Πιθανότητες ΙΙ

Σημειώσεις ακαδημαϊκού έτους 2012-2013

Περιεχόμενα

Συμβολισμός

$\mathbb{N}$ το σύνολο των μη αρνητικών ακεραίων $\{0, 1, 2, \dots\}$
$\mathbb{N}^+$ το σύνολο των θετικών ακεραίων $\{1, 2, \dots\}$

Για $n \in \mathbb{N}^+$,

$$[n] := \{1, 2, \dots, n\}.$$

Για ακολουθία συνόλων $(A_n)_{n \geq 1}$,

$$\limsup_n A_n := \cap_{n=1}^{\infty} \cup_{k=n}^{\infty} A_k,$$
$$\liminf_n A_n := \cup_{n=1}^{\infty} \cap_{k=n}^{\infty} A_k.$$

$A \subset B$: το A είναι υποσύνολο του B (όχι απαραίτητα γνήσιο).

Για X σύνολο,

$$\mathscr{P}(X) := \{A : A \subset X\},$$

το δυναμοσύνολο του X.

Για X τοπολογικό χώρο,

$$\mathscr{B}(X): \text{ η σ-άλγεβρα των Borel υποσυνόλων του } X.$$

Για $x, y \in \mathbb{R}$,

$$x \wedge y := \min\{x, y\},$$
$$x \vee y := \max\{x, y\}.$$

Για $x \in \mathbb{R}$,

$$x^+ = x \vee 0 = \begin{cases} x & \text{αν } x > 0, \\ 0 & \text{αν } x \leq 0, \end{cases} \qquad x^- = (-x) \vee 0 = \begin{cases} -x & \text{αν } x < 0, \\ 0 & \text{αν } x \geq 0. \end{cases}$$

1

σ-άλγεβρες

1.1 σ-άλγεβρες

Έστω X σύνολο. Συμβολίζουμε με $\mathscr{P}(X)$ το δυναμοσύνολο του X δηλαδή, $\mathscr{P}(X) = \{A : A \subset X\}$.

Ορισμός 1.1 Έστω X σύνολο. Μία οικογένεια $\mathcal{A} \subset \mathscr{P}(X)$ λέγεται **άλγεβρα** στο X αν έχει τις εξής ιδιότητες,

(i). $\emptyset \in \mathcal{A}$.

(ii). Αν $A \in \mathcal{A}$ τότε $X \backslash A \in \mathcal{A}$.

(iii). Για κάθε $n \geq 2$, αν $A_1, A_2, ..., A_n \in \mathcal{A}$, τότε $\cup_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{A}$. Δηλαδή η $\mathcal{A}$ είναι κλειστή στις πεπερασμένες ενώσεις δηλαδή,

Παρατήρηση 1.2 Για μία άλγεβρα $\mathcal{A}$ ισχύει επίσης

- $X \in \mathcal{A}$ λόγω των (i) και (ii), εφόσον το X είναι το συμπλήρωμα του $\emptyset$.
- Η $\mathcal{A}$ είναι κλειστή στις πεπερασμένες τομές, εφόσον $\cap_{i=1}^{n} A_i = X \backslash \{\cup_{i=1}^{n} (X \backslash A_i)\}$ και άρα λόγω των (ii) και (iii) ισχύει $\cap_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{A}$.
- Αν $A, B \in \mathcal{A}$ τότε $A \backslash B \in \mathcal{A}$, εφόσον $A \backslash B = A \cap (X \backslash B)$.

Παράδειγμα 1.3 Αν X σύνολο, τότε οι οικογένειες

$$\mathcal{A}_1 := \{\emptyset, X\},$$
$$\mathcal{A}_2 := \mathscr{P}(X),$$

είναι άλγεβρες στο X.

Παράδειγμα 1.4 Στο $X = \mathbb{R}$ η $\mathcal{A} = \{A \in \mathbb{R} : A \text{ πεπερασμένη ένωση διαστημάτων}\}$ είναι άλγεβρα (Άσκηση)

Ορισμός 1.5 Έστω X σύνολο. Μία οικογένεια $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ λέγεται **σ-άλγεβρα** στο X αν έχει τις εξής ιδιότητες:

(i). $\emptyset \in \mathcal{A}$.

(ii). Αν $A \in \mathcal{A}$ τότε $X \backslash A \in \mathcal{A}$.

(iii). Η $\mathcal{A}$ είναι κλειστή στις αριθμήσιμες ενώσεις, δηλαδή αν $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{A}$, τότε $\cup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$.

Παρατήρηση 1.6 Από τους Ορισμούς 1.1, 1.5, είναι ξεκάθαρο ότι μία σ-άλγεβρα είναι άλγεβρα. Επίσης, ανάλογα με την περίπτωση των αλγεβρών, για μία σ-άλγεβρα $\mathcal{A}$ ισχύει ότι

- $X \in \mathcal{A}$.
- Η $\mathcal{A}$ είναι κλειστή στις αριθμήσιμες τομές, εφόσον $\cap_{n \in \mathbb{N}} A_n = X \backslash \{\cup_{n \in \mathbb{N}} (X \backslash A_n)\}$.

- Αν $A, B \in \mathcal{A}$ τότε, $A \backslash B \in \mathcal{A}$.

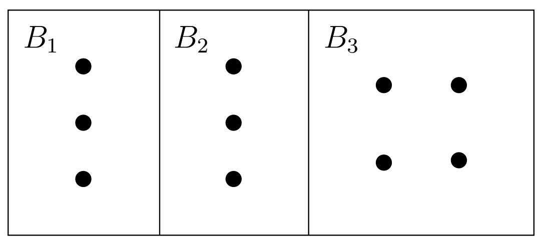
Παρατήρηση 1.7 Δεν ισχύει παντα ότι μια άλγεβρα είναι σ-άλγεβρα. Στο Παράδειγμα 1.4, η οικογένεια $\mathcal{A}$ δεν ειναι σ-άλγεβρα, γιατί ενώ $(2n, 2n+1) \in \mathcal{C}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, η αριθμήσιμη ένωση $\cup_{n=1}^{\infty}(2n, 2n+1)$ δεν ανήκει στην $\mathcal{A}$.

Παράδειγμα 1.8 Οι οικογένειες $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$ στο Παράδειγμα 1.3 είναι σ-άλγεβρες. Η πρώτη είναι η ελάχιστη δυνατή και η δεύτερη η μέγιστη δυνατή σ-άλγεβρα στο X.

Παράδειγμα 1.9 Έστω $X = \{1, 2, \ldots, 10\}$. Θέτουμε $B_1 := \{1, 2, 3\}, B_2 := \{4, 5, 6\}, B_3 := \{7, 8, 9, 10\}$. Η οικογένεια

$$\mathcal{A} = \{\emptyset, X, B_1, B_2, B_3, B_1 \cup B_2, B_1 \cup B_3, B_2 \cup B_3\}$$

είναι σ-άλγεβρα στο X. Για παράδειγμα, το συμπλήρωμα του B_2 είναι το $B_1 \cup B_3$ το οποίο βρίσκεται και αυτό στην $\mathcal{A}$.



Σχήμα 1.1 Μία διαμέριση του $\{1, 2, \ldots, 10\}$.

Αντίθετα, η

$$\mathcal{B} = \{\emptyset, X, B_1, B_2, B_1 \cup B_2\}$$

δεν είναι σ-άλγεβρα γιατί, ενώ είναι κλειστή στις ενώσεις, δεν είναι κλειστή στα συμπληρώματα. Τα συμπληρώματα των $B_1, B_2, B_1 \cup B_2$ δεν περιέχονται στην $\mathcal{B}$.

Παράδειγμα 1.10 Έστω $X = \mathbb{R}$. Η οικογένεια

$$\mathcal{A} := \{A \subset \mathbb{R} : A \text{ αριθμήσιμο ή } \mathbb{R} \backslash A \text{ αριθμήσιμο}\}$$

είναι σ-άλγεβρα (εύκολη άσκηση). Το κενό είναι αριθμήσιμο και το $\mathbb{R}$ έχει αριθμήσιμο συμπλήρωμα (το κενό), άρα και τα δύο ανήκουν στην $\mathcal{A}$.

Πρόταση 1.11 *Έστω X σύνολο και $(\mathcal{A}_i)_{i \in I}$ οικογένεια σ-αλγεβρών στο X. Τότε, η*

$$\mathcal{H} = \cap_{i \in I} \mathcal{A}_i := \{A \in X : A \in \mathcal{A}_i \quad \forall i \in I\}$$

είναι σ-άλγεβρα στο X.

Απόδειξη Προφανώς τα $\emptyset$, X ανήκουν στην $\mathcal{H}$ γιατί και τα δύο είναι στοιχεία κάθε σ-άλγεβρας $\mathcal{A}_i$ στο X. Αν $A \in \mathcal{A}_i$ για κάθε $i \in I$ τότε, επειδή κάθε $\mathcal{A}_i$ είναι σ-άλγεβρα, έπεται ότι

$$X \backslash A \in \mathcal{A}_i \quad \forall i \in I,$$

δηλαδή $X \backslash A \in \cap_{i \in I} \mathcal{A}_i$. Όμοια αποδεικνύουμε ότι η $\cap_{i \in I} \mathcal{A}_i$ είναι κλειστή στις αριθμήσιμες ενώσεις. Έπεται λοιπόν ότι η $\mathcal{H}$ είναι σ-άλγεβρα. ■

1.2 Παραγόμενη σ-άλγεβρα

Ορισμός 1.12 Έστω X σύνολο και $\mathcal{C} \subset \mathscr{P}(X)$. Ορίζουμε

$$\mathcal{H} := \{\mathcal{A} \subset \mathscr{P}(X) : \mathcal{A} \supset \mathcal{C} \text{ και η } \mathcal{A} \text{ είναι σ-άλγεβρα}\},$$

δηλαδή το σύνολο των σ-αλγεβρών στο X που καθεμία τους περιέχει την οικογένεια $\mathcal{C}$. Η σ-άλγεβρα που παράγεται από την $\mathcal{C}$ ορίζεται ως η τομή όλων των σ-άλγεβρων που περιέχουν την $\mathcal{C}$ και συμβολίζεται με $\sigma(\mathcal{C})$, δηλαδή

$$\sigma(\mathcal{C}) = \cap_{\mathcal{A} \in \mathcal{H}} \mathcal{A}.$$

Η $\sigma(\mathcal{C})$ περιέχει ακριβώς όλα τα $B \subset X$ με την ιδιότητα $B \in \mathcal{A}$ για κάθε σ-άλγεβρα $\mathcal{A}$ στο X με $\mathcal{A} \supset \mathcal{C}$.

Από την Πρόταση 1.11, έπεται ότι η $\sigma(\mathcal{C})$ είναι πράγματι σ-άλγεβρα που περιέχει την οικογένεια $\mathcal{C}$ και από την κατασκευή της είναι η μικρότερη με την ιδιότητα αυτή. Πράγματι, αν υπήρχε μία σ-άλγεβρα $\mathcal{A}_0$ με $\mathcal{C} \subset \mathcal{A}_0 \subsetneq \sigma(\mathcal{C})$ τότε $\mathcal{A}_0 \in \mathcal{H}$ και άρα $\sigma(\mathcal{C}) \subset \mathcal{A}_0$, που είναι άτοπο. Προφανώς, αν η $\mathcal{C}$ είναι σ-άλγεβρα, τότε $\sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{C}$.

Παράδειγμα 1.13 Έστω X μή κενό σύνολο με τουλάχιστον δύο στοιχεία και $\emptyset \subsetneq A \subsetneq X$. Η σ-άλγεβρα που παράγεται από την οικογένεια $\mathcal{C} := \{A\}$ είναι η $\mathcal{B} := \{\emptyset, X, A, A^c\}$. Πράγματι, η $\mathcal{B}$ είναι σ-άλγεβρα, και οποιαδήποτε σ-άλγεβρα $\mathcal{A}$ περιέχει το A θα πρέπει να περιέχει και το A^c (και τα $\emptyset, X$ βέβαια), άρα $\mathcal{A} \supset \mathcal{B}$.

Παράδειγμα 1.14 Επιστρέφουμε στο Παράδειγμα 1.9. Η οικογένεια $\mathcal{B}$ δεν είναι σ-άλγεβρα, και με σκεπτικό όπως στο προηγούμενο παράδειγμα διαπιστώνουμε ότι $\sigma(\mathcal{B}) = \mathcal{A}$.

Παράδειγμα 1.15 (Σ-άλγεβρα παραγόμενη από διαμέριση) Έστω X σύνολο και $\mathcal{C} := \{A_i : i \in I\}$ διαμέριση του X (δηλαδή τα A_i είναι μη κενά σύνολα, ξένα ανά δύο, με ένωση το X), με $I = \{1, 2, \ldots, k\}$ για κάποιο $k \in \mathbb{N} \backslash \{0\}$ ή $I = \mathbb{N}$. Για την σ-άλγεβρα που παράγει η $\mathcal{C}$ έχουμε την εξής απλή περιγραφή,

$$\sigma(\mathcal{C}) = \Big\{ \cup_{i \in J} A_i : J \subset I \Big\}. \tag{$\star$}$$

Δηλαδή ένα σύνολο της $\sigma(\mathcal{C})$ είναι ένωση κάποιων στοιχείων της διαμέρισης $\mathcal{C}$.
Ας ονομάσουμε $\mathcal{A}$ το σύνολο στο δεξί μέλος της παραπάνω σχέσης. Τότε έχουμε τα εξής:

- Η οικογένεια $\mathcal{A}$ περιέχει την $\mathcal{C}$. Πράγματι, οποιοδήποτε σύνολο της $\mathcal{C}$ είναι της μορφής A_{i_0} για κάποιο $i_0 \in I$. Η επιλογή $J = \{i_0\} \subset I$ στην περιγραφή στοιχείων της $\mathcal{A}$ δίνει $\cup_{i \in J} A_i = A_{i_0} \in \mathcal{A}$.
- Οποιαδήποτε σ-άλγεβρα $\mathcal{A}_1$ περιέχει την $\mathcal{C}$ πρέπει να περιέχει την $\mathcal{A}$. Γιατί οποιαδήποτε ένωση $\cup_{i \in J} A_i$ είναι αριθμήσιμη αφού το I είναι αριθμήσιμο. Και εφόσον η $\mathcal{A}_1$ είναι σ-άλγεβρα και περιέχει τα A_i με $i \in J$, θα περιέχει και την ένωσή τους.
- Η $\mathcal{A}$ είναι σ-άλγεβρα. Πράγματι, η επιλογή $J = \emptyset$ δίνει $\cup_{i \in J} A_i = \emptyset$. Επίσης, αν πάρουμε A της μορφής $A = \cup_{i \in J} A_i$ για κάποιο $J \subset I$, τότε $X \backslash A = \cup_{i \in I \backslash J} A_i$ που είναι στοιχείο της $\mathcal{A}$. Τέλος, αν έχουμε ακολουθία $(B_n)_{n \geq 1}$ στοιχείων της $\mathcal{A}$ με $B_n = \cup_{i \in J_n} A_i$ όπου $J_n \subset I$ για κάθε $n \geq 1$, τότε για $J := \cup_{n=1}^{\infty} J_n$ έχουμε $\cup_{n=1}^{\infty} B_n = \cup_{i \in J} A_i$ που πάλι είναι στοιχείο της $\mathcal{A}$.

Συνδυάζοντας αυτές τις τρεις παρατηρήσεις παίρνουμε την $(\star)$.

1.3 Τα σύνολα Borel

Υπενθυμίζουμε ότι αν X είναι ένα σύνολο, μια τοπολογία στο X είναι μια οικογένεια $\mathcal{T}$ υποσυνόλων του X έτσι ώστε,

(i) $X, \emptyset \in \mathcal{T}$.
(ii) Η $\mathcal{T}$ είναι κλειστή στις πεπερασμένες τομές.
(iii) Η $\mathcal{T}$ είναι κλειστή στις αυθαίρετες ενώσεις.

Το ζεύγος $(X, \mathcal{T})$ λέγεται τοπολογικός χώρος και τα στοιχεία της $\mathcal{T}$ ανοικτά σύνολα. Τα συμπληρώματα των ανοικτών συνόλων λέγονται κλειστά σύνολα.

Δεδομένου ενός συνόλου, μπορούμε γενικά να ορίσουμε πολλές τοπολογίες σε αυτό. Για τους γνωστούς μας χώρους, $\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n, \mathbb{Z}$, μόνο μερικές από αυτές έχουν ενδιαφέρον.

Παράδειγμα 1.16 (Τοπολογία του $\mathbb{R}$) Θεωρούμε το χώρο $\mathbb{R}$. Ένα σύνολο $A \subset \mathbb{R}$ το ονομάζουμε ανοιχτό αν για κάθε $x \in A$ υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subset A$. Μπορούμε να δούμε ότι το σύνολο $\mathcal{T}$ των ανοιχτών συνόλων που ορίσαμε έτσι είναι μία τοπολογία. Είναι αυτή που ονομάζουμε "συνήθη τοπολογία" στο $\mathbb{R}$.

Παράδειγμα 1.17 (Τοπολογία του $\mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$) Στον $\mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ για να ονομάσουμε ένα υποσύνολο του A ανοιχτό ζητάμε από κάθε σημείο $x \in A$ τα εξής:

$$\text{Αν } x \in A \cap \mathbb{R}, \text{ τότε υπάρχει } \varepsilon > 0 \text{ ώστε } (x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subset A,$$
$$\text{Αν } x = -\infty \in A, \text{ τότε υπάρχει } M \in \mathbb{R} \text{ ώστε } [-\infty, M) \subset A,$$
$$\text{Αν } x = \infty \in A, \text{ τότε υπάρχει } M \in \mathbb{R} \text{ ώστε } (M, \infty] \subset A.$$

Τα ανοιχτά σύνολα που ορίζουμε έτσι αποτελούν την "συνήθη τοπολογία" του $\mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$.

Παράδειγμα 1.18 (Τοπολογία του $\mathbb{R}^n$) Θεωρούμε το χώρο $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, εφοδιασμένο με την Ευκλείδεια μετρική

$$d(x,y) = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (x_k - y_k)^2}.$$

Ένα σύνολο $A \subset \mathbb{R}^n$ το ονομάζουμε ανοιχτό αν για κάθε $x \in A$ υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε $\{y \in \mathbb{R}^n : d(x,y) < \varepsilon\} \subset A$. Όπως στο προηγούμενο παράδειγμα, το σύνολο $\mathcal{T}$ των συνόλων που ονομάσαμε ανοιχτά είναι μία τοπολογία. Τη λέμε "συνήθη τοπολογία" στο $\mathbb{R}^n$.

Γενικά η οικογένεια $\mathcal{T}$ των ανοικτών συνόλων σε ένα τοπολογικό χώρο δεν είναι σ-άλγεβρα, και συνήθως, ούτε καν άλγεβρα. Για παράδειγμα, στο $\mathbb{R}$, το $A = (0,1)$ είναι ανοιχτό, ενώ το συμπλήρωμα του δεν είναι. Θα μας φανεί χρήσιμο όμως να θεωρήσουμε την σ-άλγεβρα που παράγουν τα ανοιχτά σύνολα.

Ορισμός 1.19 Έστω $(X, \mathcal{T})$ τοπολογικός χώρος. Η σ-άλγεβρα $\sigma(\mathcal{T})$ που παράγεται από την οικογένεια $\mathcal{T}$ στο X ονομάζεται Borel σ-άλγεβρα και τα στοιχεία της σύνολα Borel. Συνήθως συμβολίζουμε την $\sigma(\mathcal{T})$ με $\mathscr{B}(X)$.

Η $\mathscr{B}(X)$ είναι η μικρότερη σ-άλγεβρα που περιέχει τα ανοιχτά σύνολα.

Πρόταση 1.20 *Κάθε ανοικτό ή κλειστό υποσύνολο ενός τοπολογικού χώρου $(X, \mathcal{T})$ είναι σύνολο Borel.*

Απόδειξη Απο τον ορισμό των συνόλων Borel έχουμε $\mathcal{T} \subset \sigma(\mathcal{T}) =: \mathscr{B}(X)$. Αν F είναι κλειστό, τότε $X \backslash F \in \mathscr{B}(X)$ ως ανοικτό. Αλλά η $\mathscr{B}(X)$ είναι σ-άλγεβρα, οπότε πρέπει και το συμπλήρωμα του $X \backslash F$ να περιέχεται στην $\mathscr{B}(X)$. Άρα $F \in \mathscr{B}(X)$. ∎

Στο εξής, όταν μιλάμε για τα σύνολα Borel ενός υποσυνόλου κάποιου ευκλείδειου χώρου, εννοούμε αυτά που παράγονται από την συνήθη τοπολογία του (Παραδείγματα 1.16, 1.17, 1.18).

Πρόταση 1.21 *Κάθε υποδιάστημα του $\mathbb{R}$ είναι σύνολο Borel.*

Απόδειξη Τα διάφορα σενάρια για ένα υποδιάστημα είναι

$$(-\infty, a], [a, \infty), (-\infty, a), (a, \infty), (a, b), [a, b], (a, b], [a, b).$$

Τα πρώτα δύο είναι κλειστά σύνολα, τα επόμενα τρία είναι ανοιχτά και το $[a, b]$ είναι κλειστό. Για το $(a, b]$ γράφουμε

$$(a, b] = \mathbb{R} \backslash \big((-\infty, a] \cup (b, \infty)\big).$$

Επειδή η $\mathscr{B}(\mathbb{R})$ είναι σ-άλγεβρα και $(-\infty, a], (b, \infty) \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$ έπεται ότι $(-\infty, a] \cup (b, \infty) \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$ και $\mathbb{R} \backslash \big((-\infty, a] \cup (b, \infty)\big) \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$. Όμοια δείχνουμε ότι $[a, b) \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$. ∎

Επειδή η $\mathscr{B}(\mathbb{R})$ είναι σ-άλγεβρα και περιέχει όλα τα διαστήματα, έπεται ότι όλα τα σύνολα που φτιάχνουμε ξεκινώντας απο διαστήματα και εφαρμόζοντας αριθμήσιμο πλήθος φορών τις πράξεις της ένωσης, της τομής, και του συμπληρώματος θα είναι επίσης στοιχεία της $\mathscr{B}(\mathbb{R})$.

Θεώρημα 1.22 *Έστω $\mathcal{F}$ η οικογένεια των κλειστών συνόλων του $\mathbb{R}$ και*

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_1 &= \{(-\infty, b] : b \in \mathbb{R}\},\\
\mathcal{A}_2 &= \{(a, b] : a < b, \quad a, b \in \mathbb{R}\},\\
\mathcal{A}_3 &= \{(a, b) : a < b, \quad a, b \in \mathbb{R}\}.
\end{aligned}$$

Τότε $\mathscr{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\mathcal{F}) = \sigma(\mathcal{A}_1) = \sigma(\mathcal{A}_2) = \sigma(\mathcal{A}_3)$.

Απόδειξη Θα δείξουμε ότι

$$\mathscr{B}(\mathbb{R}) \supset \sigma(\mathcal{F}) \supset \sigma(\mathcal{A}_1) \supset \sigma(\mathcal{A}_2) \supset \sigma(\mathcal{A}_3) \supset \mathscr{B}(\mathbb{R}).$$

Η $\mathscr{B}(\mathbb{R})$ περιέχει τα ανοικτά σύνολα άρα και τα συμπληρώματά τους, δηλαδή τα κλειστά σύνολα, συνεπώς και την $\sigma(\mathcal{F})$. Τα διαστήματα της $\mathcal{A}_1$ είναι κλειστά άρα $\sigma(\mathcal{F}) \supset \sigma(\mathcal{A}_1)$. Για την $\sigma(\mathcal{A}_1) \supset \sigma(\mathcal{A}_2)$ παρατηρούμε ότι $(a, b] = (-\infty, b] \backslash (-\infty, a]$ και για την $\sigma(\mathcal{A}_2) \supset \sigma(\mathcal{A}_3)$ ότι $(a, b) = \cup_{n=1}^{\infty} (a, b - \frac{1}{n}]$. Τέλος, για την $\sigma(\mathcal{A}_3) \supset \mathscr{B}(\mathbb{R})$ γνωρίζουμε ότι κάθε μη κενό ανοικτό σύνολο στο $\mathbb{R}$ γράφεται ως αριθμήσιμη ένωση ανοικτών διαστημάτων. ∎

Με παρόμοια επιχειρήματα κανείς μπορεί να δείξει ότι η $\mathscr{B}(\mathbb{R})$ παράγεται από την οικογένεια

$$\mathcal{A} = \{(-\infty, q) : q \in \mathbb{Q}\}.$$

1.4 Liminf και limsup ακολουθίας συνόλων

Έστω X σύνολο, και $(A_n)_{n\geq 1}$ ακολουθία υποσυνόλων του. Ορίζουμε τα σύνολα

$$\liminf_{n\geq 1} A_n := \cup_{n=1}^{\infty} \cap_{k=n}^{\infty} A_k, \tag{1.1}$$

$$\limsup_{n\geq 1} A_n := \cap_{n=1}^{\infty} \cup_{k=n}^{\infty} A_k, \tag{1.2}$$

τα οποία λέμε liminf και limsup αντίστοιχα της ακολουθίας $(A_n)_{n\geq 1}$. Είναι και τα δύο υποσύνολα της ένωσης $\cup_{n=1}^{\infty} A_n$.

Με λόγια, ένα $x \in X$ ανήκει στο $\liminf A_n$ αν από ένα δείκτη και μετά ανήκει *σε όλα* τα στοιχεία της ακολουθίας $(A_n)_{n\geq 1}$, ενώ ανήκει στο $\limsup A_n$ αν ανήκει σε *άπειρα* από τα $(A_n)_{n\geq 1}$. Από τον τυπικό ορισμό ή από αυτή την περιγραφή είναι σαφές ότι $\liminf_{n\geq 1} A_n \subset \limsup_{n\geq 1} A_n$. Το να είναι ένα x μέλος του $\liminf_{n\geq 1} A_n$ είναι ισχυρότερη απαίτηση, και έτσι λιγότερα x την ικανοποιούν.

Παράδειγμα 1.23 Αν $X = \mathbb{R}$ και $A_n = [-n, n]$ για κάθε $n \geq 1$, τότε $\liminf_{n\geq 1} A_n := \mathbb{R}$. Για κάθε πραγματικό αριθμό x υπάρχει φυσικός $n(x)$ ώστε ο x να ανήκει σε όλα τα A_n με $n \geq n(x)$ (άρα αυτά τα οποία εξαιρούνται έχουν πεπερασμένο πλήθος). Κάθε x έχει το δικό του $n(x)$. Μαλιστα, μπορούμε να πάρουμε $n(x) := [|x|] + 1$.

Παράδειγμα 1.24 Αν $X = \mathbb{R}$ και $A_n = \{x : nx \text{ είναι ακέραιος}\} = \mathbb{Z}/n$ για κάθε $n \geq 1$, τότε

$$\liminf_{n\geq 1} A_n := \mathbb{Z},$$

$$\limsup_{n\geq 1} A_n := \mathbb{Q}.$$

Σχετικά με τον δεύτερο ισχυρισμό, για κάθε ρητό $x = p/q$ με q θετικό ακέραιο έχουμε ότι $x \in A_n$ για κάθε n που είναι πολλαπλάσιο του q. Άρα έχουμε την $\supset$. Και επειδή όλα τα A_n είναι υποσύνολα του $\mathbb{Q}$ έχουμε ότι και $\limsup_{n\geq 1} A_n \subset \mathbb{Q}$. Η απόδειξη του πρώτου ισχυρισμού αφήνεται στον αναγνώστη.

Αν οι όροι της ακολουθίας $(A_n)_{n\geq 1}$ είναι στοιχεία μια σ-άλγεβρας $\mathcal{A}$, τότε και τα $\liminf_{n\geq 1} A_n, \limsup_{n\geq 1} A_n$ είναι επίσης στοιχεία της $\mathcal{A}$. Ας το δούμε για το lim sup. Επειδή η $\mathcal{A}$ είναι κλειστή στις αριθμήσιμες ενώσεις, για κάθε $k \geq 1$ έχουμε $B_n := \cup_{k=n} A_k \in \mathcal{C}$ για κάθε $n \geq 1$, και επειδή είναι κλειστή στις αριθμήσιμες τομές έχουμε $\limsup_{n\geq 1} A_n = \cap_{n\geq 1} B_n \in \mathcal{C}$.

