συγκρίνονται ανά δύο. Αφού είναι πεπερασμένα το πλήθος, υπάρχει k_0 τέτοιο ώστε $A_{i_k} \subseteq A_{i_{k_0}}$, $k = 1, \dots, m$. Δηλαδή, $x_1, \dots, x_m \in A_{i_{k_0}}$. Το $A_{i_{k_0}}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο, άρα το $\{x_1, \dots, x_m\} \subseteq A_{i_{k_0}}$ είναι κι αυτό γραμμικά ανεξάρτητο. Αφού το $\{x_1, \dots, x_m\}$ ήταν το τυχόν πεπερασμένο υποσύνολο του U, το U είναι γραμμικά ανεξάρτητο. $\square$

Τώρα, εφαρμόζεται το Λήμμα του Zorn: Το M έχει μεγιστικό στοιχείο B. Το B είναι γραμμικά ανεξάρτητο, και για να δείξουμε ότι είναι βάση αρκεί να δούμε ότι παράγει τον X.

Έστω $Y = \mathrm{span}(B)$. Υποθέτουμε ότι $Y \neq X$. Τότε, υπάρχει $z \in X \setminus Y$, δηλαδή το z δεν γράφεται σαν πεπερασμένος γραμμικός συνδυασμός στοιχείων του B. Θα δείξουμε ότι το $B \cup \{z\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο: Αν $\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_m x_m + \mu z = 0$, τότε $\mu = 0$, αλλιώς το z θα ήταν γραμμικός συνδυασμός των $x_1, \dots, x_m$. Άρα, $\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_m x_m = 0$, και αφού το B είναι γραμμικά ανεξάρτητο, $\lambda_1 = \cdots = \lambda_m = 0$.

Άρα, το B δεν είναι μεγιστικό στοιχείο του M. Το $B \cup \{z\}$ ανήκει στο M και περιέχει γνήσια το B. Αυτό είναι άτοπο.

Έπεται ότι $X = Y = \mathrm{span}(B)$, δηλαδή το B είναι βάση. $\square$

Σημείωση: Η ουσία της απόδειξης βρίσκεται στο τελευταίο βήμα. Ουσιαστικά δείξαμε ότι αν B είναι ένα γραμμικά ανεξάρτητο υποσύνολο του X που δεν παράγει τον X, τότε μπορούμε να επεκτείνουμε το B σε ένα γνήσια μεγαλύτερο σύνολο $B' = B \cup \{z\}$, που είναι επίσης γραμμικά ανεξάρτητο. Το Λήμμα του Zorn μάς επιτρέπει να ισχυριστούμε την ύπαρξη μεγιστικού γραμμικά ανεξάρτητου υποσυνόλου του X. Αυτό δεν επεκτείνεται, άρα παράγει το χώρο, άρα είναι βάση.

Σε τέτοιες περιπτώσεις, όπου το ζητούμενο είναι κάποια «μεγιστική επέκταση», το Λήμμα του Zorn είναι εξαιρετικά χρήσιμο. Το Θεώρημα Hahn-Banach είναι, όπως θα δούμε, ακριβώς ένα θεώρημα επέκτασης.

5.2 Το Θεώρημα Hahn - Banach

Ορισμός 5.2.1. Έστω X γραμμικός χώρος, και $p : X \to \mathbb{R}$. Το p λέγεται *υπογραμμικό συναρτησοειδές*, αν ικανοποιεί τα εξής:

(i) $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$ για κάθε $x, y \in X$,

(ii) $p(\lambda x) = \lambda p(x)$ για κάθε $\lambda \geq 0$ και κάθε $x \in X$,

δηλαδή, αν είναι υποπροσθετικό και θετικά ομογενές.

Παρατηρήστε ότι: δεν απαιτούμε το p να παίρνει μη αρνητικές τιμές, ούτε την $p(\lambda x) = |\lambda| p(x)$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Στην περίπτωση που το p ικανοποιεί και αυτές τις ιδιότητες, λέγεται *ημινόρμα*. Επιπλέον, εύκολα ελέγχονται οι $p(0) = 0$ και $p(-x) \geq -p(x)$, $x \in X$ (άσκηση).

Παραδείγματα 5.2.2. (α) Αν $f : X \to \mathbb{R}$ είναι γραμμικό συναρτησοειδές, τότε τα $f, |f|$ είναι υπογραμμικά συναρτησοειδή.

(β) Κάθε νόρμα $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ είναι υπογραμμικό συναρτησοειδές.

(γ) Η $p : \ell_\infty \to \mathbb{R}$ με $p((\xi_k)) = \text{limsup}\xi_k$ είναι υπογραμμικό συναρτησοειδές στον ℓ_∞ (εξηγήστε γιατί).

Θεώρημα 5.2.3. *(Θεώρημα επέκτασης του Hahn) Έστω X γραμμικός χώρος, και $p : X \to \mathbb{R}$ υπογραμμικό συναρτησοειδές. Έστω Z γραμμικός υπόχωρος του X, και $f : Z \to \mathbb{R}$ γραμμικό συναρτησοειδές με την ιδιότητα: για κάθε $x \in Z$,*

$$(*) \qquad f(x) \leq p(x).$$

Τότε, υπάρχει γραμμικό συναρτησοειδές $\tilde{f} : X \to \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε
(i) $\tilde{f}(x) = f(x)$ αν $x \in Z$ (το $\tilde{f}$ είναι επέκταση του f),
(ii) $\tilde{f}(x) \leq p(x)$ για κάθε $x \in X$.

Παρατηρήσεις: (α) Κατ΄ αρχάς, δεν υποθέτουμε καμία τοπολογική δομή για το χώρο X (είναι απλώς ένας γραμμικός χώρος.)

(β) Όπως θα δούμε, το ουσιαστικό βήμα της απόδειξης είναι να δούμε πώς θα επεκτείνουμε το f από έναν υπόχωρο W σε έναν υπόχωρο W_1 που έχει «μία διάσταση παραπάνω», με γραμμικό τρόπο και χωρίς να χαλάσει η $(*)$. Από τη στιγμή που αυτό είναι δυνατό, το Λήμμα του Zorn μας εξασφαλίζει μια «μεγιστική επέκταση» $\tilde{f}$, κι αυτή (όπως θα δούμε) υποχρεούται να έχει πεδίο ορισμού ολόκληρον τον X.

Αρχίζουμε λοιπόν με το εξής Λήμμα:

Λήμμα 5.2.4. *Με τις υποθέσεις του Θεωρήματος, ας υποθέσουμε επιπλέον ότι για κάποιον γραμμικό υπόχωρο W_1 του X ο οποίος περιέχει τον Z, έχουμε βρεί $f_1 : W_1 \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $f_1|_Z = f$ και $f_1(x) \leq p(x)$ για κάθε $x \in W_1$.*

Έστω $y \in X \backslash W_1$, και $W_2 = \text{span}\{W_1, y\}$. Τότε, υπάρχει $f_2 : W_2 \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $f_2|_{W_1} = f_1$ και $f_2(x) \leq p(x)$ για κάθε $x \in W_2$.

Απόδειξη. Κάθε $z \in W_2$ γράφεται *μονοσήμαντα* στη μορφή

$$z = x + \lambda y$$

για κάποια $x \in W_1$ και $\lambda \in \mathbb{R}$ (άσκηση). Η γραμμική επέκταση f_2 που ζητάμε προσδιορίζεται λοιπόν μονοσήμαντα από την τιμή $a \in \mathbb{R}$ που θα επιλέξουμε σαν $f_2(y)$. Αν θέσουμε $f_2(y) = a$, τότε πρέπει να έχουμε

$$(1) \qquad f_2(z) = f_2(x) + \lambda f_2(y) = f_1(x) + \lambda a,$$

αφού ζητάμε το f_2 να είναι γραμμικό και να επεκτείνει το f_1. Η άλλη ιδιότητα που ζητάμε από το a είναι η εξής: Για κάθε $x \in W_1$ και κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$(2) \qquad f_1(x) + \lambda a \leq p(x + \lambda y).$$

Ισοδύναμα, παίρνοντας υπ' όψιν τις (1) και (2), ζητάμε $a \in \mathbb{R}$ με την ιδιότητα: για κάθε $x \in W_1$ και κάθε $\lambda > 0$,

$$(3) \qquad f_1(x) + \lambda a \leq p(x + \lambda y) \quad , \quad f_1(x) - \lambda a \leq p(x - \lambda y).$$

Επειδή το p είναι θετικά ομογενές και το f_1 γραμμικό στον W_1, η (3) είναι ισοδύναμη με το εξής: για κάθε $x \in W_1$ και κάθε $\lambda > 0$,

$$(4) \qquad f_1\left(\frac{x}{\lambda}\right) + a \leq p\left(\frac{x}{\lambda} + y\right) \quad , \quad f_1\left(\frac{x}{\lambda}\right) - a \leq p\left(\frac{x}{\lambda} - y\right),$$

και επειδή ο W_1 είναι υπόχωρος, ισοδύναμα ζητάμε $a \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε: για κάθε $x, x' \in W_1$,

$$f_1(x') - p(x' - y) \leq a \leq p(x + y) - f_1(x).$$

Μιά τέτοια επιλογή του a είναι δυνατή αν και μόνο αν για κάθε $x, x' \in W_1$,

$$f_1(x) + f_1(x') \leq p(x' - y) + p(x + y).$$

Όμως,

$$\begin{aligned} f_1(x) + f_1(x') &= f_1(x + x') \\ &\leq p(x + x') \\ &= p((x' - y) + (x + y)) \\ &\leq p(x' - y) + p(x + y), \end{aligned}$$

από την υπογραμμικότητα του p, την γραμμικότητα του f_1 στον W_1, την $f_1 \leq p$ στον W_1, και το γεγονός ότι το p ορίζεται σε ολόκληρο τον X. Αυτό αποδεικνύει το Λήμμα. □

Απόδειξη του Θεωρήματος: Έστω $\mathcal{W}$ η οικογένεια όλων των ζευγαριών (W_1, f_1) που ικανοποιούν τα εξής:

(α) ο W_1 είναι γραμμικός υπόχωρος του X, και $Z \subseteq W_1$.

(β) το $f_1 : W_1 \to \mathbb{R}$ είναι γραμμικό, και $f_1|_Z = f$.

(γ) $f_1(x) \leq p(x)$ για κάθε $x \in W_1$.

Η $\mathcal{W}$ είναι μη κενή, αφού $(Z, f) \in \mathcal{W}$. Ορίζουμε διάταξη $\leq$ στην $\mathcal{W}$ θέτοντας $(W_1, f_1) \leq (W_2, f_2)$ αν και μόνο αν $W_1 \subseteq W_2$ και $f_2|_{W_1} = f_1$, δηλαδή η f_2 επεκτείνει την f_1.

Το $(\mathcal{W}, \leq)$ είναι μερικά διατεταγμένο σύνολο. Θα δείξουμε ότι ικανοποιεί την υπόθεση του Λήμματος του Zorn: Έστω $\mathcal{C} = \{(W_i, f_i) : i \in I\}$ μια αλυσίδα στο $(\mathcal{W}, \leq)$. Ορίζουμε $W' = \bigcup_{i \in I} W_i$ και $f' : W' \to \mathbb{R}$ με $f'(x) = f_i(x)$, $x \in W_i$. Αποδεικνύουμε εύκολα ότι:

(α) Ο W' είναι γραμμικός υπόχωρος του X, και $Z \subseteq W_i \subseteq W'$ για κάθε $i \in I$ (θα χρειαστείτε το γεγονός ότι αν $i, j \in I$ τότε, είτε $W_i \subseteq W_j$ είτε $W_j \subseteq W_i$, αφού η $\mathcal{C}$ είναι αλυσίδα.)

(β) Η f' ορίζεται καλά, είναι γραμμική, και $f'(x) \leq p(x)$ για κάθε $x \in W'$ (κι εδώ θα χρειαστείτε το γεγονός ότι αν $i, j \in I$ τότε, είτε $f_j|_{W_i} = f_i$ είτε $f_i|_{W_j} = f_j$ αφού η $\mathcal{C}$ είναι αλυσίδα.)

(γ) Για κάθε $i \in I$, $f'|_{W_i} = f_i$.

Έπεται ότι $(W', f') \in \mathcal{W}$, και το (W', f') είναι άνω φράγμα της $\mathcal{C}$.

Από το Λήμμα του Zorn, το $(\mathcal{W}, \leq)$ έχει μεγιστικό στοιχείο (W_0, f_0). Από το Λήμμα 5.2.4 βλέπουμε ότι $W_0 = X$: Αν όχι, θα παίρναμε $y \in X \setminus W_0$, και ορίζοντας $W_0' = \mathrm{span}\{W_0, y\}$ θα επεκτείναμε το f_0 σε $f_0' : W_0' \to \mathbb{R}$, οπότε το (W_0', f_0') θα ήταν γνήσια μεγαλύτερο από το (W_0, f_0), άτοπο.

Η $\tilde{f} = f_0 : X \to \mathbb{R}$ είναι η ζητούμενη επέκταση της f στον X. □

Στο πλαίσιο των χώρων με νόρμα, το Θεώρημα Hahn-Banach διατυπώνεται συνήθως στην εξής μορφή:

Θεώρημα 5.2.5. *(Banach) Έστω X χώρος με νόρμα, Y γραμμικός υπόχωρος του X, και $f : Y \to \mathbb{R}$ φραγμένο γραμμικό συναρτησοειδές. Δηλαδή,*

$$\|f\|_{Y^*} = \sup_{x\in Y, \|x\|=1} |f(x)| < +\infty.$$

Τότε, υπάρχει $\tilde{f} : X \to \mathbb{R}$ φραγμένο γραμμικό συναρτησοειδές με $\tilde{f}|_Y = f$ και $\|\tilde{f}\| = \|f\|_{Y^*}$. (Δηλαδή, υπάρχει συνεχής επέκταση του f στον X, με διατήρηση της νόρμας.)

Απόδειξη. Έχουμε $|f(x)| \leq \|f\|_{Y^*}\|x\|$ για κάθε $x \in Y$. Ορίζουμε $p : X \to \mathbb{R}$ με $p(x) = \|f\|_{Y^*}\|x\|$. Το p είναι υπογραμμικό συναρτησοειδές:

(α) Για την υπογραμμικότητα, παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} p(x+y) &= \|f\|_{Y^*}\|x+y\| \leq \|f\|_{Y^*}(\|x\| + \|y\|) \\ &= \|f\|_{Y^*}\|x\| + \|f\|_{Y^*}\|y\| \\ &= p(x) + p(y). \end{aligned}$$

(β) Το p είναι θετικά ομογενές: αν $\lambda > 0$, τότε

$$p(\lambda x) = \|f\|_{Y^*}\|\lambda x\| = \lambda\|f\|_{Y^*}\|x\| = \lambda p(x).$$

Από το Θεώρημα επέκτασης του Hahn, υπάρχει γραμμική επέκταση $\tilde{f} : X \to \mathbb{R}$ της f, τέτοια ώστε

$$\tilde{f}(x) \leq p(x) = \|f\|_{Y^*}\|x\|, \quad x \in X. \tag{1}$$

Παίρνοντας το $-x$ στη θέση του x και χρησιμοποιώντας τη γραμμικότητα του $\tilde{f}$, βλέπουμε ότι

$$-\tilde{f}(x) = \tilde{f}(-x) \leq p(-x) = \|f\|_{Y^*}\|-x\| = \|f\|_{Y^*}\|x\|, \quad x \in X. \tag{2}$$

Από τις (1) και (2) συμπεραίνουμε ότι, για κάθε $x \in X$,

$$|\tilde{f}(x)| \leq \|f\|_{Y^*}\|x\|.$$

Άρα, $\tilde{f} \in X^*$, και $\|\tilde{f}\| \leq \|f\|_{Y^*}$. Από την άλλη πλευρά, αφού $\tilde{f}|_Y = f$, παίρνουμε

$$\|\tilde{f}\| = \sup_{x\in X, \|x\|=1} |\tilde{f}(x)| \geq \sup_{x\in Y, \|x\|=1} |f(x)| = \|f\|_{Y^*}.$$

Δηλαδή, $\|\tilde{f}\| = \|f\|_{Y^*}$. □

Το Θεώρημα 5.2.5 μάς λέει ότι ο X^* είναι «πλούσιος σε συναρτησοειδή». Στην επόμενη παράγραφο θα δούμε πολλές εφαρμογές αυτού του είδους. Δίνουμε εδώ ένα πρώτο παράδειγμα.

Πρόταση 5.2.6. *Έστω X χώρος με νόρμα, $x_1, \ldots, x_m$ γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα στον X, και $a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{R}$. Υπάρχει $f \in X^*$ τέτοιο ώστε $f(x_i) = a_i$, $i = 1, \ldots, m$.*

Απόδειξη. Θέτουμε $Y = \mathrm{span}\{x_1, \ldots, x_m\}$. Ο Y έχει διάσταση m και τα διανύσματα $x_1, \ldots, x_m$ σχηματίζουν βάση του. Ορίζουμε $f_0 : Y \to \mathbb{R}$ με

$$f_0\left(\sum_{i=1}^m \lambda_i x_i\right) = \sum_{i=1}^m \lambda_i a_i.$$

Τότε, $f_0(x_i) = a_i$, και το f_0 είναι φραγμένο γραμμικό συναρτησοειδές στον Y, αφού ο Y έχει πεπερασμένη διάσταση (παρατηρήστε ότι το f_0 είναι καλά ορισμένο, αφού κάθε $x \in Y$ γράφεται μονοσήμαντα στη μορφή $x = \sum_{i=1}^m \lambda_i x_i$.)

Από το Θεώρημα Hahn-Banach, το f_0 έχει φραγμένη γραμμική επέκταση $f \in X^*$. Προφανώς,

$$f(x_i) = f_0(x_i) = a_i, \quad i = 1, \ldots, m.$$

□

5.3 Εφαρμογές

(α) **Ο X^* περιέχει «πολλά» συναρτησοειδή,**

Θεώρημα 5.3.1. *Έστω $X \neq \{0\}$ χώρος με νόρμα, και $x_0 \in X$, $x_0 \neq 0$. Υπάρχει φραγμένο γραμμικό συναρτησοειδές $\tilde{f} : X \to \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $\|\tilde{f}\| = 1$ και $\tilde{f}(x_0) = \|x_0\|$.*

Απόδειξη. Θεωρούμε τον υπόχωρο $Z = \mathrm{span}\{x_0\}$ που παράγεται από το x_0, και ορίζουμε $f : Z \to \mathbb{R}$ με $f(\lambda x_0) = \lambda \|x_0\|$. Το f είναι γραμμικό, και

$$\|f\|_{Z^*} = \sup_{\lambda \neq 0} \frac{|f(\lambda x_0)|}{\|\lambda x_0\|} = 1.$$

Από το Θεώρημα Hahn-Banach, υπάρχει $\tilde{f} : X \to \mathbb{R}$ φραγμένο γραμμικό συναρτησοειδές, με $\|\tilde{f}\| = \|f\|_{Z^*} = 1$ και

$$\tilde{f}(x_0) = f(x_0) = \|x_0\|.$$

□

Πόρισμα 5.3.2. *Αν $X \neq \{0\}$, τότε $X^* \neq \{0\}$.*

Απόδειξη. Αν $x_0 \neq 0$ και $\tilde{f}$ όπως στο Θεώρημα 5.3.1, τότε $\tilde{f} \neq 0$. □

Ισχύει μάλιστα κάτι πολύ ισχυρότερο:

Θεώρημα 5.3.3. *Έστω X χώρος με νόρμα, και $x \in X$. Τότε,*

$$\|x\| = \max_{\|f\|=1} |f(x)|. \tag{5.2}$$

Απόδειξη. Από το Θεώρημα 5.3.1, υπάρχει $\tilde{f} \in X^*$, $\|\tilde{f}\| = 1$ με $\tilde{f}(x) = \|x\|$. Άρα,

$$\sup_{\|f\|=1} |f(x)| \geq |\tilde{f}(x)| = \|x\|. \tag{$*$}$$

Από την άλλη πλευρά, αν $\|f\| = 1$ τότε $|f(x)| \leq \|f\|\,\|x\| = \|x\|$. Άρα,

$$\sup_{\|f\|=1} |f(x)| \leq \|x\|. \tag{$**$}$$

Από τις $(*)$ και $(**)$, $\|x\| = \sup_{\|f\|=1} |f(x)|$. Το sup είναι max λόγω του $\tilde{f}$. □

Σημείωση: Γνωρίζουμε ήδη ότι $\|f\| = \sup_{\|x\|=1} |f(x)|$ για κάθε $f \in X^*$ (αυτό ήταν συνέπεια του *ορισμού* της νόρμας τελεστή.) Το Θεώρημα Hahn-Banach, στη μορφή του Θεωρήματος 5.3.3, μάς δίνει τη δυϊκή σχέση $\|x\| = \sup_{\|f\|=1} |f(x)|$: η νόρμα του x «πιάνεται» σαν τιμή κάποιου f από τη μοναδιαία σφαίρα του δυϊκού χώρου.

Πόρισμα 5.3.4. *Αν $f(x) = f(y)$ για κάθε $f \in X^*$, τότε $x = y$.*

Απόδειξη. Από το Θεώρημα 5.3.3 έχουμε ότι

$$\|x-y\| = \sup_{\|f\|=1} |f(x-y)| = \sup_{\|f\|=1} |f(x) - f(y)| = 0,$$

άρα $x = y$. □

Σημείωση: Λέμε ότι ο X^* *διαχωρίζει* τα σημεία του X: αν $x \neq y$, τότε υπάρχει $f \in X^*$ τέτοιο ώστε $f(x) \neq f(y)$.

(β) Ο δεύτερος δυϊκός ενός χώρου με νόρμα - Αυτοπαθείς χώροι

Έστω X χώρος με νόρμα. Έχουμε δεί ότι ο X^* είναι χώρος Banach με νόρμα την $\|f\| = \sup\{|f(x)| : \|x\| = 1\}$. Μπορούμε λοιπόν να μιλήσουμε για τον $(X^*)^*$, το χώρο όλων των φραγμένων γραμμικών συναρτησοειδών $F : X^* \to \mathbb{R}$, με νόρμα την

$$\|F\| = \sup_{\|f\|_{X^*}=1} |F(f)|.$$

Για ευκολία γράφουμε $X^{**} := (X^*)^*$. Ο X^{**} είναι ο *δεύτερος δυϊκός* του X.