Ασκήσεις

1.1 Έστω $X := \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$ και

$$\mathcal{A}_1 := \{\emptyset, X, \{\beta, \gamma\}\},$$

$$\mathcal{A}_2 := \{\emptyset, X, \{\beta, \gamma\}, \{\alpha, \delta\}\}.$$

(α) Είναι οι $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ σ-άλγεβρες;

(β) Να δείξετε ότι $\sigma(\mathcal{A}_1) = \mathcal{A}_2$.

1.2 Σε αυτή την άσκηση παίρνουμε $X := \mathbb{R}$.

(α) Να δείξετε ότι η $\mathcal{A} := \{A \subset \mathbb{R} : A \text{ αριθμήσιμο ή } \mathbb{R}\setminus A \text{ αριθμήσιμο}\}$ είναι σ-άλγεβρα και $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

(β) Για την οικογένεια $\mathcal{A}_0 := \{\{x\} : x \in \mathbb{R}\}$ να δείξετε ότι $\sigma(\mathcal{A}_0) = \mathcal{A}$.

(γ) Να δείξετε ότι η οικογένεια $\mathcal{A}_1 := \{A \subset \mathbb{R} : A \text{ πεπερασμένο ή } \mathbb{R}\setminus A \text{ πεπερασμένο}\}$ **δεν** είναι σ-άλγεβρα.

1.3 Αν στο Παράδειγμα 1.15 η διαμέριση $\mathcal{C}$ του X έχει υπεραριθμήσιμο πλήθος στοιχείων (δηλαδή το I είναι υπεραριθμήσιμο, άρα και το X υπεραριθμήσιμο), να δοθεί περιγραφή της παραγόμενης σ-άλγεβρας $\sigma(\mathcal{C})$.

1.4 Για την οικογένεια $\mathcal{C} := \{(-\infty, x] : x \in \mathbb{Q}\}$ να δείξετε ότι $\sigma(\mathcal{C}) = \mathscr{B}(\mathbb{R})$.

1.5 Να δείξετε ότι η $\mathscr{B}(\mathbb{R})$ δεν παράγεται από διαμέριση.

1.6 Έστω $(A_n)_{n\geq 1}$ ακολουθία στοιχείων μιάς σ-άλγεβρας $\mathcal{A}$. Να δείξετε ότι υπάρχει ακολουθία $(B_n)_{n\geq 1}$ στοιχείων της $\mathcal{A}$, τα οποία είναι ξένα ανά δύο, ώστε $B_n \subset A_n$ για κάθε $n \geq 1$, και $\cup_{n=1}^{\infty} A_n = \cup_{n=1}^{\infty} B_n$.

1.7 Έστω $f : X \to Y$ συνάρτηση.

(α) Αν $\mathcal{A}$ είναι σ-άλγεβρα στο X, θέτουμε

$$\mathcal{B} := \{B \subset Y : f^{-1}(B) \in \mathcal{A}\}.$$

Να δείξετε ότι η $\mathcal{B}$ είναι σ-άλγεβρα στο Y.

(β) Αν $\mathcal{B}$ είναι σ-άλγεβρα στο Y, θέτουμε

$$\mathcal{A} := \{f^{-1}(B) : B \in \mathcal{B}\}.$$

Να δείξετε ότι η $\mathcal{A}$ είναι σ-άλγεβρα στο X.

Υπενθυμίζουμε ότι για $B \subset Y$, συμβολίζουμε με $f^{-1}(B)$ το σύνολο $\{x \in X : f(x) \in B\}$. Το f^{-1} εδώ δεν σημαίνει "αντίστροφη της f". Η f δεν είναι απαραίτητο να είναι αντιστρέψιμη.

1.8 Έστω X σύνολο και $\mathcal{A}$ μία άλγεβρα στο X. Αν ισχύει μία από τις παρακάτω συνθήκες η $\mathcal{A}$ είναι σ-άλγεβρα.

1. Για κάθε αύξουσα ακολουθία $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ στην $\mathcal{A}$ ισχύει $\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$.
2. Για κάθε φθίνουσα ακολουθία $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ στην $\mathcal{A}$ ισχύει $\cap_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$.
3. Για κάθε ακολουθία $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ξένων ανά δύο στοιχείων στην $\mathcal{A}$, ισχύει $\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$.

2

Μέτρα

2.1 Μέτρα σε μετρήσιμο χώρο

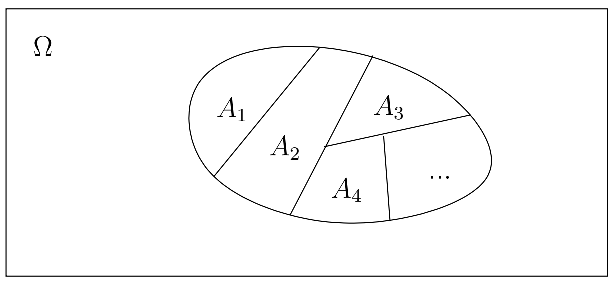
Έστω X σύνολο και $\mathcal{A}$ σ-άλγεβρα στο X. Ονομάζουμε το ζεύγος $(X, \mathcal{A})$ μετρήσιμο χώρο.

Ορισμός 2.1 **Μέτρο** στον $(X, \mathcal{A})$ λέμε κάθε συνάρτηση $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ που ικανοποιεί τις ιδιότητες:

(i). $\mu(\emptyset) = 0$.

(ii). $\mu(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$ για κάθε ακολουθία $(A_n)_{n \geq 1}$ ξένων ανα δύο στοιχείων της $\mathcal{A}$.

Η τριάδα $(X, \mathcal{A}, \mu)$ λέγεται **χώρος μέτρου** και τα στοιχεία της $\mathcal{A}$ **μετρήσιμα σύνολα**.



Σχήμα 2.1 Για την ιδιοτητα (ii) του ορισμού του μέτρου.

Παράδειγμα 2.2 (Αριθμητικό μέτρο) Έστω X ένα σύνολο, $\mathcal{A} = \mathscr{P}(X)$, και

$$\mu(A) := \begin{cases} n & \text{αν το } A \text{ είναι πεπερασμένο και έχει ακριβώς } n \text{ στοιχεία,} \\ \infty & \text{αν το } A \text{ είναι άπειροσύνολο,} \end{cases}$$

για κάθε $A \in \mathcal{A}$. Το μ είναι το αριθμητικό μέτρο στο X.

Παράδειγμα 2.3 (Μέτρο Dirac) Έστω X ένα σύνολο, $\mathcal{A} = \mathscr{P}(X)$, και

$$\delta_x(A) := \begin{cases} 1 & \text{αν } x \in A, \\ 0 & \text{αν } x \in X \backslash A, \end{cases}$$

για κάθε $A \in \mathcal{A}$. Η συνάρτηση δ_x είναι μέτρο, και ονομάζεται μέτρο Dirac στο x.

Παράδειγμα 2.4 (Μέτρο Lebesgue στο $\mathbb{R}$) Παίρνουμε $X = \mathbb{R}, \mathcal{A} = \mathscr{B}(\mathbb{R})$. Είναι δυνατόν να οριστεί ένα μέτρο λ στον χώρο $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$ ώστε

$$\lambda(I) = \text{μήκος}(I), \tag{$*$}$$

για κάθε διάστημα $I \subset \mathbb{R}$. Για παράδειγμα, για $a < b$ πραγματικούς, έχουμε $\lambda((a,b)) = \lambda([a,b]) = b - a, \lambda((a,\infty)) = \infty$ και $\lambda([0.1,2) \cup (3,4) \cup (5,5.3)) = 1.9 + 1 + 0.3 = 3.2$.

Πως μπορούμε να ορίσουμε μία τέτοια συνάρτηση; Ξέρουμε τις τιμές της στα διαστήματα, τα οποία είναι στοιχεία του $\mathscr{B}(\mathbb{R})$, και οι ιδιότητες του μέτρου καθορίζουν μοναδικά τις τιμές της σε ενώσεις διαστημάτων. Αυτό όμως δεν αρκεί. Χρειάζεται να την επεκτείνουμε σε όλο το $\mathscr{B}(\mathbb{R})$. Αποδεικνύεται ότι μία τέτοια επέκταση είναι δυνατή και γινεται μοναδικά. Δηλαδή υπάρχει μοναδικό μέτρο στο $\mathscr{B}(\mathbb{R})$ που ικανοποιεί την $(*)$. Την κατασκευή αυτού του μέτρου μπορεί να βρει ο αναγνώστης σε βιβλία θεωρίας μέτρου (για παράδειγμα, Κεφάλαιο 3 του Κουμουλλής και Νεγρεπόντης (1991)).

Μπορεί άραγε το λ να επεκταθεί σε όλο το $\mathscr{P}(\mathbb{R})$; Δηλαδή να αποδώσουμε σε κάθε υποσύνολο του $\mathbb{R}$ έναν αριθμό που θα είναι το "μήκος" του. Αποδεικνύεται ότι μπορεί να επεκταθεί μέχρι ένα σύνολο $\mathcal{M}_\lambda$, που είναι μάλιστα σ-άλγεβρα, με $\mathscr{B}(\mathbb{R}) \subsetneq \mathcal{M}_\lambda \subsetneq \mathscr{P}(\mathbb{R})$, αλλά όχι παραπάνω. Γιατί όχι παραπάνω; Είναι τόσο δύσκολο να επεκτείνουμε μια συνάρτηση; Το δύσκολο δεν είναι να την επεκτείνουμε, αλλά να την επεκτείνουμε ώστε να ικανοποιεί την (ii) του Ορισμού 2.1. Αυτή η συνθήκη βάζει τόσες πολλές απαιτήσεις στην λ ώστε να μην υπάρχει καμία $\lambda : \mathscr{P}(\mathbb{R}) \to [0,\infty]$ που να μπορεί να τις ικανοποιήσει όλες.

Ορισμός 2.5 Ένα μέτρο μ σε έναν μετρήσιμο χώρο $(X, \mathcal{A})$ λέγεται πεπερασμένο αν $\mu(X) < \infty$, και μέτρο πιθανότητας αν $\mu(X) = 1$.

Αντίστοιχα, ο χώρος μέτρου $(X, \mathcal{A}, \mu)$ λέγεται χώρος πεπερασμένου μέτρου ή χώρος πιθανότητας. Για έναν χώρο πιθανότητας συνήθως χρησιμοποιείται ο συμβολισμός $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

Παράδειγμα 2.6 (Διακριτό μέτρο πιθανότητας) Έστω Ω αριθμήσιμο σύνολο και $\mathcal{F} = \mathscr{P}(\Omega)$. Έστω $f : \Omega \to [0,\infty)$ ώστε $\displaystyle\sum_{x\in\Omega} f(x) = 1$. Για $A \in \mathcal{F}$, ορίζουμε

$$\mathbf{P}(A) := \sum_{x\in A} f(x).$$

Η συνάρτηση $\mathbf{P}$ είναι μέτρο πιθανότητας στο Ω. Σε κάθε σημείο $x \in \Omega$ δίνει μάζα $f(x)$. Το διακριτό μέτρο πιθανότητας είναι γενίκευση του μέτρου Dirac. Περισσότερα του ενός σημεία παίρνουν ένα τμήμα της συνολικής μάζας 1.

Παράδειγμα 2.7 (Ρίψη νομίσματος) Για το πείραμα ρίψης ενός νομίσματος που έχει πιθανότητα $p \in [0,1]$ να φέρει κορώνα, και $1-p$ να φέρει γράμματα, ένας φυσιολογικός χώρος πιθανότητας προκύπτει ως ειδική περίπτωση του προηγούμενου παραδείγματος. Παίρνουμε $\Omega := \{K, \Gamma\}$, $f(K) = p, f(\Gamma) = 1-p$. Προκύπτει έτσι ένα μέτρο πιθανότητας, έστω $\mathbf{P}^{(p)}$, και τελικά ο χώρος πιθανότητας είναι ο $(\{K,\Gamma\}, \mathscr{P}(\{K,\Gamma\}), \mathbf{P}^{(p)})$.

Παράδειγμα 2.8 (Μέτρο περιορισμός) Αν μ είναι ένα μέτρο στον $(X, \mathcal{A})$ και $A_0 \in \mathcal{A}$ τότε, η συνάρτηση $\mu_{A_0} : \mathcal{A} \to [0,\infty]$ που ορίζεται ως $\mu_{A_0}(A) = \mu(A \cap A_0)$ για κάθε $A \in \mathcal{A}$ είναι μέτρο (Άσκηση). Το μ_{A_0} έχει συγκεντρωμένη όλη του την μάζα στο A_0 αφού $\mu_{A_0}(X \backslash A_0) = \mu((X \backslash A_0) \cap A_0) = \mu(\emptyset) = 0$.

Παράδειγμα 2.9 (Κανονικοποιημένο μέτρο περιορισμός) Σε συνέχεια του προηγούμενου παραδείγματος. Ας υποθέσουμε ότι το μ είναι ένα μέτρο πιθανότητας και ότι $0 < \mu(A_0) < 1$ (οι ακραίες περιπτώσεις 0 και 1 δεν έχουν ενδιαφέρον), τότε το μ_{A_0} έχει συνολική μάζα $\mu_{A_0}(\Omega) = \mu(A_0) < 1$, δηλαδή δεν είναι μέτρο πιθανότητας. Το κανονικοποιούμε ορίζοντας ένα νέο μέτρο, το $\mathbf{P}_{A_0} : \mathcal{A} \to [0,1]$, ως εξής

$$\mathbf{P}_{A_0}(A) = \frac{\mu_{A_0}(A)}{\mu_{A_0}(\Omega)} = \frac{\mu(A \cap A_0)}{\mu(A_0)},$$

για κάθε $A \in \mathcal{F}$. Το $\mathbf{P}_{A_0}$ είναι μέτρο πιθανότητας, και δίνει όλη του την μάζα στο σύνολο A_0.

Τα αξιώματα στον ορισμό του μέτρου συνεπάγονται αρκετές ιδιότητες για μία τέτοια συνάρτηση. Καταγράφουμε κάποιες στην παρακάτω πρόταση που θα χρησιμοποιήσουμε επανηλειμμένα στο εξής. Η απόδειξή της αφήνεται ως άσκηση.

Πρόταση 2.10 *Έστω μ ένα μέτρο στον $(X, \mathcal{A})$. Τότε,*

(i). $\mu(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$ *για κάθε ακολουθία* $(A_n)_{n\geq 1}$ *στοιχείων της* $\mathcal{A}$.

(ii). *Αν* $A, B \in \mathcal{A}$, *με* $A \subset B$, *τότε* $\mu(A) \leq \mu(B)$ *και αν* $\mu(A) < \infty$, *τότε* $\mu(B \backslash A) = \mu(B) - \mu(A)$.

(iii). *Αν* $(A_n)_{n\geq 1}$ *είναι αύξουσα ακολουθία στοιχείων της* $\mathcal{A}$, *τότε* $\mu(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$.

(iv). *Αν* $(A_n)_{n\geq 1}$ *είναι φθίνουσα ακολουθία στοιχείων της* $\mathcal{A}$ *με* $\mu(A_1) < \infty$, *τότε* $\mu(\cap_{n=1}^{\infty} A_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$.

Ασκήσεις

2.1 Έστω $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ χώρος πιθανότητας, και $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία ξένων ανά δύο στοιχείων της $\mathcal{F}$. Να δείξετε ότι $\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(A_n) = 0$.

2.2 Έστω $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ χώρος πιθανότητας και $(A_n)_{n\geq 1}$ ακολουθία στοιχείων της $\mathcal{F}$.

(α) Αν $\mathbf{P}(A_n) = 0$ για κάθε $n \geq 1$, τότε $\mathbf{P}\left(\cup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = 0$.

(β) Αν $\mathbf{P}(A_n) = 1$ για κάθε $n \geq 1$, τότε $\mathbf{P}\left(\cap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = 1$.

2.3 Να βρεθεί χώρος πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ και $(A_i)_{i\in I}, (B_i)_{i\in I'}$ οικογένειες στοιχείων της $\mathcal{F}$ ώστε

(α) $\mathbf{P}(A_i) = 0$ για κάθε $i \in I$, $\cup_{i\in I} A_i \in \mathcal{F}$, αλλά $\mathbf{P}\left(\cup_{i\in I} A_i\right) \neq 0$.

(β) $\mathbf{P}(B_i) = 1$ για κάθε $i \in I'$, αλλά $\cap_{i\in I'} B_i = \emptyset$.

2.4 Έστω $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ χώρος πιθανότητας και $(A_\beta)_{\beta\in B}$ οικογένεια ξένων ανά δύο στοιχείων της $\mathcal{F}$. Αν $\mathbf{P}(A_\beta) > 0$ για κάθε $\beta \in B$, να δείξετε ότι το B είναι αριθμήσιμο.

2.5 Έστω $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ χώρος πιθανότητας και $(A_n)_{n\geq 1}$ ακολουθία στοιχείων της $\mathcal{F}$. Να δειχθεί ότι

$$\mathbf{P}(\liminf_{n\geq 1} A_n) \leq \underline{\lim}_{n\to\infty} \mathbf{P}(A_n) \leq \overline{\lim}_{n\to\infty} \mathbf{P}(A_n) \leq \mathbf{P}(\limsup_{n\geq 1} A_n). \tag{2.1}$$

3

Ισότητα πεπερασμένων μέτρων

Στο κεφάλαιο αυτό θα δούμε ένα τεχνικό αποτέλεσμα, το λεγόμενο Θεώρημα π-λ, που στόχο έχει να διευκολύνει την απόδειξη ιδιοτήτων για τα στοιχεία μιας σ-άλγεβρας.

3.1 Κλάσεις Dynkin

Ορισμός 3.1 Έστω X σύνολο. Μία οικογένεια $\mathcal{D} \subset \mathscr{P}(X)$ λέγεται κλάση **Dynkin** στο X αν έχει τις εξής ιδιότητες,

(i). $X \in \mathcal{D}$.
(ii). Αν $A, B \in \mathcal{D}$ και $A \subset B$, τότε $B \setminus A \in \mathcal{D}$.
(iii). Αν $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ αύξουσα ακολουθία στην $\mathcal{D}$, τότε $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{D}$.

Παρατήρηση 3.2 Κάθε σ-άλγεβρα είναι κλάση Dynkin. Το αντίστροφο όμως δεν ισχύει (Άσκηση 3.2). Δηλαδή είναι ευκολότερο ένα σύνολο να είναι κλάση Dynkin.

Όπως και στην περίπτωση των σ-αλγεβρών, για κάθε οικογένεια $\mathcal{C} \subset \mathscr{P}(X)$ ενός συνόλου X, υπάρχει η ελάχιστη κλάση Dynkin που την περιέχει. Αυτή περιγράφεται ως η τομή όλων των κλάσεων Dynkin που περιέχουν την $\mathcal{C}$. Συνήθως τη συμβολίζουμε με $\delta(\mathcal{C})$. Συνοψίζοντας παίρνουμε την ακόλουθη πρόταση, της οποίας η απόδειξη είναι παρόμοια με αυτή στην περίπτωση των σ-αλγεβρών.

Πρόταση 3.3 *Έστω X σύνολο και $\mathcal{C} \subset \mathscr{P}(X)$. Τότε η οικογένεια*

$$\delta(\mathcal{C}) := \bigcap \{\mathcal{D} : \mathcal{D} \text{ κλάση Dynkin και } \mathcal{C} \subset \mathcal{D}\}$$

- *είναι κλάση Dynkin στο X, και*
- *είναι η μικρότερη κλάση Dynkin που περιέχει την $\mathcal{C}$.*

Τη $\delta(\mathcal{C})$ τη λέμε κλάση Dynkin που παράγεται από την $\mathcal{C}$.

Παρατήρηση 3.4 Εύκολα παρατηρεί κανείς ότι $\delta(\mathcal{C}) \subset \sigma(\mathcal{C})$ εφόσον η $\sigma(\mathcal{C})$ είναι κλάση Dynkin και περιέχει την $\mathcal{C}$.

Λέμε ότι μία οικογένεια $\mathcal{C}$ συνόλων είναι *κλειστή στις πεπερασμένες τομές* αν για κάθε $n \geq 1$ και $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathcal{C}$ ισχύει ότι $A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n \in \mathcal{C}$. Προφανώς αρκεί να ισχύει η συνθήκη αυτή για $n = 2$, και έπειτα οι υπόλοιπες περιπτώσεις αποδεικνύονται επαγωγικά.

Η επόμενη πρόταση δίνει μία απλή συνθήκη ώστε μία κλάση Dynkin να είναι σ-άλγεβρα.

Πρόταση 3.5 *Έστω X σύνολο και $\mathcal{D}$ κλάση Dynkin στο X. Αν η $\mathcal{D}$ είναι κλειστή στις πεπερασμένες τομές, τότε η $\mathcal{D}$ είναι σ-άλγεβρα στο X.*

Απόδειξη Από τον Ορισμό 3.1 της κλάσης Dynkin έχουμε ότι $X \in \mathcal{D}$ λόγω του (i) και αν $A \in \mathcal{D}$ τότε $X \setminus A \in \mathcal{D}$ λόγω των (i) και (ii). Επίσης, η $\mathcal{D}$ είναι κλειστή στις πεπερασμένες ενώσεις εφόσον είναι κλειστη στις πεπερασμένες τομές και στα συμπληρώματα. Άρα είναι άλγεβρα. Αυτό σε συνδιασμό με την ιδιότητα (iii) του Ορισμού 3.1 και την Άσκηση 1.8 μας εξασφαλίζει ότι η $\mathcal{D}$ είναι σ-άλγεβρα. ■

3.2 Θεώρημα μονότονης κλάσης

Θεώρημα 3.6 (Θεώρημα μονότονης κλάσης) *Έστω X σύνολο και $\mathcal{C} \subset \mathscr{P}(X)$ οικογένεια κλειστή στις πεπερασμένες τομές. Τότε $\delta(\mathcal{C}) = \sigma(\mathcal{C})$.*

Το Θεώρημα Μονότονης Κλάσης λέγεται και Θεώρημα π-λ.

Απόδειξη Ισχύει ότι $\delta(\mathcal{C}) \subset \sigma(\mathcal{C})$. Άρα, αν δείξουμε ότι η $\delta(\mathcal{C})$ είναι σ-άλγεβρα τότε $\sigma(\mathcal{C}) \subset \delta(\mathcal{C})$, εφόσον η $\sigma(\mathcal{C})$ είναι η ελάχιστη σ-άλγεβρα που περιέχει την $\mathcal{C}$. Με βάση την Πρόταση 3.5, αρκεί να δείξουμε ότι η $\delta(\mathcal{C})$ είναι κλειστή στις πεπερασμένες τομές, δηλαδή

$$A, B \in \delta(\mathcal{C}) \Rightarrow A \cap B \in \delta(\mathcal{C}). \tag{3.1}$$

Το συμπέρασμα της συνεπαγωγής το ξέρουμε για $A, B \in \mathcal{C}$, οπότε το σχέδιο είναι να την ενισχύσουμε σε δύο βήματα. Δηλαδή να δείξουμε ότι ισχύει πρώτα για $A \in \mathcal{C}, B \in \delta(\mathcal{C})$ και έπειτα για $A \in \delta(\mathcal{C}), B \in \delta(\mathcal{C})$.

Για κάθε $A \subset X$ θέτουμε

$$\mathcal{D}(A) = \{U \in \delta(\mathcal{C}) : A \cap U \in \delta(\mathcal{C})\}.$$

Αυτό το σύνολο περιέχει τα σύνολα που “τέμνονται ωραία” με το A.

Βήμα 1. Για $A \in \mathcal{C}$, έχουμε

- $\mathcal{C} \subset \mathcal{D}(A)$ εφόσον η $\mathcal{C}$ είναι κλειστή στις πεπερασμένες τομές.
- Η $\mathcal{D}(A)$ είναι κλάση Dynkin (αφήνεται ως άσκηση).

Άρα $\mathcal{D}(A) \supset \delta(\mathcal{C})$, εφόσον η $\delta(\mathcal{C})$ είναι η ελάχιστη κλάση Dynkin που περιέχει την $\mathcal{C}$. Όμως $\mathcal{D}(A) \subset \delta(\mathcal{C})$ από τον ορισμό της $\mathcal{D}(A)$. Τελικά $\mathcal{D}(A) = \delta(\mathcal{C})$, που σημαίνει ότι

$$A \in \mathcal{C}, B \in \delta(\mathcal{C}) \Rightarrow A \cap B \in \delta(\mathcal{C}). \tag{3.2}$$

Βήμα 2. Για $B \in \delta(\mathcal{C})$, έχουμε

- $\mathcal{C} \subset \mathcal{D}(B)$ από την (3.2).
- Η $\mathcal{D}(B)$ είναι κλάση Dynkin (αφήνεται ως άσκηση).

Άρα, όπως στο Βήμα 1, έχουμε ότι $\mathcal{D}(B) = \delta(\mathcal{C})$, δηλαδή ισχύει η (3.1), και το θεώρημα αποδείχθηκε. ■

Μία σημαντική συνέπεια του Θεωρήματος π-λ είναι το ακόλουθο αποτέλεσμα.

Πόρισμα 3.7 *Έστω X σύνολο, $\mathcal{A} \subset \mathscr{P}(X)$, σ-άλγεβρα, και μ, ν πεπερασμένα μέτρα στον $(X, \mathcal{A})$, με $\mu(X) = \nu(X)$, τα οποία συμφωνούν σε μία οικογένεια $\mathcal{C} \subset \mathcal{A}$, κλειστή στις πεπερασμένες τομές.*

Αν $\sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{A}$, τότε $\mu = \nu$ στην $\mathcal{A}$.

Απόδειξη Έστω $\mathcal{B} = \{A \in \mathcal{A} : \mu(A) = \nu(A)\}$. Τότε,

- $\mathcal{C} \subset \mathcal{B} \subset \sigma(\mathcal{C})$.
- Η $\mathcal{B}$ είναι κλάση Dynkin.

Πράγματι, ο πρώτος ισχυρισμός είναι προφανής και για τον δεύτερο έχουμε,

(i). $X \in \mathcal{B}$ από υπόθεση.
(ii). Αν $A, B \in \mathcal{B}$, $A \subset B$, τότε $\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A) = \nu(B) - \nu(A) = \nu(B \setminus A)$.
(iii). Αν $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ αύξουσα ακολουθία στην $\mathcal{B}$, τότε

$$\mu\left(\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \lim_{n\to\infty} \nu(A_n) = \nu\left(\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right).$$

Άρα $\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{B}$.

Εφόσον η $\mathcal{B}$ είναι κλάση Dynkin, έχουμε ότι $\delta(\mathcal{C}) \subset \mathcal{B}$. Όμως, από το Θεώρημα Μονότονης Κλάσης, $\delta(\mathcal{C}) = \sigma(\mathcal{C})$, και τελικά $\mathcal{B} = \sigma(\mathcal{B}) = \mathcal{A}$, από το οποίο προκύπτει το ζητούμενο. ■

Ασκήσεις

3.1 Έστω $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ χώρος πιθανότητας, και $U \in \mathcal{A}$ δεδομένο. Θέτουμε

$$\mathcal{C} := \{A \in \mathcal{A} : \mathbf{P}(A \cap U) = \mathbf{P}(A)\,\mathbf{P}(U)\}.$$

Να δειχθεί ότι η $\mathcal{C}$ είναι κλάση Dynkin.

3.2 Έστω $\Omega := \{1, 2, 3, 4\}$ και

$$\mathcal{A} := \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{1, 4\}, \{1, 2, 3, 4\}, \emptyset\}.$$

Να δειχθεί ότι η $\mathcal{A}$ είναι κλάση Dynkin αλλά δεν είναι σ-άλγεβρα στο Ω.