Κάθε $x \in X$ ορίζει με φυσιολογικό τρόπο ένα στοιχείο $\tau(x)$ του X^{**} ως εξής: ορίζουμε $\tau(x) : X^* \to \mathbb{R}$, με

$$[\tau(x)](f) = f(x), \quad f \in X^*. \tag{5.3}$$

Λήμμα 5.3.5. *Το $\tau(x)$ είναι φραγμένο γραμμικό συναρτησοειδές στον X^{**}.*

Απόδειξη. Ελέγχουμε πρώτα τη γραμμικότητα του $\tau(x)$: Αν $f, g \in X^*$ και $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, τότε

$$\begin{aligned} [\tau(x)](\lambda f + \mu g) &= (\lambda f + \mu g)(x) \\ &= \lambda f(x) + \mu g(x) \\ &= \lambda[\tau(x)](f) + \mu[\tau(x)](g). \end{aligned}$$

Επίσης,

$$|[\tau(x)](f)| = |f(x)| \leq \|f\| \, \|x\| = \|x\| \, \|f\|, \quad f \in X^*.$$

Άρα, $\tau(x) \in X^{**}$ και $\|\tau(x)\|_{X^{**}} \leq \|x\|_X$. □

Λήμμα 5.3.6. *Η απεικόνιση $\tau : X \to X^{**}$ με $x \mapsto \tau(x)$ είναι γραμμική ισομετρία. Ειδικότερα, η τ είναι ένα προς ένα.*

Απόδειξη. (α) Έστω $x_1, x_2 \in X$ και $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$. Για κάθε $f \in X^*$ έχουμε

$$\begin{aligned}[\tau(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2)](f) &= f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \\ &= \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) \\ &= \lambda_1[\tau(x_1)](f) + \lambda_2[\tau(x_2)](f) \\ &= [\lambda_1 \tau(x_1) + \lambda_2 \tau(x_2)](f).\end{aligned}$$

Άρα, $\tau(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \lambda_1 \tau(x_1) + \lambda_2 \tau(x_2)$, δηλαδή η τ είναι γραμμική.
(β) Έστω $x \in X$. Από το Θεώρημα 5.3.1, υπάρχει $\tilde{f} \in X^*$ τέτοιο ώστε $\|\tilde{f}\| = 1$ και $\tilde{f}(x) = \|x\|$. Άρα,

$$\|\tau(x)\|_{X^{**}} = \sup_{\|f\|=1} |[\tau(x)](f)| \geq |[\tau(x)](\tilde{f})| = |\tilde{f}(x)| = \|x\|.$$

Δηλαδή, $\|\tau(x)\|_{X^{**}} \geq \|x\|$. Στο προηγούμενο Λήμμα είδαμε ότι ισχύει και η αντίστροφη ανισότητα. Επομένως,

$$\|\tau(x)\|_{X^{**}} = \|x\|, \tag{5.4}$$

και η τ είναι ισομετρία.
(γ) Προφανώς, $\tau(x) = 0 \Longrightarrow \|\tau(x)\|_{X^{**}} = 0 \Longrightarrow \|x\| = 0 \Longrightarrow x = 0$. Επειδή η τ είναι γραμμική, αυτό δείχνει ότι η τ είναι ένα προς ένα. □

Άμεση συνέπεια των δύο λημμάτων είναι το εξής:

Θεώρημα 5.3.7. *Κάθε χώρος X με νόρμα εμφυτεύεται με φυσιολογικό τρόπο ισομετρικά στον X^{**} μέσω της $\tau : X \to X^{**}$ που ορίζεται από την*

$$[\tau(x)](f) = f(x). \quad \square$$

Παρατηρήσεις (1) Ο X είναι χώρος Banach αν και μόνο αν ο $\tau(x)$ είναι κλειστός υπόχωρος του X^{**}. Πράγματι, ο X^{**} είναι πλήρης και ο $\tau(X)$ γραμμικός υπόχωρος του X^{**}. Ο $\tau(X)$ είναι κλειστός αν και μόνο αν είναι πλήρης, όμως ο $\tau(X)$ είναι ισομετρικά ισομορφικός με τον X. Άρα, ο $\tau(X)$ είναι πλήρης αν και μόνο αν ο X είναι πλήρης.

(2) **Ορισμός.** Η απεικόνιση τ λέγεται *κανονική εμφύτευση* του X στον X^{**}. Ο X λέγεται *αυτοπαθής* αν $\tau(X) = X^{**}$, δηλαδή αν η τ είναι επί. Τότε, ο X είναι ισομετρικά ισομορφικός με τον X^{**}.

(3) Η ιδιότητα της αυτοπάθειας *δεν* είναι ισοδύναμη με την ύπαρξη ισομετρικού ισομορφισμού ανάμεσα στους X και X^{**}. Αν ο X είναι αυτοπαθής, τότε *είναι* ισομετρικά ισομορφικός με τον X^{**}, αλλά με πολύ ισχυρό τρόπο: η κανονική εμφύτευση τ είναι ισομετρία επί από τον X στον X^{**}. Ο James (1951) έχει δώσει παράδειγμα χώρου που είναι ισομετρικά ισομορφικός με τον δεύτερο δυϊκό του, χωρίς να είναι αυτοπαθής.

(4) Υπάρχουν πολλοί μη αυτοπαθείς χώροι. Πρώτα-πρώτα, ένας χώρος με νόρμα που δεν είναι πλήρης δεν μπορεί να είναι αυτοπαθής (γιατί;).

Ο c_0 δεν είναι αυτοπαθής, γιατί $c_0^* \simeq \ell_1$ και $\ell_1^* \simeq \ell_\infty$. Αν ο c_0 ήταν αυτοπαθής, τότε οι c_0 και ℓ_∞ θα ήταν ισομετρικά ισομορφικοί. Αυτό δεν μπορεί να ισχύει, αφού ο c_0 είναι διαχωρίσιμος ενώ ο ℓ_∞ όχι (εξηγήστε γιατί).

Ο ℓ_1 δεν είναι αυτοπαθής. Αν ήταν, θα ήταν ισομετρικά ισομορφικός με τον ℓ_∞^*, δηλαδή ο ℓ_∞^* θα ήταν διαχωρίσιμος. Όπως θα δούμε στην επόμενη υποπαράγραφο, αυτό θα σήμαινε ότι και ο ℓ_∞ είναι διαχωρίσιμος, άτοπο.

Πρόταση 5.3.8. *Ο ℓ_p, $1 < p < \infty$, είναι αυτοπαθής.*

Απόδειξη. Πρέπει να δείξουμε ότι $\tau(\ell_p) = (\ell_p^*)^*$. Θυμηθείτε ότι, για κάθε $f \in \ell_p^*$ υπάρχει $y(f) = (\eta_k) \in \ell_q$ τέτοιο ώστε $f(x) = \sum_k \xi_k \eta_k$ για κάθε $x = (\xi_k) \in \ell_p$. Η $S_p : \ell_p^* \to \ell_q$ με $S_p(f) = y(f)$ είναι ισομετρία επί. Αντίστοιχα ορίζεται η $S_q : \ell_q^* \to \ell_p$.

Έστω $F \in (\ell_p^*)^*$. Το $F \circ S_p^{-1} \in \ell_q^*$, άρα υπάρχει $x = (\xi_k) \in \ell_p$ τέτοιο ώστε

$$(F \circ S_p^{-1})((\eta_k)) = \sum_k \xi_k \eta_k, \quad y = (\eta_k) \in \ell_q.$$

Δείχνουμε ότι $\tau(x) = F$. Έστω $f \in \ell_p^*$. Υπάρχει $y = (\eta_k) \in \ell_q$ τέτοιο ώστε

$$f(x) = \sum_k \xi_k \eta_k,$$

δηλαδή, $y = S_p(f)$. Όμως τότε,

$$F(f) = F \circ S_p^{-1} \circ S_p(f) = F \circ S_p^{-1}((\eta_k)) = \sum_k \xi_k \eta_k = f(x) = [\tau(x)](f).$$

Άρα, $F = \tau(x)$. Το F ήταν τυχόν, άρα $\tau(\ell_p) = \ell_p^{**}$. □

(γ) **Ο X^* δίνει πληροφορίες για τον X.**

Στην 5.3(α) είδαμε ότι ο X^* διαχωρίζει τα σημεία του X. Το Θεώρημα που ακολουθεί δείχνει ότι ο X^* *διαχωρίζει σημεία από κλειστούς υποχώρους*:

Θεώρημα 5.3.9. *Έστω X χώρος με νόρμα, Y γνήσιος κλειστός υπόχωρος του X, και $x_0 \in X \setminus Y$. Αν*

$$\delta = d(x_0, Y) = \inf\{\|x_0 - y\| : y \in Y\},$$

τότε υπάρχει $\tilde{f} \in X^*$ τέτοιο ώστε $\|\tilde{f}\|_{X^*} = 1$, $\tilde{f}(y) = 0$ για κάθε $y \in Y$, και $\tilde{f}(x_0) = \delta$.

Απόδειξη. Θεωρούμε τον υπόχωρο $Z = \mathrm{span}\{Y, x_0\}$. Κάθε $x \in Z$ γράφεται μονοσήμαντα στη μορφή $x = y + \lambda x_0$, για κάποια $y \in Y$ και $\lambda \in \mathbb{R}$. Ορίζουμε $f : Z \to \mathbb{R}$ με

$$f(x) = f(y + \lambda x_0) = \delta \lambda.$$

Τότε, $f(y) = 0$ για κάθε $y \in Y$, και $f(x_0) = \delta$. Πρέπει να δείξουμε ότι το f είναι φραγμένο στον Z, και $\|f\|_{Z^*} = 1$. Κατόπιν, χρησιμοποιώντας το Θεώρημα Hahn-Banach επεκτείνουμε το f σε κάποιο $\tilde{f} \in X^*$ με τις ζητούμενες ιδιότητες (άσκηση).

Το f είναι φραγμένο: Έστω $x = y_1 + \lambda x_0 \in Z$. Αν $\lambda \neq 0$,

$$\begin{aligned} |f(x)| &= |\lambda|\delta = |\lambda| \inf_{y \in Y} \|x_0 - y\| \\ &\leq |\lambda| \left\| x_0 + \frac{1}{\lambda} y_1 \right\| \\ &= \|\lambda x_0 + y_1\| = \|x\|. \end{aligned}$$

Αν $\lambda = 0$, τότε $|f(x)| = 0 \leq \|x\|$. Άρα, $f \in Z^*$ και $\|f\|_{Z^*} \leq 1$.

Αντίστροφη ανισότητα για την $\|f\|_{Z^*}$*:* Υπάρχουν $y_n \in Y$ με $\|x_0 - y_n\| \to \delta$. Επίσης, έχουμε $\delta > 0$, γιατί ο Y είναι κλειστός και $x_0 \notin Y$.

Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε $0 \neq x_0 - y_n \in Z$, άρα

$$\|f\|_{Z^*} \geq \frac{|f(x_0 - y_n)|}{\|x_0 - y_n\|} = \frac{\delta}{\|x_0 - y_n\|} \to 1$$

καθώς $n \to \infty$. Άρα, $\|f\|_{Z^*} = 1$. □

Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 5.3.9, δείχνουμε το εξής:

Θεώρημα 5.3.10. *Αν ο* X^* *είναι διαχωρίσιμος, τότε ο* X *είναι διαχωρίσιμος.*

Για την απόδειξη θα μας χρειαστεί ένα Λήμμα:

Λήμμα 5.3.11. *Η* $S_{X^*} = \{f \in X^* : \|f\| = 1\}$ *είναι διαχωρίσιμη ως προς την επαγόμενη μετρική.*

Απόδειξη. Υπάρχει M αριθμήσιμο πυκνό υποσύνολο του X^*. Ορίζουμε

$$M_1 = \{g = f/\|f\| : f \in M\backslash\{0\}\}.$$

Το M_1 είναι αριθμήσιμο υποσύνολο της S_{X^*}, και θα δείξουμε ότι είναι πυκνό στην S_{X^*}.

Έστω $f \in S_{X^*}$. Υπάρχει ακολουθία $\{h_k\}$ στο M με $h_k \to f$. Άρα, $\|h_k\| \to \|f\| = 1$, δηλαδή, τελικά $h_k \neq 0$. Οι $l_k = h_k/\|h_k\|$ ανήκουν στο M_1, και

$$\begin{aligned} \|f - l_k\| &= \left\| f - \frac{h_k}{\|h_k\|} \right\| \\ &= \left\| f - h_k + h_k \left(1 - \frac{1}{\|h_k\|}\right) \right\| \\ &\leq \|f - h_k\| + \|h_k\| \left|1 - \frac{1}{\|h_k\|}\right| \to 0. \end{aligned}$$

Άρα, $\overline{M_1} = S_{X^*}$. □

Απόδειξη του Θεωρήματος: Θεωρούμε $\{g_n : n \in \mathbb{N}\}$ αριθμήσιμο πυκνό υποσύνολο της S_{X^*}. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε $\|g_n\| = \sup_{\|x\|=1} |g_n(x)| = 1$, άρα υπάρχει $x_n \in X$ με $\|x_n\| = 1$, τέτοιο ώστε

$$|g_n(x_n)| > \frac{1}{2}.$$

Ορίζουμε $Y = \text{span}\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Η ιδέα είναι ότι επειδή τα g_n είναι πυκνά στην S_{X^*}, πρέπει και τα x_n να είναι «πυκνά» στην S_X, οπότε $\overline{Y} = X$, το οποίο θα δείξει ότι ο X είναι διαχωρίσιμος.

Αυστηρή απόδειξη: Έστω ότι $\overline{Y} \neq X$. Τότε, από το Θεώρημα 7.3.4, υπάρχει $\tilde{f} \in X^*$ τέτοιο ώστε $\|\tilde{f}\| = 1$ και $\tilde{f}(y) = 0$ για κάθε $y \in Y$. Ειδικότερα, $\tilde{f}(x_n) = 0$, $n \in \mathbb{N}$.

Τότε, για κάθε $n \in \mathbb{N}$,

$$\|\tilde{f} - g_n\| \geq |(\tilde{f} - g_n)(x_n)| = |\tilde{f}(x_n) - g_n(x_n)| = |g_n(x_n)| > 1/2,$$

άτοπο, γιατί το $\{g_n : n \in \mathbb{N}\}$ είναι πυκνό στην S_{X^*}.

Άρα, $\overline{Y} = X$. Όμως, ο $\overline{Y}$ είναι διαχωρίσιμος: οι πεπερασμένοι γραμμικοί συνδυασμοί των x_n με ρητούς συντελεστές είναι πυκνοί στον $\overline{Y}$ (άσκηση). Άρα, ο X είναι διαχωρίσιμος. □

5.4 Διαχωριστικά θεωρήματα

Ορισμοί 5.4.1. Έστω X χώρος με νόρμα, και A, B μη κενά υποσύνολα του X.

(i) Λέμε ότι τα A, B *διαχωρίζονται*, αν υπάρχουν μη μηδενικό $f \in X^*$ και $\lambda \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε: $f(a) \geq \lambda$ για κάθε $a \in A$, και, $f(b) \leq \lambda$ για κάθε $b \in B$.

(ii) Λέμε ότι τα A, B *διαχωρίζονται γνήσια*, αν υπάρχουν $f \in X^*$ και $\lambda \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε: $f(a) > \lambda$ για κάθε $a \in A$, και, $f(b) < \lambda$ για κάθε $b \in B$.

(iii) Λέμε ότι τα A, B *διαχωρίζονται αυστηρά*, αν υπάρχουν $f \in X^*$ και $\lambda < \mu$ στο $\mathbb{R}$ ώστε: $f(a) \geq \mu$ για κάθε $a \in A$ και $f(b) \leq \lambda$ για κάθε $b \in B$.

Ο όρος δικαιολογείται από το γεγονός ότι το $\{x \in X : f(x) = \lambda\}$ είναι ένα κλειστό υπερεπίπεδο, το οποίο χωρίζει τον X σε δύο ξένους «ημιχώρους» εκ των οποίων ο ένας περιέχει το A και ο άλλος το B. Για να ισχύει κάποιο από τα (ii) και (iii) είναι φυσικά η $A \cap B = \emptyset$.

Τα διαχωριστικά θεωρήματα που θα συζητήσουμε αφορούν κυρτά σύνολα, και η απόδειξή τους βασίζεται πολύ ουσιαστικά στο Θεώρημα Hahn-Banach. Γι' αυτό και αναφερόμαστε σ' αυτά με τον όρο «γεωμετρική μορφή του Θεωρήματος Hahn-Banach».

Λήμμα 5.4.2. *Έστω X χώρος με νόρμα, και $A \subseteq X$ ανοιχτό και κυρτό, με $0 \in A$. Ορίζουμε*

$$q_A(x) = \inf\{t > 0 : x \in tA\}. \tag{5.5}$$

Τότε, το q_A είναι ένα μη αρνητικό υπογραμμικό συναρτησοειδές, υπάρχει $M > 0$ τέτοιο ώστε

$$q_A(x) \leq M\|x\|, \quad x \in X \tag{$*$}$$

και

$$A = \{x \in X : q_A(x) < 1\}. \tag{$**$}$$

Απόδειξη. Η q_A ορίζεται καλά: το A είναι ανοιχτό και περιέχει το 0, άρα υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $D(0, \delta) \subseteq A$. Έπεται ότι αν $0 \neq x \in X$, τότε $(\delta/2\|x\|)x \in A$, άρα $\frac{2}{\delta}\|x\| \in \{t > 0 : x \in tA\}$ και το σύνολο αυτό είναι κάτω φραγμένο από το 0, άρα έχει μέγιστο κάτω φράγμα. Επίσης,

$$q_A(x) \leq \frac{2}{\delta}\|x\|,$$

δηλαδή η $(*)$ ισχύει με $M = 2/\delta$ (αν $x = 0$, τότε από την κυρτότητα του A έπεται ότι $0 \in tA$ για κάθε $t > 0$ (γιατί;), άρα $q_A(0) = 0$.)

Δείχνουμε τώρα τις δύο ιδιότητες του υπογραμμικού συναρτησοειδούς: Έστω $\lambda > 0$. Τότε,

$$\begin{aligned} q_A(\lambda x) &= \inf\{t > 0 : \lambda x \in tA\} = \inf\{t > 0 : x \in (t/\lambda)A\} \\ &= \lambda \inf\{(t/\lambda) : t > 0,\ x \in (t/\lambda)A\} = \lambda \inf\{s > 0 : x \in sA\} \\ &= \lambda q_A(x). \end{aligned}$$

Για την υποπροσθετικότητα, έστω $x, y \in X$ και $\varepsilon > 0$. Υπάρχουν $t, s > 0$ τέτοια ώστε $t < q_A(x) + \varepsilon$, $s < q_A(y) + \varepsilon$, και $x \in tA$, $y \in sA$. Από την κυρτότητα του A έχουμε

$$tA + sA = (t+s)A$$

(γιατί;), άρα $x + y \in (t+s)A$. Έπεται ότι

$$q_A(x+y) \leq t + s < q_A(x) + q_A(y) + 2\varepsilon,$$

και αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν,

$$q_A(x+y) \leq q_A(x) + q_A(y). \tag{5.6}$$

Τέλος, δείχνουμε ότι $A = \{x \in X : q_A(x) < 1\}$. Αν $q_A(x) < 1$, τότε υπάρχει r τέτοιο ώστε $q_A(x) < r < 1$ και $x \in rA \subseteq A$. Αντίστροφα, αν $x \in A$, επειδή το A είναι ανοιχτό υπάρχει $t > 0$ τ.ω $x + tx \in A$ (άσκηση), οπότε $q_A(x) \leq \frac{1}{1+t} < 1$. □

Θεώρημα 5.4.3. *Έστω X χώρος με νόρμα, και A μη κενό, ανοιχτό κυρτό υποσύνολο του X που δεν περιέχει το 0. Τότε, υπάρχει $\tilde{f} \in X^*$ με την ιδιότητα $\tilde{f}(x) > 0$ για κάθε $x \in A$. Δηλαδή, το $\tilde{f}$ διαχωρίζει το A από το $\{0\}$.*

Απόδειξη. Έστω $x_0 \in A$. Το $A' = x_0 - A$ είναι ανοιχτό, κυρτό και περιέχει το 0. Σύμφωνα με το Λήμμα υπάρχει θετικό υπογραμμικό συναρτησοειδές $q : X \to \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε

$$q(x) \leq M\|x\|, \quad x \in X,$$

και $q(x) < 1$ αν και μόνο αν $x \in A'$. Ειδικότερα, $q(x_0) \geq 1$ (γιατί;).

Θεωρούμε τον υπόχωρο $W = \langle x_0 \rangle$ που παράγει το x_0, και ορίζουμε $f : W \to \mathbb{R}$ με $f(\lambda x_0) = \lambda q(x_0)$. Η f φράσσεται από το q: αν $\lambda \geq 0$, τότε $f(\lambda x_0) = q(\lambda x_0)$, ενώ αν $\lambda < 0$, τότε $f(\lambda x_0) < 0 \leq q(\lambda x_0)$. Επίσης, $f \in W^*$ γιατί

$$|f(\lambda x_0)| = |\lambda| q(x_0) \leq M|\lambda|\, \|x_0\| = M\|\lambda x_0\|.$$

Από το Θεώρημα Hahn-Banach, η f επεκτείνεται σε $\tilde{f} \in X^*$ με $\|\tilde{f}\| = \|f\|_{W^*}$. Τέλος, για κάθε $x \in A$ έχουμε $x_0 - x \in A'$, άρα $q(x_0 - x) < 1$, απ' όπου βλέπουμε ότι

$$\tilde{f}(x_0) - \tilde{f}(x) = \tilde{f}(x_0 - x) \leq q(x_0 - x) < 1.$$

Παίρνοντας υπ' όψιν και την $q(x_0) \geq 1$, συμπεραίνουμε ότι

$$\forall\, x \in A, \quad \tilde{f}(x) > \tilde{f}(x_0) - 1 = q(x_0) - 1 \geq 0.$$

□

Θεώρημα 5.4.4. *Έστω X χώρος με νόρμα, και A, B ξένα κυρτά σύνολα, με το A ανοιχτό. Τότε, υπάρχουν $f \in X^*$ και $\lambda \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε: $f(a) < \lambda$ αν $a \in A$, και $f(b) \geq \lambda$ αν $b \in B$. Αν το B είναι κι αυτό ανοιχτό, τότε τα A, B διαχωρίζονται γνήσια.*

Απόδειξη. Θέτουμε $G = A - B := \{a - b : a \in A, b \in B\}$. Εύκολα ελέγχουμε ότι το G είναι κυρτό, και αφού $G = \bigcup_{b \in B}(A - b)$, το G είναι ανοιχτό. Από την $A \cap B = \emptyset$ έπεται ότι $0 \notin G$. Από το προηγούμενο θεώρημα, υπάρχει $f \in X^*$ τέτοιο ώστε $f(x) > 0$ για κάθε $x \in G$.

Έστω $a \in A$, $b \in B$. Τότε, $a - b \in G$ άρα $f(a-b) > 0$. Δηλαδή, $f(a) > f(b)$. Υπάρχει λοιπόν $\lambda \in \mathbb{R}$ με την ιδιότητα

$$(*) \qquad \sup\{f(b) : b \in B\} \leq \lambda \leq \inf\{f(a) : a \in A\}.$$

Το A έχει υποτεθεί ανοιχτό και κυρτό, άρα το $f(A)$ είναι ένα ανοιχτό διάστημα στο $\mathbb{R}$ (άσκηση), άρα η $(*)$ δίνει

$$\forall\, a \in A, \quad f(a) > \lambda \quad , \quad \forall\, b \in B, \quad f(b) \leq \lambda.$$

Αν και το B είναι ανοιχτό, τότε το $f(B)$ είναι επίσης ανοιχτό διάστημα, άρα $f(b) < \lambda$ για κάθε $b \in B$, δηλαδή τα A, B διαχωρίζονται γνήσια. □

Τέλος, δείχνουμε ένα διαχωριστικό θεώρημα για ξένα κλειστά και κυρτά υποσύνολα του X, αν ένα από αυτά είναι συμπαγές. Θα χρησιμοποιήσουμε το εξής λήμμα:

Λήμμα 5.4.5. *Έστω X χώρος με νόρμα, K συμπαγές υποσύνολο του X, και A ανοιχτό υποσύνολο του X με $K \subseteq A$. Τότε, υπάρχει $r > 0$ τέτοιο ώστε*

$$K + D(0,r) \subseteq A, \tag{5.7}$$

όπου $K + D(0,r) = \{x + y : x \in K, \|y\| < r\} = \{x \in X : d(x,K) < r\}$.

Απόδειξη. Για κάθε $x \in K$ έχουμε $x \in A$ και το A είναι ανοιχτό, άρα υπάρχει $r_x > 0$ τέτοιο ώστε $D(x, r_x) = x + D(0, r_x) \subseteq A$.

Τότε,

$$K \subseteq \bigcup_{x \in K} D(x, r_x/2),$$

και αφού το K είναι συμπαγές, υπάρχουν $x_1, \ldots, x_m \in K$ τέτοια ώστε

$$K \subseteq D(x_1, r_{x_1}/2) \cup \cdots \cup D(x_m, r_{x_m}/2).$$

Θέτουμε $r = \min\{r_{x_1}/2, \ldots, r_{x_m}/2\}$. Τότε,

$$K + D(0,r) \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} (x_i + D(0, r_{x_i})) \subseteq A.$$

□

Θεώρημα 5.4.6. *Έστω X χώρος με νόρμα, και A, B δύο ξένα κλειστά κυρτά υποσύνολα του X. Αν το B είναι συμπαγές, τότε τα A, B διαχωρίζονται αυστηρά.*

Απόδειξη. Αφού τα A, B είναι ξένα, το συμπαγές B περιέχεται στο ανοιχτό $X \backslash A$, και από το Λήμμα υπάρχει $r > 0$ τέτοιο ώστε $B + D(0,r) \subseteq X \setminus A$, απ' όπου παίρνουμε

$$(B + D(0, r/2)) \cap (A + D(0, r/2)) = \emptyset.$$

Τα $A + D(0,r/2)$, $B + D(0,r/2)$ είναι ανοιχτά και κυρτά: κυρτά γιατί τα A, B και $D(0,r/2)$ είναι κυρτά, και ανοιχτά γιατί η $D(0,r/2)$ είναι ανοιχτό σύνολο. Από το Θεώρημα 5.4.4 διαχωρίζονται γνήσια, άρα το ίδιο ισχύει και για τα υποσύνολά τους A, B. Υπάρχουν λοιπόν $f \in X^*$ και $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε

$$f(b) < \lambda < f(a)$$

για κάθε $a \in A$ και $b \in B$. Το B είναι συμπαγές, άρα υπάρχει $b_0 \in B$ ώστε $f(b) \leq f(b_0)$ για κάθε $b \in B$. Αν $\mu = f(b_0) < \lambda$, τότε

$$B \subseteq \{x : f(x) \leq \mu\} \quad , \quad A \subseteq \{x : f(x) \geq \lambda\},$$

άρα τα A και B διαχωρίζονται αυστηρά. □

Παρατήρηση: Αν τα A, B υποτεθούν απλώς κλειστά, τότε το Θεώρημα 2.4.5 παύει να ισχύει. Για παράδειγμα, στο $\mathbb{R}^2$ θεωρούμε τα $A = \{(x,y) : y \leq 0\}$ και $B = \{(x,y) : x > 0, xy \geq 1\}$. Τα A, B είναι κλειστά, κυρτά και ξένα, αλλά δεν διαχωρίζονται ούτε καν γνήσια.

5.5 Ασκήσεις

Ομάδα Α΄

1. Δείξτε ότι η απόλυτη τιμή γραμμικού συναρτησοειδούς είναι υπογραμμικό συναρτησοειδές.

2. Δείξτε ότι κάθε νόρμα είναι υπογραμμικό συναρτησοειδές.

3. Έστω p ένα υπογραμμικό συναρτησοειδές στον γραμμικό χώρο X. Ορίζουμε $Z = \langle x_0 \rangle$, και $f(x) = ap(x_0)$ αν $x = ax_0 \in Z$. Δείξτε ότι το f είναι γραμμικό συναρτησοειδές και $f(x) \leq p(x)$, $x \in Z$.

4. Δείξτε ότι αν ο X έχει τουλάχιστον n το πλήθος γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα, τότε και ο X^* έχει τουλάχιστον n το πλήθος γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα.

5. Έστω Y κλειστός υπόχωρος του χώρου με νόρμα X, τέτοιος ώστε: αν $f \in X^*$ και $f|_Y \equiv 0$, τότε $f \equiv 0$. Δείξτε ότι $Y = X$.

Ομάδα Β΄

6. Δείξτε ότι η $p(x) = \limsup_n \xi_n$, όπου $x = (\xi_n) \in \ell_\infty$ ορίζει ένα υπογραμμικό συναρτησοειδές στον ℓ_∞.

7. Έστω X χώρος με νόρμα, και $p : X \to \mathbb{R}$ υποπροσθετικό συναρτησοειδές (δεν υποθέτουμε δηλαδή ότι είναι θετικά ομογενές.) Δείξτε ότι:

(α) Αν $p(0) = 0$ και το p είναι συνεχές στο 0, τότε είναι συνεχές σε κάθε $x_0 \in X$.

(β) Αν $p(x) \geq 0$ έξω από μιά σφαίρα $\{x : \|x\| = r\}$, τότε $p(x) \geq 0$ για κάθε $x \in X$.

8. Έστω X γραμμικός χώρος και $p : X \to \mathbb{R}$ υπογραμμικό συναρτησοειδές. Δείξτε ότι υπάρχει γραμμικό συναρτησοειδές $f : X \to \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε

$$-p(-x) \leq f(x) \leq p(x), \quad x \in X.$$

9. Έστω X χώρος με νόρμα, και (f_n) φραγμένη ακολουθία στον X^*. Δείξτε ότι υπάρχει $f \in X^*$ με την ιδιότητα

$$\text{liminf}_n f_n(x) \leq f(x) \leq \text{limsup}_n f_n(x), \quad x \in X.$$

10. Έστω Y υπόχωρος ενός χώρου με νόρμα X. Ορίζουμε

$$A = \{f \in X^* : Y \subseteq \mathrm{Ker} f\}.$$

Δείξτε ότι $\overline{Y} = \bigcap\{\mathrm{Ker} f : f \in A\}$.

11. Έστω X χώρος με νόρμα και W γραμμικός υπόχωρος του X. Υποθέτουμε ότι υπάρχει μια νόρμα $|\cdot|$ στον W ισοδύναμη με τον περιορισμό της νόρμας $\|\cdot\|$ του X στον W. Να δείξετε ότι υπάρχει νόρμα $|\cdot|'$ στον X, ισοδύναμη με την $\|\cdot\|$, της οποίας ο περιορισμός στο W να είναι η $|\cdot|$.

12. Έστω X και Y χώροι με νόρμα. Αν $T : X \to Y$ γραμμικός τελεστής, δείξτε ότι ο T είναι φραγμένος αν και μόνο αν

$$M = \sup\{f(Tx) : \|x\| \leq 1, \|f\| \leq 1\} < +\infty.$$

Σ' αυτή την περίπτωση, δείξτε ότι $\|T\| = M$.

13. Έστω X χώρος με νόρμα, και A μη κενό υποσύνολο του X. Δείξτε ότι: $x \in \overline{\mathrm{span}(A)}$ αν και μόνο αν, για κάθε $f \in X^*$ με $f|_A \equiv 0$, ισχύει $f(x) = 0$.

14. Δείξτε ότι αν Y_1, Y_2 είναι κλειστοί γραμμικοί υπόχωροι ενός χώρου με νόρμα X και $Y_1 \neq Y_2$, τότε $\mathrm{Ann}(Y_1) \neq \mathrm{Ann}(Y_2)$, όπου $\mathrm{Ann}(Y)$ ο μηδενιστής του υποχώρου Y που ορίστηκε στην άσκηση 16 του κεφαλαίου 3.

15. Έστω X, Y χώροι με νόρμα, και $T : X \to Y$ φραγμένος γραμμικός τελεστής. Ορίζουμε $T^* : Y^* \to X^*$ με $T^*(f) = f \circ T$. Δείξτε ότι ο T^* ορίζεται καλά, είναι φραγμένος γραμμικός τελεστής, και $\|T^*\| = \|T\|$.

Ομάδα Γ′

16. Έστω c ο χώρος των συγκλινουσών ακολουθιών με τη νόρμα $\|x\|_\infty = \sup_k |\xi_k|$, αν $x = (\xi_k)$.

(α) Δείξτε ότι οι χώροι c και c_0 είναι ισόμορφοι. [*Υπόδειξη:* Αν $x = (\xi_n) \in c$ με $x_n \to a$, θεωρήστε $S(x) = (a, x_1 - a, x_2 - a, ...) \in c_0$.]

(β) Δείξτε ότι οι χώροι c και c_0 *δεν* είναι ισομετρικά ισόμορφοι. [*Υπόδειξη:* Αν $S : c_0 \to c$ είναι μια ισομετρία επί, παρατηρήστε ότι υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε $S(e_n) \notin c_0$.]

(γ) Δείξτε ότι ο c^* είναι ισομετρικά ισόμορφος με τον ℓ_1.

17. Έστω X γραμμικός χώρος και $p_1, p_2 : X \to \mathbb{R}$ ημινόρμες. Αν $f : X \to \mathbb{R}$ γραμμικό συναρτησοειδές με την ιδιότητα

$$|f(x)| \leq p_1(x) + p_2(x),$$

για κάθε $x \in X$, δείξτε ότι υπάρχουν γραμμικά συναρτησοειδή $f_1, f_2 : X \to \mathbb{R}$ ώστε $f = f_1 + f_2$ και

$$|f_i(x)| \leq p_i(x), \quad i = 1, 2, \ x \in K.$$

[*Υπόδειξη:* Βρείτε γραμμικό συναρτησοειδές $\psi : X \times X \to \mathbb{R}$ με $|\psi(x_1, x_2)| \leq p_1(x_1) + p_2(x_2)$ και $\psi(x, x) = f(x)$.]

18. Έστω X χώρος με νόρμα και Y κλειστός υπόχωρος πεπερασμένης συνδιάστασης του X. Αν $f : X \to \mathbb{R}$ είναι ένα γραμμικό συναρτησοειδές και $f|_Y \in Y^*$, να δείξετε ότι $f \in X^*$.

19. Έστω X, Y δύο χώροι με νόρμα, και $X \neq \{0\}$. Δείξτε ότι αν ο $B(X, Y)$ είναι πλήρης, τότε ο Y είναι πλήρης.

Κεφάλαιο 6

Βασικά θεωρήματα για χώρους Banach

Σκοπός μας σε αυτό το Κεφάλαιο είναι να αποδείξουμε τρία βασικά θεωρήματα για τελεστές σε χώρους Banach: το θεώρημα ομοιόμορφου φράγματος, το θεώρημα ανοιχτής απεικόνισης και το θεώρημα κλειστού γραφήματος. Στην απόδειξή τους χρησιμοποιείται ουσιαστικά το θεώρημα του Baire: είναι δηλαδή αποτελέσματα που αφορούν *πλήρεις* χώρους με νόρμα.

6.1 Το θεώρημα ομοιόμορφου φράγματος

Ένα κλασικό θεώρημα της Πραγματικής Ανάλυσης είναι το θεώρημα του Osgood: αν $\{f_n\}$ είναι μια ακολουθία συνεχών συναρτήσεων στο $[0,1]$ με την ιδιότητα η $\{f_n(t)\}$ να είναι φραγμένη για κάθε $t \in [0,1]$, τότε υπάρχει υποδιάστημα $[a,b]$ του $[0,1]$ στο οποίο η $\{f_n\}$ είναι ομοιόμορφα φραγμένη. Η απόδειξη (βλέπε Παράρτημα Α′) βασίστηκε στο θεώρημα του Baire.

Το θεώρημα ομοιόμορφου φράγματος διατυπώνεται για μια ακολουθία τελεστών $T_n \in \mathcal{B}(X,Y)$ που έχουν την ιδιότητα η $\{T_n(x)\}$ να είναι φραγμένη στον Y για κάθε $x \in X$. Αν ο X είναι πλήρης, η γραμμικότητα των T_n και η απλή ιδέα της απόδειξης του θεωρήματος του Osgood μας δίνουν ότι οι νόρμες $\|T_n\|$ είναι ομοιόμορφα φραγμένες:

Θεώρημα 6.1.1 (Θεώρημα ομοιόμορφου φράγματος)**.** *Έστω X χώρος Banach, Y χώρος με νόρμα, και $T_n : X \to Y$ φραγμένοι γραμμικοί τελεστές, $n \in \mathbb{N}$. Υποθέτουμε ότι, για κάθε $x \in X$ υπάρχει $M_x > 0$ τέτοιος ώστε*

$$\|T_n x\|_Y \leq M_x, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{6.1}$$

(δηλαδή, η $\{T_n x\}$ είναι φραγμένη ακολουθία στον Y). Τότε, υπάρχει $M > 0$ τέτοιος ώστε

$$\|T_n\| \leq M, \quad n \in \mathbb{N}.$$

(δηλαδή, η $\{\|T_n\|\}$ είναι φραγμένη).

Απόδειξη. Για κάθε $k \in \mathbb{N}$ ορίζουμε

$$A_k = \{x \in X : \sup_n \|T_n x\| \leq k\}. \tag{6.2}$$

(α) Κάθε A_k είναι κλειστό υποσύνολο του X: έστω $x_j \in A_k$ με $x_j \to x$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε $\|T_n x_j\| \leq k$ για κάθε j, άρα και

$$\|T_n x\| = \lim_{j\to\infty} \|T_n x_j\| \leq k.$$

Αφού αυτό ισχύει για τυχόν n, έχουμε $x \in A_k$.

(β) Η υπόθεσή μας εξασφαλίζει ότι

$$X = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k. \tag{6.3}$$

Πράγματι, αν $x \in X$, υπάρχει $M_x > 0$ τέτοιος ώστε $\sup_n \|T_n x\| \leq M_x$, και αν πάρουμε $k_x > M_x$, $k_x \in \mathbb{N}$, θα έχουμε $x \in A_{k_x} \subseteq \bigcup_k A_k$.

(γ) Ο X είναι πλήρης και τα A_k κλειστά. Από το θεώρημα του Baire, υπάρχει $k_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε το A_{k_0} να έχει μη κενό εσωτερικό. Δηλαδή, υπάρχουν $x_0 \in X$ και $r > 0$ τέτοια ώστε

$$D(x_0, r) \subseteq A_{k_0}.$$

Έστω $x \in X$, $x \neq 0$. Τότε,

$$x_0 \ ,\ x_0 + \frac{r}{2\|x\|}x \in D(x_0, r) \subseteq A_{k_0},$$

άρα, για κάθε $n \in \mathbb{N}$,

$$\|T_n x_0\| \leq k_0 \ \text{ και } \ \Big\|T_n\left(x_0 + \frac{r}{2\|x\|}x\right)\Big\| \leq k_0.$$

Τότε,

$$\begin{aligned}
\Big\|T_n\left(\frac{r}{2\|x\|}x\right)\Big\| &= \Big\|T_n\left(x_0 + \frac{r}{2\|x\|}x\right) + T_n(-x_0)\Big\| \\
&\leq \Big\|T_n\left(x_0 + \frac{r}{2\|x\|}x\right)\Big\| + \|T_n(x_0)\| \\
&\leq 2k_0.
\end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας ξανά τη γραμμικότητα του T και το γεγονός ότι η νόρμα είναι θετικά ομογενής, παίρνουμε

$$\|T_n x\| \leq \frac{4k_0}{r}\|x\|.$$

Έπεται ότι $\|T_n\| \leq \frac{4k_0}{r}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. □

Ας δούμε τώρα μερικές ενδεικτικές εφαρμογές του θεωρήματος ομοιόμορφου φράγματος:

Πρόταση 6.1.2 (Θεώρημα Banach-Steinhaus)**.** *Έστω X χώρος Banach, Y χώρος με νόρμα και $T_n : X \to Y$ φραγμένοι γραμμικοί τελεστές για $n \in \mathbb{N}$. Υποθέτουμε ότι για κάθε $x \in X$ υπάχει το όριο*

$$\lim_{n\to\infty} T_n(x) := T(x).$$

Τότε, ο $T : X \to Y$ με $x \mapsto T(x)$ είναι φραγμένος γραμμικός τελεστής.

Απόδειξη. Η γραμμικότητα του T είναι εμφανής. Για να δείξουμε ότι είναι φραγμένος τώρα, παρατηρούμε ότι αφού για $x \in X$ υπάρχει το $\lim_n T_n(x)$, η ακολουθία $\{T_n(x)\}$ είναι φραγμένη. Κατά συνέπεια, από το Θεώρημα ομοιόμορφου φράγματος, υπάρχει $M > 0$ ώστε $\|T_n\| \leq M$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Έτσι, για $x \in X$ με $\|x\| \leq 1$ είναι

$$|T_n(x)| \leq M \text{ για κάθε } n \in \mathbb{N} \implies |T(x)| \leq M,$$

αφού $T_n(x) \to T(x)$. Συνεπώς, ο T είναι φραγμένος. □

Μια άλλη ενδιαφέρουσα εφαρμογή είναι η εξής:

Πρόταση 6.1.3. *Έστω X χώρος με νόρμα, και $\{x_n\}$ ακολουθία στον X. Η $\{x_n\}$ είναι φραγμένη αν και μόνο αν για κάθε $f \in X^*$ η $\{f(x_n)\}$ είναι φραγμένη στο $\mathbb{R}$.*

Απόδειξη. ($\Rightarrow$) Υποθέτουμε ότι υπάρχει $M > 0$ τέτοιος ώστε $\|x_n\| \leq M$, $n \in \mathbb{N}$. Τότε, για κάθε $f \in X^*$ έχουμε

$$|f(x_n)| \leq \|f\| \, \|x_n\| \leq M\|f\|, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Δηλαδή, η $\{f(x_n)\}$ είναι φραγμένη.

($\Leftarrow$) Θεωρούμε τους $T_n = \tau(x_n) : X^* \to \mathbb{R}$ με $T_n f = [\tau(x_n)](f) = f(x_n)$. Από την υπόθεσή μας, η $\{T_n f\}$ είναι φραγμένη για κάθε $f \in X^*$. Ο X^* είναι χώρος Banach, οπότε εφαρμόζοντας το θεώρημα ομοιόμορφου φράγματος έχουμε

$$\sup_n \|x_n\|_X = \sup_n \|[\tau(x_n)]\|_{X^{**}} = \sup_n \|T_n\| < +\infty.$$

Δηλαδή, η $\{\|x_n\|\}$ είναι φραγμένη. □

Ένα ανάλογο παράδειγμα σε συγκεκριμένο χώρο είναι το εξής:

Πρόταση 6.1.4. *Έστω $y = (\eta_k)$ ακολουθία πραγματικών αριθμών με την εξής ιδιότητα: για κάθε $x = (\xi_k) \in c_0$, η σειρά $\sum_k \xi_k \eta_k$ συγκλίνει. Τότε, $y \in \ell_1$. Δηλαδή,*

$$\sum_k |\eta_k| < +\infty.$$

Απόδειξη. Ορίζουμε $T_n : c_0 \to \mathbb{R}$, με $T_n((\xi_k)) = \sum_{k=1}^n \xi_k \eta_k$. Κάθε T_n είναι φραγμένο γραμμικό συναρτησοειδές:

$$\begin{aligned} |T_n x| &= |\sum_{k=1}^n \xi_k \eta_k| \leq \sum_{k=1}^n |\xi_k| \, |\eta_k| \\ &\leq \left(\sum_{k=1}^n |\eta_k| \right) \sup_k |\xi_k| \\ &= \left(\sum_{k=1}^n |\eta_k| \right) \|x\|_{c_0}. \end{aligned}$$

Άρα,

$$\|T_n\| \leq \sum_{k=1}^{n} |\eta_k|.$$

Ισχύει μάλιστα ισότητα: αν ορίσουμε

$$\xi_k = \begin{cases} 0 & , k > n, \\ \\ \mathrm{sign}(\eta_k) & , k \leq n, \end{cases}$$

έχουμε $x' = (\xi_k) \in c_0$, και $\|x'\| \leq 1$. Όμως,

$$T_n(x') = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{sign}(\eta_k)\eta_k = \sum_{k=1}^{n} |\eta_k|.$$

Αφού $\|x'\| \leq 1$,

$$\|T_n\| \geq |T_n(x')| = \sum_{k=1}^{n} |\eta_k|.$$

Από την υπόθεσή μας, αν $x = (\xi_k) \in c_0$, τότε το $\sum_k \xi_k \eta_k = \lim_n \sum_{k=1}^n \xi_k \eta_k = \lim_n T_n x$ υπάρχει. Άρα, η $\{T_n x\}$ είναι φραγμένη. Από το θεώρημα ομοιόμορφου φράγματος (ο c_0 είναι πλήρης), παίρνουμε $\sup_n \|T_n\| < +\infty$, δηλαδή

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\eta_k| = \sup_n \sum_{k=1}^{n} |\eta_k| < +\infty.$$

Άρα, $y = (\eta_k) \in \ell_1$. □

Το θεώρημα ομοιόμορφου φράγματος χρησιμοποιείται συχνά για την «κατασκευή» αντιπαραδειγμάτων στην Ανάλυση. Ο τρόπος είναι ο εξής: Αν $T_n : X \to Y$ με $\sup_n \|T_n\| = +\infty$, τότε υπάρχει $x \in X$ τέτοιο ώστε $\sup_n \|T_n(x)\|_Y = +\infty$.

Παράδειγμα 6.1.5 (αποκλίνουσες σειρές Fourier)**.** Έστω $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Η *σειρά Fourier* της f είναι η

$$S[f](t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} (a_m \cos mt + b_m \sin mt), \tag{6.4}$$

όπου οι συντελεστές a_m, b_m δίνονται από τις

$$a_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(mt)dt \quad , \quad b_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(mt)dt. \tag{6.5}$$

Το ερώτημα που θα μας απασχολήσει είναι αν για κάθε συνεχή f και κάθε $t \in [-\pi, \pi]$ η σειρά (6.4) συγκλίνει (στο $f(t)$). Χρησιμοποιώντας το θεώρημα ομοιόμορφου φράγματος, θα δούμε ότι η απάντηση είναι αρνητική:

Πρόταση 6.1.6. *Υπάρχει συνεχής $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ της οποίας η σειρά Fourier αποκλίνει στο σημείο $t_0 = 0$.*

Απόδειξη. Θεωρούμε τον $\mathcal{C}[-\pi,\pi]$ με νόρμα την $\|f\| = \max_{t\in[-\pi,\pi]} |f(t)|$. Ο $(\mathcal{C}[-\pi,\pi], \|\cdot\|)$ είναι χώρος Banach. Ορίζουμε $T_n : \mathcal{C}[-\pi,\pi] \to \mathbb{R}$, με

$$T_n f = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{n} a_m,$$

την τιμή δηλαδή του n-στού μερικού αθροίσματος της $(*)$ στο $t_0 = 0$. Αλλιώς, μπορούμε να γράψουμε (γιατί;)

$$T_n f = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\left[\frac{1}{2} + \sum_{m=1}^{n}\cos mt\right] dt.$$

Απλή τριγωνομετρία δείχνει ότι

$$\frac{1}{2} + \sum_{m=1}^{n}\cos mt = \frac{1}{2}\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{\sin\frac{t}{2}}.$$

Δηλαδή,

$$T_n f = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t) q_n(t) dt, \qquad q_n(t) = \frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{\sin\frac{t}{2}}.$$

Έχουμε

$$|T_n f| \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|\, |q_n(t)| dt \leq \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |q_n(t)| dt\right) \|f\|,$$

άρα ο T_n είναι φραγμένος, και

$$\|T_n\| \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |q_n(t)| dt.$$

Επιπλέον, αν f συνεχής με $\|f\| = 1$ που «προσεγγίζει» την $\mathrm{sign}(q_n)$, τότε

$$T_n f \sim \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{sign}(q_n) q_n(t) dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |q_n(t)| dt.$$

Δηλαδή,

$$\|T_n\| = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |q_n(t)| dt.$$

Όμως,

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |q_n(t)| = \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi} \frac{|\sin(n+\frac{1}{2})t|}{|\sin\frac{t}{2}|} dt \geq \frac{1}{\pi}\int_{0}^{2\pi} \frac{|\sin(n+\frac{1}{2})t|}{t} dt,$$

γιατί $|\sin\frac{t}{2}| \leq \frac{|t|}{2}$ στο $[-\pi,\pi]$, και θέτοντας $v = (n+\frac{1}{2})t$ παίρνουμε

$$\begin{aligned}
\|T\| &\geq \frac{1}{\pi}\int_{0}^{(2n+1)\pi} \frac{|\sin v|}{v} dv \\
&= \frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{2n}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin v|}{v} dv \\
&\geq \frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{2n}\frac{1}{(k+1)\pi}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin v| dv \\
&= \frac{2}{\pi^2}\sum_{k=0}^{2n}\frac{1}{k+1} \to \infty
\end{aligned}$$

καθώς $n \to \infty$. Δηλαδή, $\sup_n \|T_n\| = \infty$. Άρα, υπάρχει $f \in C[-\pi, \pi]$ τέτοια ώστε η $(T_n f)$ να μην είναι φραγμένη. Αυτό σημαίνει ότι η σειρά Fourier της f αποκλίνει στο $t_0 = 0$. $\square$

Δίνουμε τώρα μια εφαρμογή του θεωρήματος ομοιόμορφου φράγματος, στην αριθμητική ολοκλήρωση: Θεωρούμε ένα διάστημα $J = [a, b]$ και το χώρο $\mathcal{C}[a, b]$ με τη συνήθη νόρμα $\|f\| = \max_{t \in [a,b]} |f(t)|$.