4

Κατασκευή μέτρων πιθανότητας

4.1 Μέτρα πιθανότητας σε αριθμήσιμο δειγματικό χώρο

Στην παράγραφο αυτή θα μιλήσουμε για μέτρα πιθανότητας σε αριθμήσιμο δειγματικό χώρο, που αποτελούν την απλούστερη μορφή μέτρων πιθανότητας και δεν απαιτούν χρήση εξειδικευμένων εργαλείων.

Αν Ω αριθμήσιμο σύνολο, στο Παράδειγμα 2.6 είδαμε πώς μπορούμε να ορίσουμε ένα τέτοιο μέτρο με την χρήση μίας κατάλληλης συνάρτησης $f : \Omega \to [0, \infty)$. Η σ-άλγεβρα που επιλέξαμε ήταν η $\mathcal{F} = \mathscr{P}(\Omega)$. Αυτό προκύπτει φυσιολογικά δεδομένου ότι ζητάμε $\{\omega\} \in \mathcal{A}$ για κάθε $\omega \in \Omega$, συνεπώς αναγκαστικά $\mathcal{F} = \mathscr{P}(\Omega)$ εφόσον κάθε $A \subset \Omega$ γράφεται ως αριθμήσιμη ένωση στοιχείων της $\mathcal{F}$, δηλαδή $A = \cup_{\omega \in A}\{\omega\}$.

Θεώρημα 4.1 *Έστω Ω αριθμήσιμο σύνολο και $\mathcal{F} = \mathscr{P}(\Omega)$. Τότε*

(i). Ένα μέτρο πιθανότητας $\mathbf{P}$ στον $(\Omega, \mathcal{F})$ καθορίζεται πλήρως από τις τιμές $p_\omega = \mathbf{P}(\{\omega\})$, $\omega \in \Omega$.

(ii). Έστω $(q_\omega)_{\omega\in\Omega}$ ακολουθία αριθμών στο $\mathbb{R}$.
Υπάρχει μέτρο πιθανότητας $\mathbf{P}$ στον $(\Omega, \mathcal{F})$ με $\mathbf{P}(\{\omega\}) = q_\omega$, για κάθε $\omega \in \Omega$ αν και μόνο αν $q_\omega \geq 0$ για κάθε $\omega \in \Omega$ και $\displaystyle\sum_{\omega\in\Omega} q_\omega = 1$.

Απόδειξη (i). Έστω $A \subset \Omega$. Τότε $A = \cup_{\omega \in A}\{\omega\}$, και εφόσον Ω αριθμήσιμο,

$$\mathbf{P}(A) = \sum_{\omega\in A} \mathbf{P}(\{\omega\}) = \sum_{\omega\in A} p_\omega.$$

(ii). $\Rightarrow$ Ισχύει ότι $q_\omega = \mathbf{P}(\{\omega\})$, άρα $q_\omega \geq 0$ εφόσον $\mathbf{P}$ μέτρο στο Ω. Επίσης,

$$\sum_{\omega\in\Omega} q_\omega = \sum_{\omega\in\omega} \mathbf{P}(\{\omega\}) = \mathbf{P}(\cup_{\omega\in\Omega}\{\omega\}) = \mathbf{P}(\Omega) = 1,$$

εφόσον $\mathbf{P}$ μέτρο πιθανότητας στο Ω.
$\Leftarrow$ Προκύπτει από το Παράδειγμα 2.6.

■

Παράδειγμα 4.2 (Κατανομή Poisson) Έστω $\Omega = \mathbb{N}$ και $\lambda > 0$. Για κάθε $k \in \mathbb{N}$ έστω $p_k = \mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$. Η $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ικανοποιεί της απαιτήσεις του Θεωρήματος 4.1. Πράγματι, $p_k > 0$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$ και $\displaystyle\sum_{k\in\mathbb{N}} \mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} = 1$. Συνεπώς ορίζεται μέτρο πιθανότητας $\mathbf{P}$ στον $(\mathbb{N}, \mathscr{P}(\mathbb{N}))$ έτσι ώστε $\mathbf{P}(\{k\}) = p_k$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Το μέτρο αυτό λέγεται κατανομή **Poisson**.

Ορισμός 4.3 Έστω Ω πεπερασμένο σύνολο. Ένα μέτρο πιθανότητας $\mathbf{P}$ στον $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega))$ λέγεται ομοιόμορφο αν υπάρχει $a > 0$ έτσι ώστε $\mathbf{P}(\{\omega\}) = a$ για κάθε $\omega \in \Omega$, δηλαδή το $\mathbf{P}$ δίνει την ίδια μάζα σε κάθε $\omega \in \Omega$.

Παρατήρηση 4.4 Από τον Ορισμό 4.3 συμπεραίνουμε ότι

$$\mathbf{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} \quad \forall A \subset \Omega.$$

Πράγματι, εφόσον το $\mathbf{P}$ είναι μέτρο πιθανότητας,

$$1 = \sum_{\omega \in \Omega} \mathbf{P}(\{\omega\}) = \sum_{\omega \in \Omega} a = a|\Omega|.$$

Άρα $a = 1/|\Omega|$. Όμως $\mathbf{P}(A) = \sum_{\omega \in \Omega} \mathbf{P}(\{\omega\}) = \sum_{\omega \in \Omega} a = a|A|$, από το οποίο προκύπτει το ζητούμενο.

Τα ομοιόμορφα μέτρα μοντελοποιούν πειράματα που έχουν "ισοπίθανα"αποτελέσματα.

Παράδειγμα 4.5 Θεωρούμε το πείραμα ρίψης ενός αμερόληπτου ζαριού. Τότε $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ και $\mathcal{A} = \mathscr{P}(\Omega)$. Το κατάλληλο μέτρο που μοντελοποιεί το πείραμα είναι το $\mathbf{P}$ με $\mathbf{P}(\{\omega\}) = 1/6$ για κάθε $\omega \in \Omega$. Δηλαδή το το ομοιόμορφο μέτρο πιθανότητας στον $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega))$.

Παράδειγμα 4.6 (Υπεργεωμετρική κατανομή) Μία κάλπη περιέχει N άσπρα και M μαύρα αριθμημένα σφαιρίδια, $(1, 2, \ldots, N)$ και $(N+1, N+2, \ldots, N+M)$ αντίστοιχα. Επιλέγουμε n από αυτά χωρίς επανάθεση, όπου $1 \leq n \leq N + M$. Τότε ο δειγματικός μας χώρος είναι,

$$\Omega = \big\{A \subset \{1, 2, \ldots, N + M\} : |A| = n\big\},$$

και κάθε στοιχείο του Ω είναι μία δυνατή εξαγωγή. Για τον πληθάριθμο του Ω έχουμε

$$|\Omega| = \binom{N + M}{n}.$$

Για λόγους συμμετρίας, όλα τα ενδεχόμενα είναι ισοπίθανα.

Το ομοιόμορφο μέτρο πιθανότητας $\mathbf{P}$ που ορίζεται στον $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega))$ έχει $\mathbf{P}(A) = \frac{|A|}{\binom{N+M}{n}}$, για κάθε $A \subset \Omega$. Έστω τώρα $k \in \{1, 2, \ldots, N\}$ και $D = \{A \subset \Omega : A$ έχει k άσπρα σφαιρίδια$\}$. Τότε

$$\mathbf{P}(D) = \frac{|D|}{\binom{N+M}{n}} = \frac{\binom{N}{k}\binom{M}{n-k}}{\binom{N+M}{n}}.$$

4.2 Επεκτάσεις μέτρων

Στην περίπτωση ενός αριθμήσιμου δειγματικού χώρου, όπως έχουμε δεί, είναι εύκολο να περιγράψουμε και να κατασκευάσουμε όλα τα μέτρα πιθανότητας. Όταν ο χώρος είναι υπεραριθμήσιμος, εκείνες οι τεχνικές κατασκευής δεν αρκούν. Τώρα, αυτό που θα κάνουμε είναι να ορίζουμε με κάποιο τρόπο ένα μέτρο σε μία άλγεβρα, και μετά αυτό θα επεκτείνεται "φυσιολογικά"σε μία σ-άλγεβρα. Θα μας χρειαστεί ο εξής ορισμός.

Ορισμός 4.7 Έστω Ω σύνολο, και $\mathcal{F}_0$ άλγεβρα στο Ω. Μία συνάρτηση $\mathbf{P} : \mathcal{F}_0 \to [0, 1]$ λέγεται μέτρο πιθανότητας στην $\mathcal{F}_0$ αν

(i). $\mathbf{P}(\Omega) = 1$.

(ii). Για κάθε ακολουθία $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ξένων ανά δύο στοιχείων στην $\mathcal{F}_0$ με $\cup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{F}_0$ έχουμε ότι

$$\mathbf{P}\left(\cup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbf{P}(A_n).$$

Θεώρημα 4.8 (Επέκτασης Καραθεοδωρή) *Έστω Ω σύνολο και $\mathcal{F}_0$ άλγεβρα στο Ω. Αν $\mathbf{P}$ μέτρο πιθανότητας στην $\mathcal{F}_0$ τότε υπάρχει μοναδικό μέτρο πιθανότητας $\widetilde{\mathbf{P}}$ στην $\sigma(\mathcal{F}_0)$ έτσι ώστε $\widetilde{\mathbf{P}}\big|_{\mathcal{F}_0} = \mathbf{P}$.*

Απόδειξη Θα αποδείξουμε μόνο τη μοναδικότητα. Την απόδειξη της ύπαρξης μπορεί να βρεί ο αναγνώστης σε βιβλία θεωρίας μέτρου ή μετροθεωρητικών πιθανοτήτων (για παράδειγμα, Άσκηση 3.12 στο Κουμουλλής και Νεγρεπόντης (1991), ή Παράρτημα A1 στο Durrett (2010)).

Έστω $\mathbf{P}, \mathbf{Q}$ μέτρα πιθανότητας στην $\sigma(\mathcal{F}_0)$ που συμφωνούν στην $\mathcal{F}_0$. Τότε, από το Πόρισμα 3.7, αφού η $\mathcal{F}_0$ είναι κλειστή στις πεπερασμένες τομές, έχουμε ότι τα $\mathbf{P}$ και $\mathbf{Q}$ συμφωνούν στην $\sigma(\mathcal{F}_0)$. ∎

4.3 Κατασκευή μέτρων πιθανότητας στο $\mathbb{R}$

Στην παράγραφο αυτή θα μιλήσουμε για μέτρα πιθανότητας στον $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$. Αυτά τα μέτρα τα λέμε και *κατανομές* στο $\mathbb{R}$.

Ορισμός 4.9 Έστω $\mathbf{P}$ μέτρο πιθανότητας στον $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$. Συνάρτηση κατανομής του $\mathbf{P}$ λέγεται η συνάρτηση $\mathbf{F} : \mathbb{R} \to [0, 1]$ με

$$\mathbf{F}(x) = \mathbf{P}\left((-\infty, x]\right), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Δηλαδή, η $\mathbf{F}(x)$ μετράει τη μάζα που δείνει το μέτρο στην ημιευθεία $(-\infty, x]$.
Παρακάτω χρησιμοποιούνται οι εξής συμβολισμοί:

$$\mathbf{F}(x_0+) = \lim_{x\to x_0^+} \mathbf{F}(x) \text{ και } \mathbf{F}(x_0-) = \lim_{x\to x_0^-} \mathbf{F}(x), \quad x_0 \in \mathbb{R}.$$

Πρόταση 4.10 *Έστω $\mathbf{P}$ μέτρο πιθανότητας στον $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$ και $\boldsymbol{F}$ η συνάρτηση κατανομής του $\mathbf{P}$. Τότε:*

(i). *Η $\boldsymbol{F}$ είναι αύξουσα συνάρτηση.*
(ii). $\lim_{x\to-\infty} \boldsymbol{F}(x) = 0$ *και* $\lim_{x\to\infty} \boldsymbol{F}(x) = 1$.
(iii). $\mathbf{P}\left((x, y]\right) = \boldsymbol{F}(y) - \boldsymbol{F}(x)$, *για κάθε* $-\infty \le x \le y \le \infty$ *με τις συμβάσεις* $(x, \infty] = (x, \infty)$ *και* $(x, x] = \emptyset$.

Απόδειξη (i). Έστω $x \le y$. Τότε,

$$\mathbf{F}(y) - \mathbf{F}(x) = \mathbf{P}\left((-\infty, y]\right) - \mathbf{P}\left((-\infty, x]\right) = \mathbf{P}\left((-\infty, y] \setminus (-\infty, x]\right) = \mathbf{P}\left((x, y]\right) \ge 0.$$

(ii). Επειδή η $\mathbf{F}$ είναι αύξουσα, τα όρια υπάρχουν, και

$$\lim_{x\to-\infty} \mathbf{F}(x) = \lim_{n\to\infty} \mathbf{F}(-n) = \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left((-\infty, -n]\right) = \mathbf{P}\left(\cap_{n\in\mathbb{N}} (-\infty, -n]\right) = \mathbf{P}(\emptyset) = 0,$$

ενώ,

$$\lim_{x\to\infty} \mathbf{F}(x) = \lim_{n\to\infty} \mathbf{F}(n) = \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}((-\infty, n]) = \mathbf{P}\left(\cup_{n\in\mathbb{N}} (-\infty, n]\right) = \mathbf{P}(\mathbb{R}) = 1.$$

(iii). Για $x, y \in \mathbb{R}$ το είδαμε στην απόδειξη του *(i)*. Οι υπόλοιπες περιπτώσεις αφήνονται ως άσκηση.

∎

Θεώρημα 4.11 *Έστω $\mathbf{P}$, $\boldsymbol{Q}$ μέτρα πιθανότητας στον $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$ με την ίδια συνάρτηση κατανομής. Τότε $\mathbf{P} = \boldsymbol{Q}$.*

Απόδειξη Έστω $\mathcal{C} = \{(-\infty, x] : x \in \mathbb{R}\}$. Τότε τα $\mathbf{P}, \mathbf{Q}$ ταυτίζονται στην $\mathcal{C}$ εφόσον έχουν την ίδια συνάρτηση κατανομής. Όμως η $\mathcal{C}$ είναι κλειστή στις πεπερασμένες τομές, και γνωρίζουμε ότι $\sigma(\mathcal{C}) = \mathscr{B}(\mathbb{R})$. Από το Πόρισμα 3.7 έχουμε ότι τα $\mathbf{P}, \mathbf{Q}$ ταυτίζονται στην $\mathscr{B}(\mathbb{R})$. ■

Παρατήρηση 4.12 Αν ξέρουμε τη συνάρτηση κατανομής $\mathbf{F}$ ενός μέτρου πιθανότητας $\mathbf{P}$, τότε γνωρίζουμε τη συμπεριφορά του σε σύνολα που προκύπτουν από διαστήματα της μορφής $(x, y]$ με συνήθεις συνολοθεωρητικές πράξεις χρησιμοποιώντας την $\mathbf{P}\left((x, y]\right) = \mathbf{F}(y) - \mathbf{F}(x)$.

Όταν έχουμε ένα μέτρο πιθανότητας $\mathbf{P}$ στον $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$ είναι εύκολο να βρούμε τη συνάρτηση κατανομής του. Πότε όμως μία συνάρτηση $\mathbf{F} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ορίζει μέτρο πιθανότητας στον $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$; Η απάντηση δίνεται στο επόμενο θεώρημα.

Θεώρημα 4.13 *Μία συνάρτηση $\boldsymbol{F} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι συνάρτηση κατανομής ενός μέτρου πιθανότητας $\mathbf{P}$ στον $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$ αν και μόνο αν ισχύουν τα εξής:*

(i). *Η $\boldsymbol{F}$ είναι αύξουσα.*
(ii). *Η $\boldsymbol{F}$ είναι δεξιά συνεχής.*
(iii). $\boldsymbol{F}(-\infty) = 0$ *και* $\boldsymbol{F}(\infty) = 1$
όπου $\boldsymbol{F}(-\infty) = \lim\limits_{x \to -\infty} \boldsymbol{F}(x)$ *και* $\boldsymbol{F}(\infty) = \lim\limits_{x \to \infty} \boldsymbol{F}(x)$.

Απόδειξη "$\Rightarrow$" Τα (i) και (iii) τα είδαμε στην Πρόταση 4.10. Για το (ii), έστω $x_0 \in \mathbb{R}$. Επειδή $\mathbf{F}$ αύξουσα το $\lim\limits_{x \to x_0^+} \mathbf{F}(x)$ υπάρχει, και έχουμε

$$\mathbf{F}(x_0+) = \lim_{n\to\infty} \mathbf{F}\left(x_0 + \frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left(\left(-\infty, x_0 + \frac{1}{n}\right]\right) = \mathbf{P}\left(\cap_{n\in\mathbb{N}}(-\infty, x_0 + \frac{1}{n}]\right) = \mathbf{P}\left((-\infty, x_0]\right) = \mathbf{F}(x_0).$$

"$\Leftarrow$" Έστω $\mathbf{F}$ που ικανοποιεί τα (i), (ii) και (iii). Θέτουμε

$\mathcal{B}_0 = \{A \subset \mathbb{R} : A$ πεπερασμένη ένωση ξένων ανά δύο διαστημάτων της μορφής $(x, y]$ με $-\infty \le x \le y \le \infty\}$,

πάλι με τις συμβάσεις $(x, \infty] = (x, \infty)$ και $(x, x] = \emptyset$, $x \in \mathbb{R}$. Για $A \in \mathcal{B}_0$ έχουμε ότι

$$A = \cup_{i=1}^{n}(x_i, y_i], \text{ για κάποιο } n \in \mathbb{N},$$

και τα στοιχεία της ένωσης είναι ξένα ανά δύο. Ορίζουμε,

$$\mathbf{P}(A) = \sum_{i=1}^{n} \{\mathbf{F}(y_i) - \mathbf{F}(x_i)\}.$$

Εύκολα ελέγχει κανείς ότι η $\mathcal{B}_0$ είναι άλγεβρα και ότι $\sigma(\mathcal{B}_0) = \mathscr{B}(\mathbb{R})$. Επίσης, ισχύει ότι το $\mathbf{P}$ είναι μέτρο πιθανότητας στην άλγεβρα $\mathcal{B}_0$ (η απόδειξη του ισχυρισμού αυτού είναι απαιτιτική και για τον λόγο αυτό παραλείπεται). Από το Θεώρημα 4.8 υπάρχει μοναδική επέκταση του $\mathbf{P}$ στην $\sigma(\mathcal{B}_0) = \mathscr{B}(\mathbb{R})$. Η συνάρτηση κατανομής της επέκτασης του $\mathbf{P}$ είναι η $\mathbf{F}$. ■

Πόρισμα 4.14 *Έστω $\boldsymbol{F}$ συνάρτηση κατανομής ενός μέτρου $\mathbf{P}$ στον $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$. Για $x, y \in \mathbb{R}$ έχουμε τα εξής:*

(i). $\mathbf{P}\left((x, y]\right) = \boldsymbol{F}(y) - \boldsymbol{F}(x)$.
(ii). $\mathbf{P}\left(\{x\}\right) = \boldsymbol{F}(x) - \boldsymbol{F}(x-)$.
(iii). $\mathbf{P}\left([x, y]\right) = \boldsymbol{F}(y) - \boldsymbol{F}(x-)$.
(iv). $\mathbf{P}\left([x, y)\right) = \boldsymbol{F}(y-) - \boldsymbol{F}(x-)$.

(v). $\mathbf{P}\left((x,y)\right) = \boldsymbol{F}(y-) - \boldsymbol{F}(x)$.

Απόδειξη Το (i) το έχουμε δεί. Για το (ii), έχουμε

$$\mathbf{P}(\{x\}) = \mathbf{P}\left(\cap_{n\in\mathbb{N}}\left(x-\frac{1}{n},x\right]\right) = \lim_{n\to\infty}\mathbf{P}\left(\left(x-\frac{1}{n},x\right]\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\mathbf{F}(y)-\mathbf{F}\left(x-\frac{1}{n}\right)\right) \overset{(i)}{=} \left(\mathbf{F}(y)-\mathbf{F}(x-)\right).$$

Για το (iii),

$$\mathbf{P}\left([x,y]\right) = \mathbf{P}\left(\{x\}\right) + \mathbf{P}\left((x,y]\right) \overset{(i),(ii)}{=} \mathbf{F}(x) - \mathbf{F}(x-) + \mathbf{F}(y) - \mathbf{F}(x) = \mathbf{F}(y) - \mathbf{F}(x-).$$

Τα (iv) και (v) προκύπτουν με τον ίδιο τρόπο. ■

Παρατήρηση 4.15 Έστω $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \ldots, \mathbf{P}_n$, $n \in \mathbb{N}$, μέτρα πιθανότητας στον $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$ και $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ θετικοί αριθμοί με $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$. Εύκολα βλέπει κανείς ότι το $\mathbf{Q} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mathbf{P}_i$ είναι μέτρο στον $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$. Το $\mathbf{Q}$ είναι ο κυρτός συνδυασμός των μέτρων $\mathbf{P}_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Παράδειγμα 4.16 Έστω $x_0 \in \mathbb{R}$ και δ_{x_0} το μέτρο Dirac στην $\mathscr{P}(\mathbb{R})$ στο x_0. Η συνάρτηση κατανομής του δ_{x_0} είναι η

$$\mathbf{F}(x) = \begin{cases} 0 & \text{αν } x < x_0 \\ 1 & \text{αν } x \geq x_0 \end{cases}.$$

Παρατηρούμε ότι $\delta_{x_0}(\{x_0\}) = 1 = \mathbf{F}(x_0) - \mathbf{F}(x_0-)$.

Παράδειγμα 4.17 (Διακριτό μέτρο πιθανότητας) Έστω $S \subset \mathbb{R}$ αριθμήσιμο και $(a_i)_{i\in S}$ ακολουθία θετικών αριθμών έτσι ώστε $\sum_{i\in S} a_i = 1$. Ορίζουμε $\mathbf{P}(A) = \sum_{i\in S} a_i \mathbf{1}_{i\in A}$. Το $\mathbf{P}$ είναι μέτρο πιθανότητας στην $\mathscr{P}(\mathbb{R})$ (Άσκηση). Για τη συνάρτηση κατανομής του $\mathbf{P}$ έχουμε

$$\mathbf{F}(\{x\}) - \mathbf{F}(\{x-\}) = \mathbf{P}(\{x\}) = \begin{cases} a_x & \text{αν } x \in S, \\ 0 & \text{αν } x \in \mathbb{R} \setminus S. \end{cases}$$

Δηλαδή, η $\mathbf{F}$ είναι ασυνεχής ακριβώς στα σημεία του S.

Παράδειγμα 4.18 (Μέτρο πιθανότητας από πυκνότητα) Έστω $f : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ συνάρτηση ώστε το γενικευμένο ολοκλήρωμα Riemann $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ να ορίζεται, και να ισούται με 1. Θεωρούμε την συνάρτηση $\mathbf{F} : \mathbb{R} \to [0, 1]$ με

$$\mathbf{F}(x) := \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Η $\mathbf{F}$ έχει τις ιδιότητες (i), (ii), (iii) του Θεωρήματος 4.13 (μάλιστα, η $\mathbf{F}$ είναι συνεχής), άρα υπάρχει μέτρο πιθανότητας που έχει συνάρτηση κατανομής την $\mathbf{F}$. Για $A \subset \mathbb{R}$ που είναι αριθμήσιμη ένωση διαστημάτων μπορούμε να δούμε ότι ισχύει

$$\mathbf{P}(A) = \int_A f(x)\,dx.$$

Η f λέγεται *πυκνότητα* του $\mathbf{P}$. Για συγκεκριμένες επιλογές της συνάρτησης f, παίρνουμε γνωστές κατανομές. Π. χ., για $f(x) := e^{-x}\mathbf{1}_{x>0}$, παίρνουμε την εκθετική κατανομή με παράμετρο 1.

Παρατήρηση 4.19 Δεν προκύπτουν όλα τα μέτρα πιθανότητας στο $\mathbb{R}$ από πυκνότητες. Στα Παραδείγματα 4.16 και 4.17 οι συναρτήσεις κατανομής των δύο μέτρων έχουν σημεία ασυνέχειας.

Ασκήσεις

4.1 Έστω $\mathbf{P}$ μέτρο πιθανότητας στο $\mathbb{R}$, και $\mathbf{F}$ η συνάρτηση κατανομής του $\mathbf{P}$. Να δείξετε ότι η $\mathbf{F}$ μπορεί να έχει αριθμήσιμο πλήθος άλματα.

4.2 Έστω $\mathbf{P}_1$ κατανομή στο $\mathbb{R}$, με πυκνότητα $f(x) = e^{-x}\mathbf{1}_{x>0}$, και $\mathbf{P}_2$ κατανομή στο $\mathbb{R}$ που δίνει μάζα $\frac{1}{2}$ στα $-2, 3$. Για $\lambda \in (0,1)$, και θεωρώντας τον κυρτό συνδυασμό $\mathbf{P} = \lambda\,\mathbf{P}_1 + (1-\lambda)\,\mathbf{P}_2$ των $\mathbf{P}_1$ και $\mathbf{P}_2$, να υπολογιστούν

(α) η $\mathbf{P}\big((0,4)\big)$,

(β) η συνάρτηση κατανομής του $\mathbf{P}$.

5

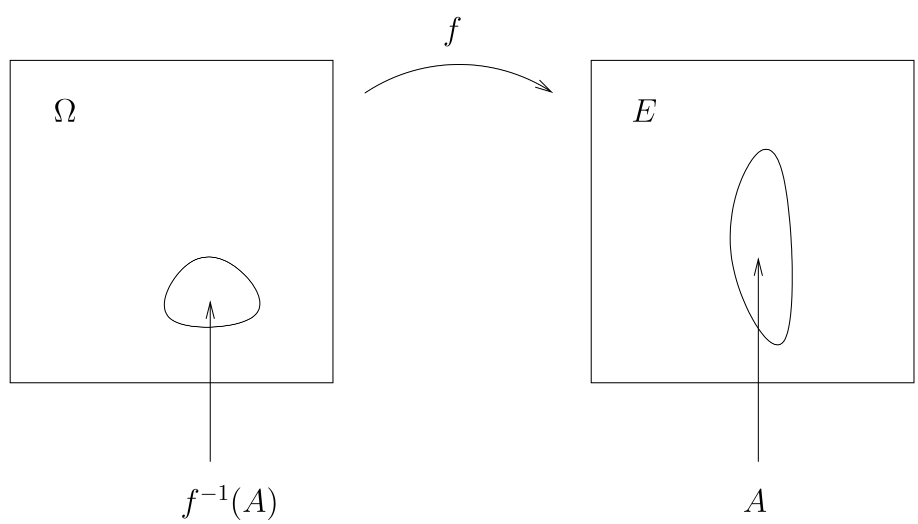
Μετρήσιμες συναρτήσεις

5.1 Μετρήσιμες συναρτήσεις

Ορισμός 5.1 Έστω $(\Omega, \mathcal{F})$, $(E, \mathcal{E})$ μετρήσιμοι χώροι. Μία συνάρτηση $f : \Omega \to E$ λέγεται $\mathcal{F}/\mathcal{E}$-**μετρήσιμη** αν

$$f^{-1}(A) \in \mathcal{F} \quad \text{για κάθε } A \in \mathcal{E}. \tag{5.1}$$

Το σύνολο $\{f^{-1}(A) : A \in \mathcal{E}\}$ το συμβολίζουμε με $f^{-1}(\mathcal{E})$. Οπότε η απαίτηση του ορισμού της μετρησιμότητας γράφεται $f^{-1}(\mathcal{E}) \subset \mathcal{F}$.



Σχήμα 5.1 Μία f όπως στον Ορισμό 5.1

Ορολογία: 1. Μία $\mathcal{F}/\mathcal{E}$-μετρήσιμη την λέμε $\mathcal{F}$-μετρήσιμη ή $\mathcal{E}$-μετρήσιμη ή απλώς μετρήσιμη αν είναι σαφές ποιά είναι η σ-άλγεβρα που δεν αναφέρουμε.