Μια *μέθοδος αριθμητικής ολοκλήρωσης στο* J είναι μια επιλογή πραγματικών αριθμών $a_1, \ldots, a_m$ και σημείων $t_1 < \cdots < t_m$ στο J.

Αν τα t_i, a_i έχουν δοθεί, τότε για κάθε $f \in C[J]$ εκτιμάμε το $\int_a^b f(t)dt$ μέσω του αθροίσματος

$$\sum_{i=1}^{m} a_i f(t_i).$$

Αν τα t_i, a_i έχουν επιλεγεί «σωστά», περιμένουμε αυτό το άθροισμα να «προσεγγίζει» καλά το ολοκλήρωμα της f. Δεν είναι δύσκολο να δεί κανείς ότι, όπως και να επιλέξουμε τα t_i, a_i, μπορούμε να κατασκευάσουμε $f \in C[J]$ για την οποία το σφάλμα να είναι μεγάλο: πάρτε π.χ. την f να μηδενίζεται σε όλα τα t_i και να έχει πολύ μεγάλη τιμή σε κάποιο άλλο $t \in J$.

Ορίζουμε μια πιό συγκροτημένη *διαδικασία αριθμητικής ολοκλήρωσης* στο J ως εξής: Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ θεωρούμε τα πολυώνυμα

$$f_0(t) = 1, \quad f_1(t) = t, \quad , \ldots, \quad f_n(t) = t^n, \tag{6.6}$$

και επιλέγουμε $t_0^{(n)}, t_1^{(n)}, \ldots, t_n^{(n)} \in J$ και $a_0^{(n)}, a_1^{(n)}, \ldots, a_n^{(n)} \in \mathbb{R}$, τέτοια ώστε

$$\sum_{i=0}^{n} a_i^{(n)} f_j(t_i^{(n)}) = \int_a^b f_j(t)dt, \quad j = 0, 1, \ldots, n. \tag{$*$}$$

Τέτοιες επιλογές υπάρχουν πολλές: πάρτε, ας πούμε, τυχόντα $t_0^{(n)} < t_1^{(n)} < \cdots < t_n^{(n)} \in J$. Τότε, το σύστημα $(*)$ με αγνώστους τους $a_i^{(n)}$ παίρνει τη μορφή

$$\sum_{i=0}^{n} a_i^{(n)} (t_i^{(n)})^j = \frac{b^{j+1} - a^{j+1}}{j+1}, \quad j = 0, 1, \ldots, n.$$

Το σύστημα αυτό έχει λύση ως προς $a_i^{(n)}$ γιατί η ορίζουσα

$$\det \left[(t_i^{(n)})^j \right]_{i,j=1}^{n}$$

είναι μη μηδενική (ορίζουσα Vandermonde). Αφού λοιπόν επιλέξουμε τα $t_i^{(n)}$, προσδιορίζουμε μονοσήμαντα τα $a_i^{(n)}$ έτσι ώστε

$$T_{t_i^{(n)}, a_i^{(n)}}(f_j) := \sum_{i=0}^{n} a_i^{(n)} f_j(t_i^{(n)}) = \int_a^b f_j(t)dt, \quad j = 0, 1, \ldots, n.$$

Λόγω γραμμικότητας του αριστερού και του δεξιού μέλους ως προς f, έπεται ότι

$$T_{t_i^{(n)}, a_i^{(n)}}(p) = \sum_{i=0}^{n} a_i^{(n)} p(t_i^{(n)}) = \int_a^b p(t)dt \tag{6.7}$$

για κάθε πολυώνυμο $p : [a,b] \to \mathbb{R}$ που έχει βαθμό μικρότερο ή ίσο του n.

Θέτουμε $T_n := T_{t_i^{(n)}, a_i^{(n)}}$, και λέμε ότι η (T_n) είναι μια *διαδικασία αριθμητικής ολοκλήρωσης* στο J: Για κάθε $f \in \mathcal{C}[J]$ ορίζουμε

$$T_n(f) = \sum_{i=0}^{n} a_i^{(n)} f(t_i^{(n)}), \tag{6.8}$$

και ξέρουμε ότι κάθε T_n είναι *ακριβής* στα πολυώνυμα βαθμού $\leq n$. Το ερώτημα που προκύπτει είναι αν για κάθε συνεχή $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ισχύει

$$T_n(f) \to \int_a^b f(t)dt, \tag{$**$}$$

όταν $n \to \infty$. Η απάντηση δίνεται από το ακόλουθο θεώρημα του Polya:

Πρόταση 6.1.7. *Μια διαδικασία αριθμητικής ολοκλήρωσης* $(T_n) = (T_{a_i^{(n)}, t_i^{(n)}})$ *όπως παραπάνω, ικανοποιεί την* $(**)$ *για κάθε* $f \in \mathcal{C}[a,b]$ *αν και μόνο αν υπάρχει* $M > 0$ *τέτοιος ώστε, για κάθε* $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{i=0}^{n} |a_i^{(n)}| \leq M. \tag{6.9}$$

Απόδειξη. Κάθε $T_n : \mathcal{C}[a,b] \to \mathbb{R}$ είναι γραμμικό συναρτησοειδές, και

$$\begin{aligned} |T_n(f)| &= |\sum_{i=0}^{n} a_i^{(n)} f(t_i^{(n)})| \leq \sum_{i=0}^{n} |a_i^{(n)}|\, |f(t_i^{(n)})| \\ &\leq \left(\sum_{i=0}^{n} |a_i^{(n)}|\right) \|f\|, \end{aligned}$$

δηλαδή το T_n είναι φραγμένο, και $\|T_n\| \leq \sum_{i=0}^{n} |a_i^{(n)}|$.

Επιπλέον ισχύει ισότητα γιατί μπορούμε να ορίσουμε $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχή με $|f(t)| \leq 1$ στο $[a,b]$ και

$$f(t_i^{(n)}) = \begin{cases} 1 & , a_i^{(n)} > 0, \\ -1 & , a_i^{(n)} < 0, \end{cases}$$

οπότε

$$\|T_n\| \geq |T_n(f)| = \sum_{i=0}^{n} a_i^{(n)} \mathrm{sign}(a_i^{(n)}) = \sum_{i=0}^{n} |a_i^{(n)}|.$$

Η απόδειξη της $(\Leftarrow)$ της Πρότασης θα μας δώσει την ιδέα για το τι συμβαίνει. Αν υπάρχει $M > 0$ τέτοιος ώστε $\sum_{i=0}^{n} |a_i^{(n)}| \leq M$, $n \in \mathbb{N}$, τότε $\|T_n\| \leq M$, $n \in \mathbb{N}$. Οι βασικές παρατηρήσεις είναι δύο:

(α) Από την κατασκευή, αν $p : [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι πολυώνυμο (βαθμού ας πούμε m), τότε για κάθε $n \geq m$, $T_n(p) = \int_a^b p$. Άρα, $T_n(p) \to \int_a^b p$ καθώς $n \to \infty$, για κάθε πολυώνυμο.

(β) Τα πολυώνυμα είναι πυκνά στον $\mathcal{C}[a,b]$ (θεώρημα Weierstrass). Αν λοιπόν μας δώσουν $f \in \mathcal{C}[a,b]$ και $\varepsilon > 0$, υπάρχει πολυώνυμο p με την ιδιότητα

$$\|f - p\| = \max_{t \in [a,b]} |f(t) - p(t)| < \varepsilon.$$

Τότε,

$$\begin{aligned}
\left|T_n f - \int_a^b f\right| &\leq |T_n f - T_n p| + \left|T_n p - \int_a^b p\right| + \left|\int_a^b p - \int_a^b f\right| \\
&\leq \|T_n\|\,\|f - p\| + \left|T_n p - \int_a^b p\right| + (b-a)\|p - f\| \\
&< M\varepsilon + \left|T_n p - \int_a^b p\right| + (b-a)\varepsilon.
\end{aligned}$$

Αφού $T_n p \to \int_a^b p$, για $n \geq n_0(\varepsilon)$ έχουμε

$$\left|T_n f - \int_a^b f\right| < (M + 1 + b - a)\varepsilon,$$

και αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, έπεται ότι $T_n f \to \int_a^b f$.

Η απόδειξη της ($\Rightarrow$) είναι άμεση συνέπεια του θεωρήματος ομοιόμορφου φράγματος: Αν $T_n f \to \int_a^b f$ για κάθε $f \in \mathcal{C}[a,b]$, τότε η $\{T_n f\}$ είναι φραγμένη για κάθε f. Επομένως, $\sup_n \|T_n\| < +\infty$.

Όμως, $\|T_n\| = \sum_{i=0}^n |a_i^{(n)}|$, $n \in \mathbb{N}$. Άρα,

$$\sup_n \sum_{i=0}^n |a_i^{(n)}| = M < +\infty.$$

□

6.2 Το θεώρημα ανοικτής απεικόνισης

Ορισμός 6.2.1. Έστω X και Y μετρικοί χώροι, και $T : X \to Y$ συνάρτηση. Η T λέγεται *ανοιχτή απεικόνιση* αν για κάθε $A \subseteq X$ ανοιχτό, το $T(A)$ είναι ανοιχτό υποσύνολο του Y.

Αν $T : X \to Y$ συνεχής, η T δεν είναι απαραίτητα ανοιχτή: για παράδειγμα, η $T : (0, 2\pi) \to \mathbb{R}$ με $T(x) = \sin x$ είναι συνεχής, αλλά $T((0, 2\pi)) = [-1, 1]$.

Θεώρημα 6.2.2 (Θεώρημα ανοιχτής απεικόνισης)**.** *Έστω X και Y χώροι Banach, και $T : X \to Y$ φραγμένος <u>και επί</u> γραμμικός τελεστής. Τότε, ο T είναι ανοιχτή απεικόνιση.*

Βασικό ρόλο στην απόδειξη θα παίξει το εξής:

Λήμμα 6.2.3. *Αν X, Y χώροι Banach, $T : X \to Y$ φραγμένος και επί γραμμικός τελεστής, τότε το $T(D_X(0,1))$ περιέχει ανοιχτή μπάλα με κέντρο το 0 στον Y.*

Απόδειξη. Θα δώσουμε την απόδειξη σε βήματα.

Βήμα 1. Θεωρούμε την ανοιχτή μπάλα $D_X(0, 1/2)$ του X. Αφού

$$kD_X(0, 1/2) = D_X(0, k/2) \quad , \quad k = 1, 2, \dots,$$

ισχύει

$$X = \bigcup_{k=1}^{\infty} kD_X(0,1/2).$$

Αφού ο T είναι γραμμικός και επί, παίρνουμε

$$Y = T(X) = \bigcup_{k=1}^{\infty} kT(D_X(0,1/2)).$$

Άρα,

$$Y = \bigcup_{k=1}^{\infty} \overline{kT(D_X(0,1/2))} = \bigcup_{k=1}^{\infty} k\overline{T(D_X(0,1/2))}.$$

Ο Y είναι πλήρης, και κάθε $k\overline{T(D_X(0,1/2))}$ κλειστό. Από το θεώρημα του Baire, υπάρχει k_0 τέτοιος ώστε το $k_0\overline{T(D_X(0,1/2))}$ να περιέχει μια μπάλα $D_Y(y_0,\delta)$ στον Y. Δηλαδή,

$$y_0 + D_Y(0,\delta) \subseteq k_0\overline{T(D_X(0,1/2))}. \tag{1}$$

Βήμα 2. Έστω $y \in D_Y(0,\delta)$. Τότε, $y_0 + y \in k_0\overline{T(D_X(0,1/2))}$, άρα υπάρχει ακολουθία $x_n \in D_X(0,1/2)$ τέτοια ώστε

$$k_0T(x_n) \to y_0 + y.$$

Επίσης, $y_0 \in k_0\overline{T(D_X(0,1/2))}$ (γιατί;), άρα υπάρχει ακολουθία $x_n' \in D_X(0,1/2)$ τέτοια ώστε

$$k_0T(x_n') \to y_0.$$

Τότε, $x_n - x_n' \in D_X(0,1)$, και

$$k_0T(x_n - x_n') = k_0T(x_n) - k_0T(x_n') \to y.$$

Δηλαδή,

$$y \in k_0\overline{T(D_X(0,1))}.$$

Άρα,

$$\overline{T(D_X(0,1))} \supseteq D_Y(0,\delta/k_0) = D_Y(0,\delta') \tag{2}$$

στον Y, όπου $\delta' = \delta/k_0$.

Βήμα 3. Είδαμε ότι η κλειστή θήκη της $T(D_X(0,1))$ περιέχει μια ανοιχτή μπάλα $D_Y(0,\delta')$ στον Y. Μένει να δούμε ότι το ίδιο το $T(D_X(0,1))$ έχει την ίδια ιδιότητα.

Θεωρούμε την $D_Y(0,\delta'/2)$. Έστω $y \in Y$ με $\|y\| < \delta'/2$. Τότε,

$$y \in \frac{1}{2}D_Y(0,\delta') \subseteq \overline{T(D_X(0,1/2))},$$

άρα υπάρχει $x_1 \in D_X(0,1/2)$ τέτοιο ώστε

$$\|y - Tx_1\| < \frac{\delta'}{2^2}.$$

Τότε, $y - Tx_1 \in \frac{1}{2^2}\overline{T(D_X(0,1))} = \overline{T(D_X(0,1/2^2))}$, άρα υπάρχει $x_2 \in D_X(0,1/2^2)$ τέτοιο ώστε

$$\|y - Tx_1 - Tx_2\| < \frac{\delta'}{2^3}.$$

Επαγωγικά, βρίσκουμε $x_n \in D_X(0,1/2^n)$ με την ιδιότητα

$$(*) \qquad \|y - Tx_1 - \cdots - Tx_n\| < \frac{\delta'}{2^{n+1}}.$$

Η ακολουθία $z_n = x_1 + \cdots + x_n$ είναι Cauchy στον X: αν $m > n$, τότε

$$\begin{aligned} \|z_m - z_n\| &= \|x_m + \cdots + x_{n+1}\| \le \|x_m\| + \cdots + \|x_{n+1}\| \\ &< \frac{1}{2^m} + \cdots + \frac{1}{2^{n+1}} < \frac{1}{2^n}. \end{aligned}$$

Ο X είναι πλήρης, άρα υπάρχει $x \in X$ τέτοιο ώστε $z_n \to x$. Παρατηρούμε ότι

$$\|z_n\| = \|x_1 + \cdots + x_n\| \le \|x_1\| + \cdots + \|x_n\| < \|x_1\| + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n} < \|x_1\| + \frac{1}{2}.$$

Άρα,

$$\|x\| = \lim_n \|z_n\| \le \|x_1\| + \frac{1}{2} < 1.$$

Δηλαδή, $x \in D_X(0,1)$. Από την $(*)$, $T(z_n) = T(x_1) + \cdots + T(x_n) \to y$. Όμως $z_n \to x$ και ο T είναι συνεχής, άρα $T(z_n) \to T(x)$. Δηλαδή, $T(x) = y$, κι αυτό σημαίνει ότι $y \in T(D_X(0,1))$.

Το $y \in D_Y(0,\delta'/2)$ ήταν τυχόν, άρα

$$T(D_X(0,1)) \supseteq D_Y(0,\delta'/2).$$

□

Απόδειξη του θεωρήματος ανοιχτής απεικόνισης: Έστω $A \subseteq X$ ανοιχτό. Θα δείξουμε ότι το $T(A)$ είναι ανοιχτό: έστω $y \in T(A)$. Υπάρχει $x \in A$ τέτοιο ώστε $Tx = y$. Το A είναι ανοιχτό, άρα υπάρχει $r > 0$ τέτοιο ώστε $D_X(x,r) \subseteq A$.

Από το Λήμμα, υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $T(D_X(0,1)) \supseteq D_Y(0,\delta)$. Τότε,

$$T(D_X(0,r)) = T(rD_X(0,1)) = rT(D_X(0,1)) \supseteq rD_Y(0,\delta) = D_Y(0,\delta r).$$

Αν $y' \in D_Y(y,\delta r)$, τότε $y' - y \in D_Y(0,\delta r)$, άρα υπάρχει $z \in D_X(0,r)$ τέτοιο ώστε $T(z) = y' - y$. Έπεται ότι $x + z \in D_X(x,r)$, και $T(x+z) = y'$. Δηλαδή,

$$T(A) \supseteq T(D_X(x,r)) \supseteq D_Y(y,\delta r).$$

Το $y \in T(A)$ ήταν τυχόν, άρα το $T(A)$ είναι ανοιχτό. □

Πόρισμα 6.2.4 (Θεώρημα αντίστροφης απεικόνισης)**.** *Έστω X, Y χώροι Banach, και $T : X \to Y$ φραγμένος, ένα προς ένα και επί, γραμμικός τελεστής. Τότε, ο $T^{-1} : Y \to X$ είναι φραγμένος γραμμικός τελεστής.*

Απόδειξη. Ο T^{-1} ορίζεται καλά και είναι γραμμικός τελεστής (γιατί;). Αφού ο T είναι ανοιχτή απεικόνιση, για κάθε $A \subseteq X$ ανοιχτό έχουμε ότι το $(T^{-1})^{-1}(A) = T(A)$ είναι ανοιχτό υποσύνολο του Y. Άρα, ο T^{-1} είναι συνεχής. □

6.3 Το θεώρημα κλειστού γραφήματος

Το τελευταίο βασικό θεώρημα αυτού του Κεφαλαίου είναι το θεώρημα κλειστού γραφήματος, το οποίο μας δίνει ένα πολύ χρήσιμο κριτήριο για να ελέγχουμε αν ένας γραμμικός τελεστής είναι φραγμένος.

Ορισμός 6.3.1. Έστω X, Y χώροι με νόρμα, και έστω $T : X \to Y$ γραμμικός τελεστής. Το *γράφημα* του T είναι το σύνολο

$$\mathrm{Gr}(T) = \{(x, y) : y = Tx\} \subseteq X \times Y. \tag{6.10}$$

Ο T έχει *κλειστό γράφημα* αν ισχύει το εξής:

> *Αν $x_n \to x$ στον X, $y_n \to y$ στον Y, και $y_n = T(x_n)$, $n \in \mathbb{N}$, τότε $y = T(x)$.*

Ισοδύναμα, αν το $\mathrm{Gr}(T)$ είναι κλειστό υποσύνολο του $X \times Y$, με νόρμα π.χ. την $\|(x, y)\| = \|x\|_X + \|y\|_Y$ (άσκηση).

Θεώρημα 6.3.2 (Θεώρημα κλειστού γραφήματος)**.** *Έστω X, Y χώροι Banach, και $T : X \to Y$ γραμμικός τελεστής. Αν το γράφημα $Gr(T)$ του T είναι κλειστό υποσύνολο του $X \times Y$, τότε ο T είναι φραγμένος.*

Απόδειξη. Θεωρούμε τον $X \times Y$ με νόρμα την $\|(x, y)\| = \|x\|_X + \|y\|_Y$. Ο $X \times Y$ είναι πλήρης: αν $z_n = (x_n, y_n)$ είναι ακολουθία Cauchy στον $X \times Y$ και $\varepsilon > 0$, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε, για κάθε $n > m \geq n_0$,

$$\varepsilon > \|z_n - z_m\| = \|(x_n - x_m, y_n - y_m)\| = \|x_n - x_m\|_X + \|y_n - y_m\|_Y.$$

Τότε όμως, $\|x_n - x_m\| < \varepsilon$ και $\|y_n - y_m\| < \varepsilon$, δηλαδή οι (x_n), (y_n) είναι ακολουθίες Cauchy στους X, Y αντίστοιχα. Οι X, Y είναι πλήρεις, άρα υπάρχουν $x \in X$ και $y \in Y$ τέτοια ώστε $x_n \to x$ και $y_n \to y$.

Όμως τότε, αν $z = (x, y)$, έχουμε

$$\|z - z_n\| = \|x - x_n\| + \|y - y_n\| \to 0.$$

Άρα, $z_n \to z$.

Από την υπόθεσή μας, το $\mathrm{Gr}(T)$ είναι κλειστό υποσύνολο του $X \times Y$, και εύκολα ελέγχουμε ότι είναι γραμμικός υπόχωρος του $X \times Y$. Αφού ο $X \times Y$ είναι χώρος Banach, το $\Gamma(T)$ είναι χώρος Banach.

Ορίζουμε $P : \mathrm{Gr}(T) \to X$ με $P(x, Tx) = x$. Ο P είναι γραμμικός τελεστής, και

$$P(x, Tx) = 0 \Longrightarrow x = 0 \Longrightarrow Tx = 0 \Longrightarrow (x, Tx) = (0, 0),$$

άρα ο P είναι ένα προς ένα. Προφανώς, ο P είναι επί. Τέλος, ο P είναι φραγμένος:

$$\|P(x, Tx)\| = \|x\|_X \leq \|x\|_X + \|Tx\|_Y = \|(x, Tx)\|_{X \times Y}.$$

Δηλαδή, $\|P\| \leq 1$.

Από το θεώρημα ανοιχτής απεικόνισης, ο $P^{-1} : X \to \mathrm{Gr}(T)$ με $P^{-1}(x) = (x, Tx)$ είναι φραγμένος. Δηλαδή, υπάρχει $M > 0$ τέτοιος ώστε, για κάθε $x \in X$

$$\|Tx\|_Y \leq \|x\|_X + \|Tx\|_Y = \|(x, Tx)\|_{X \times Y} = \|P^{-1}(x)\|_{X \times Y} \leq M\|x\|_X.$$

Επομένως, ο T είναι φραγμένος. □

6.4 Ασκήσεις

Ομάδα Α΄

1. Δείξτε ότι η πληρότητα του X είναι απαραίτητη στο θεώρημα ομοιόμορφου φράγματος: πάρτε τον c_{00} σαν υπόχωρο του ℓ_∞, και ορίστε $T_n : c_{00} \to \mathbb{R}$ με $T_n(x) = n\xi_n$.

2. Αν X χώρος με νόρμα, και $x_n \to x$ στον X, τότε $f(x_n) \to f(x)$ για κάθε $f \in X^*$. Ισχύει το αντίστροφο;

3. Έστω X χώρος Banach, Y χώρος με νόρμα, και $T_n : X \to Y$ φραγμένοι γραμμικοί τελεστές. Υποθέτουμε ότι για κάθε $x \in X$ η ακολουθία $(T_n x)$ είναι Cauchy. Δείξτε ότι η $(\|T_n\|)$ είναι φραγμένη.

Αν επιπλέον ο Y είναι πλήρης, δείξτε ότι υπάρχει $T : X \to Y$ φραγμένος γραμμικός τελεστής τέτοιος ώστε $T_n x \to Tx$ για κάθε $x \in X$.

4. Θεωρούμε τον c_{00} σαν υπόχωρο του ℓ_∞, και ορίζουμε $T : c_{00} \to c_{00}$ με $Tx = (\xi_1, \frac{\xi_2}{2}, \frac{\xi_3}{3}, \ldots)$. Δείξτε ότι ο T είναι γραμμικός, φραγμένος, ένα προς ένα και επί. Είναι ο T^{-1} φραγμένος; Εξηγήστε.

5. Έστω X, Y χώροι με νόρμα, $T_1 : X \to Y$ τελεστής με κλειστό γράφημα, και $T_2 : X \to Y$ φραγμένος τελεστής. Δείξτε ότι ο $T_1 + T_2$ έχει κλειστό γράφημα.

6. Έστω X, Y χώροι με νόρμα, και $T : X \to Y$ γραμμικός τελεστής με κλειστό γράφημα. Δείξτε ότι:

(α) Αν $C \subseteq X$ συμπαγές, τότε το $T(C)$ είναι κλειστό στον Y.

(β) Αν $K \subseteq Y$ συμπαγές, τότε το $T^{-1}(K)$ είναι κλειστό στον X.

Ομάδα Β΄

7. Έστω X χώρος με νόρμα, και (x_k) ακολουθία στον X τέτοια ώστε $\sum_k |f(x_k)| < +\infty$ για κάθε $f \in X^*$. Δείξτε ότι υπάρχει σταθερά $M > 0$ τέτοια ώστε

$$\sum_{k=1}^{\infty} |f(x_k)| \leq M\|f\|$$

για κάθε $f \in X^*$.

8. Έστω X χώρος Banach, (f_n) φραγμένη ακολουθία στον X^*, και $\varepsilon_n > 0$ τέτοια ώστε: $\varepsilon_n \to 0$ και, για κάθε $x \in X$ υπάρχει $K_x > 0$ τέτοιο ώστε $|f_n(x)| \leq K_x \varepsilon_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Δείξτε ότι $\|f_n\| \to 0$.

9. Έστω X, Y χώροι Banach, και $T_n \in B(X, Y)$, $n \in \mathbb{N}$. Δείξτε ότι τα εξής είναι ισοδύναμα:

(α) $\sup_n \|T_n\| < +\infty$.

(β) Για κάθε $x \in X$, $\sup_n \|T_n x\| < +\infty$.

(γ) Για κάθε $x \in X$ και $g \in Y^*$, $\sup_n |g(T_n x)| < +\infty$.

10. Έστω X γραμμικός χώρος, πλήρης ως προς τις νόρμες $\|\cdot\|_1$ και $\|\cdot\|_2$. Υποθέτουμε ότι

$$\|x_n\|_1 \to 0 \Longrightarrow \|x_n\|_2 \to 0.$$

Δείξτε ότι οι δύο νόρμες είναι ισοδύναμες.

11. Έστω X, Y χώροι Banach, και $T : X \to Y$ φραγμένος, γραμμικός, ένα προς ένα και επί τελεστής. Δείξτε ότι υπάρχουν $a, b > 0$ τέτοιοι ώστε

$$a\|x\| \leq \|Tx\| \leq b\|x\|$$

για κάθε $x \in X$.

12. Δείξτε το θεώρημα αντίστροφης απεικόνισης χρησιμοποιώντας το θεώρημα κλειστού γραφήματος.

13. Θεωρούμε τον $\mathcal{C}[0,1]$ και τον υπόχωρό του $\mathcal{C}^1[0,1]$ που αποτελείται από όλες τις f που έχουν συνεχή παράγωγο f' στο $[0,1]$. Ορίζουμε $T : \mathcal{C}^1[0,1] \to \mathcal{C}[0,1]$ με $Tf = f'$.

(α) Δείξτε ότι ο T έχει κλειστό γράφημα.

(β) Ο T δεν είναι φραγμένος (γιατί;). Τι συμπεραίνετε;

Ομάδα Γ′

14. Έστω X, Y χώροι Banach, και $T : X \to Y$ ένα προς ένα, φραγμένος γραμμικός τελεστής. Δείξτε ότι ο $T^{-1} : \mathrm{im}(T) \to X$ είναι φραγμένος αν και μόνο αν ο $\mathrm{im}(T) = \{Tx : x \in X\}$ είναι κλειστός υπόχωρος του Y.

15. Έστω X, Y χώροι Banach, και $T : X \to Y$ φραγμένος και επί γραμμικός τελεστής.

(α) Δείξτε ότι υπάρχει $M > 0$ τέτοιος ώστε: για κάθε $y \in Y$ υπάρχει $x \in X$ με $T(x) = y$ και $\|x\| \leq M\|y\|$.

(β) Αν $H : \ell_1 \to Y$ είναι ένας φραγμένος γραμμικός τελεστής, δείξτε ότι υπάρχει φραγμένος γραμμικός τελεστής $G : \ell_1 \to X$ ώστε $T \circ G = H$.

16. Έστω X, Y χώροι Banach και $T : X \to Y$ γραμμικός τελεστής με την εξής ιδιότητα: αν $\|x_n\| \to 0$ και $f \in Y^*$, τότε $f(Tx_n) \to 0$. Δείξτε ότι ο T είναι φραγμένος.

17. Έστω X, Y χώροι Banach, και $T : X \to Y$ γραμμικός τελεστής. Δείξτε ότι ο T είναι φραγμένος αν και μόνο αν για κάθε $g \in Y^*$ έχουμε $g \circ T \in X^*$.

18. Έστω X, Y χώροι Banach και $T : X \to Y$ φραγμένος και επί τελεστής. Αν $x_0 \in X$, $y_0 = T(x_0)$ και $y_n \to y_0$, να δείξετε ότι υπάρχουν $x_n \in X$ με $T(x_n) = y_n$ και $x_n \to x_0$.

19. Έστω X χώρος Banach, (x_n) ακολουθία στον X και $x_0 \in X$ με $x_n \to x_0$. Θεωρούμε μια ακολουθία (f_n) στον X^* και $f \in X^*$ για τις οποίες ισχύει $f_n(x) \to f(x)$ για κάθε $x \in X$. Δείξτε ότι $f_n(x_n) \to f(x)$.

20. Έστω X, Y, Z χώροι Banach και $T : X \times Y \to Z$ απεικόνιση με την ιδιότητα: για κάθε $x \in X$ ο $T_x : Y \to Z$ με $T_x(y) = T(x, y)$ είναι φραγμένος γραμμικός τελεστής και για κάθε $y \in Y$, ο $T^y : X \to Z$ με $T^y(x) = T(x, y)$ είναι φραγμένος γραμμικός τελεστής. Δείξτε ότι υπάρχει $M > 0$ ώστε

$$\|T(x, y)\| \leq M\|x\|\|y\|, \quad x \in X, y \in Y.$$

Μέρος II

Επιπλέον θέματα

Κεφάλαιο 7

Ασθενείς συγκλίσεις

7.1 Ορισμός και βασικές ιδιότητες

Έστω $(X, \| \ \|)$ ένας χώρος με νόρμα, (x_n) μια ακολουθία στον X και ένα $x \in X$. Όπως ξέρουμε, η (x_n) συγκλίνει στο x αν και μόνο αν $\|x_n - x\| \to 0$. Σε αυτό το κεφάλαιο, θα γράφουμε $x_n \to x$ και θα λέγε ότι η (x_n) συγκλίνει στο x *ισχυρά* (ή *κατά νόρμα*) εννοώντας την παραπάνω σύγκλιση. Η *ασθενής σύγκλιση* από την άλλη ορίζεται συναρτήσει των συναρτησοειδών του X ως εξής:

Ορισμός 7.1.1. Αν (x_n) μια ακολουθία σε ένα χώρο με νόρμα X και $x \in X$ θα λέμε ότι η (x_n) *συγκλίνει ασθενώς στο* x και θα γράφουμε $x_n \xrightarrow{w} x$ αν για κάθε $f \in X^*$ ισχύει

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x). \tag{7.1}$$

Σε αυτή την περίπτωση, η (x_n) θα λέγεται *ασθενώς συγκλίνουσα* ακολουθία και το x *ασθενές όριο* της (x_n).

Παρατηρήστε ότι η ασθενής σύγκλιση της ακολουθίας (x_n) σημαίνει σύγκλιση της ακολουθίας *αριθμών* $a_n = f(x_n)$ στο $a = f(x)$ για κάθε $f \in X^*$. Οι βασικές ιδιότητες της ασθενούς σύγκλισης περιέχονται στο παρακάτω λήμμα:

Λήμμα 7.1.2. *Έστω (x_n) μια ασθενώς συγκλίνουσα ακολουθία στο χώρο με νόρμα X και ένα στοιχείο $x \in X$ ώστε $x_n \xrightarrow{w} x$. Τότε:*

(i) Το ασθενές όριο της (x_n) είναι μοναδικό.

(ii) Κάθε υπακολουθία της (x_n) συγκλίνει ασθενώς στο x.

(iii) Η ακολουθία $(\|x_n\|)$ είναι φραγμένη.

Απόδειξη. (i) Ας υποθέσουμε ότι επιπλέον ισχύει $x_n \xrightarrow{w} y$. Τότε, για κάθε $f \in X^*$ ισχύει $f(x_n) \to f(x)$ καθώς και $f(x_n) \to f(y)$ και συνεπώς, αφού πρόκειται για ακολουθίες πραγματικών αριθμών, ισχύει $f(x) = f(y)$ για κάθε $f \in X^*$. Από αυτό όμως συμπεραίνουμε ότι $x = y$, αφού ο X^* διαχωρίζει τα σημεία του X (Πόρισμα 5.3.4).

(ii) Αυτό έπεται άμεσα από το γεγονός ότι αν η ακολουθία πραγματικών αριθμών $(f(x_n))$, όπου $f \in X^*$, συγκλίνει στο $f(x)$ τότε το ίδιο ισχύει και για κάθε υπακολουθία της.

(iii) Για κάθε $f \in X^*$ η ακολουθία $(f(x_n))$ είναι συγκλίνουσα και άρα φραγμένη, δηλαδή υπάρχει ένα $M(f) > 0$ ώστε $|f(x_n)| \leq M(f)$ για κάθε n. Χρησιμοποιώντας την εμφύτευση τ του X στον X^{**} ορίζουμε τα συναρτησοειδή $F_n = \tau(x_n) \in X^{**}$ μέσω της

$$F_n(f) = f(x_n), \quad f \in X^*. \tag{7.2}$$

Τώρα, για κάθε $f \in X^*$ η ακολουθία $(F_n(f))$ είναι φραγμένη, αφού $|F_n(f)| = |f(x_n)| \leq M(f)$. Από την πληρότητα του X^* και την αρχή ομοιόμορφου φράγματος τώρα, συμπεραίνουμε ότι υπάρχει $M > 0$ ώστε $\|F_n\| \leq M$ για κάθε n. Όμως $\|F_n\| = \|\tau(x_n)\| = \|x_n\|$ και άρα έχουμε το ζητούμενο. □

Η σχέση μεταξύ ασθενούς και ισχυρής σύγκλισης φαίνεται στην ακόλουθη πρόταση:

Πρόταση 7.1.3. *Έστω (x_n) μια ακολουθία σε ένα χώρο με νόρμα X. Τότε:*

(i) Αν η (x_n) συγκλίνει ισχυρά σε ένα στοιχείο $x \in X$, τότε συγκλίνει και ασθενώς στο ίδιο στοιχείο.

(ii) Το αντίστροφο του (i) δεν ισχύει πάντα.

(iii) Αν ο X είναι πεπερασμένης διάστασης τότε αληθεύει και το αντίστροφο του (i).

Απόδειξη. (i) Έστω ότι $x_n \to x$, δηλαδή ότι $\|x_n - x\| \to 0$. Για ένα συναρτησοειδές $f \in X^*$ έχουμε

$$|f(x_n) - f(x)| = |f(x_n - x)| \leq \|f\|\|x_n - x\| \to 0$$

και άρα πράγματι $x_n \xrightarrow{w} x$.

(ii) Έστω (e_n) μια ορθοκανονική ακολουθία σε έναν απειροδιάστατο χώρο Hilbert H. Τότε, για $n \neq m$ είναι

$$\|e_n - e_m\|^2 = \langle e_n - e_m, e_n - e_m \rangle = 2$$

και άρα η (e_n) δεν είναι (ισχυρά) συγκλίνουσα. Ισχύει όμως $e_n \xrightarrow{w} 0$: πράγματι, αν $f \in H^*$, υπάρχει $z \in H$ ώστε $f(x) = \langle x, z \rangle$, για κάθε $x \in H$. Από την ανισότητα του Bessel τώρα, έχουμε ότι

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle z, e_n \rangle|^2 \leq \|z\|^2 < +\infty,$$

από την οποία άμεσα έπεται ότι $\langle z, e_n \rangle = f(e_n) \to 0 = f(0)$.

(iii) Έστω ότι $\dim X = k$ και ότι $x_n \xrightarrow{w} x$. Αν $\{e_1, e_2, ..., e_k\}$ μια βάση του X, γράφουμε

$$x_n = a_1^{(n)} e_1 + a_2^{(n)} e_2 + ... + a_k^{(n)} e_k, \quad n = 1, 2, ... \tag{7.3}$$

και

$$x = a_1 e_1 + a_2 e_2 + ... + a_k e_k. \tag{7.4}$$

Από την υπόθεσή μας, έχουμε $f(x_n) \to f(x)$ για κάθε $f \in X^*$. Θεωρούμε ειδικότερα τα συναρτησοειδή $f_1, f_2, ..., f_k \in X^*$ που ορίζονται από τις σχέσεις

$$f_j(e_j) = 1 \quad \text{και} \quad f_j(e_m) = 0 \ \text{ για } j \neq m. \tag{7.5}$$

Έτσι, έχουμε $f_j(x_n) \to f_j(x)$, δηλαδή $a_j^{(n)} \to a_j$ για $j = 1, 2, ..., k$. Συνεπώς είναι και

$$\begin{aligned} \|x_n - x\| &= \left\| \sum_{j=1}^{k} \left(a_j^{(n)} - a_j \right) e_j \right\| \\ &\leq \sum_{j=1}^{k} \left| a_j^{(n)} - a_j \right| \|e_j\| \longrightarrow 0, \end{aligned}$$

δηλαδή η (x_n) συγκλίνει και ισχυρά στο x. □

Σημείωση. Υπάρχουν και απειροδιάστατοι χώροι στους οποίους η ασθενής και η ισχυρή σύγκλιση είναι ισοδύναμες. Ένα κλασικό παράδειγμα είναι ο χώρος ακολουθιών ℓ_1, όπως έχει αποδείξει ο I. Schur.

Δίνουμε τώρα μερικά κλασικά παραδείγματα.

Πρόταση 7.1.4. *Έστω H ένας χώρος Hilbert. Τότε, μια ακολουθία (x_n) στον H συγκλίνει στο x αν και μόνο αν $\langle x_n, z\rangle \to \langle x, z\rangle$ για κάθε $z \in H$.*

Απόδειξη. Έπεται άμεσα από τον ορισμό της ασθενούς σύγκλισης και το θεώρημα αναπαράστασης του Riesz. □

Για να καταλάβουμε την ασθενή σύγκλιση στους χώρους ακολουθιών ℓ_p, $1 < p < \infty$, θα χρειαστούμε το παρακάτω λήμμα.

Λήμμα 7.1.5. *Έστω X χώρος με νόρμα, (x_n) ακολουθία στοιχείων του X και $x \in X$. Τότε $x_n \xrightarrow{w} x$ αν και μόνον αν ισχύουν τα εξής:*

(Α΄) Η ακολουθία $(\|x_n\|)$ είναι φραγμένη και

(Β΄) για κάθε στοιχείο $f \in M$, όπου M ένα υποσύνολο του X^* με $\overline{\mathrm{span}(M)} = X^*$,[1] *ισχύει $f(x_n) \to f(x)$.*

Απόδειξη. Για το ευθύ, παρατηρούμε ότι το (Α΄) έπεται από το Λήμμα 7.1.2, ενώ το (Β΄) είναι άμεσο από τον ορισμό της ασθενούς σύγκλισης.

Υποθέτουμε τώρα ότι ισχύουν τα (Α΄) και (Β΄) και θα δείξουμε ότι $x_n \xrightarrow{w} x$. Έστω ένα $f \in X^*$ και $\varepsilon > 0$. Από το (Α΄), υπάρχει $M > 0$ ώστε $\|x_n\| \leq M$ για κάθε n και από το (B') υπάρχει ένα συναρτησοειδές $g \in \mathrm{span}(M)$ ώστε

$$\|f - g\| < \frac{\varepsilon}{3M}. \tag{$*$}$$

Αφού για κάθε $h \in M$ ισχύει $h(x_n) \to h(x)$, έπεται ότι επίσης $g(x_n) \to g(x)$ (γιατί;) και άρα υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε για $n \geq n_0$ να ισχύει

$$|g(x_n) - g(x)| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{$**$}$$

[1] ένα τέτοιο σύνολο M καλείται *ολικό* υποσύνολο του X^*.

Τελικά έχουμε ότι

$$\begin{aligned} |f(x_n) - f(x)| &\le |f(x_n) - g(x_n)| + |g(x_n) - g(x)| + |g(x) - f(x)| \\ &\le \|f - g\|\|x_n\| + |g(x_n) - g(x)| + \|g - f\|\|x\| \\ &< \frac{\varepsilon}{3M}M + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3M}M = \varepsilon, \end{aligned}$$

για $n \ge n_0$, από τις $(*)$ και $(**)$. Επομένως $f(x_n) \to f(x)$ και άρα τελικά $x_n \xrightarrow{w} x$. □

Πρόταση 7.1.6. *Έστω $1 < p < \infty$, $x_n = (\xi_1^{(n)}, \xi_2^{(n)}, ...) \in \ell_p$ και $x = (\xi_1, \xi_2, ...) \in \ell_p$. Τότε $x_n \xrightarrow{w} x$ αν και μόνον αν:*

(Α΄) Η ακολουθία $(\|x_n\|)$ είναι φραγμένη και

(Β΄) για κάθε σταθερό j έχουμε $\xi_j^{(n)} \to \xi_j$ καθώς $n \to \infty$.

Απόδειξη. Ο δυϊκός του ℓ_p είναι ο ℓ_q, όπου q ο συζυγής εκθέτης του p, και η ακολουθία (e_j) είναι μια βάση Schauder για τον ℓ_q, όπου το e_j έχει μονάδα στην $j-$οστή θέση και 0 σε όλες τις υπόλοιπες. Η συνθήκη $\xi_j^{(n)} \to \xi_j$ καθώς $n \to \infty$ είναι ισοδύναμη με την $e_j(x_n) \to e_j(x)$, όπου βλέπουμε το e_j σαν στοιχείο του ℓ_p^*, και συνεπώς το ζητούμενο έπεται άμεσα από το προηγούμενο λήμμα. □

7.2 Σύγκλιση ακολουθιών τελεστών και συναρτησοειδών

Στην προηγούμενη ενότητα είδαμε ότι εκτός της συνηθισμένης (ισχυρής) σύγκλισης μιας ακολουθίας στοιχείων ενός χώρου με νόρμα X, μπορεί να οριστεί ένα ακόμη είδος σύγκλισης, η ασθενής. Για ακολουθίες τελεστών $T_n \in \mathcal{B}(X,Y)$ τα είδη των συγκλίσεων που έχουν θεωρητικό ενδιαφέρον αλλά και πρακτική εφαρμογή είναι τρία:

Ορισμός 7.2.1. Έστω X, Y χώροι με νόρμα και $T_n \in \mathcal{B}(X,Y)$ μια ακολουθία τελεστών. Θα λέμε ότι:

(i) Η (T_n) είναι *norm συγκλίνουσα*, αν συγκλίνει ως προς τη νόρμα του χώρου $\mathcal{B}(X,Y)$, δηλαδή αν υπάρχει τελεστής $T : X \to Y$ τέτοιος ώστε

$$\|T_n - T\| \longrightarrow 0. \tag{7.6}$$

(ii) Η (T_n) είναι *ισχυρά συγκλίνουσα*, αν η ακολουθία $(T_n x)$ συγκλίνει ισχυρά στον Y για κάθε $x \in X$, δηλαδή αν υπάρχει τελεστής $T : X \to Y$ τέτοιος ώστε

$$\|T_n x - Tx\| \longrightarrow 0, \quad \text{για κάθε } x \in X. \tag{7.7}$$

(iii) Η (T_n) είναι *ασθενώς συγκλίνουσα*, αν η ακολουθία $(T_n x)$ συγκλίνει ασθενώς στον Y για κάθε $x \in X$, δηλαδή αν υπάρχει τελεστής $T : X \to Y$ τέτοιος ώστε

$$f(T_n x) \longrightarrow f(Tx), \quad \text{για κάθε } x \in X \text{ και } f \in Y^*. \tag{7.8}$$

Ο τελεστής T λέγεται *norm, ισχυρό και ασθενές όριο* της (T_n) αντίστοιχα.

Είναι εύκολο να δείξει κανείς ότι για τα είδη σύγκλισης που μόλις ορίσαμε ισχύουν οι συνεπαγωγές

$$\text{(i)} \implies \text{(ii)} \implies \text{(iii)} \tag{7.9}$$

(άσκηση). Καμία όμως από αυτές δεν αντιστρέφεται, όπως φαίνεται και από τα α-κόλουθα παραδείγματα.

Παραδείγματα 7.2.2. (α) Στο χώρο ακολουθιών ℓ_2 θεωρούμε την ακολουθία (T_n), που ορίζεται από τις σχέσεις

$$T_n(\xi_1, \xi_2, ...) = (0, 0, ..., 0, \xi_{n+1}, \xi_{n+2}, ...), \tag{7.10}$$

όπου πριν το ξ_{n+1} υπάρχουν n το πλήθος μηδενικά. Κάθε T_n είναι γραμμικός, φραγμένος και επιπλέον η (T_n) συγκλίνει ισχυρά στο 0, αφού $T_n x \to 0 = 0x$ για κάθε $x \in \ell_2$. Όμως, η (T_n) δεν είναι norm συγκλίνουσα, αφού για $n \neq m$ ισχύει $\|T_n - T_m\| = 1$. Έτσι, δεν ισχύει η συνεπαγωγή (ii) $\implies$ (i).

(β) Θεωρούμε τώρα την ακολουθία τελεστών $S_n : \ell_2 \to \ell_2$ που ορίζεται από τις σχέσεις

$$S_n(\xi_1, \xi_2, ...) = (0, 0, ..., 0, \xi_1, \xi_2, ...), \tag{7.11}$$

όπου πριν το ξ_1 υπάρχουν n το πλήθος μηδενικά. Κάθε S_n είναι γραμμικός και φραγμένος. Αυτή η ακολουθία (S_n) είναι ασθενώς συγκλίνουσα στο 0, αλλά δε συγκλίνει ισχυρά.

Πράγματι έστω ένα συναρτησοειδές $f \in \ell_2^*$. Ο ℓ_2 είναι χώρος Hilbert και άρα υπάρχει ένα $z = (\zeta_1, \zeta_2, ...) \in \ell_2$ ώστε για $x = (\xi_1, \xi_2, ...) \in \ell_2$ να ισχύει

$$f(x) = \langle x, z \rangle = \sum_{j=1}^{\infty} \xi_j \zeta_j.$$

Συνεπώς,

$$f(S_n x) = \langle S_n x, z \rangle = \sum_{j=n+1}^{\infty} \xi_{n-j} \zeta_j = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \zeta_{n+k}.$$

Από την ανισότητα Cauchy-Schwarz λοιπόν, έπεται ότι

$$|f(S_n x)|^2 = |\langle S_n x, z \rangle|^2 \leq \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k^2 \sum_{m=n+1}^{\infty} \zeta_m^2 \longrightarrow 0, \quad \text{για } n \to \infty.$$

Έτσι, πράγματι $f(S_n x) \to 0 = f(0x)$ για κάθε $f \in \ell_2^*$ και άρα η (T_n) συγκλίνει ασθενώς στο 0. Όμως δεν συγκλίνει ισχυρά, αφού για $x = (1, 0, 0, ...)$ και $n \neq m$ έχουμε

$$\|S_n x - S_m x\| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}.$$

Έτσι, δεν ισχύει ούτε η συνεπαγωγή (iii) $\implies$ (ii).

Ας μελετήσουμε λίγο τον οριακό τελεστή T μιας ακολουθίας (T_n) ως προς τις διάφορες έννοιες σύγκλισης. Σίγουρα ο T είναι γραμμικός (γιατί;). Είναι όμως και φραγμένος;

Αν η (T_n) συγκλίνει στον T κατά νόρμα, τότε αναγκαστικά $T \in \mathcal{B}(X, Y)$, αφού σε αντίθετη περίπτωση το σύμβολο $\|T_n - T\|$ δε θα είχε νόημα στο $\mathbb{R}$. Αν όμως η (T_n) συγκλίνει στον T ισχυρά ή ασθενώς και ο X δεν είναι πλήρης, τότε ο T μπορεί να μην είναι φραγμένος.