2. Όταν ο χώρος Ω ή/και ο E είναι τοπολογικός χώρος (π.χ. υποσύνολο ενός από τους χώρους $\mathbb{R}^d$ $[-\infty, \infty]$, $[0, \infty]$, $\mathbb{C}$), εκτός αν αναφέρουμε κάτι διαφορετικό, θα θεωρούμε ότι η σ-άλγεβρα στον Ω και στον E είναι αυτή των Borel υποσυνόλων του Ω και του E. Και τότε π.χ. $\mathcal{F}$-μετρήσιμη σημαίνει $\mathcal{F}/\mathscr{B}(E)$ μετρήσιμη. Στην περίπτωση που ο Ω (αντίστοιχα, ο E) είναι τοπολογικός χώρος και η $\mathcal{E}$ (αντίστοιχα, η $\mathcal{F}$) εννοείται, ονομάζουμε Borel-μετρήσιμη μία f η οποία είναι $\mathscr{B}(\Omega)/\mathcal{E}$-μετρήσιμη (αντίστοιχα $\mathcal{F}/\mathscr{B}(E)$-μετρήσιμη).

3. Σε ένα χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, μιά μετρήσιμη συνάρτηση τη λέμε **τυχαία μεταβλητή**. Συμβο-

λίζουμε τις τυχαίες μεταβλητές με κεφαλαία γράμματα $X, Y, \ldots$, σε αντίθεση με την σύμβαση που χρησιμοποιούμε στον απειροστικό λογισμό και την πραγματική ανάλυση,

Για το σύνολο $f^{-1}(A) := \{\omega \in \Omega : f(\omega) \in A\}$, συνήθως χρησιμοποιούμε το συμβολισμό $\{f \in A\}$. Όμοια, αν $E = \mathbb{R}$, το $\{f < a\}$ συμβολίζει το σύνολο $\{\omega \in \Omega : f(\omega) < a\}$, και $\{f^2 < f + 1\}$ το $\{\omega \in \Omega : f^2(\omega) < f(\omega) + 1\}$.

Παρατήρηση 5.2 Γιατί απαιτούμε από μία συνάρτηση $X : \Omega \to E$ να έχει την ιδιότητα (5.1); Γιατί όταν ορίσουμε ένα μέτρο πιθανότητας $\mathbf{P}$ στην $\mathcal{F}$, θέλουμε να μπορούμε να μιλάμε για πιθανότητες της μορφής $\mathbf{P}(X \in A)$, όπου $A \in \mathcal{E}$, δηλαδή $\mathbf{P}\left(X^{-1}(A)\right)$. Πρέπει επομένως το $X^{-1}(A)$ να ανήκει στο πεδίο ορισμού της $\mathbf{P}$, το οποίο είναι η $\mathcal{F}$.

Θεώρημα 5.3 *Έστω $(\Omega, \mathcal{F}), (E, \mathcal{E})$ μετρήσιμοι χώροι, $f : \Omega \to E$ συνάρτηση, και $\mathcal{C} \subset \mathcal{E}$ οικογένεια ώστε $\sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{E}$. Τότε $f^{-1}(\mathcal{C}) \subset \mathcal{F}$ αν και μόνο αν $f^{-1}(\mathcal{E}) \subset \mathcal{F}$.*

Απόδειξη $\Rightarrow$ Έστω $\mathcal{B} = \{A \in \mathcal{E} : f^{-1}(A) \in \mathcal{F}\}$. Τότε η $\mathcal{C} \subset \mathcal{B}$ και εύκολα βλέπουμε ότι η $\mathcal{B}$ είναι σ-άλγεβρα (Άσκηση 1.7). Συνεπώς, $\sigma(\mathcal{C}) \subset \mathcal{B}$. Όμως $\sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{E}$ και $\mathcal{B} \subset \mathcal{E}$. Άρα $\mathcal{B} = \mathcal{E}$.

$\Leftarrow$ Προφανές αφού $\mathcal{C} \subset \mathcal{E}$. ■

Πόρισμα 5.4 *Έστω $f : (\Omega, \mathcal{F}) \to (\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$ συνάρτηση. Τότε η f είναι μετρήσιμη αν και μόνο αν $f^{-1}\big((-\infty, a]\big) \in \mathcal{F}$ για κάθε $a \in \mathbb{R}$.*

Απόδειξη Αν $\mathcal{C} = \{(-\infty, a] : a \in \mathbb{R}\}$, γνωρίζουμε ότι $\sigma(\mathcal{C}) = \mathscr{B}(\mathbb{R})$. Άρα, από το Θεώρημα 5.3, προκύπτει το ζητούμενο. ■

Το ίδιο αποτέλεσμα ισχύει αν αντικαταστήσουμε τα διαστήματα $(-\infty, a]$ με $(-\infty, a)$ ή γενικά από οποιαδήποτε οικογένεια διαστημάτων που παράγουν την $\mathscr{B}(\mathbb{R})$. Επίσης, αντίστοιχο συμπέρασμα προκύπτει αν έχουμε μετρήσιμη συνάρτηση με τιμές στο $[-\infty, \infty]$.

Παράδειγμα 5.5 (Μετρήσιμες συναρτήσεις σε σ-άλγεβρα παραγόμενη απο διαμέριση) Επιστρέφοντας στο Παράδειγμα 1.15, έχουμε μιά αριθμήσιμη διαμέριση $\mathcal{C} := \{A_i : i \in I\}$ ενός συνόλου Ω, και $\mathcal{F} := \sigma(\mathcal{C})$.

Ισχυρισμος: Μιά μετρήσιμη συνάρτηση $f : \Omega \to \mathbb{R}$ πρέπει να είναι σταθερή σε κάθε σύνολο της διαμέρισης.

Πράγματι, έστω f μετρήσιμη και $i_0 \in I$. Ας υποθέσουμε ότι η f παίρνει δύο διαφορετικές τιμές $a < b$ στο A_{i_0}. Θα έπρεπε λοιπόν το σύνολο $A_{i_0} \cap \{f < b\}$ να ανήκει στην $\mathcal{F}$. Όμως, αυτό το σύνολο είναι μή κενό και γνήσιο υποσύνολο του A_{i_0}. Τέτοιο σύνολο δεν υπάρχει στην $\mathcal{F}$ (δες στο Παράδειγμα 1.15 για την περιγραφή της $\mathcal{F}$).

Επίσης, είναι εύκολο να δείξει κανείς ότι μία συνάρτηση που είναι σταθερή σε κάθε σύνολο της διαμέρισης είναι μετρήσιμη. Άρα, αυτές είναι ακριβώς όλες οι μετήσιμες συναρτήσεις στον $(\Omega, \mathcal{F})$

Παραθέτουμε χωρίς απόδειξη τις βασικές ιδιότητες κλειστότητας του συνόλου των μετρησίμων συναρτήσεων. Εν ολίγοις, έχουμε ότι αν ξεκινήσει κανείς με μετρήσιμες συναρτήσεις και τις συνδυάσει με κάποιο "φυσιολογικό"τρόπο, προκύπτουν πάλι μετρήσιμες συναρτήσεις.

Πρόταση 5.6 *Έστω f, g μετρήσιμες συναρτήσεις με τιμές στο $[-\infty, \infty]$ και $a \in \mathbb{R}$. Τότε μετρήσιμες είναι επίσης οι συναρτήσεις*

$$af, |f|, f+g, fg, f/g, \min\{f, g\}, \max\{f, g\}, f^+, f^-,$$

όπου καθεμία ορίζεται ώστε να είναι σταθερή και ίση με μία αυθαίρετη πεπερασμένη σταθερά στο σύνολο των σημείων απροσδιοριστίας ($\infty - \infty, 0 \cdot \infty, 0/0$).

Πρόταση 5.7 *Έστω $(f_n)_{n\geq 1}$ ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων. Τότε:*

(i). Οι συναρτήσεις

$$\inf_{n\geq 1} f_n, \sup_{n\geq 1} f_n, \varliminf_{n\to\infty} f_n, \varlimsup_{n\to\infty} f_n,$$

είναι επίσης μετρήσιμες.

(ii). Αν η $(f_n)_{n\geq 1}$ συγκλίνει σημειακά σε μία συνάρτηση f, τότε η $f = \lim_{n\to\infty} f_n$ είναι μετρήσιμη συνάρτηση.

Θεώρημα 5.8 *Έστω $(\Omega, \mathcal{F})$, $(E, \mathcal{E})$, $(G, \mathcal{G})$ μετρήσιμοι χώροι και $f : \Omega \to E$, $g : E \to G$ μετρήσιμες συναρτήσεις. Τότε η $g \circ f : \Omega \to G$ είναι $\mathcal{F}/\mathcal{G}$ μετρήσιμη.*

Απόδειξη Έστω $A \in \mathcal{G}$. Τότε, $\big(g\circ f\big)^{-1}(A) = f^{-1}\big(g^{-1}(A)\big)$. Όμως $g^{-1}(A) \in \mathcal{E}$, άρα $f^{-1}\big(g^{-1}(A)\big) \in \mathcal{F}$, από το οποίο προκύπτει το ζητούμενο. ∎

Υπενθυμίζουμε ότι αν $(\Omega, \mathcal{T})$, $(E, \mathcal{S})$ τοπολογικοί χώροι, μία συνάρτηση $f : X \to Y$ είναι συνεχής αν για κάθε $V \in \mathcal{S}$ έχουμε ότι $f^{-1}(V) \in \mathcal{T}$. Δηλαδή η αντίστροφη εικόνα κάθε ανοιχτού συνόλου είναι ανοιχτό σύνολο.

Θεώρημα 5.9 *Έστω $(\Omega, \mathcal{T})$, $(E, \mathcal{S})$ τοπολογικοί χώροι και $f : \Omega \to E$ συνεχής συνάρτηση. Αν $\mathcal{F} = \mathscr{B}(\Omega)$ και $\mathcal{E} = \mathscr{B}(E)$, τότε η f είναι $\mathcal{F}/\mathcal{E}$ μετρήσιμη.*

Απόδειξη Για την οικογένεια $\mathcal{S}$ έχουμε ότι $\sigma(\mathcal{S}) = \mathcal{E}$ και $f^{-1}(\mathcal{S}) \subset \mathcal{T} \subset \mathcal{F}$, διότι f συνεχής. Το συμπέρασμα έπεται από το Θεώρημα 5.3. ∎

Θεώρημα 5.10 *Έστω $(\Omega, \mathcal{F})$ μετρήσιμος χώρος. Τότε:*

(i). Για $A \subset \Omega$, η ${}_A$ είναι μετρήσιμη αν και μόνο αν $A \in \mathcal{F}$.

(ii). Αν $f_1, f_2, \ldots, f_n : \Omega \to \mathbb{R}$, $n \geq 1$ είναι $\mathcal{F}/\mathscr{B}(\mathbb{R})$ μετρήσιμες συναρτήσεις και $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ είναι $\mathscr{B}(\mathbb{R}^n)/\mathscr{B}(\mathbb{R})$ μετρήσιμη, τότε η $g(f_1, f_2, \ldots, f_n) : \Omega \to \mathbb{R}$ είναι μετρήσιμη.

Απόδειξη Θα δείξουμε μόνο το (i). Αν $B \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$, έχουμε

$$\big(\mathbf{1}_A\big)^{-1}(B) = \begin{cases} \emptyset & \text{αν} \quad 0, 1 \notin B, \\ \Omega \setminus A & \text{αν} \quad 0 \in B, 1 \notin B, \\ A & \text{αν} \quad 0 \notin B, 1 \in B, \\ \Omega & \text{αν} \quad 0, 1 \in B. \end{cases} \tag{5.2}$$

Αν η $\mathbf{1}_A$ είναι μετρήσιμη, τότε για $B = \{1\}$, έχουμε $\big(\mathbf{1}_A\big)^{-1}(B) \in \mathcal{F}$, δηλαδή $A \in \mathcal{F}$. Αντίστροφα, αν $A \in \mathcal{F}$, τότε από την (5.2) έχουμε $\big(\mathbf{1}_A\big)^{-1}(B) \in \mathcal{F}$ για κάθε $B \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$. ∎

Ορισμός 5.11 Μιά συνάρτηση $f : \Omega \to [-\infty, \infty]$ λέγεται **απλή** αν η εικόνα της είναι πεπερασμένο σύνολο.

Αν οι διαφορετικές τιμές που παίρνει μια απλή συνάρτηση είναι $a_1, a_2, \ldots, a_n$, και θέσουμε $A_i := X^{-1}\big(\{a_i\}\big)$ τότε η $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ είναι μια διαμέριση του Ω, και η f γράφεται

$$f = \sum_{i=1}^{n} a_i \mathbf{1}_{A_i}. \tag{5.3}$$

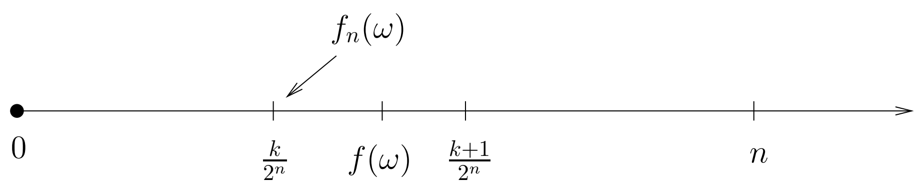
Προφανώς μία απλή f είναι μετρήσιμη αν και μόνο αν τα σύνολα $A_1, A_2, \ldots, A_n$ είναι μετρήσιμα.

Μια απλή συνάρτηση δεν γράφεται μοναδικά ως γραμμικός συνδυασμός δεικτριών. Αν τα $A_1, A_2, \ldots, A_n$ δεν είναι απαραίτητα ξένα, τότε η σχέση (5.3) ορίζει πάλι μία απλή συνάρτηση. Αν όμως ζητήσουμε τα $A_1, A_2, \ldots, A_n$ να είναι ξένα ανα δύο και οι αριθμοί $a_1, \ldots, a_n$ τότε η γραφή (5.3) είναι μοναδική (με μόνη ελευθερία στον τρόπο που αριθμούμε τα σύνολα και τους αριθμούς), και ονομάζεται *κανονική μορφή* της f.

Πρόταση 5.12 *Έστω $f : \Omega \to [0, \infty]$ μετρήσιμη συνάρτηση. Τότε υπάρχει μια αύξουσα ακολουθία*[1] *$(f_n)_{n\geq 1}$ μη αρνητικών, απλών, μετρησίμων συναρτήσεων με πεπερασμένες τιμές ώστε $f = \lim_{n\to\infty} f_n$ κατά σημείο.*

Απόδειξη Για $n \geq 1$, θέτουμε

$$f_n(\omega) := \begin{cases} \frac{k}{2^n} & \text{αν } f(\omega) \in \left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right) \text{ με } k \in \mathbb{N},\ 0 \leq k \leq n2^n - 1, \\ n & \text{αν } f(\omega) \geq n. \end{cases}$$



Σχήμα 5.2 Ο ορισμός της προσέγγισης f_n. Όλες οι τιμές πάνω από n απεικονίζονται στο n. Στο διάστημα $[0, n]$ η προσέγγιση γίνεται με λάθος το πολύ $1/2^n$.

Κάθε f_n είναι μη αρνητική, μετρήσιμη, και απλή αφού το σύνολο τιμών της είναι πεπερασμένο, και παίρνει την τιμή $k/2^n$, όπου $0 \leq k \leq n2^n - 1$, στο μετρήσιμο σύνολο $f^{-1}([k2^{-n}, (k+1)2^{-n}))$, και την τιμή n στο $f^{-1}([n, \infty])$.

Τώρα, αν $f(\omega) < \infty$, έχουμε $f_n(\omega) \leq f(\omega) \leq f_n(\omega) + 2^{-n}$, άρα $|f_n(\omega) - f(\omega)| < 2^{-n}$ και $\lim_{n\to\infty} f_n(\omega) = f(\omega)$. Αν $f(\omega) = \infty$, τότε $f_n(\omega) = n \to \infty$ για $n \to \infty$.

Για το ότι η ακολουθία είναι αύξουσα, παρατηρούμε τα εξής:

- Αν $f(\omega) = \infty$, τότε $f_n(\omega) = n$, που είναι αύξουσα ακολουθία.
- Αν $f(\omega) < \infty$, έστω $n \geq 1$, θα δείξουμε ότι $f_n(\omega) \leq f_{n+1}(\omega)$. Έχουμε τις εξής περιπτώσεις,

(α) $f(\omega) < n$.
(β) $f(\omega) \in [n, n+1)$.
(γ) $f(\omega) \geq n + 1$.

Για το (α) παρατηρούμε ότι το $f_n(\omega)$ θα ισούται με το αριστερό άκρο του διαστήματος $[k2^{-n}, (k+1)2^{-n})$ στο οποίο ανήκει το $f(\omega)$. Για τον καθορισμό του $f_{n+1}(\omega)$, χωρίζουμε το $[k2^{-n}, (k+1)2^{-n})$ σε δύο μισά, τα

$$\left[\frac{2k}{2^{n+1}}, \frac{2k+1}{2^{n+1}}\right), \left[\frac{2k+1}{2^{n+1}}, \frac{2k+2}{2^{n+1}}\right)$$

[1] Δηλαδή $f_n(\omega) \leq f_{n+1}(\omega)$ για κάθε $\omega \in \Omega$ και $n \geq 1$.

και το $f_{n+1}(\omega)$ ισούται με το αριστερό άκρο του μισού στο οποίο ανήκει το $f(\omega)$. Άρα είναι τουλάχιστον $k2^{-n} = f_n(\omega)$. Οι περιπτώσεις (β) και (γ) αφήνονται ως άσκηση. ■

5.2 Παραγόμενη σ-άλγεβρα από συναρτήσεις

Ορισμός 5.13 Έστω Ω σύνολο. Για μία συνάρτηση $f : \Omega \to [-\infty, \infty]$, παραγόμενη σ-άλγεβρα από την f ονομάζουμε το σύνολο

$$\sigma(f) := \{f^{-1}(A) : A \in \mathscr{B}([-\infty, \infty])\}.$$

Το ότι αυτό το σύνολο είναι σ-άλγεβρα το έχουμε δει στην Άσκηση 1.7 (β). Αυτή είναι η ελάχιστη σ-άλγεβρα στο Ω η οποία κάνει την f μετρήσιμη στον $(\Omega, \sigma(f))$. Βέβαια αν η f είναι μετρήσιμη στον $(\Omega, \mathcal{F})$, τότε θα έχουμε $\sigma(f) \subset \mathcal{F}$.

Παράδειγμα 5.14 Παίρνουμε $\Omega = \{-1, 1\}^{\mathbb{N}^+}$. Μπορούμε να δούμε αυτό το σύνολο ως το δειγματικό χώρο για μία ακολουθία ρίψεων ενός νομίσματος. Το -1 παριστά το αποτέλεσμα "Κορώνα" και το 1 το αποτέλεσμα "Γράμματα". Για $n \in \mathbb{N}^+$, ορίζουμε την συνάρτηση $X_n : \Omega \to \mathbb{R}$ με

$$X_n(\omega) = \begin{cases} -1 & \text{αν } \omega_n = -1, \\ 1 & \text{αν } \omega_n = 1, \end{cases}$$

όπου $\omega = (\omega_n)_{n \geq 1} \in \Omega$. Η X_n παίρνει μόνο δύο τιμές. Οπότε η $\sigma(X_n)$ είναι ακριβώς το σύνολο $\{\emptyset, \Omega, A_{n,-1}, A_{n,1}\}$, με

$$\begin{aligned} A_{n,-1} &:= X_n^{-1}(\{-1\}) = \{\omega \in \Omega : \omega_n = -1\} = \{-1, 1\}^{n-1} \times \{-1\} \times \{-1, 1\}^{\mathbb{N}^+ \setminus [n]}, \\ A_{n,1} &:= X_n^{-1}(\{1\}) = \{\omega \in \Omega : \omega_n = 1\} = \{-1, 1\}^{n-1} \times \{1\} \times \{-1, 1\}^{\mathbb{N}^+ \setminus [n]}, \end{aligned}$$

όπου $[n] := \{1, 2, \ldots, n\}$.

Ορισμός 5.15 Έστω Ω σύνολο. Αν $\{f_i : i \in I\}$ είναι οικογένεια συναρτήσεων στο Ω με τιμές στο $[-\infty, \infty]$, παραγόμενη σ-άλγεβρα από τις συναρτήσεις $\{f_i : i \in I\}$ ονομάζουμε το σύνολο

$$\sigma(\{f_i : i \in I\}) := \sigma\Big(\cup_{i \in I} \sigma(f_i) \Big). \tag{5.4}$$

Το σύνολο στο δεξί μέλος έχει οριστεί στην Παράγραφο 1.2. Αυτή είναι η ελάχιστη σ-άλγεβρα που κάνει όλες τις $\{f_i : i \in I\}$ μετρήσιμες.

Παράδειγμα 5.16 Συνεχίζουμε από το προηγούμενο παράδειγμα. Θα περιγράψουμε την σ-άλγεβρα $\mathcal{F}_n := \sigma(\{X_1, X_2, \ldots, X_n\})$. Για δεδομένη ακολουθία $s = (s_1, s_2, \ldots, s_n) \in \{-1, 1\}^n$ θεωρούμε το σύνολο

$$\begin{aligned} A_s :&= \{(s_1, s_2, \ldots, s_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots) : x_i \in \{-1, 1\} \text{ για κάθε } i \geq n+1\} \\ &= X_1^{-1}(\{s_1\}) \cap X_2^{-1}(\{s_2\}) \cap \cdots \cap X_n^{-1}(\{s_n\}). \end{aligned}$$

Δηλαδη το A_s περιέχει όλες τις άπειρες ακολουθίες από -1 και 1 που το αρχικό τους τμήμα είναι το s και μετά είναι ελεύθερες να έχουν ότι θέλουν. Για μιά ακολουθία που ανήκει στο A_s, η συμπεριφορά της ως τον χρόνο n είναι γνωστή.

Ισχυρισμος: Η $\mathcal{F}_n$ είναι η σ-άλγεβρα που παράγεται από την διαμέριση $\mathcal{C} := \{A_s : s \in \{-1, 1\}^n\}$ του Ω.

Από τον ορισμό της, η $\mathcal{F}_n$ πρέπει να περιέχει τα $X_i^{-1}(\{s_i\})$ για $i = 1, 2, \ldots, n$. Άρα, ως σ-άλγεβρα, περιέχει και το A_s, που είναι πεπερασμένη τομή των $X_i^{-1}(\{s_i\})$. Επομένως $\sigma(\mathcal{C}) \subset \mathcal{F}_n$. Από την άλλη, κάθε X_i με $1 \leq i \leq n$ είναι μετρήσιμη ως προς την $\sigma(\mathcal{C})$. Για παράδειγμα,

$$X_i^{-1}(\{1\}) = \bigcup\{A_s : s \in \{-1,1\}^n \text{ με } s_i = 1\}$$

είναι πεπερασμένη ένωση στοιχείων της $\sigma(\mathcal{C})$, άρα στοιχείο της. Από την ελαχιστότητα της $\mathcal{F}_n$, έπεται ότι $\mathcal{F}_n \subset \sigma(\mathcal{C})$, και ο ισχυρισμός αποδείχθηκε.

Ασκήσεις

5.1 Έστω $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ χώρος πιθανότητας. Να δείξετε ότι για μία $X : \Omega \to \mathbb{R}$, τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:
(α) $X^{-1}(A) \in \mathcal{F}$, για κάθε $A \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$.
(β) $X^{-1}(A) \in \mathcal{F}$, για κάθε $A \subset \mathbb{R}$ ανοιχτό σύνολο.
(γ) $X^{-1}([a,b]) \in \mathcal{F}$, για κάθε $a < b$ πραγματικούς αριθμούς.

5.2 Έστω Ω τοπολογικός χώρος και $f : \Omega \to \mathbb{R}$ συνεχής. Να δείξετε ότι η f είναι Borel-μετρήσιμη.

5.3 Έστω $X : \Omega \to [-\infty, \infty]$ τυχαία μεταβλητή. Να δείξετε ότι $\{X = -\infty\}, \{X = \infty\} \in \mathcal{F}$.

5.4 Έστω $(X_n)_{n\geq 1}$ ακολουθία τυχαίων μεταβλητών σε ένα χώρο πιθανότητας με τιμές στο $\mathbb{R}$. Να δείξετε ότι τα παρακάτω σύνολα είναι στοιχεία της $\mathcal{F}$:
(α) $\{\lim_n X_n = -\infty\}, \{\lim_n X_n = \infty\}$.
(β) $\{\lim_n X_n$ υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός$\}$.

5.5 Έστω $(\Omega, \mathcal{F})$ μετρήσιμος χώρος. Αν $f, g : \Omega \to \mathbb{R}$ μετρήσιμες, να δείξετε ότι το $\{f = g\}$ είναι μετρήσιμο.

5.6 Να δειχθεί ότι πράγματι το δεξί μέλος της (5.4) είναι η μικρότερη σ-άλγεβρα $\mathcal{A}$ που κάνει όλες τις $\{f_i : i \in I\}$ $\mathcal{A}$-μετρήσιμες.

6

Ολοκλήρωση

6.1 Ολοκλήρωμα Lebesgue. Ορισμός

Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου. Στην παράγραφο αυτή θα ορίσουμε το ολοκλήρωμα μιας $\mathcal{A}/\mathscr{B}([-\infty,\infty])$ μετρήσιμης συνάρτησης $f : X \to [-\infty, \infty]$. Αυτό θα το κάνουμε σε τρία βήματα. Πρώτα για $f \geq 0$ απλή μετρήσιμη, έπειτα για $f \geq 0$ μετρήσιμη, και τέλος για f μετρήσιμη με τιμές στο $[-\infty, \infty]$.

Βήμα 1: $f \geq 0$ απλή μετρήσιμη.

Ορισμός 6.1 Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου και $f : X \to [0, \infty]$ απλή μετρήσιμη συνάρτηση. Ορίζουμε το ολοκλήρωμα Lebesque της f ως προς το μέτρο μ, και το συμβολίζουμε με $\displaystyle\int f \, \mathrm{d}\mu$, ως εξής:

$$\int f \, \mathrm{d}\mu := \sum_{i=1}^{n} a_i \mu(A_i), \tag{6.1}$$

όταν $f = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i \mathbf{1}_{A_i}$ σε κανονική μορφή, με τη σύμβαση ότι $0 \cdot (+\infty) = 0$.

Το ολοκλήρωμα είναι στοιχείο του $[0, \infty]$.

Βήμα 2: $f \geq 0$ μετρήσιμη.

Ορισμός 6.2 Έστω $f : X \to [0, \infty]$ μετρήσιμη συνάρτηση. Το ολοκλήρωμα Lebesgue της f ως προς το μέτρο μ ορίζεται ως εξής:

$$\int f \mathrm{d}\mu := \sup \Big\{ \int s \, \mathrm{d}\mu : s \text{ απλή}, \, 0 \leq s \leq f \Big\}.$$

Παρατήρηση 6.3 Ο Ορισμός 6.2, στην περίπτωση που η f είναι απλή, συμφωνεί με τον Ορισμό 6.1.

Βήμα 3: $f : X \to [-\infty, \infty]$ μετρήσιμη.

Ορισμός 6.4 Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου και $f : X \to [-\infty, \infty]$ μετρήσιμη συνάρτηση. Το ολοκλήρωμα Lebesgue της f ως προς το μέτρο μ ορίζεται ως εξής:

$$\int f \, \mathrm{d}\mu := \int f^+ \, \mathrm{d}\mu - \int f^- \, \mathrm{d}\mu$$

εφόσον στο δεξί μέλος της ισότητας δεν εμφανίζεται απροσδιοριστία της μορφής $+\infty - \infty$. Στην περίπτωση που το ολοκλήρωμα είναι πραγματικός αριθμός, λέμε ότι η συνάρτηση f είναι **(Lebesgue) ολοκληρώσιμη**.