Παράδειγμα 7.2.3. Θεωρούμε το χώρο c_{00} των τελικά μηδενικών ακολουθιών εφοδιασμένο με τη νόρμα

$$\|x\|_2 = \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2 + ...}, \quad x = (\xi_1, \xi_2, ...) \in c_{00}.$$

Θεωρούμε την ακολουθία τελεστών $T_n \in \mathcal{B}(c_{00}, c_{00})$ που ορίζεται από τις σχέσεις

$$T_n(\xi_1, \xi_2, ...) = (\xi_1, 2\xi_2, 3\xi_3, ..., n\xi_n, \xi_{n+1}, \xi_{n+2}, ...). \tag{7.12}$$

Η T_n όμως συγκλίνει ισχυρά στο μη φραγμένο τελεστή T που ορίζεται από τη σχέση $T((\xi_j)_j) = (j\xi_j)_j$.

Αν ο χώρος X είναι πλήρης δεν εμφανίζονται τέτοια παραδείγματα:

Λήμμα 7.2.4. *Έστω $T_n \in \mathcal{B}(X, Y)$, όπου ο X είναι χώρος Banach και ο Y χώρος με νόρμα, μια ακολουθία τελεστών. Αν η (T_n) συγκλίνει ισχυρά στον T, τότε $T \in \mathcal{B}(X, Y)$.*

Απόδειξη. Η γραμμικότητα του T έπεται άμεσα από τη γραμμικότητα των T_n. Αφού $T_n x \to Tx$ για κάθε $x \in X$, η ακολουθία $(T_n x)$ είναι φραγμένη για κάθε $x \in X$. Συνεπώς, αφού ο X είναι πλήρης, και η $(\|T_n\|)$ είναι φραγμένη από την αρχή ομοιόμορφου φράγματος. Υπάρχει λοιπόν ένα $M > 0$ τέτοιο ώστε $\|T_n\| \leq M$ για κάθε $n = 1, 2, ...$ Συνεπώς $\|T_n x\| \leq \|T_n\|\|x\| \leq M\|x\|$ για κάθε $x \in X$, $n = 1, 2, ...$ και άρα ισχύει και $\|Tx\| \leq M\|x\|$. □

Ένα χρήσιμο κριτήριο για την ισχυρή σύγκλιση ακολουθιών τελεστών είναι το εξής:

Πρόταση 7.2.5. *Μια ακολουθία (T_n) τελεστών με $T_n \in \mathcal{B}(X, Y)$, όπου X, Y χώροι Banach, είναι ισχυρά συγκλίνουσα αν και μόνο αν ισχύουν τα εξής:*

(Α′) Η ακολουθία $(\|T_n\|)$ είναι φραγμένη και

(Β′) Η ακολουθία $(T_n x)$ είναι Cauchy στον Y για κάθε $x \in M$, όπου M ένα υποσύνολο του X με $\overline{\mathrm{span}(M)} = X$.

Απόδειξη. Για το ευθύ, αν $T_n x \to Tx$ για κάθε $x \in X$, το (Α′) έπεται από την αρχή ομοιόμορφου φράγματος και το (Β′) είναι προφανές.

Για το αντίστροφο, υποθέτουμε ότι ισχύουν τα (Α′) και (Β′). Από το (Α′) υπάρχει ένα $M > 0$ ώστε $\|T_n\| \leq M$ για κάθε n. Επιπλέον, αφού η $(T_n x)$ είναι συγκλίνουσα για κάθε $x \in M$, το ίδιο ισχύει και για κάθε $x \in \mathrm{span}(M)$ (γιατί;). Έστω ένα $x \in X$ τυχόν και ένα $\varepsilon > 0$. Αφού η $\mathrm{span}(M)$ είναι πυκνή στον X υπάρχει ένα $y \in \mathrm{span}(M)$ ώστε

$$\|x - y\| < \frac{\varepsilon}{3M}. \tag{$*$}$$

Αφού $y \in \mathrm{span}(M)$, η ακολουθία $(T_n y)$ είναι Cauchy και άρα υπάρχει ένα $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε για $n, m \geq n_0$ να είναι

$$\|T_n y - T_m y\| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{$**$}$$

Έχουμε λοιπόν ότι

$$\begin{aligned}\|T_n x - T_m x\| &\leq \|T_n x - T_n y\| + \|T_n y - T_m y\| + \|T_m y - T_m x\| \\ &\leq \|T_n\|\|x-y\| + \|T_n y - T_m y\| + \|T_m\|\|x-y\| \\ &< M\frac{\varepsilon}{3M} + \frac{\varepsilon}{3} + M\frac{\varepsilon}{3M} = \varepsilon,\end{aligned}$$

για $n, m \geq n_0$, από τις $(*)$ και $(**)$. Έτσι, η ακολουθία $(T_n x)$ είναι Cauchy και άρα συγκλίνουσα, από την πληρότητα του Y. □

Οι παραπάνω συγκλίσεις που ορίσαμε έχουν νόημα, ειδικότερα, για φραγμένα γραμμικά συναρτησοειδή, δηλαδή για στοιχεία του $\mathcal{B}(X, \mathbb{R})$. Παρ' όλα αυτά, τώρα οι (ii) και (iii) γίνονται ισοδύναμες αφού η ακολουθία $(T_n x)$ περιέχεται στον πεπερασμένης διάστασης χώρο $\mathbb{R}$, όπου η ασθενής και η ισχυρή σύγκλιση είναι ισοδύναμες. Έτσι, οι συγκλίσεις που απομένουν καλούνται ως εξής:

Ορισμός 7.2.6. Έστω (f_n) μια ακολουθία φραγμένων γραμμικών συναρτησοειδών ενός χώρου με νόρμα X. Θα λέμε ότι:

(i) Η (f_n) συγκλίνει *ισχυρά* όταν υπάρχει ένα συναρτησοειδές $f \in X^*$ ώστε $\|f_n - f\| \to 0$. Τότε θα γράφουμε $f_n \longrightarrow f$.

(ii) Η (f_n) συγκλίνει *ασθενώς-∗* όταν υπάρχει ένα συναρτησοειδές $f \in X^*$ ώστε $f_n(x) \to f(x)$ για κάθε $x \in X$. Τότε θα γράφουμε $f_n \xrightarrow{w^*} f$

Το συναρτησοειδές f θα λέγεται το *ισχυρό* και το *ασθενές-∗ όριο* της (f_n) αντίστοιχα.

Η Πρόταση 7.2.5 παίρνει την εξής τη μορφή για συναρτησοειδή:

Πόρισμα 7.2.7. *Μια ακολουθία (f_n) φραγμένων γραμμικών συναρτησοειδών σε ένα χώρο Banach X είναι ασθενώς-∗ συγκλίνουσα αν και μόνο αν ισχύουν τα εξής:*

(A') Η ακολουθία $(\|f_n\|)$ είναι φραγμένη και

(B') η ακολουθία $(f_n(x))$ είναι Cauchy για κάθε $x \in M$, όπου M ένα υποσύνολο του X με $\overline{\operatorname{span}(M)} = X$.

□

7.3 Εφαρμογή στην αθροισιμότητα ακολουθιών

Σε αυτή την ενότητα θα παρουσιάσουμε μια εφαρμογή της ασθενούς-∗ σύγκλισης στη θεωρία των αποκλινουσών ακολουθιών. Μια τέτοια ακολουθία δεν έχει όριο με τη συνήθη έννοια. Στόχος αυτής της θεωρίας είναι να ορίσει γενικευμένες έννοιες «ορίου» ώστε να επεκτείνει την κλάση των ακολουθιών που έχουν όριο. Μια τέτοια διαδικασία καλείται *μέθοδος αθροισιμότητας*.

Παράδειγμα 7.3.1. Έστω $x = (\xi_k)$ μια δοσμένη ακολουθία. Η ακολουθία των *Cesàro μέσων* της x είναι η ακολουθία $y = (\eta_n)$ των αριθμητικών μέσων της x, δηλαδή

$$\eta_1 = \xi_1, \quad \eta_2 = \frac{\xi_1 + \xi_2}{2}, \quad \ldots \quad \eta_n = \frac{\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n}{n}, \quad \ldots \tag{7.13}$$

Αυτό είναι ένα παράδειγμα μεθόδου αθροισιμότητας (η *Cesàro αθροισιμότητα*): αντιστοιχούμε στην ακολουθία x μια άλλη ακολουθία y και μελετάμε τη σύγκλιση αυτής. Αν η y συγκλίνει σε έναν πραγματικό αριθμό η (με τη συνήθη έννοια), λέμε ότι η x έχει Cesàro όριο το η. Για παράδειγμα, αν

$$x = (0, 1, 0, 1, ...) \quad \text{τότε} \quad y = \left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{5}, ...\right)$$

και έτσι η x έχει Cesàro όριο το $\frac{1}{2}$ παρ΄ όλο που δεν έχει όριο με τη συνήθη έννοια.

Μια μέθοδος αθροισιμότητας καλείται *μέθοδος πινάκων* αν μπορεί να γραφεί στη μορφή

$$y = Ax, \tag{7.14}$$

όπου οι ακολουθίες $x = (\xi_k)$ και $y = (\eta_k)$ γράφονται στη μορφή άπειρων διανυσμάτων στήλη και ο $A = (a_{nk})$ είναι ένας άπειρος πίνακας, δηλαδή $n, k = 1, 2, ...$ Έτσι, η προηγούμενη σχέση γράφεται

$$\eta_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}\xi_k, \qquad n = 1, 2, ... \tag{7.15}$$

Η παραπάνω μέθοδος θα καλείται $A-$*μέθοδος*. Αν για μια ακολουθία x, η αντίστοιχη ακολουθία $y = Ax$ έχει όριο έναν αριθμό η θα λέμε ότι ο η είναι το $A-$*όριο* της x και η x θα λέγεται $A-$*αθροίσιμη*. Το σύνολο όλων των $A-$αθροίσιμων ακολουθιών καλείται το *φάσμα* της $A-$μεθόδου.

Ορισμός 7.3.2. Μια $A-$μέθοδος καλείται *κανονική* για κάθε ακολουθία $x = (\xi_k)$ με $\xi_k \to \xi \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι και $\eta_n \to \xi$, όπου $y = Ax = (\eta_n)$.

Η κανονικότητα είναι φυσιολογική απαίτηση για μια μέθοδο αθροισιμότητας: αφού θέλουμε να ορίσουμε μια γενικευμένη έννοια «ορίου», πρέπει σίγουρα αυτή να περιέχει την συνήθη. Ένα βασικό κριτήριο κανονικότητας είναι το εξής:

Θεώρημα 7.3.3 (Toeplitz)**.** *Μια $A-$μέθοδος αθροισιμότητας με πίνακα $A = (a_{nk})$ είναι κανονική αν και μόνο αν ισχύουν τα παρακάτω:*

$$\lim_{n\to\infty} a_{nk} = 0 \qquad \text{για } k = 1, 2, ... \tag{Α′}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} = 1 \quad \text{και} \tag{Β′}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}| \leq \gamma \qquad \text{για } n = 1, 2, ..., \tag{Γ′}$$

όπου $\gamma > 0$ μια σταθερά ανεξάρτητη του n.

Απόδειξη. ($\Rightarrow$) Υποθέτουμε πρώτα ότι η $A-$μέθοδος είναι κανονική και θα δείξουμε τα (Α′), (Β′), (Γ′). Θεωρούμε την ακολουθία x_k που έχει όλους τους όρους της 0 εκτός από τον $k-$οστό που είναι 1. Η εικόνα της μέσω της A είναι η $y_k = (a_{nk})_n$ και άρα, αφού η x_k έχει όριο το 0, πράγματι ισχύει $\lim_n a_{nk} = 0$, δηλαδή η (Α′).

Επιπλέον, η ακολουθία $x = (1, 1, 1, ...)$ έχει όριο το 1 και άρα το ίδιο ισχύει για την $y = Ax = (\eta_n)_n$. Όμως $\eta_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}$ και άρα $\lim_n \eta_n = 1$, που είναι ακριβώς η ζητούμενη (Β′).

Αποδεικνύουμε τώρα το (Γ′). Έστω c ο χώρος Banach όλων των συγκλινουσών ακολουθιών με νόρμα την

$$\|x\| = \sup_j |\xi_j|, \qquad x = (\xi_j). \tag{7.16}$$

Θεωρούμε τα γραμμικά συναρτησοειδή f_{nm} του c που ορίζονται από τις σχέσεις

$$f_{nm}(x) = \sum_{k=1}^{m} a_{nk}\xi_k, \qquad x = (\xi_k), \; m, n = 1, 2, ... \tag{7.17}$$

Κάθε f_{nm} είναι φραγμένο, αφού

$$|f_{nm}(x)| = \left|\sum_{k=1}^{m} a_{nk}\xi_k\right| \le \left(\sum_{k=1}^{m} |a_{nk}|\right) \sup_j |\xi_j| = \left(\sum_{k=1}^{m} |a_{nk}|\right) \|x\|.$$

Από την κανονικότητα της $A-$μεθόδου τώρα συνεπάγεται τη σύγκλιση της σειράς της σχέσης (7.15). Έτσι, αυτή ορίζει γραμμικά συναρτησοειδή $f_1, f_2, ...$ του c από τις σχέσεις

$$\eta_n = f_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}\xi_k, \qquad n = 1, 2, ... \tag{7.18}$$

Επομένως έχουμε $f_{nm}(x) \longrightarrow f_n(x)$ καθώς $m \to \infty$ για κάθε $x \in c$. Έτσι, η $(f_{nm})_m$ συγκλίνει ασθενώς στο f_n και άρα συμπεραίνουμε από το Λήμμα 7.2.4 ότι κάθε f_n είναι φραγμένο γραμμικό συναρτησοειδές. Επιπλέον, για κάθε $x \in c$ η ακολουθία $(\eta_n) = (f_n(x))$ είναι συγκλίνουσα, άρα φραγμένη, και συνεπώς, από την αρχή ομοιόμορφου φράγματος, υπάρχει $\gamma > 0$ ώστε

$$\|f_n\| \le \gamma, \qquad \text{για κάθε } n = 1, 2, ...$$

Θεωρούμε τώρα τις ακολουθίες $x_{nm} = (\xi_k^{(n,m)})_k$ που ορίζονται από τις σχέσεις:

$$\xi_k^{(n,m)} = \begin{cases} |a_{nk}|/a_{nk}, & \text{αν } k \le m \text{ και } a_{nk} \ne 0 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

και παρατηρούμε ότι $x_{nm} \in c$ και $\|x_{nm}\| = 1$ αν $x_{nm} \ne 0$. Είναι όμως

$$f_n(x_{nm}) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}\xi_k^{(n,m)} = \sum_{k=1}^{m} |a_{nk}|,$$

για κάθε n, m. Συνεπώς

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}| = \lim_{m\to\infty} \sum_{k=1}^{m} |a_{nk}| \le \|f_n\| \le \gamma,$$

και έτσι αποδείχθηκε το (Γ′).

($\Leftarrow$) Υποθέτουμε τώρα ότι ισχύουν τα (Α′), (Β′) και (Γ′). Θεωρούμε το γραμμικό συναρτησοειδές f στον c που ορίζεται από τη σχέση

$$f(x) = f\left((\xi_k)\right) = \lim_{k\to\infty} \xi_k. \tag{7.19}$$

Το f είναι προφανώς φραγμένο, αφού

$$|f(x)| = |\lim_k \xi_k| \leq \sup_k |\xi_k| = \|x\|.$$

Έστω $M \subseteq c$ το σύνολο όλων των τελικά σταθερών ακολουθιών, δηλαδή εκείνων των $x = (\xi_k)$ για τις οποίες υπάρχει ένα $j = j(x)$ ώστε

$$\xi_j = \xi_{j+1} = \xi_{j+2} = ... = \xi.$$

Τότε $f(x) = \xi$ και επιπλέον

$$\begin{aligned} \eta_n = f_n(x) &= \sum_{k=1}^{j-1} a_{nk}\xi_k + \xi \sum_{k=j}^{\infty} a_{nk} \\ &= \sum_{k=1}^{j-1} a_{nk}(\xi_k - \xi) + \xi \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} \longrightarrow 0 + \xi \cdot 1 = \xi = f(x), \end{aligned}$$

καθώς $n \to \infty$ από τις (Α′) και (Β′). Επομένως, $f_n(x) \to f(x)$ για κάθε $x \in M$.

Θέλουμε να χρησιμοποιήσουμε το Πόρισμα 7.2.7. Εύκολα υπολογίζουμε ότι

$$|f_n(x)| = \left| \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}\xi_k \right| \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}| \right) \|x\|,$$

όπου $x = (\xi_k)$, και επομένως

$$\|f_n\| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}| \leq \gamma, \qquad \text{για κάθε } n = 1, 2, ...$$

Αρκεί τώρα να δείξουμε ότι το M είναι πυκνό στον c. Έστω μια ακολουθία $x = (\xi_1, \xi_2, ...) \in c$ και ένα $\varepsilon > 0$. Αν $\xi = \lim_n \xi_n$, τότε υπάρχει ένα $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $|\xi_n - \xi| < \varepsilon/2$ για $n \geq n_0$. Έτσι, αν θέσουμε $y = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_{n_0-1}, \xi, \xi, \xi, ...) \in M$ έχουμε

$$\|x - y\| = \|(0, 0, ..., 0, \xi_{n_0} - \xi, \xi_{n_0+1} - \xi, ...)\| \leq \varepsilon/2 < \varepsilon.$$

Έτσι πράγματι το M είναι πυκνό στον c. Συνεπώς, από το Πόρισμα 7.2.7, η (f_n) συγκλίνει ασθενώς-* στο f, δηλαδή $f_n(x) \to f(x)$ για κάθε $x \in c$. Έτσι, αποδείξαμε ότι αν το $\xi = \lim_k \xi_k$ υπάρχει, τότε και $\eta_n = f_n(x) \to f(x) = \xi$. Αυτός είναι ακριβώς ο ορισμός της κανονικότητας και άρα η απόδειξη ολοκληρώθηκε. □

7.4 Ασκήσεις

Ομάδα Α′

1. Έστω (x_n) και (y_n) δύο ακολουθίες σε ένα χώρο με νόρμα X και $x, y \in X$ με $x_n \xrightarrow{w} x$ και $y_n \xrightarrow{w} y$. Να δείξετε ότι $x_n + y_n \xrightarrow{w} x + y$ και $ax_n \xrightarrow{w} ax$, όπου $a \in \mathbb{R}$.

2. Έστω X, Y χώροι με νόρμα, $T \in \mathcal{B}(X, Y)$ και (x_n) μια ακολουθία στον X. Να δείξετε ότι αν $x_n \xrightarrow{w} x$, τότε $Tx_n \xrightarrow{w} Tx$.

3. Αποδείξτε ότι αν (T_n), (S_n) δύο ακολουθίες τελεστών στον $\mathcal{B}(X, Y)$ που συγκλίνουν ισχυρά (αντίστ. ασθενώς) στους τελεστές T και S αντίστοιχα, τότε και οι

$(T_n + S_n)$, (aT_n) συγκλίνουν ισχυρά (αντίστ. ασθενώς) στους $T + S$ και aT αντίστοιχα, όπου $a \in \mathbb{R}$.

Ομάδα Β′

4. Αν $x_n \in \mathcal{C}[a,b]$ και $x_n \xrightarrow{w} x \in \mathcal{C}[a,b]$ αποδείξτε ότι η (x_n) συγκλίνει στην x κατά σημείο, δηλαδή $x_n(t) \to x(t)$ για κάθε $t \in [a,b]$.

5. Αν (x_n) μια ακολουθία στο χώρο με νόρμα X και $x_n \xrightarrow{w} x$, να δείξετε ότι $\|x\| \leq \liminf_n \|x_n\|$.

6. Αποδείξτε ότι αν η ακολουθία τελεστών $T_n \in \mathcal{B}(X,Y)$ συγκλίνει ισχυρά στον $T \in \mathcal{B}(X,Y)$, τότε $\|T\| \leq \liminf_n \|T_n\|$.

7. Αν (x_n) μια ακολουθία στο χώρο με νόρμα X και $x_n \xrightarrow{w} x$, να δείξετε ότι $x \in \overline{\operatorname{span}\{x_1, x_2, ...\}}$.

Ομάδα Γ′

8. Έστω X χώρος με νόρμα και μια ακολουθία (x_n) στον X. Η (x_n) καλείται *ασθενώς Cauchy* αν για κάθε $f \in X^*$ η ακολουθία $(f(x_n))$ είναι Cauchy στο $\mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι κάθε ασθενώς Cauchy ακολουθία είναι φραγμένη.

9. Ένας χώρος με νόρμα X καλείται *ασθενώς συμπαγής* αν κάθε ασθενώς Cauchy ακολουθία στον X είναι ασθενώς συγκλίνουσα. Αποδείξτε ότι κάθε αυτοπαθής χώρος είναι ασθενώς συμπαγής.

10. Έστω X ένας διαχωρίσιμος χώρος Banach και $M \subseteq X^*$ ένα φραγμένο σύνολο. Αποδείξτε ότι κάθε ακολουθία στοιχείων του M περιέχει μια ασθενώς συγκλίνουσα υπακολουθία.

Κεφάλαιο 8

Το θεώρημα σταθερού σημείου

8.1 Συστολές - θεώρημα σταθερού σημείου

Ορισμός 8.1.1. (i) Έστω (X,d) μετρικός χώρος και έστω $T : X \to X$ μια συνάρτηση. Το $x \in X$ λέγεται *σταθερό σημείο* της T αν $T(x) = x$.

(ii) Η T λέγεται *συστολή* στον X, αν υπάρχει $0 < a < 1$ τέτοιος ώστε, για κάθε $x, y \in X$

$$d(T(x), T(y)) \leq a d(x,y).$$

Θεώρημα 8.1.2 (Θεώρημα σταθερού σημείου Banach)**.** *Έστω (X,d) μετρικός χώρος. Υποθέτουμε ότι ο X είναι πλήρης και ότι $T : X \to X$ είναι μια συστολή στον X. Τότε, η T έχει ακριβώς ένα σταθερό σημείο.*

Απόδειξη. Ορίζουμε διαδοχικά τους όρους μιας ακολουθίας (x_n) στον X ως εξής: επιλέγουμε τυχόν $x_0 \in X$, και θέτουμε

$$x_1 = T(x_0), \quad x_2 = T(x_1) = T^2(x_0), \quad x_3 = T(x_2) = T^3(x_0), \ldots \tag{8.1}$$

Γενικά,

$$x_n = T^n(x_0), \quad n \in \mathbb{N}. \tag{8.2}$$

Η (x_n) είναι ακολουθία Cauchy στον X: αν $m \in \mathbb{N}$, τότε

$$\begin{aligned} d(x_{m+1}, x_m) &= d(Tx_m, Tx_{m-1}) \\ &\leq a d(x_m, x_{m-1}) \\ &= a d(Tx_{m-1}, Tx_{m-2}) \\ &\leq a^2 d(x_{m-1}, x_{m-2}), \end{aligned}$$

και, συνεχίζοντας με τον ίδιο τρόπο, βλέπουμε ότι

$$d(x_{m+1}, x_m) \leq a^m d(x_1, x_0), \quad m \in \mathbb{N}. \tag{8.3}$$

Αν $m > n$, χρησιμοποιώντας την προηγούμενη εκτίμηση και την τριγωνική ανισότητα, παίρνουμε

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) &\leq d(x_m, x_{m-1}) + d(x_{m-1}, x_{m-2}) + \cdots + d(x_{n+1}, x_n) \\ &\leq a^{m-1} d(x_1, x_0) + a^{m-2} d(x_1, x_0) + \cdots + a^n d(x_1, x_0) \\ &= a^n d(x_1, x_0) \frac{1 - a^{m-n}}{1 - a} \\ &\leq a^n \frac{d(x_1, x_0)}{1 - a}. \end{aligned}$$

Αφού $0 < a < 1$, έχουμε $a^n d(x_1, x_0)/(1 - a) \to 0$ καθώς $m, n \to \infty$. Άρα, η (x_m) είναι ακολουθία Cauchy. Ο (X, d) είναι πλήρης, επομένως υπάρχει $x \in X$ τέτοιο ώστε $x_m \to x$. Έχουμε

$$\begin{aligned} d(x, Tx) &\leq d(x, x_m) + d(x_m, Tx) \\ &= d(x, x_m) + d(Tx_{m-1}, Tx) \\ &\leq d(x, x_m) + d(x_{m-1}, x) \to 0, \end{aligned}$$

άρα $d(x, Tx) = 0$, δηλαδή $Tx = x$.

Αν υπήρχε κι άλλο σταθερό σημείο y της T, θα είχαμε

$$0 < d(x, y) = d(Tx, Ty) \leq a d(x, y),$$

άτοπο, αφού $0 < a < 1$. □

Η απόδειξη του θεωρήματος μας δίνει και εκτίμηση για το πόσο κοντά βρισκόμαστε στο σταθερό σημείο x της T μετά το m-στό βήμα της διαδικασίας που περιγράψαμε:

Πόρισμα 8.1.3. *Έστω $T : X \to X$ συστολή όπως στο Θεώρημα, και $x_0 \in X$. Αν x είναι το σταθερό σημείο της T, τότε*
(i) $d(x_m, x) \leq \frac{a^m}{1-a} d(x_1, x_0)$,
(ii) $d(x_m, x) \leq \frac{a}{1-a} d(x_m, x_{m-1})$.

Απόδειξη. Στην απόδειξη του θεωρήματος είδαμε ότι, αν $s > m$ τότε

$$d(x_s, x_m) \leq \frac{a^m}{1 - a} d(x_1, x_0).$$

Αφήνοντας το s να πάει στο άπειρο, έχουμε $x_s \to x$, άρα

$$d(x, x_m) = \lim_{s \to \infty} d(x_s, x_m) \leq \frac{a^m}{1 - a} d(x_1, x_0).$$

Για το (ii) θεωρούμε την

$$y_0 = x_{m-1} \quad , \quad y_1 = x_m \quad , \quad \ldots \quad , \quad y_s = x_{m-1+s} \to x.$$

Εφαρμόζοντας το (i) για την (y_s) με $s = 1$, παίρνουμε

$$d(y_1, x) \leq \frac{a}{1 - a} d(y_1, y_0),$$

δηλαδή

$$d(x_m, x) \leq \frac{a}{1 - a} d(x_m, x_{m-1}).$$

□

Πολύ συχνά ξέρουμε ότι η $T : X \to X$ είναι συστολή σε ένα υποσύνολο Y του X (και όχι σε ολόκληρον τον X). Αν το Y είναι κλειστό, τότε επιλέγοντας το $x_0 \in Y$ και εξασφαλίζοντας ότι όλοι οι όροι της (x_m) θα παραμείνουν στο Y, μπορούμε να βρούμε σταθερό σημείο της T στο Y (άρα, στον X):

Παράδειγμα 8.1.4. Έστω (X, d) πλήρης μετρικός χώρος, και $T : X \to X$. Υποθέτουμε ότι η T είναι συστολή (για κάποιο $0 < a < 1$) σε μια κλειστή μπάλα $Y = \{x \in X : d(x_0, x) \leq r\}$, όπου $x_0 \in X$ και $r > 0$. Αν $d(x_0, Tx_0) < (1-a)r$, τότε η $x_m = T^m x_0$ συγκλίνει σε σταθερό σημείο της T.

Απόδειξη. Αρκεί να δείξουμε ότι κάθε x_m ανήκει στο Y. Στην απόδειξη του θεωρήματος σταθερού σημείου είδαμε ότι

$$d(x_m, x_n) \leq \frac{a^n}{1-a} d(x_1, x_0).$$

Παίρνοντας, $n = 0$, έχουμε

$$d(x_m, x_0) \leq \frac{1}{1-a} d(x_1, x_0) = \frac{1}{1-a} d(Tx_0, x_0) < \frac{(1-a)r}{1-a} = r,$$

δηλαδή, $x_m \in Y$, $m \in \mathbb{N}$. □

8.2 Εφαρμογή στις διαφορικές εξισώσεις

Θεωρούμε τη διαφορική εξίσωση $f' = F(t, f)$, με αρχική συνθήκη την $f(t_0) = x_0$.

Θεώρημα 8.2.1. *(Picard) Έστω F συνεχής συνάρτηση στο ορθογώνιο*

$$R = \{(t, x) : |t - t_0| \leq a, |x - x_0| \leq b\},$$

τέτοια ώστε $|f(t, x)| \leq M$ για κάθε $(t, x) \in R$. Υποθέτουμε ότι η F ικανοποιεί συνθήκη Lipschitz ως προς τη δεύτερη μεταβλητή: υπάρχει $L > 0$ τέτοιος ώστε, για κάθε $(t, x), (t, y) \in R$,

$$|F(t, x) - F(t, y)| \leq L|x - y|. \tag{8.4}$$

Τότε, η $f' = F(t, f)$, $f(t_0) = x_0$, έχει μοναδική λύση στο διάστημα $[t_0 - h, t_0 + h]$, αν $h < \min\{a, \frac{b}{M}, \frac{1}{L}\}$.

Απόδειξη. Θεωρούμε τον πλήρη μετρικό χώρο $\mathcal{C}[J]$, $J = [t_0 - h, t_0 + h]$, με μετρική την $d(f, g) = \max_{t \in J} |f(t) - g(t)|$, και τον υπόχωρο

$$C_1 = \{f \in \mathcal{C}[J] : |f(t) - x_0| \leq Mh\}.$$

Ο C_1 είναι κλειστός υπόχωρος του $\mathcal{C}[J]$, άρα πλήρης. Η f είναι λύση της εξίσωσης αν και μόνο αν $Tf = f$, όπου

$$(Tf)(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} F(s, f(s))ds, \quad t \in J.$$

Έχουμε $|f(s) - x_0| \leq Ml \leq b$, άρα $(s, f(s)) \in R$ για κάθε s, και η F είναι συνεχής στο R, άρα το $\int_{t_0}^{t} F(s, f(s))ds$ είναι καλά ορισμένο. Επίσης,

$$|(Tf)(t) - t_0| = \left| \int_{t_0}^{t} F(s, f(s))ds \right| \leq M|t - t_0| \leq Mh,$$

άρα,

$$f \in C_1 \Longrightarrow Tf \in C_1.$$

Τέλος,

$$\begin{aligned} |(Tf)(t) - (Tg)(t)| &= \left| \int_{t_0}^{t} \{F(s, f(s)) - F(s, g(s))\} \, ds \right| \\ &\leq L \left(\max_J |f(s) - g(s)| \right) |t - t_0| \\ &\leq (Lh)d(f, g), \end{aligned}$$

και $0 < Lh < 1$, άρα η T είναι συστολή: $d(Tf, Tg) \leq (Lh)d(f, g)$.

Από το θεώρημα σταθερού σημείου, υπάρχει μοναδική $f \in C_1$ τέτοια ώστε $Tf = f$, δηλαδή

$$f(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} F(s, f(s))ds, \quad t \in J,$$

οπότε $f' = F(t, f)$, και $f(t_0) = x_0$. □

Σημείωση: Η απόδειξη του θεωρήματος σταθερού σημείου δείχνει ότι μπορούμε να πάρουμε τη λύση f σαν όριο της ακολουθίας

$$f_{n+1}(s) = x_0 + \int_{t_0}^{t} F(s, f(s))ds, \tag{8.5}$$

ξεκινώντας από τυχούσα $f_0 \in C_1$.

8.3 Εφαρμογή στις ολοκληρωτικές εξισώσεις

(α) **Εξίσωση Fredholm**. *Έστω $J = [a, b]$, και $K : J \times J \to \mathbb{R}$, $g : J \to \mathbb{R}$ συνεχείς συναρτήσεις. Αν $|K(t, s)| \leq M$ στο $J \times J$, και $|\mu| < 1/M(b - a)$, τότε η*

$$f(t) = g(t) + \mu \int_{a}^{b} K(t, s)f(s)ds \tag{8.6}$$

έχει μοναδική λύση στο J.

Απόδειξη. Ορίζουμε $T : \mathcal{C}[a, b] \to \mathcal{C}[a, b]$, με

$$(Tf)(t) = g(t) + \mu \int_{a}^{b} K(t, s)f(s)ds. \tag{8.7}$$

Αρκεί να δείξουμε ότι η T είναι συστολή (γιατί;). Όμως,

$$\begin{aligned} d(Tf,Th) &= \max_{t\in J}|(Tf)(t)-(Th)(t)| \\ &= |\mu|\max_{t\in J}\Big|\int_a^b K(t,s)(f(s)-h(s))ds\Big| \\ &\leq |\mu|M\left(\max_{s\in J}|f(s)-h(s)|\right)(b-a) \\ &= \{|\mu|M(b-a)\}\, d(f,h). \end{aligned}$$

Αφού $|\mu|M(b-a)<1$, το θεώρημα σταθερού σημείου μας εξασφαλίζει μοναδική $f_0\in\mathcal{C}[a,b]$ τέτοια ώστε $Tf_0=f_0$. □

(β) **Εξίσωση Volterra.** *Έστω $J=[a,b]$, και $K: J\times J\to\mathbb{R}$, $g: J\to\mathbb{R}$ συνεχείς συναρτήσεις. Τότε, για κάθε $\mu\in\mathbb{R}$, η*

$$f(t)=g(t)+\mu\int_a^t K(t,s)f(s)ds \tag{8.8}$$

έχει μοναδική λύση στο J.

Απόδειξη. Για κάθε $f\in\mathcal{C}[J]$ ορίζουμε

$$(Tf)(t)=g(t)+\mu\int_a^t K(t,s)f(s)ds,\quad t\in J. \tag{8.9}$$

Εύκολα ελέγχουμε ότι $T(f)\in\mathcal{C}[J]$. Δηλαδή, $T:\mathcal{C}[J]\to\mathcal{C}[J]$. Για κάθε $f,h\in\mathcal{C}[J]$, έχουμε

$$\begin{aligned} |(Tf)(t)-(Th)(t)| &= |\mu|\left|\int_a^b K(t,s)(f(s)-h(s))ds\right| \\ &\leq |\mu|(\max|K|)d(f,h)\int_a^t ds \\ &= |\mu|(\max|K|)d(f,h)(t-a). \end{aligned}$$

Επαγωγικά δείχνουμε ότι

$$|(T^m f)(t)-(T^m h)(t)|\leq|\mu|^m(\max|K|)^m\frac{(t-a)^m}{m!}d(f,h). \tag{$*$}$$

Επαγωγικό βήμα:

$$\begin{aligned} |(T^{m+1}f)(t)-(T^{m+1}h)(t)| &= |\mu|\Big|\int_a^t K(t,s)\left\{(T^m f)(s)-(T^m h)(s)\right\}ds\Big| \\ &\leq |\mu|(\max|K|)\int_a^t|\mu|^m(\max|K|)^m\frac{(s-a)^m}{m!}d(f,h)ds \\ &= |\mu|^{m+1}(\max|K|)^{m+1}\frac{(t-a)^{m+1}}{(m+1)!}d(f,h). \end{aligned}$$

Από την $(*)$ προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} d(T^m f, T^m h) &= \max_t |(T^m f)(t) - (T^m h)(t)| \\ &\leq \left\{ |\mu|^m (\max|K|)^m \frac{(b-a)^m}{m!} \right\} d(f,h). \end{aligned}$$

Για μεγάλα m έχουμε $|\mu|^m(\max|K|)^m \frac{(b-a)^m}{m!} < 1$. Άρα, η T^m είναι συστολή στον $\mathcal{C}[a,b]$. Έπεται ότι η T^m έχει σταθερό σημείο: υπάρχει f_0 με την ιδιότητα $T^m f_0 = f_0$. Αν πάρουμε τυχούσα $f \in \mathcal{C}[a,b]$, τότε $(T^m)^n f \to f_0$ καθώς $n \to \infty$.

Παίρνοντας $f = Tf_0$, έχουμε

$$f_0 = \lim_{n\to\infty} T^{mn}(Tf_0) = \lim_{n\to\infty} T(T^{mn} f_0) = \lim_{n\to\infty} Tf_0 = Tf_0.$$

Η f_0 είναι το μοναδικό σταθερό σημείο της T, γιατί κάθε σταθερό σημείο της T είναι και σταθερό σημείο της T^m, και η T^m έχει μοναδικό σταθερό σημείο (είναι συστολή). $\square$

8.4 Ασκήσεις

Ομάδα Α΄

1. Κάθε συστολή $T : X \to X$ είναι ομοιόμορφα συνεχής.

2. Δείξτε με ένα παράδειγμα ότι η πληρότητα του X είναι ουσιαστική για την απόδειξη του θεωρήματος σταθερού σημείου.

3. Έστω $T : [1,+\infty) \to [1,+\infty)$ με $Tx = x + \frac{1}{x}$. Δείξτε ότι αν $x \neq y$ τότε $|Tx - Ty| < |x-y|$, αλλά η T δεν έχει σταθερό σημείο.

4. Αν η T είναι συστολή, τότε η T^n, $n \in \mathbb{N}$ είναι συστολή. Δείξτε ότι το αντίστροφο δεν ισχύει γενικά.

5. Έστω X συμπαγής μετρικός χώρος, και $T : X \to X$ συνάρτηση με την ιδιότητα $d(T(x), T(y)) < d(x,y)$ για κάθε $x \neq y$ στον X. Δείξτε ότι η T έχει σταθερό σημείο.

Ομάδα Β΄

6. Έστω $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση, με $g(a) < 0$, $g(b) > 0$, και $0 < c \leq g'(x) \leq d$ στο $[a,b]$. Χρησιμοποιήστε το θεώρημα του σταθερού σημείου για να βρείτε καλή προσέγγιση της μοναδικής (γιατί;) λύσης της $g(x) = 0$ στο $[a,b]$. [*Υπόδειξη:* Θεωρείστε συνάρτηση $f(x) = x - \mu g(x)$ για κατάλληλο μ, και βρείτε σταθερό σημείο της f.]

7. Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση, και x_0 απλή ρίζα της f στο (a,b). Δείξτε ότι η

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

είναι συστολή σε μια περιοχή του x_0, και συμπεράνετε ότι αν ξεκινήσουμε με x_1 σε αυτή την περιοχή και ορίσουμε (x_n) μέσω της $x_{n+1} = g(x_n)$, τότε $x_n \to x_0$.

8. Δίνεται το γραμμικό σύστημα εξισώσεων $x = Ax + b$, όπου $A = (a_{ij})_{i,j\leq n}$ και $b = (b_1, \ldots, b_n)$. Αν

$$\sum_{k=1}^{n} |a_{ik}| < 1$$

για κάθε $i = 1, \ldots, n$, δείξτε ότι το σύστημα έχει μοναδική λύση. Δείξτε ότι η λύση αυτή παίρνεται σαν το όριο της $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$, όπου $x_1 \in \mathbb{R}^n$ αυθαίρετο, και $x_{n+1} = Ax_n + b$.

9. (α) Το ίδιο με την Άσκηση 9, αν για τον πίνακα A υποθέσουμε ότι

$$\sum_{k=1}^{n} |a_{kj}| < 1, \quad j = 1, \ldots, n.$$

(β) Το ίδιο, αν υποθέσουμε ότι

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 < 1.$$

10. Δείξτε ότι το πρόβλημα αρχικών τιμών $f' = |f|^{1/2}$, $f(0) = 0$ έχει λύσεις τις $f \equiv 0$ και $g(t) = t|t|/4$. Έρχεται αυτό σε αντίφαση με το θεώρημα του Picard; Βρείτε κι άλλες λύσεις.

11. Βρείτε όλες τις αρχικές συνθήκες για τις οποίες το πρόβλημα αρχικών τιμών $tf' = 2f$, $f(t_0) = x_0$ (α) δεν έχει λύση, (β) έχει περισσότερες από μία λύση, (γ) έχει ακριβώς μία λύση.

Ομάδα Γ′

12. Θεωρούμε την ολοκληρωτική εξίσωση

$$(*) \qquad f(x) = \mu \int_a^b K(x, y, f(y))dy + \phi(x),$$

με συνεχείς K και ϕ, και την K να ικανοποιεί συνθήκη Lipschitz της μορφής

$$|K(x, y, z_1) - K(x, y, z_2)| \leq M|z_1 - z_2|.$$

Δείξτε ότι η $(*)$ έχει μοναδική λύση αν $|\mu| < \frac{1}{M(b-a)}$.

13. Λύστε την ολοκληρωτική εξίσωση

$$f(t) - \mu \int_0^1 e^{t-s} f(s)ds = g(t)$$

όπου $|\mu| < 1$, παίρνοντας $f_0 = g$ και ορίζοντας $f_{n+1} = Tf_n$ για κατάλληλη T.

14. Δίνονται ένας χώρος με νόρμα X, ένας φραγμένος γραμμικός τελεστής $T : X \to X$, και ένα συμπαγές και κυρτό υποσύνολο K του X με την ιδιότητα $T(K) \subseteq K$. Δείξτε ότι ο T έχει σταθερό σημείο στο K (Θεώρημα Markov-Kakutani), ακολουθώντας τα παρακάτω βήματα:

(α) Θέτουμε T_0 τον ταυτοτικό τελεστή, $T^k = T \circ \cdots \circ T$ (k φορές). Δείξτε ότι ο

$$S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} T^k, \quad n \in \mathbb{N}$$

είναι φραγμένος, γραμμικός, και $S_n(K) \subseteq K$.
(β) Δείξτε ότι οι S_n αντιμετατίθενται: $S_m \circ S_n = S_n \circ S_m$, $m, n \in \mathbb{N}$.
(γ) Για κάθε $n_1, \ldots, n_s \in \mathbb{N}$ ισχύει

$$S_{n_1} \circ \cdots \circ S_{n_s}(K) \subseteq S_{n_1}(K).$$

(δ) Έστω (Y, d) συμπαγής μετρικός χώρος. Αν (F_n) ακολουθία κλειστών υποσυνόλων του Y με την ιδιότητα $\bigcap_{j \leq n} F_k \neq \emptyset$ για κάθε n, τότε $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \neq \emptyset$.
(ε) $\bigcap_{n=1}^{\infty} S_n(K) \neq \emptyset$.
(ζ) Αν $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} S_n(K)$, τότε $T(x) - x \in \frac{1}{n}(K - K)$, όπου $K - K = \{u - v : u, v \in K\}$.
(η) Αν $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} S_n(K)$, τότε $T(x) = x$.

Κεφάλαιο 9

Κατανομές

9.1 Συναρτήσεις δοκιμής και κατανομές

Στο κεφάλαιο αυτό θα εισάγουμε μερικά βασικά στοιχειά της θεωρίας των κατανομών. Οι κατανομές επεκτείνουν την έννοια της ολοκληρώσιμης συνάρτησης στο $\mathbb{R}$ και επιπλέον μας απαλλάσσουν από προβλήματα που μια τέτοια συνάρτηση μπορεί να έχει, όπως λ.χ. να μην παραγωγίζεται. Θέλουμε λοιπόν να ισχύουν τουλάχιστον τα παρακάτω:

(i) Κάθε Riemann ολοκληρώσιμη συνάρτηση είναι κατανομή.

(ii) Κάθε κατανομή παραγωγίζεται και η παράγωγος της είναι κι αυτή κατανομή. Στην περίπτωση των συνήθων συναρτήσεων αυτή η νέα παράγωγος πρέπει να ταυτίζεται με την παράγωγο του Απειροστικού Λογισμού.

(iii) Ισχύουν οι βασικοί κανόνες παραγώγισης.

Πριν δώσουμε τον ορισμό της κατανομής πρέπει να ορίσουμε το χώρο στον οποίο μια τέτοια συνάρτηση δρα.

Ορισμός 9.1.1. Ο χώρος $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ είναι ο χώρος όλων των άπειρα διαφορίσιμων συναρτήσεων με συμπαγή φορέα, δηλαδή όλων των $\mathcal{C}^\infty$ συναρτήσεων $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για τις οποίες υπάρχει ένα $M = M(f) > 0$ ώστε $f(x) = 0$ αν $x \notin [-M, M]$. Στα παρακάτω θα τον καλούμε *χώρο δοκιμής* και τα στοιχεία του *συναρτήσεις δοκιμής*.

Είναι προφανές ότι η μηδενική συνάρτηση είναι ένα στοιχείο του $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$. Στην παράγραφο 9.4 θα κατασκευάσουμε, με λίγο κόπο, ένα μη τετριμμένο παράδειγμα συνάρτησης δοκιμής.

Είναι άμεσο ότι ο $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ είναι γραμμικός χώρος: αν οι f, g είναι $\mathcal{C}^\infty$ συναρτήσεις με συμπαγή φορέα και $a \in \mathbb{R}$, τότε το ίδιο ισχύει και για τις $f + g$, af. Με τον παρακάτω ορισμό τον εφοδιάζουμε και με μια έννοια σύγκλισης:

Ορισμός 9.1.2. Έστω $\{f_n\}$ μια ακολουθία συναρτήσεων στον $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ και $f \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$. Λέμε ότι η $\{f_n\}$ συγκλίνει στην f στον $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ και γράφουμε $f_n \to f$ αν και μόνο αν:

(i) υπάρχει $M > 0$, ώστε $f_n(x) = 0$ για κάθε $x \notin [-M, M]$ και $n \in \mathbb{N}$ και

(ii) για κάθε $k = 0, 1, 2, \ldots$ ισχύει

$$\left\| f_n^{(k)} - f^{(k)} \right\|_\infty = \sup\{|f^{(k)}(x) - f^{(k)}(x)| : x \in [-M, M]\} \longrightarrow 0, \tag{9.1}$$

καθώς $n \to \infty$, δηλαδή όλες οι παράγωγοι των f_n συγκλίνουν ομοιόμορφα στις αντίστοιχες παραγώγους της f.

Δε θα αναφέρουμε λεπτομέρειες για την τοπολογία του $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$· θα αρκεστούμε στη σύγκλιση που μόλις ορίσαμε.

Ορισμός 9.1.3. Ένα συνεχές γραμμικό συναρτησοειδές $F : \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ καλείται *κατανομή* (ή *γενικευμένη συνάρτηση*). Η συνέχεια του F μεταφράζεται ως εξής:

$$f_n \to f \text{ στον } \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}) \implies F(f_n) \to F(f). \tag{9.2}$$

Ο χώρος όλων των κατανομών συμβολίζεται $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Είναι πολύ σύνηθες να συμβολίζεται η δράση μιας κατανομής F σε μια συνάρτηση δοκιμής f με $\langle F, f\rangle$ αντί για $F(f)$.

Δίνουμε τώρα μερικά σημαντικά παραδείγματα.

Παραδείγματα 9.1.4. (α) Η *μάζα Dirac*. Η απεικόνιση $\delta_0 : \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ με

$$\langle \delta_0, f\rangle = \delta_0(f) = f(0), \quad f \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}) \tag{9.3}$$

είναι μια κατανομή. Η γραμμικότητα της δ_0 είναι προφανής και η συνέχεια έπεται από το γεγονός ότι αν $f_n \to f$ στον $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$, τότε ειδικότερα $f_n \to f$ ομοιόμορφα, άρα και κατά σημείο. Γενικότερα, αν $x_0 \in \mathbb{R}$ η $\delta_{x_0} : \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ που δρα ως

$$\langle \delta_{x_0}, f\rangle = \delta_{x_0}(f) = f(x_0), \quad f \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}) \tag{9.4}$$

είναι επίσης μια κατανομή.