Για το $\int f\, d\mu$ χρησιμοποιούμε επίσης τον συμβολισμό $\int f(x)\, d\mu(x)$.

Παρατήρηση 6.5 (i). Τα $\int f^+ \,\mathrm{d}\mu$ και $\int f^- \,\mathrm{d}\mu$ που εμφανίζονται στον Ορισμό 6.4 ορίζονται από τον Ορισμό 6.2.

(ii). Το ολοκλήρωμα μίας μετρήσιμης συνάρτησης, όταν αυτό ορίζεται, είναι στοιχείο του $[-\infty, \infty]$.

(iii). Μιά μετρήσιμη συνάρτηση f είναι ολοκληρώσιμη αν και μόνο αν και τα δύο ολοκληρώματα $\int f^- \,\mathrm{d}\mu, \int f^+ \,\mathrm{d}\mu$ είναι πεπερασμένα.

(iv). Για μία $f \geq 0$ μετρήσιμη συνάρτηση, θεωρούμε την ακολουθία (f_n) των απλών συναρτήσεων που ορίστηκαν στην Πρόταση 5.12. Αποδεικνύεται ότι

$$\int f\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu.$$

Δηλαδή το ολοκλήρωμα είναι το όριο των ολοκληρωμάτων αυτών των απλών συναρτήσεων. Αυτό είναι αντίστοιχο της προσέγγισης του ολοκληρώματος Riemann μιας Riemann ολοκληρώσιμης συνάρτησης από τα ολοκληρώματα κλιμακωτών συναρτήσεων.

6.2 Ειδικές περιπτώσεις

Θα δούμε εδώ τις περιπτώσεις που το μέτρο μ της προηγούμενης παραγράφου είναι το αριθμητικό μέτρο στο $\mathbb{N}$ ή το μέτρο Lebesgue σε ένα διάστημα στο $\mathbb{R}$.

Αριθμητικο μετρο: Αν πάρουμε μ το αριθμητικό μέτρο στον $X = \mathbb{N}$ (Παράδειγμα 2.2) και $f : \mathbb{N} \to [0, \infty]$ απλή συνάρτηση (δηλαδή με πεπερασμένο σύνολο τιμών) τότε (Άσκηση)

$$\int f\, d\mu = \sum_{n=0}^{\infty} f(n).$$

Έπειτα είναι απλό να δούμε ότι η ίδια ισότητα ισχύει για κάθε $f : \mathbb{N} \to [0, \infty]$. Και επεκτείνεται και στις $f : \mathbb{N} \to [-\infty, \infty]$ με $\sum_{n=0}^{\infty} |f(n)| < \infty$. Άρα το άθροισμα θετικής ή απολύτως συγκλίνουσας σειράς είναι ειδική περίπτωση του ολοκληρώματος Lebesgue. Όμως αθροίσματα σειρών που συγκλίνουν υπό συνθήκη, όπως η $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$, δεν καλύπτονται. Το ολοκλήρωμα Lebesgue δεν προσθέτει ποσότητες με κάποια "σειρά" αλλά μαζικά.

Μετρο Lebesgue σε φραγμενο διαστημα Έστω $a < b$ πραγματικοί αριθμοί. Το ολοκλήρωμα Lebesgue στο χώρο μέτρου $(\mathbb{R}, \mathscr{B}([a,b]), \lambda)$ μίας Borel μετρήσιμης συνάρτησης $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ το συμβολίζουμε συνήθως με $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, και στην περίπτωση που η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη ταυτίζεται με το ολοκλήρωμα Riemann (Δες Stein and Shakarchi (2005), Κεφάλαιο 2, Θεώρημα 1.5).

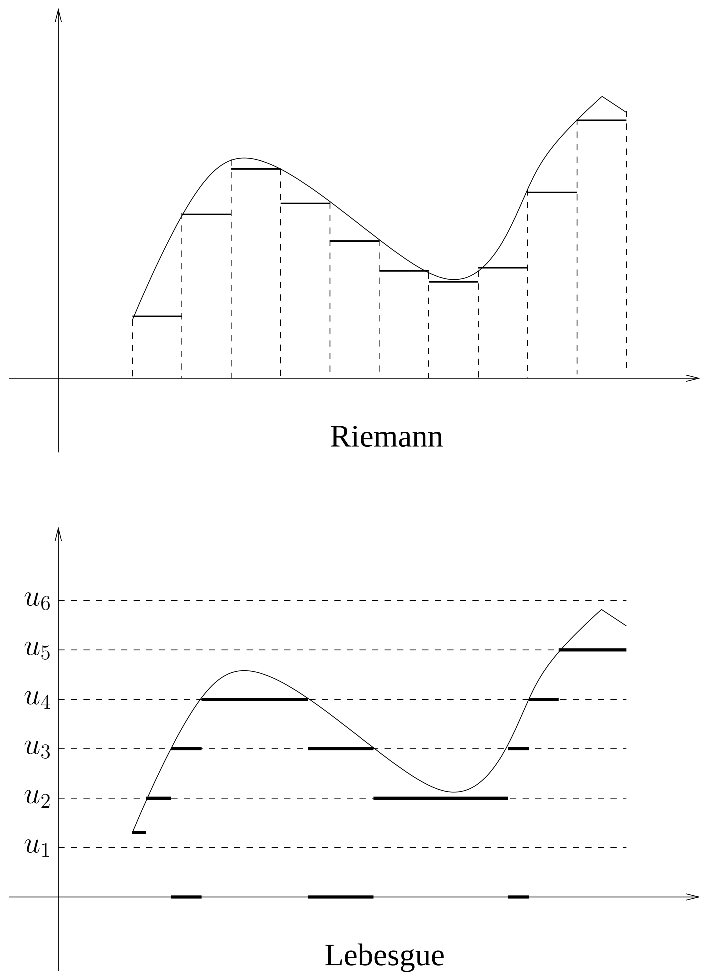
Μετρο Lebesgue στο $\mathbb{R}$: Το ολοκλήρωμα Lebesgue στο χώρο μέτρου $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ μίας Borel μετρήσιμης συνάρτησης $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ το συμβολίζουμε συνήθως με $\int_{\mathbb{R}} f(x)\,\mathrm{d}x$. Συμπίπτει με το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx$ αν η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη σε κάθε κλειστό και φραγμένο υποδιάστημα του $\mathbb{R}$, και είναι θετική ή το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\, dx$ είναι πεπερασμένο.

6.3 Η οπτική του ολοκληρώματος Lebesgue

Είναι ενδιαφέρον να συγκρίνουμε τις οριακές διαδικασίες που δίνουν τα ολοκληρώματα Riemann και Lebesgue σε μία περίπτωση συνάρτησης/χώρου που και τα δύο ολοκληρώματα έχουν νόημα (Ως οριακή διαδικασία για το Lebesgue παίρνουμε αυτήν που περιγράφεται στην Παρατήρηση 6.5 (iv)). Πιό συγκεκριμένα, παίρνουμε

$a < b$ πραγματικούς αριθμούς και μια $f : [a, b] \to [0, \infty)$ φραγμένη, Riemann ολοκληρώσιμη, και μετρήσιμη. Το φραγμένη είναι προαπαιτούμενο για το Riemann, το μετρήσιμη για το Lebesgue. Και επειδή είναι μή αρνητική, το ολοκλήρωμα Lebesgue επίσης ορίζεται.

Για το Riemann, διαμερίζουμε το *πεδίο ορισμού* της f σε τμήματα ίσου μήκους (Δες σχήμα 6.1). Σε καθένα από αυτά, η f έχει μια δεδομένη ελάχιστη τιμή. Πολλαπλασιάσουμε αυτή την ελάχιστη τιμή με το μήκος του τμήματος για να βρούμε τη συνεισφορά του τμήματος στην προσέγγιση του ολοκληρώματος. Έπειτα προσθέτουμε τις συνεισφορές όλων των τμημάτων. Καθώς το μήκος των τμημάτων τείνει στο μηδέν, παίρνουμε την τιμή του ολοκληρώματος Riemann της f.



Σχήμα 6.1 Η διαφορά οπτικής των ολοκληρωμάτων Riemann και Lebesgue.

Για το Lebesgue, διαμερίζουμε το *σύνολο τιμών* της f σε τμήματα ίσου μήκους. Αυτή η διαμέριση δίνει μία απλή συνάρτηση (το γράφημα της είναι τα χοντρά ευθύγραμμα τμήματα στην εικόνα, εκτός εκείνα που είναι στον άξονα), που είναι μία από τις f_n της Πρότασης 5.12. Ας πάρουμε ένα τμήμα, π.χ. το $[u_3, u_4)$. Η συνεισφορά του στην προσέγγιση $\int f_n d\lambda$ του ολοκληρώματος είναι το εμβαδόν $u_3 \lambda\left(f^{-1}([u_3, u_4))\right)$. του "παραλληλογράμμου" με ύψος u_3 και βάση $f^{-1}([u_3, u_4))$ (σχέση (6.1)). Στην συγκεκριμένη περίπτωση, το $f^{-1}([u_3, u_4))$ είναι ένωση τριών διαστημάτων, σημειωμένα με χοντρή γραμμή στον x-άξονα. Το μήκος αυτής της βάσης είναι το μέτρο Lebesgue του συνόλου $f^{-1}([u_3, u_4))$. Πάλι προσθέτουμε τις συνεισφορές όλων των τμημάτων, και καθώς το μήκος τους τείνει στο μηδέν ($n \to \infty$), παίρνουμε την τιμή του ολοκληρώματος Lebesgue της f.

Το μη τετριμμένο της διαδικασίας για το ολοκλήρωμα Lebesgue είναι ότι πρέπει να είμαστε σε θέση να υπολογίσουμε το μήκος του συνόλου $f^{-1}([u_{k-1}, u_k))$. Στο πιο πάνω παράδειγμα, έτυχε αυτό να είναι ένωση τριών διαστημάτων, και είναι προφανές ποιό πρέπει να ονομάσουμε μήκος του. Θα μπορούσε όμως να είναι ένα πολύ περίεργο σύνολο, ειδικά όταν η f δεν είναι συνεχής. Η έννοια μήκους για σύνολα Borel δίνεται ακριβώς από το μέτρο Lebesgue τους, του οποίου η κατασκευή δεν είναι απλή, και γι' αυτό ακριβώς την παραλείψαμε σε αυτές τις σημειώσεις.

Κλείνοντας αυτή την σύγκριση, να παρατηρήσουμε το εξής πολύ σημαντικό. Για τον ορισμό του ολοκληρώματος Lebesgue, το πεδίο ορισμού, X, της συνάρτησης $f : X \to \mathbb{R}$ που θέλουμε να ολοκληρώσουμε αρκεί να είναι εφοδιασμένο με μία σ-άλγεβρα και ένα μέτρο. Δεν είναι αναγκαίο να έχει κάποια άλλη δομή (μετρικός ή διανυσματικός χώρος) όπως είναι οι $\mathbb{R}^d$ στους οποίους έχουμε ορίσει το ολοκλήρωμα Riemann. Εκεί την επιπλέον δομή την χρησιμοποιούμε με κρίσιμο τρόπο.

6.4 Ιδιότητες του ολοκληρώματος

Πρόταση 6.6 *Έστω $f, g : X \to [-\infty, +\infty]$ μετρήσιμες συναρτήσεις των οποίων το ολοκλήρωμα ορίζεται. Τότε*

(i). $\displaystyle\int af \,\mathrm{d}\mu = a \int f \,\mathrm{d}\mu$, *για* $a \in \mathbb{R}$.

(ii). $\displaystyle\int (f+g) \,\mathrm{d}\mu = \int f \,\mathrm{d}\mu + \int g \,\mathrm{d}\mu$.

(iii). Αν $f \le g$, *τότε* $\displaystyle\int f \,\mathrm{d}\mu \le \int g \,\mathrm{d}\mu$.

(iv). $\displaystyle\left|\int f \,\mathrm{d}\mu\right| \le \int |f| \,\mathrm{d}\mu$.

Η (ii) ισχύει με την προϋπόθεση ότι στο δεξί της μέλος δεν εμφανίζεται η μορφή $\infty - \infty$.

Παρατήρηση 6.7 Για f όπως στην προηγούμενη πρόταση, η σχέση $|f| = f^- + f^+$ και η ιδιότητα (ii) δίνουν ότι

$$\int |f| \,\mathrm{d}\mu = \int f^- \,\mathrm{d}\mu + \int f^+ \,\mathrm{d}\mu. \tag{6.2}$$

Επομένως, η f είναι ολοκληρώσιμη, δηλαδή έχει ολοκλήρωμα πραγματικό αριθμό, αν και μόνο αν $\int |f| \,\mathrm{d}\mu < \infty$.

Παρακάτω, δίνουμε τον ορισμό του ολοκληρώματος μιας μετρήσιμης συνάρτησης σε υποσύνολα.

Ορισμός 6.8 Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ μετρήσιμος χώρος, $f : X \to [-\infty, \infty]$ μετρήσιμη συνάρτηση, και $A \in \mathcal{A}$. Ορίζουμε το ολοκλήρωμα (Lebesgue) της f ως προς το μέτρο μ στο A ως εξής:

$$\int_A f \,\mathrm{d}\mu := \int f \mathbf{1}_A \,\mathrm{d}\mu$$

εφόσον το δεξί μέλος της ισότητας ορίζεται.

Παρατήρηση 6.9 Στον Ορισμό 6.8, αν $A = X$, το $\int_X f \, \mathrm{d}\mu$ είναι το ολοκλήρωμα της f στον Ορισμό 6.4. Επίσης, εύκολα βλέπουμε ότι αν $f \geq 0$ και $A \subset B$ στοιχεία της $\mathcal{A}$, ισχύει ότι $\int_A f \, \mathrm{d}\mu \leq \int_B f \, \mathrm{d}\mu$.

Παρατήρηση 6.10 Στην περίπτωση ενός χώρου πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, το ολοκλήρωμα μίας τυχαίας μεταβλητής $X : \Omega \to \mathbb{R}$ το λέμε μέση τιμή της X και αντί του $\int X \, \mathrm{d}\mathbf{P}$ χρησιμοποιούμε το συμβολισμό $\mathbf{E}(X)$.

Συνοψίζουμε στον επόμενο ορισμό.

Ορισμός 6.11 Έστω $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ χώρος πιθανότητας και $X : \Omega \to [-\infty, \infty]$ τυχαία μεταβλητή. Η μέση τιμή $\mathbf{E}(X)$ της X ορίζεται ως

$$\mathbf{E}(X) := \int X \, \mathrm{d}\mathbf{P}$$

εφόσον το δεξί μέλος της ισότητας ορίζεται.

Παρατήρηση 6.12 Αντίστοιχα, αν $A \in \mathcal{F}$, ορίζουμε τη μέση τιμή της X πάνω στο A ως $\mathbf{E}(X\mathbf{1}_A)$, και την συμβολίζουμε με $\mathbf{E}(X; A)$, εφόσον η $\mathbf{E}(X\mathbf{1}_A)$ μπορεί να οριστεί.

Δύο ειδικές περιπτώσεις μέσης τιμής είναι οι εξής:

(i). Αν η X ισούται με μία σταθερά $c \in \mathbb{R}$, τότε $\mathbf{E}(X) = c$ γιατί η X είναι απλή.
(ii). Αν $X = \mathbf{1}_A$, $A \in \mathcal{F}$, τότε $\mathbf{E}(X) = \mathbf{P}(A)$.

Το (ii) σε συνδυασμό με τις ιδιότητες της μέσης τιμής (Προτάσεις 6.6, 6.16) είναι πολύ χρήσιμη (Ασκήσεις 6.3 -6.5).

Παρατήρηση 6.13 Σε ένα χώρο μέτρου $(X, \mathcal{A}, \mu)$, λέμε ότι μία ιδιότητα Ψ ισχύει σχεδόν παντού αν το σύνολο στο οποίο δεν ισχύει, δηλαδή το $\{x \in X : \text{η } \Psi \text{ δεν ισχύει}\}$, έχει μέτρο 0. Όμως επειδή αυτό το σύνολο δεν είναι απαραίτητα μετρήσιμο, ο προσεκτικός ορισμός είναι ότι υπάρχει $A \in \mathcal{A}$ με $A \supset \{x \in X : \text{η } \Psi \text{ δεν ισχύει}\}$ και $\mu(A) = 0$. Αντίστοιχα, σε ένα χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, λέμε ότι η Ψ ισχύει με πιθανότητα 1 ή σχεδόν βέβαια.

Πρόταση 6.14 *Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου και $f, g : X \to [0, \infty]$ μετρήσιμες συναρτήσεις. Τότε:*

(i). Αν $\mu(\{f \neq g\}) = 0$, τότε $\int f \, \mathrm{d}\mu = \int g \, \mathrm{d}\mu$.

(ii). $\int f \, \mathrm{d}\mu = 0$ αν και μόνο αν $\mu(\{f \neq 0\}) = 0$.

(iii). Αν $\int f \, \mathrm{d}\mu < \infty$, τότε $\mu(f = \infty) = 0$.

Απόδειξη Θα αποδείξουμε μόνο το (ii). Τα (i) και (iii) αποδεικνύονται όμοια.
$\Rightarrow$ Έστω ότι $\int f \, \mathrm{d}\mu = 0$. Θέτουμε $A_n = \left\{f \geq \frac{1}{n}\right\}$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Τότε,

$$0 = \int f \, \mathrm{d}\mu \geq \int_{A_n} f \, \mathrm{d}\mu = \int f \mathbf{1}_{A_n} \, \mathrm{d}\mu \geq \int \frac{1}{n} \mathbf{1}_{A_n} \, \mathrm{d}\mu = \frac{1}{n} \mu(A_n), \quad \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}.$$

Άρα $\mu(A_n) = 0$, για κάθε $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Όμως, $\{f > 0\} = \cup_{n \geq 1} A_n$ και $\mu(\{f > 0\}) \leq \sum_{n \geq 1} \mu(A_n) = 0$.

Συνεπώς, $\mu(\{f \neq 0\}) = 0$.
$\Leftarrow$ Έστω ότι $\mu(\{f \neq 0\}) = 0$. Τότε,

$$\int f \, \mathrm{d}\mu = \int_{\{f=0\}} f \, \mathrm{d}\mu + \int_{\{f\neq 0\}} f \, \mathrm{d}\mu = \int_{\{f=0\}} f \, \mathrm{d}\mu = 0.$$

■

Παρατήρηση 6.15 Εύκολα βλέπουμε ότι η ιδιότητα (i) της Πρότασης 6.14 ισχύει και για μετρήσιμες συναρτήσεις με τιμές στο $[-\infty, \infty]$ των οποίων το ολοκλήρωμα ορίζεται.

Στην περίπτωση ενός χώρου πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, η Πρόταση 6.14 παίρνει την εξής μορφή:

Πρόταση 6.16 *Έστω $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ χώρος πιθανότητας και $X, Y : \Omega \to [0, \infty]$ τυχαίες μεταβλητές. Τότε*

(i). Αν $\mathbf{P}(X = Y) = 1$, τότε $\mathbf{E}(X) = \mathbf{E}(Y)$.
(ii). $\mathbf{E}(X) = 0$ αν και μόνο αν $\mathbf{P}(X = 0) = 1$.
(iii). Αν $\mathbf{E}(X) < \infty$, τότε $\mathbf{P}(X = \infty) = 0$.

Παρακάτω δίνεται χωρίς απόδειξη μία χρήσιμη ιδιότητα του ολοκληρώματος Lebesgue.

Πρόταση 6.17 (Ανισότητα Jensen) *Έστω $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ χώρος πιθανότητας, $X : \Omega \to \mathbb{R}$ τυχαία μεταβλητή με $\mathbf{E}|X| < \infty$, και $\Phi : I \to \mathbb{R}$ κυρτή συνάρτηση σε ένα διάστημα $I \subset \mathbb{R}$ με $\mathbf{P}(\{X \in I\}) = 1$ και $\mathbf{E}|\Phi(X)| < \infty$. Τότε*

$$\Phi(\mathbf{E}\{X\}) \leq \mathbf{E}\{\Phi(X)\}.$$

Ορισμός 6.18 Έστω $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ χώρος πιθανότητας και $X : \Omega \to \mathbb{R}$ τυχαία μεταβλητή, με $\mathbf{E}|X| < \infty$. Ορίζουμε τη διασπορά $\mathrm{Var}(X)$ της X ως εξής:

$$\mathrm{Var}(X) := \mathbf{E}(\{X - \mathbf{E}(X)\}^2).$$

Παρατήρηση 6.19 Η μέση τιμή $\mathbf{E}(X)$, όπως έχουμε ήδη σημειώσει (Παρατήρηση 6.7), είναι πραγματικός αριθμός λόγω της $\mathbf{E}|X| < \infty$. Η διασπορά, όμως, ενδέχεται να παίρνει την τιμή ∞. Ένας άλλος χρήσιμος τύπος για τη διασπορά μιας τυχαίας μεταβλητής είναι $\mathrm{Var}(X) = \mathbf{E}(X^2) - \mathbf{E}(X)^2$. Έτσι βλέπουμε ότι αν $\mathbf{E}(X^2) < \infty$, τότε $\mathrm{Var}(X) < \infty$.

Τέλος, δίνουμε δύο σημαντικές ανισότητες διατυπωμένες στη γλώσσα των πιθανοτήτων. Αντίστοιχες ισχύουν και στην περίπτωση μετρήσιμων συναρτήσεων σε τυχόντα χώρο μέτρου. Εκφράζουν το γεγονός ότι η πιθανότητα μια τυχαία μεταβλητή να βρεθεί μακριά από την μέση της τιμή είναι μικρή.

Πρόταση 6.20 *Έστω $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ χώρος πιθανότητας. Τότε ισχύουν τα εξής:*

(i). (Ανισότητα Markov) Αν $X : \Omega \to [0, \infty]$ τυχαία μεταβλητή και $a > 0$, τότε

$$\mathbf{P}(X \geq a) \leq \frac{\mathbf{E}(X)}{a}.$$

(ii). (Ανισότητα Chebyshev) Αν $X : \Omega \to [-\infty, \infty]$ τυχαία μεταβλητή με $\mathbf{E}|X| < \infty$ και $a > 0$, τότε

$$\mathbf{P}(|X - \mathbf{E}(X)| \geq a) \leq \frac{\mathrm{Var}(X)}{a^2}.$$

Απόδειξη (*i*) Χρησιμοποιούμε τη μονοτονία της μέσης τιμής. Έχουμε $X \geq a\mathbf{1}_{X\geq a}$. Άρα

$$\mathbf{E}(X) \geq \mathbf{E}(a\mathbf{1}_{X\geq a}) = a\,\mathbf{P}(X \geq a).$$

(*ii*) Εφαρμόζουμε το (*i*) στην τυχαία μεταβλητή $|X - \mathbf{E}(X)|^2$. Δηλαδή

$$\mathbf{P}(|X - \mathbf{E}(X)| \geq a) = \mathbf{P}(|X - \mathbf{E}(X)|^2 \geq a^2) \leq \frac{\mathbf{E}\{|X - \mathbf{E}(X)|^2\}}{a^2} = \frac{\mathrm{Var}(X)}{a^2}.$$

■

6.5 Οι χώροι $\mathcal{L}^p$

Ορισμός 6.21 Έστω $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ χώρος πιθανότητας, $X : \Omega \to [-\infty, \infty]$ τυχαία μεταβλητή και $p \in [1, \infty)$. Ορίζουμε

$$||X||_p := \left(\mathbf{E}(|X|^p)\right)^{1/p}$$

και

$$\mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}) := \{X : X : \Omega \to [-\infty, \infty] \text{ τυχαία μεταβλητή στο } \Omega, \text{ και } ||X||_p < \infty\}.$$

Όταν είναι σαφές ποιός είναι ο χώρος Ω και ποιά η σ-άλγεβρα $\mathcal{F}$, θα γράφουμε $\mathcal{L}^p(\mathbf{P})$ αντί $\mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$.

Παρατήρηση 6.22 Αποδεικνύεται ότι η συνάρτηση $||\cdot||_p : \mathcal{L}^p \to [0, \infty)$, ικανοποιεί τις ιδιότητες:

(i). $||\lambda X||_p = |\lambda|||X||_p$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
(ii). $||X + Y||_p \leq ||X||_p + ||Y||_p$.

Έπεται ότι το σύνολο $\mathcal{L}^p(P)$ είναι διανυσματικός χώρος. Όμως, η συνάρτηση $||\cdot||_p$ δεν είναι νόρμα γιατί δεν ικανοποιεί την ιδιότητα "$||X||_p = 0 \Rightarrow X \equiv 0$", εφόσον μία τυχαία μεταβλητή X ενδέχεται να μην είναι η μηδενική αλλά να ισούται με 0 με πιθανότητα 1, δηλαδή $\mathbf{P}(X = 0) = 1$, και επομένως $||X||_p = 0$.

Πρόταση 6.23 *(Ανισότητα Cauchy-Schwarz) Έστω $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ χώρος πιθανότητας και $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ τυχαίες μεταβλητές. Τότε*

$$|\,\mathbf{E}(XY)| \leq ||X||_2||Y||_2.$$

Απόδειξη Για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$0 \leq \mathbf{E}\left((\lambda X + Y)^2\right) = \lambda^2\,\mathbf{E}(X^2) + 2\lambda\,\mathbf{E}(X)\,\mathbf{E}(Y) + \mathbf{E}(Y^2). \tag{$*$}$$

Η διακρίνουσα της τετραγωνικής εξίσωσης ως προς λ στην $(*)$ είναι

$$4\,\mathbf{E}(XY)^2 - 4\,\mathbf{E}(X^2)\,\mathbf{E}(Y^2),$$

και εφόσον η εξίσωση είναι μη αρνητική για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$, έχουμε ότι

$$|\,\mathbf{E}(XY)| \leq \mathbf{E}(X^2)^{1/2}\,\mathbf{E}(Y^2)^{1/2},$$

το οποίο είναι το ζητούμενο. ■

Γενικότερη της Cauchy-Schwarz είναι η ανισότητα Hölder. Την διατυπώνουμε στην επόμενη πρόταση, αλλά παραλείπουμε την απόδειξη.

Πρόταση 6.24 *(Ανισότητα Hölder) Έστω $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ χώρος πιθανότητας,$p, q \in (1, \infty)$ με $p^{-1}+q^{-1} = 1$, και $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ τυχαίες μεταβλητές με $||X||_p < \infty, ||Y||_q < \infty$. Τότε*

$$|\mathbf{E}(XY)| \le ||X||_p ||Y||_q.$$

Πρόταση 6.25 *Έστω X τυχαία μεταβλητή σε ένα χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, και με τιμές στο $[-\infty, \infty]$. Τότε, για $1 \le r < s$, ισχύει ότι*

$$||X||_r \le ||X||_s.$$

Απόδειξη Είναι συνέπεια της ανισότητας Hölder όπου την θέση της X έχει η $|X|^r$, την θέση της Y έχει η σταθερή συνάρτηση 1 και $p = s/r$, $q = s/(s-r)$. Τότε,

$$\mathbf{E}\,|X|^r = \mathbf{E}(|X|^r 1) \le \mathbf{E}(|X|^s)^{r/s} (\mathbf{E}(1^q))^{1/q} = \mathbf{E}(|X|^s)^{r/s},$$

και έτσι προκύπτει το ζητούμενο. ■

Παρατήρηση 6.26 Η Πρόταση 6.25 μας λέει ότι αν $1 \le r < s$ τότε, $\mathcal{L}^s(\mathbf{P}) \subset \mathcal{L}^r(\mathbf{P})$. Ο εγκλεισμός αυτός όμως έπεται και πιο εύκολα παρατηρώντας ότι $|X|^r \le |X|^s + 1$ (το 1 καλύπτει την περίπτωση που $|X(\omega)| < 1$).

Όταν είναι σαφές ποιό είναι το μέτρο $\mathbf{P}$, τότε γράφουμε $\mathcal{L}^p$ αντί $\mathcal{L}^p(\mathbf{P})$.