(β) Οι *συνήθεις συναρτήσεις* είναι κατανομές. Έστω g μια Riemann ολοκληρώσιμη συνάρτηση στο $\mathbb{R}$. Συνηθίζεται η g να ταυτίζεται με την απεικόνιση $F_g : \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ που ορίζεται από την

$$\langle F_g, f\rangle = F_g(f) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x)dx, \quad f \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}). \tag{9.5}$$

Κατάρχάς, αφού η f έχει συμπαγή φορέα, το παραπάνω ολοκλήρωμα είναι στην πραγματικότητα σε φραγμένο διάστημα και άρα δεν τίθεται ζήτημα σύγκλισης. Επίπλέον, η γραμμικότητα της F_g είναι προφανής. Για τη συνέχεια, παρατηρούμε ότι αν $f_n \to f$ στον $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ και οι f_n, f μηδενίζονται εκτός του διαστήματος $[-M, M]$ τότε $f_n \to f$ ομοιόμορφα στο $[-M, M]$ και άρα, αφού η $g|_{[-M,M]}$ έχει πεπερασμένο ολοκλήρωμα, ισχύει και

$$\langle F_g, f_n\rangle = \int_{-M}^{M} f_n(x)g(x)dx \longrightarrow \int_{-M}^{M} f(x)g(x)dx = \langle F_g, f\rangle.$$

Πολλές φορές, παραβιάζοντας το συμβολισμό, σημειώνουμε απλά $\langle g, f\rangle$ αντί για $\langle F_g, f\rangle$.

(γ) Τα *μέτρα* είναι κατανομές. Αυτό το παράδειγμα απαιτεί κάποια βασική Θεωρία Μέτρου. Αν μ ένα μέτρο Borel στο $\mathbb{R}$ με την ιδιότητα $\mu([-M,M]) < \infty$ για κάθε $M > 0$, μπορούμε να ορίσουμε την κατανομή $F_\mu : \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ από τη σχέση

$$\langle F_\mu, f\rangle = F_\mu(f) = \int_{\mathbb{R}} f(x)d\mu(x). \tag{9.6}$$

Αφήνεται ως άσκηση να ελεγχθεί ότι η F_μ είναι πράγματι μια κατανομή.

(δ) Δίνουμε τέλος ένα παράδειγμα κατανομής που δεν εμπίπτει στις προηγούμενες κατηγορίες. Θεωρούμε την απεικόνιση $F : \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ που ορίζεται ως

$$\langle F, f\rangle = F(f) = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{\varepsilon\le |x|\le 1} \frac{f(x)}{x}dx, \quad f \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}). \tag{9.7}$$

Στις ασκήσεις του κεφαλαίου ζητείται να αποδειχθεί ότι η F είναι πράγματι κατανομή.

9.2 Πράξεις με κατανομές

Παρατηρήσαμε στην προηγούμενη παράγραφο ότι ο χώρος $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ των κατανομών είναι γραμμικός χώρος. Συνεπώς, αν F, G δύο κατανομές και $a \in \mathbb{R}$ τότε ορίζονται καλά οι κατανομές $F + G$ και $aF \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ από τις σχέσεις

$$\langle F+G, f\rangle = \langle F, f\rangle + \langle G, f\rangle \quad \text{και} \quad \langle aF, f\rangle = a\langle F, f\rangle, \tag{9.8}$$

όπου f μια συνάρτηση δοκιμής. Μάλιστα, μπορούμε να εφοδιάσουμε τον χώρο αυτό με την ασθενή-$*$ τοπολογία:

Ορισμός 9.2.1. Έστω $\{F_n\}$ μια ακολουθία κατανομών στον $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ και $F \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ Λέμε ότι η $\{F_n\}$ *συγκλίνει στην* F και γράφουμε $F_n \to F$ αν για κάθε συνάρτηση δοκιμής $f \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ ισχύει

$$\langle F_n, f\rangle \longrightarrow \langle F, f\rangle.$$

Ορίζουμε τώρα μερικές ακόμη πράξεις στο σύνολο $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ των κατανομών ορμώμενοι από την περίπτωση των συνήθων συναρτήσεων. Αν g είναι μια Riemann ολοκληρώσιμη συνάρτηση και $a, f \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$, τότε

$$\langle ag, f\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} a(x)g(x)f(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)a(x)f(x)dx = \langle g, af\rangle.$$

Έχουμε λοιπόν τον εξής:

Ορισμός 9.2.2. Έστω $a \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ και $F \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ μια κατανομή. Η κατανομή aF ορίζεται από τη σχέση

$$\langle aF, f\rangle = \langle F, af\rangle, \quad f \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}). \tag{9.9}$$

Με αυτό τον ορισμό το σύνολο $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ των κατανομών γίνεται ένα $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})-$πρότυπο.

Θα ορίσουμε τώρα την παράγωγο μιας κατανομής. Αν υποθέσουμε ότι η g είναι μια παραγωγίσιμη συνάρτηση στο $\mathbb{R}$ με Riemann ολοκληρώσιμη παράγωγο και $f \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$, τότε

$$\langle g', f\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} g'(x)f(x)dx = -\int_{-\infty}^{\infty} g(x)f'(x)dx = -\langle g, f'\rangle,$$

όπου στη δεύτερη ισότητα χρησιμοποιήσαμε ολοκλήρωση κατά μέρη και το γεγονός ότι η f μηδενίζεται στο άπειρο. Οδηγούμαστε λοιπόν στον εξής:

Ορισμός 9.2.3. Έστω $F \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ μια κατανομή. Η *παράγωγος της* F είναι η κατανομή $F' \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ που ορίζεται από τη σχέση

$$\langle F', f\rangle = -\langle F, f'\rangle, \quad f \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}). \tag{9.10}$$

Επαγωγικά, ορίζεται η $k-$παράγωγος της F από τη σχέση

$$\langle F^{(k)}, f\rangle = (-1)^k\langle F, f^{(k)}\rangle, \quad f \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}). \tag{9.11}$$

Αφήνεται ως άσκηση να ελεγχθεί ότι οι παράγωγοι της F είναι πράγματι κατανομές.

Παραδείγματα 9.2.4. (α) Η παράγωγος της μάζας Dirac. Αν $x_0 \in \mathbb{R}$ και $f \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ έχουμε

$$\langle \delta'_{x_0}, f\rangle = -\langle \delta_{x_0}, f'\rangle = -f'(x_0).$$

Γενικότερα, $\langle \delta^{(k)}_{x_0}, f\rangle = (-1)^k f^{(k)}(x_0)$.

(β) Ας θεωρήσουμε τη συνάρτηση $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ που δίνεται από τον τύπο

$$g(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}.$$

Η g είναι Riemann ολοκληρώσιμη και άρα ορίζει μια κατανομή, η παράγωγος της οποίας δίνεται από τον τύπο

$$\langle g', f\rangle = -\langle g, f'\rangle = -\int_{-\infty}^{\infty} g(x)f'(x)dx = -\int_0^\infty f'(x)dx = f(0) = \langle \delta_0, f\rangle,$$

για κάθε $f \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$. Συνεπώς, $g' = \delta_0$.

Για τις κατανομές ισχύουν οι γνωστοί κανόνες παραγώγισης:

Πρόταση 9.2.5. *Έστω $F, G \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ δυο κατανομές και μια συνάρτηση δοκιμής $a \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$. Ισχύουν τα παρακάτω:*

(i) $(F+G)' = F' + G'$,

(ii) $(aF)' = a'F + aF'$ *και γενικότερα*

(iii) (Κανόνας του Leibniz) $(aF)^{(m)} = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} a^{(k)} F^{(m-k)}$.

Απόδειξη. Αποδεικνύουμε μόνο το (ii)· τα υπόλοιπα αφήνονται σαν άσκηση. Έστω μια συνάρτηση δοκιμής f. Τότε έχουμε:

$$\langle (aF)', f\rangle = -\langle aF, f'\rangle = -\langle F, af'\rangle = -\langle F, (af)' - a'f\rangle =$$
$$= -\langle F, (af)'\rangle + \langle F, a'f\rangle = \langle F', af\rangle + \langle a'F, f\rangle = \langle aF' + a'F, f\rangle.$$

Άρα πράγματι $(aF)' = a'F + aF'$. □

Πρόταση 9.2.6. *Αν $\{F_n\}$ μια ακολουθία κατανομών η οποία συγκλίνει στην κατανομή F, τότε ισχύει και $F_n^{(k)} \to F^{(k)}$ για κάθε $k = 1, 2, ...$*

Απόδειξη. Αν η f είναι μια συνάρτηση δοκιμής τότε

$$\langle F^{(k)}, f\rangle = (-1)^k\langle F, f^{(k)}\rangle = (-1)^k \lim_{n\to\infty}\langle F_n, f^{(k)}\rangle = \lim_{n\to\infty}\langle F_n^{(k)}, f\rangle$$

και άρα ισχύει το ζητούμενο. □

Έχουμε πετύχει λοιπόν τα εξής:

(i) Κάθε κατανομή είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμη.

(ii) Αν αντιμετωπίσουμε μια συνηθισμένη συνάρτηση με Riemann ολοκληρώσιμη παράγωγο ως κατανομή, η παράγωγος της ταυτίζεται με τη συνήθη παράγωγο. Αυτό έπεται από τον υπολογισμό που προηγείται του Ορισμού 9.2.3.

(iii) Η παράγωγος κατανομής ικανοποιεί τους συνήθεις κανόνες παραγώγισης.

(iv) Η παράγωγος κατανομής σέβεται τα όρια ακολουθιών, κάτι που δε συμβαίνει εν γένει για τη συνήθη παράγωγο.

9.3 Διαφορικές εξισώσεις και κατανομές

Στόχος μας σε αυτή την ενότητα είναι να λύσουμε τη διαφορική εξίσωση

$$y' = F, \tag{9.12}$$

ως προς $y \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ για μια δοσμένη $F \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Το κεντρικό αποτέλεσμα είναι το εξής:

Θεώρημα 9.3.1. *Η διαφορική εξίσωση (9.12) έχει πάντα λύση και μάλιστα δύο λύσεις της διαφέρουν κατά σταθερά, δηλαδή κατά την κατανομή που επάγει μια σταθερή συνάρτηση στο $\mathbb{R}$.*

Θα χρειαστούμε πρώτα κάποια λήμματα.

Λήμμα 9.3.2. *Μια συνάρτηση δοκιμής $f_0 \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ είναι παράγωγος μιας άλλης συνάρτησης δοκιμής g_0 αν και μόνο αν*

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_0(x)dx = 0. \tag{9.13}$$

Απόδειξη. Η μια κατεύθυνση είναι άμεση: αν $f_0 = g_0'$, τότε

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_0(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} g_0'(x)dx = g_0(x)\Big|_{-\infty}^{\infty} = 0,$$

αφού η g_0 έχει συμπαγή φορέα.

Αντίστροφα, ας υποθέσουμε ότι ισχύει η (9.13). Τότε, η συνάρτηση $g_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ που ορίζεται ως

$$g_0(x) = \int_{-\infty}^{x} f_0(t)dt, \quad x \in \mathbb{R}$$

ορίζεται καλά, είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμη και $g_0' = f_0$. Παρατηρήστε όμως, ότι αν $f_0(x) = 0$ για $x \notin [-M, M]$, τότε το ίδιο ισχύει και για την g_0. Πράγματι, για $x < -M$ είναι

$$g_0(x) = \int_{-\infty}^{x} f_0(t)dt = \int_{-\infty}^{x} 0\ dt = 0,$$

ενώ για $x > M$

$$g_0(x) = \int_{-\infty}^{x} f_0(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} f_0(t)dt - \int_{x}^{\infty} f_0(t)dt = 0 - \int_{x}^{\infty} 0\ dt = 0.$$

Έτσι, $g_0 \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ και $f_0 = g_0'$, όπως θέλαμε. □

Λήμμα 9.3.3. *Αν $f_1 \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ μια συνάρτηση δοκιμής με*

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_1(x)dx = 1, \tag{9.14}$$

τότε κάθε $f \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ είναι της μορφής $f = f_0 + cf_1$, όπου $c \in \mathbb{R}$ και $f_0 \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ με

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_0(x)dx = 0.$$

Απόδειξη. Θέτουμε $c = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx \in \mathbb{R}$ και παρατηρούμε ότι

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) - cf_1(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx - c\int_{-\infty}^{\infty} f_1(x)dx = c - c = 0,$$

λόγω της (9.14). Άρα, γράφοντας $f = (f - cf_1) + cf_1$ έχουμε το ζητούμενο. □

Σχόλιο. Μια τέτοια συνάρτηση f_1 υπάρχει. Θα κατασκευάσουμε ένα ακριβές παράδειγμα στην επόμενη ενότητα.

Πριν αποδείξουμε το Θεώρημα 9.3.1 μελετάμε τη λύση της αντίστοιχης ομογενούς εξίσωσης:

Θεώρημα 9.3.4. *Αν $y \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ μια κατανομή που ικανοποιεί την εξίσωση*

$$y' = 0, \tag{9.15}$$

τότε η y είναι σταθερή.

Απόδειξη. Κατ' αρχάς παρατηρούμε ότι για μια συνάρτηση $f \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ έχουμε

$$0 = \langle y', f\rangle = -\langle y, f'\rangle.$$

Έτσι, η y μηδενίζεται στο χώρο όλων των $f_0 \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ που είναι παράγωγοι μιας άλλης συνάρτησης δοκιμής g_0. Έστω τώρα μια συνάρτηση δοκιμής f_1 που ικανοποιεί την

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_1(x)dx = 1.$$

Συνδυάζοντας τα Λήμματα 9.3.2 και 9.3.3 καταλήγουμε ότι κάθε συνάρτηση $f \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ είναι της μορφής $f = g_0' + cf_1$, με $g_0 \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ και $c \in \mathbb{R}$. Συνεπώς

$$\langle y, f\rangle = \langle y, g_0'\rangle + c\langle y, f_1\rangle = c\langle y, f_1\rangle.$$

Επιπλέον όμως

$$\langle 1, f\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} g_0'(x)dx + c\int_{-\infty}^{\infty} f_1(x)dx = c,$$

δηλαδή

$$\langle y, f\rangle = \langle y, f_1\rangle\langle 1, f\rangle \implies y = \langle y, f_1\rangle = \text{σταθερά}.$$

□

Πόρισμα 9.3.5. *Αν δυο κατανομές F, G έχουν την ίδια παράγωγο τότε διαφέρουν κατά σταθερά.*

Απόδειξη. Ισχύει $F' = G'$, δηλαδή $(F-G)' = 0$ και άρα, από το προηγούμενο θεώρημα, η $F-G$ είναι σταθερή. □

Είμαστε τώρα σε θέση να αποδείξουμε πλήρως το κεντρικό θεώρημα:

Απόδειξη του Θεωρήματος 9.3.1. Ας υποθέσουμε ότι η y είναι μια λύση της (9.12), δηλαδή $y' = F$. Τότε, για κάθε συνάρτηση δοκιμής f ισχύει

$$\langle F, f\rangle = \langle y', f\rangle = -\langle y, f'\rangle,$$

δηλαδή η y ορίζεται στο χώρο των συναρτήσεων δοκιμής f_0 που είναι παράγωγοι μιας συνάρτησης δοκιμής από τον τύπο

$$\langle y, f_0\rangle = -\left\langle F, \int_{-\infty}^{x} f_0(t)dt \right\rangle.$$

Σταθεροποιούμε πάλι μια συνάρτηση $f_1 \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ με ολοκλήρωμα 1 και θεωρούμε μια τυχαία συνάρτηση δοκιμής $f = g_0' + cf_1$. Το Λήμμα 9.3.3 γράφεται αλλιώς ως

$$\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}) = (\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}))' \oplus \operatorname{span}(f_1), \tag{9.16}$$

όπου $(\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}))'$ ο χώρος που αποτελείται από όλες τις παραγώγους συναρτήσεων δοκιμής και $\operatorname{span}(f_1)$ το σύνολο των πολλαπλασίων της f_1. Παρατηρούμε ότι και οι δύο αυτοί υπόχωροι είναι κλειστοί στον $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ και άρα για να οριστεί συνεχώς η y σε όλο το χώρο μένει πια να οριστεί η τιμή $\langle y, f_1\rangle$ (εξηγήστε γιατί). Θέτουμε λοιπόν, αυθαίρετα, $\langle y, f_1\rangle = a$, μια οποιαδήποτε σταθερά. Τότε, η y ορίζεται ως

$$\langle y, f\rangle = -\langle F, g_0\rangle + ca, \tag{9.17}$$

όπου $f = g_0' + cf_1 \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$. Ο υπολογισμός:

$$\langle y', f\rangle = -\langle y, f'\rangle = \langle F, f\rangle$$

δείχνει ότι η y της (9.17) είναι πράγματι λύση της (9.12). □

9.4 Κατασκευή μιας συνάρτησης στον $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$

Η σχέση (9.17) μας δίνει θεωρητικά τη λύση της διαφορικής εξίσωσης (9.12). Παρ'όλα αυτά, για να μπορούμε να λύσουμε μέχρι τέλους αυτή τη διαφορική εξίσωση πρέπει να γνωρίζουμε μια συνάρτηση $f_1 \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ με ολοκλήρωμα 1. Περιγράφουμε εδώ την κατασκευή μιας τέτοιας συνάρτησης. Ξεκινάμε με ένα λήμμα:

Λήμμα 9.4.1. *Θεωρούμε τη συνάρτηση $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ που ορίζεται από τη σχέση*

$$h(t) = \begin{cases} 0, & t \le 0 \\ e^{-1/t}, & t > 0 \end{cases}. \tag{9.18}$$

Η συνάρτηση h είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.

Απόδειξη. Προφανώς η h είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Είναι όμως συνεχής στο 0:

$$\lim_{t\to 0^+} h(t) = \lim_{t\to 0^+} e^{-1/t} = \lim_{s\to\infty} e^{-s} = 0.$$

Για την παραγωγισιμότητα της h στο 0 γράφουμε:

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{h(t)-h(0)}{t} = \lim_{t\to 0^+} \frac{e^{-1/t}}{t} = \lim_{s\to\infty} \frac{s}{e^s} = 0,$$

από τον Κανόνα De L' Hopital.

Ισχυρισμός. Για κάθε $k = 0, 1, 2, \ldots$ υπάρχει πολυώνυμο p_k βαθμού το πολύ k ώστε

$$h^{(k)}(t) = p_k(t)\frac{e^{-1/t}}{t^{2k}}, \quad t > 0.$$

Ο ισχυρισμός αποδεικνύεται με επαγωγή στο k και αφήνεται ως άσκηση. Αν υποθέσουμε ότι η h είναι k φορές παραγωγίσιμη στο 0, κατ' ανάγκη θα είναι $h^{(k)}(0) = 0$ και θα ισχύει

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{h^{(k)}(t) - h^{(k)}(0)}{t} = \lim_{t\to 0^+} p_k(t)\frac{e^{-1/t}}{t^{2k+1}} = 0,$$

πάλι από τον Κανόνα De L' Hopital, δηλαδή θα ισχύει και $h^{(k+1)}(0) = 0$. Έτσι, η h παραγωγίζεται άπειρες φορές και στο 0. □

Πρόταση 9.4.2. *Υπάρχει μια συνάρτηση $f \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$, $f \not\equiv 0$.*

Απόδειξη. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με

$$f(t) = h(t)h(1-t), \tag{9.19}$$

όπου h η συνάρτηση του προηγούμενου λήμματος. Είναι εμφανές ότι η f είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμη και μηδενίζεται εκτός του $[0, 1]$. □

Πόρισμα 9.4.3. *Υπάρχει μια συνάρτηση $f_1 \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ με*

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_1(x)dx = 1.$$

Απόδειξη. Αν f η συνάρτηση της προηγούμενης πρότασης, θεωρούμε τη συνάρτηση $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ που ορίζεται ως

$$f_1(t) = \frac{f(t)}{\int_{-\infty}^{\infty} f(s)ds} \tag{9.20}$$

και ικανοποιεί τα ζητούμενα. □

9.5 Ασκήσεις

Ομάδα Α'

1. Θεωρώντας τη Riemann ολοκληρώσιμη συνάρτηση $g = \chi_{[a,b]}$ ως κατανομή, υπολογίστε την κατανομή g'.

2. (α) Αν $h \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ και $F \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, τότε η *συνέλιξη* των h και F είναι η απεικόνιση $h * F : \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ που ορίζεται από τη σχέση

$$\langle h * F, f\rangle = \langle F, \tilde{h} * f\rangle, \quad f \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}), \tag{9.21}$$

όπου $\tilde{h}(x) = h(-x)$. Απόδείξτε ότι η $h * F$ είναι κατανομή.

(β) Αν $h \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$, να υπολογιστεί η κατανομή $h * \delta_0$.

3. Έστω $0 < r_1 < r_2$. Αποδείξτε ότι υπάρχει $\mathcal{C}^\infty$ συνάρτηση $H : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ώστε $H(x) = 0$ στην κλειστή μπάλα $\hat{B}(0, r_1)$, $0 < H(x) < 1$ στο δακτύλιο $B(0, r_2)\backslash\hat{B}(0, r_1)$ και $H(x) = 1$ στο $\mathbb{R}^n \setminus B(0, r_2)$.

Ομάδα Β′

4. Έστω f μια κατά τμήματα συνεχής συνάρτηση στο $\mathbb{R}$, διαφορίσιμη παντού εκτός από τα σημεία $x_1, x_2, ..., x_n, ...$ στα οποία έχει άλματα ασυνέχειας

$$\lim_{h\to 0^+} f(x_n + h) - \lim_{h\to 0^-} f(x_n + h) = h_n \in \mathbb{R}.$$

Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της f, αν αυτή θεωρηθεί κατανομή, είναι το άθροισμα της συνηθισμένης παραγώγού της (εκεί που αυτή ορίζεται) και της κατανομής

$$F = \sum_{n=1}^\infty h_n \delta_{x_n}.$$

5. Βρείτε την παράγωγο της κατανομής που ορίζει η $2\pi-$περιοδική επέκταση της συνάρτησης

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{\pi+x}{2}, & -\pi \le x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ \frac{\pi-x}{2}, & 0 < x \le \pi \end{cases}.$$

6. Ερμηνεύστε την τριγωνομετρική σειρά

$$f(x) = \sum_{n=1}^\infty \cos nx$$

ως μια κατανομή. [*Υπόδειξη:* Παρατηρήστε ότι η συνάρτηση f της προηγούμενης άσκησης έχει ανάπτυγμα Fourier τη σειρά

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{\sin nx}{n}.]$$

Ομάδα Γ′

7. Αποδείξτε τα παρακάτω:

(α) Η απεικόνιση F της σχέσης (9.7) είναι καλά ορισμένη και γραμμική.

(β) Η F είναι πράγματι κατανομή.

8. (α) Αποδείξτε ότι η απεικόνιση $W_0 : \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ που ορίζεται από τη σχέση

$$\langle W_0, f\rangle = \frac{1}{\pi} \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{|x|\ge\varepsilon} \frac{f(x)}{x}, \quad f \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}) \tag{9.22}$$

είναι μια κατανομή.

(β) Αν $f \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$, ο *μετασχηματισμός Hilbert* της f είναι η κατανομή

$$H(f) = f * W_0. \tag{9.23}$$

Αποδείξτε ότι η κατανομή $H(f)$ είναι συνάρτηση (δηλαδή επάγεται από συνάρτηση, όπως στο Παράδειγμα 9.1.4) και ότι

$$H(f)(x) = \frac{1}{\pi} \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{|y| \geq \varepsilon} \frac{f(x-y)}{y} dy = \frac{1}{\pi} \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{|x-y| \geq \varepsilon} \frac{f(y)}{x-y} dy. \tag{9.24}$$

9. Ο μετασχηματισμός Hilbert μπορεί να οριστεί και για μεγαλύτερες κλάσεις συναρτήσεων από την $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$. Θεωρώντας ως ορισμό τη σχέση (9.24), να υπολογίσετε το μετασχηματισμό Hilbert της συνάρτησης $f = \chi_{[0,1]}$.