Ορισμός 6.27 Έστω $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ χώρος πιθανότητας, και $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ τυχαίες μεταβλητές ώστε $\mathbf{E}\,|X|, \mathbf{E}\,|Y| < \infty$ και η $\mathbf{E}(XY)$ ορίζεται (στο $[-\infty, \infty]$). Συνδιακύμανση των X, Y ονομάζουμε την ποσότητα

$$\operatorname{Cov}(X, Y) = \mathbf{E}\{(X - \mathbf{E}\,X)(Y - \mathbf{E}\,Y)\}$$

η οποία είναι στοιχείο του $[-\infty, \infty]$.

Πρόταση 6.28 *Έστω $X, Y \in \mathcal{L}^2$. Τότε*

$$|\operatorname{Cov}(X, Y)| \le \sqrt{\operatorname{Var}(X)}\sqrt{\operatorname{Var}(Y)}.$$

Απόδειξη Η ανισότητα Caychy-Schwarz δίνει

$$|\operatorname{Cov}(X, Y)| = |\mathbf{E}\{(X - \mathbf{E}\,X)(Y - \mathbf{E}\,Y)\}| \le \sqrt{\mathbf{E}\{(X - \mathbf{E}\,X)^2\}}\sqrt{\mathbf{E}\{(Y - \mathbf{E}\,Y)^2\}} = \sqrt{\operatorname{Var}(X)}\sqrt{\operatorname{Var}(Y)}$$

■

6.6 Τα βασικά οριακά θεωρήματα

Αν έχουμε μια ακολουθία $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μετρήσιμων συναρτήσεων με τιμές στο $[-\infty, \infty]$, πολλές φορές μας ενδιαφέρει ο υπολογισμός του ορίου $\lim_{n\to\infty} \int f_n \, \mathrm{d}\mu$. Και μπαίνουμε στον πειρασμό να μαντέψουμε ότι

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n \, \mathrm{d}\mu = \int \lim_{n\to\infty} f_n \, \mathrm{d}\mu, \tag{6.3}$$

δηλαδή το όριο μπαίνει μέσα στο ολοκλήρωμα. Αυτό όμως δεν γίνεται πάντοτε. Το πρόβλημα αυτό είναι το αντικείμενο των βασικών θεωρημάτων σύγκλισης για το ολοκλήρωμα Lebesque. Τα διατυπώνουμε, αλλά παραλείπουμε τις αποδείξεις τους.

Θεώρημα 6.29 (Θεώρημα μονότονης σύγκλισης) *Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου, και $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ με $f_n : X \to [0, +\infty]$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ αύξουσα ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων. Θέτουμε $f = \lim_{n\to\infty} f_n$. Τότε*

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n \,\mathrm{d}\mu = \int f \,\mathrm{d}\mu.$$

Το όριο $\lim_{n\to\infty} f_n$ υπάρχει γιατί η $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι αύξουσα. Και όμοια, το όριο στο αριστερό μέλος της τελευταίας ισότητας υπάρχει γιατί η ακολουθία των ολοκληρωμάτων είναι αύξουσα.

Θεώρημα 6.30 (Λήμμα Fatou) *Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου, και $f_n : X \to [0, \infty]$ μετρήσιμη συνάρτηση για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Τότε*

$$\int \varliminf_{n\to\infty} f_n \,\mathrm{d}\mu \leq \varliminf_{n\to\infty} \int f_n \,\mathrm{d}\mu.$$

Θεώρημα 6.31 (Θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης) *Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου, και $f_n : X \to \mathbb{R}$ μετρήσιμη για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έτσι ώστε $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ σχεδόν παντού, και $|f_n| \leq g$, όπου $g : X \to [0, \infty]$ με $\int g \,\mathrm{d}\mu < \infty$. Τότε $\int |f| \,\mathrm{d}\mu < \infty$ και*

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n \,\mathrm{d}\mu = \int f \,\mathrm{d}\mu. \tag{6.4}$$

Όταν $|f_n| \leq g$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ λέμε ότι η ακολουθία $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ κυριαρχείται από τη συνάρτηση g. Η κρίσιμη συνθήκη του Θεωρήματος κυριαρχημένης σύγκλισης είναι ότι η ακολουθία $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ κυριαρχείται από ολοκληρώσιμη συνάρτηση.

Σε ένα χώρο *πεπερασμένου* μέτρου, οι σταθερές συναρτήσεις είναι ολοκληρώσιμες. Γιατί μία $g = M$ (όπου $M \in \mathbb{R}$ σταθερά) έχει ολοκλήρωμα $M\mu(X)$, το οποίο είναι πραγματικός αριθμός. Έτσι το Θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης έχει την εξής χρήσιμη συνέπεια.

Θεώρημα 6.32 (Θεώρημα φραγμένης σύγκλισης) *Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος πεπερασμένου μέτρου και $f_n : X \to \mathbb{R}$ μετρήσιμη για κάθε $n \in \mathbb{N}$, με $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ και $|f_n| \leq M$, όπου $M < \infty$ σταθερά. Τότε $\int |f| \,\mathrm{d}\mu < \infty$ και*

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n \,\mathrm{d}\mu = \int f \,\mathrm{d}\mu.$$

Αντιπαράδειγμα (Αποτυχία ισχύος της (6.3)): Θεωρούμε τον χώρο πιθανότητας $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}), \mathbf{P})$, όπου το μέτρο $\mathbf{P}$ έχει πυκνότητα $f(x) = \mathbf{1}_{(0,1)}(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Θέτουμε

$$X_n(x) = n\mathbf{1}_{(0,1/n)}(x), \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Η X_n είναι απλή τυχαία μεταβλητή, και $\lim_{n\to\infty} X_n = 0$. Έχουμε ότι

$$\mathbf{E}(\lim_{n\to\infty} X_n) = \mathbf{E}(0) = 0,$$

και

$$\mathbf{E}(X_n) = n\,\mathbf{P}\left((0, 1/n)\right) = n\frac{1}{n} = 1.$$

Άρα $\mathbf{E}(\lim_{n\to\infty} X_n) < \lim_{n\to\infty} \mathbf{E}(X_n)$. Δηλαδή έχουμε γνήσια ανισότητα στο Λήμμα Fatou, και το Θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης δεν εφαρμόζεται. Αυτό δεν μας κάνει εντύπωση γιατί η ακολουθία X_n δεν κυριαρχείται από κάποια ολοκληρώσιμη συνάρτηση.

Δεδομένου ότι μία σειρά είναι το όριο των μερικών αθροισμάτων της και ότι το ολοκλήρωμα είναι γραμμικό, τα παραπάνω θεωρήματα δίνουν το εξής πόρισμα.

Πόρισμα 6.33 *Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου, και $(f_n)_{n\ge1}$, $f_n : X \to [-\infty, \infty]$, ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων.*

(i). (Θεώρημα Beppo-Levi) Αν f_n μη αρνητική για κάθε $n \in \mathbb{N}$, τότε

$$\int \Big(\sum_{n=1}^{\infty} f_n\Big) \,\mathrm{d}\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int f_n \,\mathrm{d}\mu. \tag{6.5}$$

(ii). Αν οι f_n παίρνουν τιμές στο $[-\infty, \infty]$ και $\sum_{n=1}^{\infty} \int |f_n| \,\mathrm{d}\mu < \infty$, τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ συγκλίνει σχεδόν παντού σε μία μετρήσιμη συνάρτηση με τιμές στο $\mathbb{R}$, ισχύει η (6.5), και τα δύο μέλη της είναι πραγματικοί αριθμοί.

Απόδειξη (*i*) Θέτουμε $g_n = \sum_{k=1}^{n} f_k$, για κάθε $n \ge 1$. Τότε η $(g_n)_{n\ge1}$ είναι αύξουσα ακολουθία μη αρνητικών συναρτήσεων, και αν $g = \sum_{k=1}^{\infty} f_k$, ισχύει ότι $\lim_{n\to\infty} g_n = g$. Επίσης, $\int g_n \,\mathrm{d}\mu = \sum_{k=1}^{n} \int f_k \,\mathrm{d}\mu$ λόγω γραμμικότητας. Το ζητούμενο προκύπτει από το Θεώρημα μοτότονης σύγκλισης (Θεώρημα 6.29).

(*ii*) Εφαρμόζουμε το (*i*) για την ακολουθία $(|f_n|)_{n\ge1}$. Τότε

$$\int \Big(\sum_{n=1}^{\infty} |f_n|\Big) \,\mathrm{d}\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int |f_n| \,\mathrm{d}\mu. \tag{6.6}$$

Όμως

$$\Big|\sum_{k=1}^{n} f_k\Big| \le \sum_{k=1}^{\infty} |f_k|$$

για κάθε $n \ge 1$, και από υπόθεση, η $g = \sum_{k=1}^{\infty} |f_k|$ έχει πεπερασμένο ολοκλήρωμα. Συνεπώς, εφαρμόζοντας το Θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης (Θεώρημα 6.31), έχουμε ότι

$$\int \Big(\sum_{n=1}^{\infty} f_n\Big) \,\mathrm{d}\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int f_n \,\mathrm{d}\mu,$$

και από την (6.6) και την Πρόταση 6.14(*iii*), ισχύει ότι η $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ παίρνει πραγματικές τιμές σχεδόν παντού. ■

Παρατήρηση 6.34 Οι σειρές $\sum_{n=1}^{\infty} f_n, \sum_{n=1}^{\infty} \int f_n \, d\mu$ στο (i) και η $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n|$ στο (ii) συγκλίνουν, με ενδεχόμενη τιμή το ∞, γιατί είναι σειρές μη αρνητικών όρων.

Παράδειγμα 6.35 (Ορισμός μέτρου μέσω πυκνότητας) Έστω $X \ge 0$ τυχαία μεταβλητή σε ένα χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$. Τότε η συνάρτηση $\mathbf{Q} : \mathcal{F} \to [0, \infty]$ με

$$\mathbf{Q}(A) := \mathbf{E}(X; A) = \int_A X \,\mathrm{d}\,\mathbf{P}$$

για κάθε $A \in \mathcal{F}$ είναι μέτρο. Επιπλέον, για $A \in \mathcal{F}$, ισχύει ότι αν $\mathbf{P}(A) = 0$, τότε $\mathbf{Q}(A) = 0$.

Πράγματι, η $\mathbf{Q}$ είναι μη αρνητική και $\mathbf{Q}(\emptyset) = \mathbf{E}(X\mathbf{1}_\emptyset) = \mathbf{E}(0) = 0$. Έπειτα, για $(A_n)_{n\ge1}$ ακολουθία ξένων ανα δύο στοιχείων της $\mathcal{F}$, έχουμε $\mathbf{1}_{\cup_{n=1}^{\infty} A_n} = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{1}_{A_n}$. Συνεπώς

$$\mathbf{Q}(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) = \mathbf{E}\Big(X \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{1}_{A_n}\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{E}(X\mathbf{1}_{A_n}) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{Q}(A_n).$$

Στη δεύτερη ισότητα χρησιμοποιούμε το Θεώρημα Beppo-Levi (Πόρισμα 6.33 (i)). Τέλος, αν $\mathbf{P}(A) = 0$, τότε $\mathbf{P}(X\mathbf{1}_A = 0) = 1$, και από την Πρόταση 6.16 (ii) έχουμε ότι $\mathbf{Q}(A) = \mathbf{E}(X\mathbf{1}_A) = 0$.

Παρατήρηση 6.36 Η τυχαία μεταβλητή X στο Παράδειγμα 6.35 λέγεται *πυκνότητα* του $\mathbf{Q}$ ως προς το μέτρο $\mathbf{P}$. Αν επιπλέον $\mathbf{E}(X) = 1$, το $\mathbf{Q}$ είναι μέτρο πιθανότητας στον $(\Omega, \mathcal{F})$, και η X λέγεται **παράγωγος Radon-Nikodym** του $\mathbf{Q}$ ως προς $\mathbf{P}$.

6.7 Κατανομή τυχαίας μεταβλητής

Ορισμός 6.37 Έστω $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ χώρος πιθανότητας, $(E, \mathcal{E})$ μετρήσιμος χώρος, και $X : \Omega \to E$ τυχαία μεταβλητή. Το μέτρο πιθανότητας $\mathbf{P}^X : \mathcal{E} \to [0,1]$ στον E με

$$\mathbf{P}^X(B) = \mathbf{P}\left(X^{-1}(B)\right) = \mathbf{P}(X \in B)$$

για κάθε $B \in \mathcal{E}$ λέγεται κατανομή της X.

Εύκολα ελέγχει κανείς ότι το $\mathbf{P}^X$ είναι μέτρο πιθανότητας στον $(E, \mathcal{E})$. Το $\mathbf{P}^X$ λέγεται και εικόνα του $\mathbf{P}$ μέσω της X.

Παρατήρηση 6.38 Αν $X : (\Omega, \mathcal{F}) \to \mathbb{R}$ τυχαία μεταβλητή, η κατανομή $\mathbf{P}^X$ της X είναι μέτρο πιθανότητας στον $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$. Η συνάρτηση κατανομής $\mathbf{F} : \mathbb{R} \to [0,1]$ του $\mathbf{P}^X$, η οποία υπενθυμίζουμε έχει τιμές

$$\mathbf{F}(t) = \mathbf{P}^X\left((-\infty, t]\right) = \mathbf{P}(X \leq t)$$

για κάθε $t \in \mathbb{R}$, λέγεται συνάρτηση κατανομής της X. Αν επιπλέον το $\mathbf{P}^X$ προκύπτει από πυκνότητα, έστω $f : \mathbb{R} \to [0, \infty]$, τότε η f λέγεται πυκνότητα της X.

Πρόταση 6.39 *Έστω $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ χώρος πιθανόητας, $(E, \mathcal{E})$ μετρήσιμος χώρος, και $X : \Omega \to E$ τυχαία μεταβλητή με κατανομή $\mathbf{P}^X$. Για κάθε $h : E \to [0, \infty]$ μετρήσιμη συνάρτηση ισχύει*

$$\mathbf{E}_{\mathbf{P}}\{h(X)\} = \mathbf{E}_{\mathbf{P}^X}(h) \ \Big(= \int h \, \mathrm{d}\,\mathbf{P}^X \Big). \tag{6.7}$$

Επίσης, αν $h : E \to [-\infty, \infty]$ μετρήσιμη, ή και τα δύο μέλη της (6.7) ορίζονται και είναι ίσα ή και τα δύο δεν ορίζονται.

Το αριστερό μέλος της (6.7) είναι η μέση τιμή της $h \circ X$ στο Ω ως προς το μέτρο $\mathbf{P}$ και το δεξί μέλος της (6.7) είναι η μέση τιμή της h στο E ως προς το μέτρο $\mathbf{P}^X$.

Απόδειξη Βήμα 1. Αν $h = \mathbf{1}_A$ με $A \in \mathcal{E}$, τότε $h(X(\omega)) = \mathbf{1}_{\{\omega : X(\omega) \in A\}}$. Δηλαδή,

$$h(X) = \mathbf{1}_{X^{-1}(A)}$$

με $X^{-1}(A) \in \mathcal{F}$. Έχουμε λοιπόν

$$\mathbf{E}_{\mathbf{P}}(\mathbf{1}_A(X)) = \mathbf{P}(X^{-1}(A)) = \mathbf{P}^X(A) = \mathbf{E}_{\mathbf{P}^X}(\mathbf{1}_A),$$

άρα η (6.7) ισχύει.

Βήμα 2. Αν η h είναι μη αρνητική απλή, τότε $h = \sum_{i=1}^n a_i \mathbf{1}_{A_i}$, με $a_i \in [0, \infty]$ και $A_i \in \mathcal{E}$, για κάθε $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Τότε

$$\mathbf{E}_{\mathbf{P}}(h(X)) = \mathbf{E}_{\mathbf{P}}\Big(\sum_{i=1}^n a_i \mathbf{1}_{A_i}(X)\Big) = \sum_{i=1}^n a_i \, \mathbf{E}_{\mathbf{P}}(\mathbf{1}_{A_i}(X)) = \sum_{i=1}^n a_i \, \mathbf{E}_{\mathbf{P}^X}(\mathbf{1}_{A_i}) = \mathbf{E}_{\mathbf{P}}\Big(\sum_{i=1}^n a_i \mathbf{1}_{A_i}\Big) = \mathbf{E}_{\mathbf{P}^X}(h).$$

Βημα 3. Αν $h \geq 0$ μετρήσιμη, τότε, απο την Πρόταση 5.12, υπάρχει αύξουσα ακολουθία $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ απλών συναρτήσεων με $\lim_{n\to\infty} h_n(x) = h(x)$ για κάθε $x \in \mathcal{E}$. Τότε $\lim_{n\to\infty} h_n(X(\omega)) = h(X(\omega))$ για κάθε $\omega \in \Omega$, και από το προηγούμενο βήμα

$$\mathbf{E}(h_n(X)) = \mathbf{E}_{\mathbf{P}^X}(h_n) \quad \text{για κάθε } n \in \mathbb{N}.$$

Για $n \to \infty$, από το Θεώρημα μονότονης σύγκλισης (Θεώρημα 6.29), έχουμε

$$\mathbf{E}_{\mathbf{P}}(h(X)) = \lim_{n\to\infty} \mathbf{E}_{\mathbf{P}}(h_n(X)) = \lim_{n\to\infty} \mathbf{E}_{\mathbf{P}^X}(h_n) = \mathbf{E}_{\mathbf{P}^X}(h).$$

Βημα 4. Αν h μετρήσιμη συνάρτηση με τιμές στο $[-\infty, \infty]$, τότε την γράφουμε ως $h = h^+ - h^-$. Από το προηγούμενο βήμα,

$$\mathbf{E}_{\mathbf{P}}(h^+(X)) = \mathbf{E}_{\mathbf{P}^X}(h^+), \tag{6.8}$$

$$\mathbf{E}_{\mathbf{P}}(h^-(X)) = \mathbf{E}_{\mathbf{P}^X}(h^-). \tag{6.9}$$

Το αριστερό μέλος της (6.7) δεν ορίζεται αν και μόνο αν το αριστερό μέλος των (6.8), (6.9) ισούται με ∞, ενώ το δεξί μέλος της (6.7) δεν ορίζεται αν και μόνο αν το δεξί μέλος των (6.8), (6.9) ισούται με ∞. Άρα ή και τα δύο μέλη της (6.7) ορίζονται ή και τα δύο δεν ορίζονται.

Τώρα, στην περίπτωση που και τα δύο μέλη της (6.7) ορίζονται, οι (6.8), (6.9) δίνουν

$$\mathbf{E}_{\mathbf{P}}(h(X)) = \mathbf{E}_{\mathbf{P}}(h^+(X)) - \mathbf{E}_{\mathbf{P}}(h^-(X)) = \mathbf{E}_{\mathbf{P}^X}(h^+) - \mathbf{E}_{\mathbf{P}^X}(h^-) = \mathbf{E}_{\mathbf{P}^X}(h).$$

■

6.8 Κατανομές στο $\mathbb{R}$ με πυκνότητα

Η Πρόταση 6.39 μας ενδιαφέρει κυρίως στην περίπτωση όπου $E = \mathbb{R}$ και η κατανομή της X προκύπτει από πυκνότητα. Ο επόμενος ορισμός γενικεύει την έννοια της πυκνότητας όπως αυτή δόθηκε στο Παράδειγμα 4.18. Πλέον η πυκνότητα δεν είναι απαραίτητο να είναι Riemann ολοκληρώσιμη.

Ορισμός 6.40 Έστω $\mathbf{P}$ μέτρο πιθανότητας στον $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$, λ το μέτρο Lebesgue (Παράδειγμα 2.4) και $f : \Omega \to [0, \infty]$ Borel μετρήσιμη συνάρτηση. Η f λέγεται πυκνότητα του $\mathbf{P}$ αν

$$\mathbf{P}(A) = \int_A f(x)\, \mathrm{d}\lambda(x) \quad \text{για κάθε } A \in \mathscr{B}(\mathbb{R}). \tag{6.10}$$

Η πυκνότητα ενός μέτρου (αν αυτό έχει) δεν είναι μοναδική. Δηλαδή, αν ένα μέτρο $\mathbf{P}$ έχει πυκνότητα f, τότε αλλάζοντας την f σε ένα σύνολο Borel που έχει μέτρο Lebesgue μηδεν, παίρνουμε μία νέα συνάρτηση $\tilde{f}$, η οποία είναι και αυτή πυκνότητα του $\mathbf{P}$. Αυτό έπεται από τον ορισμό της πυκνότητας και το Θεώρημα 6.14(i). Όμως ισχύει το εξής.

Πρόταση 6.41 *Αν δύο Borel μετρήσιμες συναρτήσεις f_1, f_2 είναι πυκνότητες για ένα μέτρο πιθανότητας $\mathbf{P}$ στο $\mathbb{R}$, τότε $\lambda(\{f_1 \neq f_2\}) = 0$.*

Απόδειξη Έστω το Borel σύνολο $A := \{f_1 - f_2 > 0\}$. Η $\mathbf{P}(A) = \int_A f_1 d\lambda = \int_A f_2 d\lambda$ δίνει

$$0 = \int_A (f_1 - f_2)\, d\lambda = \int (f_1 - f_2)\mathbf{1}_A\, d\lambda$$

Ισχύει $(f_1 - f_2)\mathbf{1}_A \geq 0$, και έτσι η Πρόταση 6.14(ii) δίνει ότι $\lambda((f_1 - f_2)\mathbf{1}_A \neq 0) = 0$. Όμως $\{(f_1 - f_2)\mathbf{1}_A \neq 0\} = A$. Επομένως $\lambda(\{f_1 > f_2\}) = 0$. Αλλάζοντας τους ρόλους των f_1, f_2 παίρνουμε $\lambda(\{f_1 < f_2\}) = 0$, και έτσι το ζητούμενο. ■

Συνδυάζοντας αυτή την πρόταση με το Θεώρημα 6.14(i), συμπεραίνουμε ότι για υπολογισμούς ολοκληρωμάτων ως προς το μέτρο λ που εμπλέκουν μια πυκνότητα του $\mathbf{P}$, οποιαδήποτε άλλη πυκνότητα του $\mathbf{P}$ δίνει το ίδιο αποτέλεσμα, και επομένως θεωρούμε την πυκνότητα ουσιαστικά μοναδική.

Η σχέση (6.10), για $A = \mathbb{R}$, δίνει ότι $\int_{\mathbb{R}} f\, d\lambda = 1$. Τώρα, αν έχουμε μία $f : [0,1] \to [0,\infty]$ που είναι Borel-μετρήσιμη με $\int_{\mathbb{R}} f\, d\lambda = 1$ τότε είναι ευκολο να δούμε ότι η (6.10) ορίζει ένα μέτρο πιθανότητας στο $\mathbb{R}$. Άρα πυκνότητες κατανομών στο $\mathbb{R}$ είναι ακριβώς οι μη αρνητικές Borel-μετρήσιμες συναρτήσεις στο $\mathbb{R}$ με ολοκλήρωμα 1 ως προς το μέτρο Lebesgue.

Ορισμός 6.42 Έστω $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ χώρος πιθανότητας, $X : \Omega \to \mathbb{R}$ τυχαία μεταβλητή και $f : \mathbb{R} \to [0,\infty]$ Borel μετρήσιμη συνάρτηση. Λέμε ότι η f είναι μία πυκνότητα της τυχαίας μεταβλητής X αν είναι πυκνότητα της κατανομής $\mathbf{P}^X$ της X.

Επιστρέφουμε στην ειδική περίπτωση της Πρότασης 6.39 όπου $E = \mathbb{R}$.

Πρόταση 6.43 *Έστω $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ χώρος πιθανότητας και $X : \Omega \to \mathbb{R}$ τυχαία μεταβλητή με πυκνότητα $f : \mathbb{R} \to [0,\infty]$. Αν η $h : \mathbb{R} \to [-\infty,\infty]$ είναι μετρήσιμη, τότε*

$$\mathbf{E}_{\mathbf{P}}(h(X)) = \mathbf{E}_{\mathbf{P}^X}(h) = \int h(x) f(x)\, \mathrm{d}x \tag{6.11}$$

αν $h \geq 0$ ή $\mathbf{E}(|h(X)|) < \infty$.

Αυτό που κατορθώνει αυτή η πρόταση είναι να ανάγει τον υπολογισμό μιας μέσης τιμής στο χώρο $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ αρχικά σε υπολογισμό στο χώρο $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}), \mathbf{P}^X)$, και τελικά σε ένα συνηθισμένο ολοκλήρωμα μίας μεταβλητής. Η τελευταία έκφραση στην (6.11) είναι ο τρόπος με τον οποίο υπολογίζαμε την μέση τιμή $\mathbf{E}\{h(X)\}$ για συνεχείς τυχαίες μεταβλητές στις στοιχειώδεις πιθανότητες.

Απόδειξη Αρκεί να δείξουμε τη δεύτερη ισότητα εφόσον η πρώτη έχει αποδειχθεί στην Πρόταση 6.39. Θα ακολουθήσουμε την ίδια μέθοδο με την απόδειξη εκείνης της πρότασης.

Αν $h = \mathbf{1}_A$ με $A \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$, τότε

$$\int h\, \mathrm{d}\mathbf{P}^X = \int \mathbf{1}_A\, \mathrm{d}\mathbf{P}^X = \mathbf{P}^X(A) = \mathbf{P}(X \in A) = \int_A f(x)\, \mathrm{d}x = \int \mathbf{1}_A(x) f(x)\, \mathrm{d}x = \int h(x) f(x)\, \mathrm{d}x.$$

Η τρίτη ισότητα είναι ο ορισμός της κατανομής $\mathbf{P}^X$. Η τέταρτη είναι ο ορισμός της πυκνότητας.

Αν $h \geq 0$ απλή μετρήσιμη, τότε λόγω γραμμικότητας, από τα προηγούμενα προκύπτει το ζητούμενο.

Αν $h \geq 0$ μετρήσιμη, τότε από την Πρόταση 5.12 υπάρχει αύξουσα ακολουθία $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ μη αρνητικών, απλών, μετρήσιμων συναρτήσεων με $\lim_{n \to \infty} h_n = h$. Άρα, σε συνδιασμό με το Θεώρημα μονότονης σύγκλισης (Θεώρημα 6.29), έχουμε

$$\int h\, \mathrm{d}\mathbf{P}^X = \lim_{n \to \infty} \int h_n\, \mathrm{d}\mathbf{P}^X = \lim_{n \to \infty} \int h_n(x) f(x)\, \mathrm{d}x = \int h(x) f(x)\, \mathrm{d}x.$$

Τέλος, αν h μετρήσιμη, από τα προηγούμενα έχουμε

$$\int h^+\, \mathrm{d}\mathbf{P}^X = \int h^+(x) f(x)\, \mathrm{d}x,$$
$$\int h^-\, \mathrm{d}\mathbf{P}^X = \int h^-(x) f(x)\, \mathrm{d}x,$$

και επομένως, αφού $h = h^+ - h^-$, έχουμε

$$\int h \,\mathrm{d}\,\mathbf{P}^X = \int h^+ \,\mathrm{d}\,\mathbf{P}^X - \int h^- \,\mathrm{d}\,\mathbf{P}^X = \int h^+(x) f(x)\,\mathrm{d}x - \int h^-(x) f(x)\,\mathrm{d}x = \int h(x) f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Όλα τα ολοκληρώματα στην τελευταία σχέση είναι πεπερασμένα αφού $\mathbf{E}(|h(X)|) < \infty$. ■

Παράδειγμα 6.44 Έστω $X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ τυχαία μεταβλητή με πυκνότητα $f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Η $\mathbf{E}(X)$ δεν ορίζεται. Πράγματι, από την Πρόταση 6.43, για τη συνάρτηση $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $h(a) = a^+$ για κάθε $a \in \mathbb{R}$, έχουμε

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(X^+) = \mathbf{E}(h(X)) &= \int h(x) f(x)\,\mathrm{d}x = \int x^+ f(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^\infty x \frac{1}{\pi(1+x^2)}\,\mathrm{d}x \ge \frac{1}{\pi}\int_1^\infty \frac{x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \\
&\ge \frac{1}{\pi}\int_1^\infty \frac{1}{2x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\int_1^\infty \frac{1}{x} \\
&= \infty.
\end{aligned}$$

Όμοια, $\mathbf{E}(X^-) = \infty$.

Ασκήσεις

6.1 Έστω X τυχαία μεταβλητή με κατανομή την κανονική $N(0,1)$. Για κάθε $x > 0$ να δειχθεί ότι

$$\frac{x}{x^2+1}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-x^2/2} \le \mathbf{P}(X > x) \le \frac{1}{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-x^2/2}. \tag{6.12}$$

Δηλαδή, για μεγάλο x, έχουμε $\mathbf{P}(X > x) \sim c x^{-1} e^{-x^2/2}$ με $c = 1/\sqrt{2\pi}$.

6.2 Έστω $(q_k)_{k\ge1}$ μιά αρίθμηση των ρητών του $(0,1)$. Ορίζουμε $f : \mathbb{R} \to [0,\infty]$ ως

$$f(x) = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2}\frac{1}{\sqrt{|x-q_n|}}.$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι το μέτρο Lebesgue των σημείων του $(0,1)$ στα οποία η f απειρίζεται είναι 0, δηλαδή ότι η f είναι σχεδόν παντού πεπερασμένη.

6.3 (Η αρχή εγκλεισμού-αποκλεισμού για πιθανότητες) Έστω $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathcal{F}$. Τότε,

$$\mathbf{P}(\cup_{i=1}^n A_i) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \sum_{1\le i_1<i_2<\cdots<i_k\le n} \mathbf{P}(A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap\cdots\cap A_{i_k}).$$

* 6.4 Αν $n \ge 1$ και τα $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathcal{F}$ ικανοποιούν $\mathbf{P}(A_1) + \cdots + \mathbf{P}(A_n) > k-1$, για κάποιο θετικό ακέραιο k, τότε υπάρχουν $1 \le i_1 < \ldots < i_k \le n$ με $\mathbf{P}(A_{i_1}\cap\cdots\cap A_{i_k}) > 0$.

6.5 Έστω X τυχαία μεταβλητή με τιμές στο $\mathbb{N}\cup\{\infty\}$. Να δείξετε ότι,

$$\mathbf{E}(X) = \sum_{k\ge1} \mathbf{P}(X \ge k).$$

6.6 Έστω X τυχαία μεταβλητή με τιμές στο $[0,\infty]$. Να δείξετε ότι

$$\sum_{k=1}^\infty \mathbf{P}(X\ge k) \le \mathbf{E}\,X \le 1 + \sum_{k=1}^\infty \mathbf{P}(X \ge k).$$

6.7 Έστω X τυχαία μεταβλητή με τιμές στο $[0,\infty)$, και $g:[0,\infty)\to[0,\infty)$ παραγωγίσιμη με συνεχή παράγωγο. Να δειχθεί ότι

$$\mathbf{E}(g(X)) = g(0) + \int_0^\infty g'(t)\,\mathbf{P}(X>t)\,dt.$$

Ειδικότερα, για $p>0$,

$$\mathbf{E}(X^p) = p\int_0^\infty t^{p-1}\,\mathbf{P}(X>t)\,dt.$$

* 6.8 Έστω X τυχαία μεταβλητή με τιμές στο $[0,\infty)$, και $\mathbf{E}(X)<\infty$. Έστω και $c>1$. Να δείξετε ότι

$$\sum_{k=1}^\infty c^k\,\mathbf{P}(X\ge c^k)<\infty.$$

6.9 Έστω X μή αρνητική τυχαία μεταβλητή με $0<\mathbf{E}\,X<\infty$ και $a\in(0,1)$. Τότε

(α)

$$\mathbf{P}(X\le a\,\mathbf{E}\,X)\le\frac{\mathrm{Var}(X)}{(1-a)^2(\mathbf{E}\,X)^2}.$$

*(β) (Ανισότητα Paley-Zygmund)

$$\mathbf{P}(X>a\,\mathbf{E}\,X)\ge(1-a)^2\frac{(\mathbf{E}\,X)^2}{\mathbf{E}(X^2)}.$$

6.10 Έστω X τυχαία μεταβλητή, και έστω ότι για κάποιο $a>0$ ισχύει $\mathbf{E}(e^{aX})<\infty$. Να δειχθεί ότι υπάρχει $C>0$ σταθερά ώστε για κάθε $t\in\mathbb{R}$ να ισχύει $\mathbf{P}(X>t)\le Ce^{-at}$. Δηλαδή η “ουρά” της X προς τα δεξιά φθίνει γρήγορα, τουλάχιστον με ταχύτητα e^{-at}.

* 6.11 Έστω X τυχαία μεταβλητή με τιμές στο $\mathbb{R}$ ώστε $\mathbf{E}(X^2)=\infty$. Να δειχθεί ότι

$$\lim_{M\to\infty}\frac{\{\mathbf{E}(X\mathbf{1}_{|X|\le M})\}^2}{\mathbf{E}(X^2\mathbf{1}_{|X|\le M})}=0.$$

6.12 Έστω X,Y τυχαίες μεταβλητές με τιμές στο $(0,\infty)$ ώστε $XY\ge1$ παντού. Να δειχθεί ότι

$$\mathbf{E}(X)\,\mathbf{E}(Y)\ge1.$$

Ειδικότερα

$$\mathbf{E}\left(\frac{1}{X}\right)\ge\frac{1}{\mathbf{E}(X)}.$$

6.13 (Η ανισότητα Jensen) Έστω X τυχαία μεταβλητή με τιμές σε ένα διάστημα $I\subset\mathbb{R}$, και $\phi:I\to\mathbb{R}$ κυρτή συνάρτηση. Αν οι $\mathbf{E}\,X,\mathbf{E}(\phi(X))$ ορίζονται και είναι πραγματικοί αριθμοί, τότε

$$\phi(\mathbf{E}\,X)\le\mathbf{E}(\phi(X)).$$

[Υπόδειξη: Έστω $a:=\mathbf{E}\,X$. Υπάρχει $\lambda\in\mathbb{R}$ ώστε $\phi(x)\ge\phi(a)+\lambda(x-a)$ για κάθε $x\in I$ (απειροστικός λογισμός). Θέτουμε όπου x την τ. μ. X.]

6.14 Έστω X τυχαία μεταβλητή με τιμές στο $[0,\infty)$. Τότε

$$(\mathbf{E}\,X)^p\begin{cases}\le\mathbf{E}(X^p) & \text{αν } p\ge1,\\ \ge\mathbf{E}(X^p) & \text{αν } 0\le p<1.\end{cases}$$

Αν οι $\mathbf{E}\,X,\mathbf{E}(\log X)$ ορίζονται και είναι πραγματικοί αριθμοί, τότε

$$\log\mathbf{E}\,X\ge\mathbf{E}(\log X).$$

6.15 Έστω X τυχαία μεταβλητή με τιμές στο $\mathbb{R}$. Να δείξετε ότι $\lim\limits_{n\to\infty}\mathbf{P}(|X|>n)=0$.

6.16 Έστω $X \in \mathcal{L}^1(\mathbf{P})$ και $E_n := \{|X| \geq n\}$. Να δείξετε ότι $n\,\mathbf{P}(E_n) \to 0$.

6.17 Έστω X τυχαία μεταβλητή με τιμές στο $[0, \infty]$. Να δείξετε ότι

(α)

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{1}{\varepsilon}\,\mathbf{E}(X; X < \varepsilon) = 0,$$

(β)

$$\lim_{M \to \infty} \frac{1}{M}\,\mathbf{E}(X; X < M) = 0.$$

6.18 Έστω $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ χώρος πιθανότητας, και X, $\mathbf{Q}$ όπως στο Παράδειγμα 6.35. Αν $Y : \Omega \to \mathbb{R}$ τυχαία μεταβλητή, να δείξετε ότι

$$\mathbf{E}_{\mathbf{Q}}(Y) = \mathbf{E}_{\mathbf{P}}(YX)$$

για $Y \geq 0$ και για Y με $\mathbf{E}_{\mathbf{P}}(|Y|X) < \infty$.

7

Είδη σύγκλισης τυχαίων μεταβλητών

Έστω $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία τυχαίων μεταβλητών σε χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, με τιμές στο $[-\infty, \infty]$. Από την απειροστικό λογισμό ή την πραγματική ανάλυση, γνωρίζουμε δύο βασικά είδη σύγκλισης της ακολουθίας $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$, την κατά σημείο και την ομοιόμορφη. Για ακολουθίες τυχαίων μεταβλητών, θα ορίσουμε κάποιες νέες, φυσιολογικές έννοιες σύγκλισης ως προς τις οποίες μια ακολουθία είναι ευκολότερο να συγκλίνει, και οι οποίες είναι χρήσιμες στις εφαρμογές των πιθανοτήτων στην Στατιστική και αλλού.

Ορισμός 7.1 Έστω $(X_n)_{n\in\mathbb{R}}$ ακολουθία τυχαίων μεταβλητών όπως πιο πάνω.

(i). Λέμε ότι η $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει σε μία τυχαία μεταβλητή X με πιθανότητα 1 ή σχεδόν βέβαια, και γράφουμε $X_n \overset{\sigma.\beta}{\to} X$, αν

$$\mathbf{P}\left(\lim_{n\to\infty} X_n = X\right) = 1,$$

δηλαδή

$$\mathbf{P}\left(\{\omega : \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)\}\right) = 1.$$

(ii). Για $p > 0$ και $X_n, X \in \mathcal{L}^p$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, λέμε ότι η $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει στην X στον $\mathcal{L}^p$, και γράφουμε $X_n \overset{\mathcal{L}^p}{\to} X$, αν

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{E}(|X_n - X|^P) = 0.$$

(iii). Λέμε ότι η $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει στην X κατά πιθανότητα, και γράφουμε $X_n \overset{\mathbf{P}}{\to} X$, αν

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(|X_n - X| > \epsilon) = 0$$

για κάθε $\epsilon > 0$.

Αν $X_n \to X$ κατά σημείο, τότε εύκολα βλέπουμε ότι $X_n \overset{\sigma.\beta.}{\to} X$. Στο επόμενο θεώρημα, βλέπουμε επίσης ότι η σχεδόν βέβαια σύγκλιση και η σύγκλιση κατά $\mathcal{L}^p$ είναι ισχυρότερες της σύγκλισης κατά πιθανότητα.

Θεώρημα 7.2 *Έστω X, $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ τυχαίες μεταβλητές και $p \geq 1$.*

(i). Αν $X_n \overset{\mathcal{L}^p}{\to} X$, τότε $X_n \overset{\mathbf{P}}{\to} X$.
(ii). Αν $X_n \overset{\sigma.\beta.}{\to} X$, τότε $X_n \overset{\mathbf{P}}{\to} X$.

Απόδειξη Έστω $\epsilon > 0$.

(*i*). Για κάθε $n \in \mathbb{N}$, χρησιμοποιώντας την ανισότητα του Markov, έχουμε

$$\mathbf{P}(|X_n - X| > \epsilon) = \mathbf{P}(|X_n - X|^p > \epsilon^p)|) \leq \frac{1}{\epsilon^p}\mathbf{E}(|X_n - X|^p).$$

Για $n \to \infty$ προκύπτει το ζητούμενο.

(ii). Για κάθε $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathbf{P}(|X_n - X| > \epsilon) = \mathbf{E}(\mathbf{1}_{|X_n - X| > \epsilon}) = \mathbf{E}(g_n),$$

όπου $g_n = \mathbf{1}_{|X_n - X| > \epsilon}$. Η $X_n \overset{\sigma.\beta.}{\to} X$ δίνει $g_n \overset{\sigma.\beta}{\to} 0$. Επίσης $|g_n| \leq 1$, άρα από το Θεώρημα Φραγμένης Σύγκλισης,

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{E}(g_n) = \mathbf{E}(\lim_{n\to\infty} g_n) = 0.$$

■

Παράδειγμα 7.3 (i). Έστω $\Omega = [0,1]$, $\mathcal{F} = \mathscr{B}([0,1])$ και $\mathbf{P} = \lambda|_{[0,1]}$, όπου λ το μέτρο Lebesgue στον $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$. Θεωρούμε την τυχαία μεταβλητή $X = 0$, και για $n \in \mathbb{N}$, την τυχαία μεταβλητή

$$X_n(\omega) = \begin{cases} n & \text{αν } \omega \in (0, \frac{1}{n}), \\ 0 & \text{αν } \omega \in [0,1] \backslash (0, \frac{1}{n}). \end{cases}$$

Τότε $X_n(\omega) \to X(\omega)$ για κάθε $\omega \in \Omega$, άρα $X_n \overset{\sigma.\beta}{\to} X$. Επιπλέον, $X_n \overset{\mathbf{P}}{\to} X$. Όμως $X_n \overset{\mathcal{L}^p}{\nrightarrow} X$. Πράγματι,

$$\mathbf{E}(|X_n - X|) = \mathbf{E}(|X_n|) = n\,\mathbf{P}(X_n = n) + 0\,\mathbf{P}(X_n = 0) = n\frac{1}{n} = 1.$$

(ii). Έστω $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ όπως πριν. Για κάθε $k \in \mathbb{N}$ χωρίζουμε το $[0,1]$ σε 2^k διαδοχικά κλειστά διαστήματα ίδιου μήκους, $J_1^k, J_1^k, \ldots, J_{2^k}^k$. Αριθμούμε τα $\{J_r^k : k \geq 1, 1 \leq r \leq 2^k\}$ σε μία ακολουθία $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ώστε το $J_{r_1}^\mu$ εμφανίζεται νωρίτερα από το $J_{r_2}^\nu$ αν $\mu < \nu$ ή αν $\mu = \nu$ και $r_1 < r_2$. Θεωρούμε την τυχαία μεταβλητή $X_n = \mathbf{1}_{I_n}$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Τότε, για $p \geq 1$,

$$\mathbf{E}(|X_n - 0|^p) = \mathbf{E}(|X_n|^p) = \mathbf{P}(I_n) \to 0 \text{ για } n \to \infty.$$

Άρα $X_n \overset{\mathcal{L}^p}{\to} 0$. Συνεπώς, $X_n \overset{\mathbf{P}}{\to} 0$. Όμως, η X_n δεν συγκλίνει σε κάποια τυχαία μεταβλητή σχεδόν βέβαια. Πράγματι,

$$\underline{\lim}\, X_n(\omega) = 0 < 1 = \overline{\lim}\, X_n(\omega)$$

για κάθε $\omega \in \Omega$. Άρα $\mathbf{P}(\lim_{n\to\infty} X_n \text{ υπάρχει}) = 0$.

Θεώρημα 7.4 *Έστω $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^+}$ ακολουθία τυχαίων μεταβλητών και X τυχαία μεταβλητή έτσι ώστε $X_n \overset{\mathbf{P}}{\to} X$. Τότε υπάρχει υπακολουθία $(X_{k_n})_{n\in\mathbb{N}^+}$ έτσι ώστε $X_{k_n} \overset{\sigma.\beta.}{\to} X$.*

Απόδειξη Επιλέγουμε αναδρομικά γνησίως αύξουσα ακολουθία φυσικών, $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$, έτσι ώστε

$$\mathbf{P}\left(|X_{k_n} - X| > \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{2^n}$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}^+$. Αυτό είναι δυνατόν γιατί $X_n \overset{\mathbf{P}}{\to} X$. Θεωρούμε το σύνολο $A_n = \{|X_{k_n} - X| > 1/n\}$, $n \in \mathbb{N}^+$. Τότε

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}(A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} < \infty.$$

Από το 1ο Λήμμα Borel-Cantelli, $\mathbf{P}(\limsup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = 0$.

Τότε το σύνολο $\Omega \backslash \limsup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ έχει πιθανότητα 1, και για $\omega \in \Omega \backslash \limsup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ υπάρχει $n(\omega) \in \mathbb{N}$ έτσι ώστε για κάθε $n \geq n(\omega)$ να ισχύει $\omega \notin A_n$, δηλαδή $|X_{k_n}(\omega) - X(\omega)| \leq 1/k$, συνεπώς $X_{k_n}(\omega) \to X(\omega)$. Άρα $X_{k_n} \overset{\sigma.\beta.}{\to} X$. ■

Θεώρημα 7.5 *Έστω $p \geq 1$ και $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$, X όπως στο Θεώρημα 7.4 με την επιπλέον υπόθεση ότι υπάρχει $Y \in \mathcal{L}^p$ ώστε $|X_n| \leq Y$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Τότε $X \in \mathcal{L}^p$ και $X_n \overset{\mathcal{L}^p}{\to} X$.*

Απόδειξη Από το Θεώρημα 7.4 υπάρχει υπακολουθία $(X_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ τέτοια ώστε $X_{k_n} \overset{\sigma.\beta.}{\to} X$. Συνεπώς,

$$\mathbf{E}(|X|^p) = \mathbf{E}(\lim_{n\to\infty} |X_{k_n}|^p) \leq \varliminf_{n\to\infty} \mathbf{E}(|X_{k_n}|^p) \leq \mathbf{E}(|Y|^p),$$

σύμφωνα με το Λήμμα Fatou. Άρα $X \in \mathcal{L}^p$.

Έστω ότι $X_n \overset{\mathcal{L}^p}{\nrightarrow} X$. Τότε υπάρχει $\epsilon > 0$ και υπακολουθία $(X_{\lambda_n})_{n\in\mathbb{N}}$ έτσι ώστε,

$$\mathbf{E}(|X_{\lambda_n} - X|^p) \geq \epsilon, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{7.1}$$

Εφόσον $X_{\lambda_n} \overset{\mathbf{P}}{\to} X$, από το Θεώρημα 7.4, υπάρχει υπακολουθία $(X_{\lambda_{n_k}})_{k\in\mathbb{N}}$ της $(X_{\lambda_n})_{n\in\mathbb{N}}$ έτσι ώστε $X_{\lambda_{n_k}} \overset{\sigma.\beta.}{\to} X$. Βεβαίως $|X| \leq Y$. Για κάθε $k \in \mathbb{N}$, έστω $Z_k = |X_{\lambda_{n_k}} - X|^p$. Η ακολουθία $(Z_k)_{k\geq 1}$ συγκλίνει στο 0 σχεδόν βεβαίως, και επειδή [1]

$$|Z_k| \leq 2^p(|X_{\lambda_{n_k}}|^p + |X|^p) \leq 2^p \cdot 2 \cdot Y^p,$$

κυριαρχείται από την $2^{p+1}Y^p$ που έχει πεπερασμένη μέση τιμή αφού $Y \in \mathcal{L}^p$. Από το Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης,

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{E}(Z_n) = \mathbf{E}(\lim_{n\to\infty} Z_n) = 0,$$

το οποίο συγκρούεται με την (7.1). Συνεπώς, $X_n \overset{\mathcal{L}^p}{\to} X$. ■

Θεώρημα 7.6 *Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση, και $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$, X τυχαίες μεταβλητές.*

(i). Αν $X_n \overset{\sigma.\beta.}{\to} X$, τότε $f(X_n) \overset{\sigma.\beta}{\to} f(X)$.
(ii). Αν $X_n \overset{\mathbf{P}}{\to} X$, τότε $f(X_n) \overset{\mathbf{P}}{\to} f(X)$.

Απόδειξη (i) Έστω $A = \{\omega : X_n(\omega) \to X(\omega)\}$. Τότε $\mathbf{P}(A) = 1$, και για $\omega \in A$ ισχύει ότι $f(X_n(\omega)) \to f(X(\omega))$ εφόσον η f είναι συνεχής. Άρα, αν $B = \{\omega : f(X_n(\omega)) \to f(X(\omega))\}$ έχουμε ότι $A \subset B$, συνεπώς $\mathbf{P}(B) = 1$, από το οποίο προκύπτει το ζητούμενο.

(ii) Έστω ότι $f(X_n) \overset{\mathbf{P}}{\nrightarrow} f(X)$. Τότε υπάρχουν $\epsilon > 0$, $\delta > 0$, και γνήσια αύξουσα ακολουθία $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ έτσι ώστε $\mathbf{P}(|f(X_{k_n}) - f(X)| > \epsilon) \geq \delta$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\mathbf{P}(|f(X_n) - f(X)| > \epsilon) \geq \delta$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, διαφορετικά δουλεύουμε όμοια με την ακολουθία τυχαίων μεταβλητών $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, όπου $Y_n = X_{k_n}$.

Εφόσον $X_n \overset{\mathbf{P}}{\to} X$, από το Θεώρημα 7.4 υπάρχει υπακολουθία $(X_{\lambda_n})_{n\in\mathbb{N}}$ της $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ έτσι ώστε $X_{\lambda_n} \overset{\sigma.\beta.}{\to} X$. Από το (i), $f(X_{\lambda_n}) \overset{\sigma.\beta.}{\to} f(X)$, άρα $f(X_{\lambda_n}) \overset{\mathbf{P}}{\to} f(X)$ το οποίο είναι άτοπο εφόσον $\mathbf{P}(|f(X_{\lambda_n}) - f(X)| > \epsilon) \geq \delta$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Συνεπώς, $f(X_n) \overset{\mathbf{P}}{\to} f(X)$. ■

[1] Χρησιμοποιούμε το ότι $|a + b|^p \leq \{2\max(|a|, |b|)\}^p \leq 2^p(|a|^p + |b|^p)$.

Ασκήσεις

7.1 Έστω $(X_n)_{n\geq 1}$ ακολουθία τυχαίων μεταβλητών. Για $\varepsilon > 0$ και $n \geq 1$ θέτουμε $A_n^{\varepsilon} := \{|X_n| \geq \varepsilon\}$. Να δείξετε ότι τα εξής είναι ισοδύναμα:

(α) $\mathbf{P}(\lim_{n\to\infty} X_n = 0) = 1$.

(β) $\mathbf{P}(\limsup_n A_n^{\varepsilon}) = 0$, για κάθε $\varepsilon > 0$.

8

Ανεξαρτησία

8.1 Ανεξαρτησία για οικογένειες συνόλων και τυχαίες μεταβλητές

Στην παράγραφο αυτή δουλεύουμε σε χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$.

Δίνουμε κατ' αρχάς τον ορισμό της ανεξαρτησίας για ενδεχόμενα, σύνολα ενδεχομένων, και τυχαίες μεταβλητές.

Ορισμός 8.1 Έστω $(A_i)_{i \in I}$ στοιχεία της $\mathcal{F}$. Τα $(A_i)_{i \in I}$ λέγονται *ανεξάρτητα* αν για κάθε $J \subset I$ πεπερασμένο ισχύει ότι

$$\mathbf{P}\left(\cap_{i \in J} A_i\right) = \prod_{i \in J} \mathbf{P}(A_i). \tag{8.1}$$

Η τομή και το γινόμενο στην τελευταία ισότητα έχουν πεπερασμένο πλήθος όρους.

Ορισμός 8.2 Έστω $(\mathcal{F}_i)_{i \in I}$ οικογένεια συνόλων έτσι ώστε $\mathcal{F}_i \subset \mathcal{F}$ για κάθε $i \in I$. Τα $(\mathcal{F}_i)_{i \in I}$ λέγονται **ανεξάρτητα** αν για κάθε $J \subset I$ πεπερασμένο και $A_i \in \mathcal{F}_i$ για κάθε $i \in J$ ισχύει η (8.1).

Ορισμός 8.3 Έστω $\{(E_i, \mathcal{E}_i) : i \in I\}$ μετρήσιμοι χώροι και $(X_i)_{i \in I}$ οικογένεια τυχαίων μεταβλητών με $X_i : \Omega \to E_i$ για κάθε $i \in I$. Οι $(X_i)_{i \in I}$ λέγονται **ανεξάρτητες** αν οι αντίστοιχες σ-άλγεβρες $(\sigma(X_i))_{i \in I}$ είναι ανεξάρτητες.

Παρατήρηση 8.4 Ο Ορισμός 8.3, σύμφωνα με τον Ορισμό 8.2, απαιτεί

$$\mathbf{P}(X_{i_1} \in A_{i_1}, X_{i_2} \in A_{i_2}, \ldots, X_{i_n} \in A_{i_n}) = \mathbf{P}(X_{i_1} \in A_{i_1}) \mathbf{P}(X_{i_2} \in A_{i_2}) \cdots \mathbf{P}(X_{i_n} \in A_{i_n}) \tag{8.2}$$

για κάθε $n \geq 2$, κάθε επιλογή δεικτών $i_1, i_2, \ldots, i_n \in I$, και κάθε $A_{i_1} \in \mathcal{E}_{i_1}, \ldots, A_{i_n} \in \mathcal{E}_{i_n}$ αφού κάθε στοιχείο μίας $\sigma(X_i)$ είναι της μορφής $X_i^{-1}(A_i) = \{X_i \in A_i\}$ με $A_i \in \mathcal{E}_i$. Το ενδεχόμενο στο αριστερό μέλος της τελευταίας σχέσης είναι συντομογραφία του ενδεχομένου $X_{i_1}^{-1}(A_{i_1}) \cap X_{i_2}^{-1}(A_{i_2}) \cap \cdots \cap X_{i_n}^{-1}(A_{i_n})$.

Σύμβαση. Στο εξής, όποτε λέμε ότι κάποιες τυχαίες μεταβλητές είναι ανεξάρτητες, θα εννοούμε ότι ορίζονται στον ίδιο χώρο πιθανότητας, δηλαδή έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού. Αυτό είναι αναγκαία συνθήκη ώστε να έχει νόημα η πιθανότητα στο αριστερό μέλος της (8.2).

Παράδειγμα 8.5 (Δυό ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές) Θεωρούμε το πείραμα δύο ρίψεων ενός νομίσματος που φέρνει κορόνα με πιθανότητα p. Εδώ, ο δειγματικός μας χώρος είναι ο $\Omega = \{K, \Gamma\} \times \{K, \Gamma\}$, και σ-άλγεβρα η $\mathcal{F} = \mathscr{P}(A)$. Για $\omega \in \Omega$ θέτουμε

$$p_\omega = \begin{cases} p(1-p) & \text{αν } \omega = (K, \Gamma) \text{ ή } (\Gamma, K), \\ p^2 & \text{αν } \omega = (K, K), \\ (1-p)^2 & \text{αν } \omega = (\Gamma, \Gamma). \end{cases}$$

Έστω $\mathbf{P}$ το μοναδικό μέτρο πιθανότητας στην $\mathcal{F}$ με $\mathbf{P}(\omega) = p_\omega$. Έστω $E = \{K, \Gamma\}$ και $\mathcal{E} = \mathscr{P}(E)$. Θεωρούμε τις τυχαίες μεταβλητές $X, Y : \Omega \to E$, με $X\big((x,y)\big) = x$ και $Y\big((x,y)\big) = y$. Τότε, η X είναι η ένδειξη της πρώτης ρίψης και η Y η ένδειξη της δεύτερης.

Ισχυρισμος: Οι X, Y είναι ανεξάρτητες.

Θα δείξουμε ότι για κάθε $A, B \in \mathcal{E}$ ισχύει

$$\mathbf{P}(X \in A, Y \in B) = \mathbf{P}(X \in A)\,\mathbf{P}(Y \in B). \tag{8.3}$$

- Αν $A = \emptyset$ ή $B = \emptyset$, η (8.3) ισχύει.
- Αν $A = \{K, \Gamma\}$, τότε $\{X \in A, Y \in B\} = \{Y \in B\}$, και $\mathbf{P}(X \in A) = 1$. Άρα η (8.3) πάλι ισχύει.
- Αν $B = \{K, \Gamma\}$, η (8.3) αποδεικνύεται όμοια.

Τέλος, μένουν οι περιπτώσεις που τα A, B είναι μονοσύνολα. Για παράδειγμα, αν $A = \{K\}$ και $B = \{\Gamma\}$, έχουμε

$$\mathbf{P}(X = K, Y = \Gamma) = \mathbf{P}(\{(K,\Gamma),(K,K)\} \cap \{(K,\Gamma),(\Gamma,\Gamma)\}) = \mathbf{P}(\{K,\Gamma\}) = p(1-p).$$

Όμως

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\{(K,\Gamma),(K,K)\}) &= p(1-p) + pp = p \\ \mathbf{P}(\{(K,\Gamma),(\Gamma,\Gamma)\}) &= p(1-p) + (1-p)^2 = 1-p. \end{aligned}$$

Πολλαπλασιάζοντας κατά μέλη έχουμε ότι

$$\mathbf{P}(\{(K,\Gamma),(K,K)\})\,\mathbf{P}(\{(K,\Gamma),(\Gamma,\Gamma)\}) = p(1-p),$$

και έτσι η (8.3) ισχύει πάλι.

Όμοια αποδεικνύονται και οι υπόλοιπες περιπτώσεις όπου τα A, B είναι μονοσύνολα.

Το επόμενο θεώρημα διευκολύνει τον έλεγχο ανεξαρτησίας δύο τυχαίων μεταβλητών.

Θεώρημα 8.6 *Έστω $(E, \mathcal{E})$, $(G, \mathcal{G})$ μετρήσιμοι χώροι και $X : \Omega \to E$, $Y : \Omega \to G$ τυχαίες μεταβλητές. Θεωρούμε τη σχέση*

$$\mathbf{P}(X \in A, Y \in B) = \mathbf{P}(X \in A)\,\mathbf{P}(Y \in B). \tag{$*$}$$

Τα εξής είναι ισοδύναμα:

(i). Οι X, Y είναι ανεξάρτητες.
(ii). Η $(*)$ ισχύει για κάθε $A \in \mathcal{E}$ και $B \in \mathcal{G}$.
(iii). Η $(*)$ ισχύει για κάθε $A \in \mathcal{C}$, $B \in \mathcal{D}$, όπου $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ οικογένειες κλειστές στις πεπερασμένες τομές με $\sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{E}$, $\sigma(\mathcal{D}) = \mathcal{G}$.

Σημαντική είναι η ισοδυναμία των (i) και (iii). Δηλαδή αρκεί να ελέγξουμε την $(*)$ για λιγότερα σύνολα ώστε να διαπιστώσουμε την ανεξαρτησία των X, Y.

Απόδειξη Η (ii) είναι αναδιατύπωση του ορισμού της ανεξαρτησίας, και συνεπάγεται την (iii) προφανώς. Μένει να δείξουμε ότι η (iii) συνεπάγεται την (ii).

Έστω $A \in \mathcal{C}$, και

$$\mathcal{D}_1(A) := \{B \in \mathcal{G} : \text{ η } (*) \text{ ισχύει για τα } A, B\}.$$

Έχουμε ότι $\mathcal{D} \subset \mathcal{D}_1(A)$ από υπόθεση, και η $\mathcal{D}_1(A)$ είναι κλάση Dynkin (Άσκηση 3.1). Άρα $\delta(\mathcal{D}) \subset \mathcal{D}_1(A)$.

Επειδή η $\mathcal{D}$ είναι κλειστή στις πεπερασμένες τομές, το Θεώρημα μονότονης κλάσης δίνει ότι $\sigma(\mathcal{D}) = \delta(\mathcal{D})$. Άρα $\sigma(\mathcal{D}) \subset \mathcal{D}_1(A)$, δηλαδή η $(*)$ ισχύει για κάθε $A \in \mathcal{C}$ και $B \in \mathcal{G}$. Τώρα για $B \in \mathcal{G}$ θέτουμε

$$\mathcal{D}_2(B) := \{A \in \mathcal{E} : \text{ η } (*) \text{ ισχύει για τα } A, B\}.$$

Όμοια όπως με το $\mathcal{D}_1(A)$, δείχνουμε ότι $\mathcal{D}_2(B) = \mathcal{E}$, και έτσι αποδείχθηκε η (ii). ■

Στις στοιχειώδεις πιθανότητες μαθαίνουμε (χωρίς απόδειξη) ότι δύο τυχαίες μεταβλητές X, Y είναι ανεξάρτητες αν και μόνο αν η από κοινού συνάρτηση κατανομή τους, $F_{X,Y}$, γράφεται ως $F_{X,Y}(x, y) = F_X(y)F_Y(y)$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$. Τώρα είμαστε σε θέση να το αποδείξουμε.

Πόρισμα 8.7 *Έστω $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ τυχαίες μεταβλητές. Τότε οι X, Y είναι ανεξάρτητες αν και μόνο αν*

$$\mathbf{P}(X \le x, Y \le y) = \mathbf{P}(X \le x)\,\mathbf{P}(Y \le y)$$

για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$.

Απόδειξη Προκύπτει από το Θεώρημα 8.6 αν πάρουμε $\mathcal{C} = \mathcal{D} = \{(-\infty, a] : a \in \mathbb{R}\}$. ■

Θεώρημα 8.8 *Έστω X, Y όπως στη διατύπωση του Θεωρήματος 8.6. Τα εξής είναι ισοδύναμα:*

(i). *Οι X, Y είναι ανεξάρτητες.*

(ii). *Οι $f(X), g(Y)$ είναι ανεξάρτητες, για κάθε $f : E \to \mathbb{R}$, $g : G \to \mathbb{R}$ μετρήσιμες.*

(iii).

$$\mathbf{E}\{f(X)g(Y)\} = \mathbf{E}(f(X))\,\mathbf{E}(g(Y)) \tag{8.4}$$

για κάθε $f : E \to [-\infty, \infty]$, $g : G \to [-\infty, \infty]$ μετρήσιμες που είναι μη αρνητικές ή ικανοποιούν $\mathbf{E}\,|f(X)|, \mathbf{E}\,|g(Y)| < \infty$.

Απόδειξη $(i) \Rightarrow (ii)$ Έστω $A, B \in \mathbb{R}$. Τότε,

$$\mathbf{P}(f(X) \in A, g(Y) \in B) = \mathbf{P}(X \in f^{-1}(A), Y \in g^{-1}(B))$$

και εφόσον οι X, Y είναι ανεξάρτητες και $f^{-1}(A) \in \mathcal{E}, g^{-1}(B) \in \mathcal{G}$, έχουμε ότι

$$\mathbf{P}(X \in f^{-1}(A), Y \in g^{-1}(B)) = \mathbf{P}(X \in f^{-1}(A))\,\mathbf{P}(Y \in g^{-1}(B)).$$

Όμως

$$\mathbf{P}(X \in f^{-1}(A))\,\mathbf{P}(Y \in g^{-1}(B)) = \mathbf{P}(f(X) \in A)\,\mathbf{P}(g(Y) \in B),$$

από το οποίο προκύπτει το ζητούμενο.

$(ii) \Rightarrow (i)$ Εφαρμόζουμε το (ii) για $f = \mathbf{1}_A$ και $g = \mathbf{1}_B$.

$(iii) \Rightarrow (i)$ Αποδεικνύεται όπως η $(ii) \Rightarrow (i)$.

$(i) \Rightarrow (iii)$ Θα δείξουμε την (8.4) σταδιακά με τον γνωστό τρόπο.
Αν $f = \mathbf{1}_A$ και $g = \mathbf{1}_B$, όπου $A \in \mathcal{E}$, $B \in \mathcal{G}$, έχουμε ότι

$$\mathbf{E}(f(X)g(Y)) = \mathbf{E}(\mathbf{1}_{X\in A}\mathbf{1}_{Y\in B}) = \mathbf{E}(\mathbf{1}_{\{X\in A\}\cap\{Y\in B\}}) = \mathbf{P}(X \in A, Y \in B).$$

Όμως οι X, Y είναι ανεξάρτητες, άρα

$$\mathbf{P}(X \in A, Y \in B) = \mathbf{P}(X \in A)\,\mathbf{P}(Y \in B) = \mathbf{E}(\mathbf{1}_{X\in A})\,\mathbf{E}(\mathbf{1}_{Y\in B}),$$

και έτσι προκύπτει η (8.4) για τις συγκεκριμένες f, g.

Αν $f, g \geq$ απλές μετρήσιμες, έστω

$$f = \sum_{i=1}^{m} a_i \mathbf{1}_{A_i}, \quad g = \sum_{j=1}^{n} b_j \mathbf{1}_{B_j},$$

σε κανονική μορφή, όπου $A_i \in \mathcal{E}$, $B_j \in \mathcal{G}$, τότε

$$\mathbf{E}(f(X)g(Y)) = \mathbf{E}\Big(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_i b_j \mathbf{1}_{A_i}(X)\mathbf{1}_{B_j}(Y)\Big).$$

Και λόγω γραμμικότητας, η τελευταία μέση τιμή ισούται με

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_i b_j\, \mathbf{E}(\mathbf{1}_{A_i}(X))\, \mathbf{E}(\mathbf{1}_{B_j}(Y)) = \mathbf{E}(f(X))\, \mathbf{E}(g(Y)).$$

Αν $f, g \geq 0$ μετρήσιμες, τότε υπάρχουν αύξουσες ακολουθίες $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ και $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μη αρνητικών απλών συναρτήσεων έτσι ώστε

$$\lim_{n\to\infty} r_n = f, \quad \lim_{n\to\infty} s_n = g.$$

Συνεπώς, από τα προηγούμενα, έχουμε ότι

$$\mathbf{E}(r_n(X)s_n(Y)) = \mathbf{E}(r_n(X))\, \mathbf{E}(s_n(Y)) \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Επειδή οι ακολουθίες $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ και $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι αύξουσες, για $n \to \infty$, από το Θεώρημα Μονότονης Σύγκλισης έχουμε ότι

$$\mathbf{E}(f(X)g(Y)) = \mathbf{E}(f(X))\, \mathbf{E}(g(Y)).$$

Δηλαδή η (8.4) ισχύει για τις f, g.

Τέλος, αν οι f, g είναι μετρήσιμες με $\mathbf{E}\,|f(X)|, \mathbf{E}\,|g(Y)| < \infty$, έχουμε

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\{f(X)g(Y)\} &= \mathbf{E}\{(f^+(X) - f^-(X))(g^+(Y) - g^-(Y))\} \\
&= \mathbf{E}\{f^+(X)g^+(Y)\} - \mathbf{E}\{f^+(X)g^-(Y)\} - \mathbf{E}\{f^-(X)g^+(Y)\} + \mathbf{E}\{f^-(X)g^-(Y)\} \\
&= \mathbf{E}(f^+(X))\, \mathbf{E}(g^+(Y)) - \mathbf{E}(f^+(X))\, \mathbf{E}(g^-(Y)) - \mathbf{E}(f^-(X))\, \mathbf{E}(g^+(Y)) + \mathbf{E}(f^-(X))\, \mathbf{E}(g^-(Y)) \\
&= \mathbf{E}(f(X))\, \mathbf{E}(g(Y)).
\end{aligned}$$

Στην τρίτη ισότητα χρησιμοποιήσαμε το ότι η (8.4) ισχύει για μη αρνητικές μετρήσιμες. Επίσης στον τελευταίο υπολογισμό δεν εμφανίζεται πουθενά κάποια απροσδιόριστη μορφή $\infty - \infty$ γιατί οι f, g ικανοποιούν $\mathbf{E}\,|f(X)|, \mathbf{E}\,|g(Y)| < \infty$. ■

Πόρισμα 8.9 *Έστω $X, Y : \Omega \to [-\infty, \infty]$ ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές μη αρνητικές ή με $\mathbf{E}\,|X|, \mathbf{E}\,|Y| < \infty$. Τότε*

$$\mathbf{E}(XY) = \mathbf{E}(X)\, \mathbf{E}(Y).$$

Απόδειξη Αν $X, Y \geq 0$ εφαρμόζουμε το Θεώρημα 8.8 για

$$f(x) = g(x) = \begin{cases} x & \text{αν } x \in [0, \infty], \\ 0 & \text{αν } x < 0. \end{cases}$$

Στην περίπτωση που $\mathbf{E}\,|X|, \mathbf{E}\,|Y| < \infty$, εφαρμόζουμε το Θεώρημα 8.8 για $f(x) = g(x) = x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. ■

Παρατήρηση 8.10 Ανάλογα των θεωρημάτων 8.6, 8.8 ισχύουν αν αντί δύο έχουμε περισσότερες ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές, έστω $X_1, X_2, \ldots, X_n$. Για παράδειγμα

$$\mathbf{E}\{f_1(X_1)f_2(X_2)\cdots f_n(X_n)\} = \mathbf{E}\{f_1(X_1)\}\,\mathbf{E}\{f_2(X_2)\}\cdots \mathbf{E}\{f_n(X_n)\}$$

με τις $f_1, f_2, \ldots, f_n$ μετρήσιμες και μη αρνητικές ή με $\mathbf{E}\,|f_k(X_k)| < \infty$ για κάθε k. Η απόδειξη των αντίστοιχων αυτών ισχυρισμών γίνεται με επαγωγή.

Υπενθυμίζουμε εδώ ότι για $(X_k)_{1\le k\le n}$ τυχαίες μεταβλητές στον ίδιο χώρο πιθανότητας, με πραγματικές τιμές, και με $\mathbf{E}(X_k^2) < \infty$ για κάθε $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, ισχύει

$$\operatorname{Var}(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) = \operatorname{Var}(X_1) + \cdots + \operatorname{Var}(X_n) + 2\sum_{1\le i<j\le n} \operatorname{Cov}(X_i, X_j). \tag{8.5}$$

Η απόδειξη γίνεται όπως ακριβώς την έχουμε δει στις στοιχειώδεις πιθανότητες. Όταν οι $(X_k)_{1\le k\le n}$ είναι ανεξάρτητες, το προηγούμενο πόρισμα δίνει ότι όλες οι συνδιακυμάνσεις είναι 0, οπότε

$$\operatorname{Var}(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) = \operatorname{Var}(X_1) + \cdots + \operatorname{Var}(X_n) \tag{8.6}$$

8.2 Χώροι γινόμενο

Υπάρχουν ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές; Πως μπορούμε να κατασκευάσουμε τέτοιες, και βέβαια τον χώρο πιθανότητας στον οποίο αυτές ορίζονται; Τη λύση σε αυτά τα προβλήματα δίνουν οι χώροι γινόμενο.

Έστω σύνολο δεικτών $I \neq \emptyset$ και $(\Omega_i, \mathcal{F}_i, \mathbf{P}_i)$ χώρος πιθανότητας για κάθε $i \in I$. Θεωρούμε το χώρο γινόμενο

$$\Omega = \prod_{i\in I} \Omega_i = \{(\omega_i)_{i\in I} : \omega_i \in \Omega_i \text{ για κάθε } i \in I\} = \{\omega : I \to \cup_{i\in I}\Omega_i \,:\, \omega_i \in \Omega_i \text{ για κάθε } i \in I\}.$$

Ορισμός 8.11 Έστω χώρος γινόμενο Ω όπως προηγουμένως. **Μετρήσιμο κύλινδρο** λέμε κάθε $A \subset \Omega$ της μορφής

$$A = \prod_{i\in I} A_i$$

ώστε $A_i \in \mathcal{F}_i$ για κάθε $i \in I$, και με το σύνολο $J = \{i \in I : A_i \neq \Omega_i\}$ πεπερασμένο.

Δηλαδή ένας μετρήσιμος κύλινδρος είναι καρτεσιανό γινόμενο μετρήσιμων συνόλων, αλλά μόνο πεπερασμένα από αυτά διαφέρουν από τον δειγματικό χώρο του οποίου είναι υποσύνολα.

Εύκολα βλέπουμε ότι το σύνολο $\{A \subset \Omega : A \text{ μετρήσιμος κύλινδρος}\}$ είναι άλγεβρα. Αυτή παράγει μία σ-άλγεβρα, την οποία συμβολίζουμε με $\otimes_{i\in I}\mathcal{F}_i$. Δηλαδή θέτουμε

$$\otimes_{i\in I}\mathcal{F}_i := \sigma(\{A \subset \Omega : A \text{ μετρήσιμος κύλινδρος}\}).$$

Για ένα μετρήσιμο κύλινδρο A όπως πριν, ορίζουμε

$$\mathbf{P}(A) := \prod_{i\in I} \mathbf{P}_i(A_i) = \prod_{i\in J} \mathbf{P}_i(A_i).$$

Το πρώτο γινόμενο δεν πρέπει να μας ανησυχεί γιατί ακόμα και το I να είναι άπειρο, μόνο πεπερασμένοι όροι του γινομένου είναι διαφορετικοί του 1. Η δεύτερη ισότητα ισχύει γιατί ακριβώς παραλείπουμε όρους του γινομένου που είναι σίγουρα 1, δηλαδή αυτούς με $i \in I\backslash J$.

Αποδεικνύεται ότι το $\mathbf{P}$ είναι μέτρο πιθανότητας στην άλγεβρα $\{A \subset \Omega : A \text{ μετρήσιμος κύλινδρος}\}$, και άρα από το Θεώρημα Καραθεοδωρή (Θεώρημα 4.8) το $\mathbf{P}$ επεκτείνεται μοναδικά σε μέτρο πιθανότητας στην παραγόμενη σ-άλγεβρα $\otimes_{i\in I}\mathcal{F}_i$. Αυτή την επέκταση ονομάζουμε *μέτρο γινόμενο* των $(\mathbf{P}_i)_{i\in I}$, και το συμβολίζουμε με $\otimes_{i\in I}\mathbf{P}_i$. Αν το I είναι πεπερασμένο, έστω $I = \{1, 2, \dots, n\}$, το συμβολίζουμε με $\mathbf{P}_1 \otimes \mathbf{P}_2 \otimes \cdots \otimes \mathbf{P}_n$.

Έχουμε λοιπόν ορίσει ένα νέο χώρο πιθανότητας, το χώρο γινόμενο

$$\Big(\prod_{i\in I}\Omega_i, \otimes_{i\in I}\mathcal{F}_i, \otimes_{i\in I}\mathbf{P}_i\Big)$$

των $\{(\Omega_i, \mathcal{F}_i, \mathbf{P}_i) : i \in I\}$.

Παράδειγμα 8.12 (Ένας υπολογισμός σε χώρο γινόμενο) Θεωρούμε το πείραμα ρίψης ενός νομίσματος άπειρες (αριθμήσιμες) φορές που φέρνει K με πιθανότητα $p \in (0, 1)$. Ας δούμε το χώρο πιθανότητας του πειράματος.

Για $i = 1, 2, 3, \dots$ η $i-$οστή ρίψη έχει χώρο πιθανότητας $(\Omega_i, \mathcal{F}_i, \mathbf{P}_i) = (\{K, \Gamma\}, \mathscr{P}(\{K, \Gamma\}), \mathbf{P}^p)$, όπου $\mathbf{P}^p$ το μέτρο με $\mathbf{P}^p(\{K\}) = p$ και $\mathbf{P}^p(\{\Gamma\}) = 1 - p$. Ο χώρος πιθανότητας για όλο το πείραμα είναι ο χώρος γινόμενο των $\{(\Omega_i, \mathcal{F}_i, \mathbf{P}_i) : i \in \mathbb{N}^+\}$.

Ας υπολογίσουμε τώρα την πιθανότητα στις ρίψεις 2, 3 και 5 το αποτέλεσμα να είναι K, K, Γ αντίστοιχα. Το ενδεχόμενο είναι ο μετρήσιμος κύλινδρος

$$A = \{K, \Gamma\} \times \{K\} \times \{K\} \times \{K, \Gamma\} \times \{\Gamma\} \times \prod_{i\geq 6}\Omega_i.$$

Άρα

$$\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}_2(\{K\})\,\mathbf{P}_3(\{K\})\,\mathbf{P}_5(\{\Gamma\}) = p^2(1 - p).$$

Πρόταση 8.13 *(Ανεξαρτησία=Μέτρο γινόμενο) Έστω $X := (X_1, X_2, \dots, X_n)$ τυχαία μεταβλητή με τιμές στον $\mathbb{R}^n$. Τότε οι $X_1, X_2, \dots, X_n$ είναι ανεξάρτητες αν και μόνο αν*

$$\mathbf{P}^X = \mathbf{P}^{X_1} \otimes \mathbf{P}^{X_2} \otimes \ldots \otimes \mathbf{P}^{X_n}\,.$$

Απόδειξη $\Rightarrow$ Η τιμή του μέτρου $\mathbf{P}^X$ σε έναν μετρήσιμο κύλινδρο $A := A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ του $\mathbb{R}^n$ είναι

$$\begin{aligned}\mathbf{P}^X(A) &= \mathbf{P}(X_1 \in A_1, \cdots, X_n \in A_n) = \mathbf{P}(X_1 \in A_1)\,\mathbf{P}(X_2 \in A_2)\cdots\mathbf{P}(X_n \in A_n)\\ &= \mathbf{P}^{X_1}(A_1)\,\mathbf{P}^{X_2}(A_2)\cdots\mathbf{P}^{X_n}(A_n).\end{aligned}$$

Στην δεύτερη ισότητα χρησιμοποιήσαμε την ανεξαρτησία των $X_1, \dots, X_n$. Όμως το $\mathbf{P}^{X_1} \otimes \mathbf{P}^{X_2} \otimes \ldots \otimes \mathbf{P}^{X_n}$ είναι το μοναδικό μέτρο που παίρνει την τιμή $\mathbf{P}^{X_1}(A_1)\,\mathbf{P}^{X_2}(A_2)\cdots\mathbf{P}^{X_n}(A_n)$ στο A. Η ζητούμενη ισότητα έπεται.

$\Leftarrow$ Ελέγχουμε την σχέση (8.2). Έστω $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$. Τότε

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(X_1 \in A_1, \cdots, X_n \in A_n) &= \mathbf{P}^{X_1} \otimes \mathbf{P}^{X_2} \otimes \ldots \otimes \mathbf{P}^{X_n}(A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n)\\ &= \mathbf{P}^{X_1}(A_1)\,\mathbf{P}^{X_2}(A_2)\cdots\mathbf{P}^{X_n}(A_n)\\ &= \mathbf{P}(X_1 \in A_1)\,\mathbf{P}(X_2 \in A_2)\cdots\mathbf{P}(X_n \in A_n)\end{aligned}$$

Στην πρώτη ισότητα χρησιμοποιήσαμε την υπόθεση, και στην δεύτερη, τον ορισμό του μέτρου γινομένου. ■

8.3 Ανεξαρτησία και ομαδοποίηση

Αν οι τυχαίες μεταβλητές X, Y, Z, V, W είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους, περιμένουμε και οι $X+Y, Z^2W, |V|$ να είναι ανεξάρτητες εφόσον χρησιμοποιούν διαφορετικά ανεξάρτητα συστατικά. Θα διατυπώσουμε ένα θεώρημα που δίνει αποτελέσματα αυτής της μορφής. Προηγουμένως, δίνουμε το αντίστοιχο αποτέλεσμα για σ-άλγεβρες.

Θεώρημα 8.14 *Έστω $(\mathcal{F}_i)_{i\in I}$ ανεξάρτητη οικογένεια σ-αλγεβρών, και $\{I_j : j \in J\}$ διαμέριση [1] του συνόλου δεικτών I. Για κάθε $j \in J$ θεωρούμε την σ-άλγεβρα*

$$\mathcal{G}_j := \sigma\left(\cup_{i\in I_j}\mathcal{F}_i\right).$$

Οι $(\mathcal{G}_j)_{j\in J}$ είναι ανεξάρτητες.

Απόδειξη Επειδή η οικογένεια $(\mathcal{G}_j)_{j\in J}$ είναι ανεξάρτητη αν και μόνο αν κάθε πεπερασμένη υποοιογένεια της είναι, αρκεί να δείξουμε το θεώρημα στην περίπτωση που το J είναι πεπερασμένο. Υποθέτουμε λοιπόν ότι $J = \{1, 2, \dots, n\}$ για κάποιο $n \geq 2$. Για κάθε $k \in J$, ονομάζουμε $\mathcal{C}_k$ το σύνολο των συνόλων της μορφής $A_{i_1} \cap A_{i_2} \cdots \cap A_{i_r}$ όπου $r \geq 1$ και $A_{i_1}, A_{i_2}, \dots, A_{i_r} \in \cup_{i\in I_k}\mathcal{F}_i$. Παρατηρούμε ότι $\sigma(\mathcal{C}_k) = \mathcal{G}_k$. Θέτουμε

$$\mathcal{D}_1 := \{A \in \mathcal{G}_1 : \mathbf{P}(A \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) = \mathbf{P}(A)\,\mathbf{P}(A_2)\cdots\mathbf{P}(A_n) \text{ για κάθε } A_2 \in \mathcal{C}_2, \dots, A_n \in \mathcal{C}_n\}$$

Από υπόθεση, $\mathcal{C}_1 \subset \mathcal{D}_1$. Εύκολα δείχνουμε ότι η $\mathcal{D}_1$ είναι κλάση Dynkin, άρα $\delta(\mathcal{C}_1) \subset \mathcal{D}_1$. Όμως η $\mathcal{C}_1$ είναι κλειστή στις πεπερασμένες τομές, οπότε το Θεώρημα μονότονης κλάσης δίνει ότι $\delta(\mathcal{C}_1) = \sigma(\mathcal{C}_1) = \mathcal{G}_1$. Άρα

$$\text{τα } \mathcal{G}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3, \dots, \mathcal{C}_n \text{ είναι ανεξάρτητα.}$$

Με ανάλογο επιχείρημα δείχνουμε ότι

$$\text{τα } \mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2, \mathcal{C}_3, \dots, \mathcal{C}_n \text{ είναι ανεξάρτητα,}$$

και τελικά το θεώρημα. ■

Για το επόμενο θεώρημα, σε πρώτη ανάγνωση καλό είναι να υποθέσει κανείς ότι τα σύνολα I, I_j είναι πεπερασμένα, και επομένως οι συναρτήσεις f_j ορίζονται σε χώρους της μορφής $\mathbb{R}^d$.

Θεωρούμε ότι ο $\mathbb{R}^{I_j}$ είναι εφοδιασμένος με την σ-άλγεβρα γινόμενο $\otimes_{i\in I_j}\mathscr{B}(\mathbb{R})$ (όλοι οι όροι του γινομένου είναι ίδιοι).

Θεώρημα 8.15 *Έστω $(X_i)_{i\in I}$ ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές, $\{I_j : j \in J\}$ διαμέριση του συνόλου δεικτών I, και για κάθε $j \in J$, μετρήσιμη συνάρτηση $f_j : \mathbb{R}^{I_j} \to \mathbb{R}$. Για κάθε $j \in J$ θεωρούμε την συνάρτηση $Y_j := f_j((X_i)_{i\in I_j}) : \Omega \to \mathbb{R}$. Οι $(Y_j)_{j\in J}$ είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές.*

Απόδειξη Έστω $\mathcal{G}_j := \sigma(\cup_{i\in I_j}\sigma(X_i))$. Από την υπόθεση ανεξαρτησίας των $(X_i)_{i\in I}$ και το προηγούμενο θεώρημα, οι σ-άλγεβρες $(\mathcal{G}_j)_{i\in J}$ είναι ανεξάρτητες. Αρκεί επομένως να δείξουμε ότι για κάθε $j \in J$, η Y_j είναι $\mathcal{G}_j$-μετρήσιμη. Έστω $W_j := (X_i)_{i\in I_j} : \Omega \to \mathbb{R}^{I_j}$, οπότε $Y_j = f_j \circ W_j$, και για $A \subset \mathbb{R}$ Borel σύνολο, έχουμε $Y_j^{-1}(A) = W_j^{-1}(f_j^{-1}(A))$. Δεδομένου ότι η f_j είναι μετρήσιμη, μένει να δείξουμε τον εξής ισχυρισμό.

Ισχυρισμος: Η W_j είναι $\mathcal{G}_j$ μετρήσιμη.

Πράγματι, η οικογένεια $\mathcal{B}_j := \{B \subset \mathbb{R}^{I_j} : W_j^{-1}(B) \in \mathcal{G}_j\}$ είναι σ-άλγεβρα (Άσκηση 1.7(α)) και περιέχει τους μετρήσιμους κυλίνδρους γιατί αν πάρουμε έναν τέτοιο $B = \prod_{i\in I_j} B_i$, θα έχουμε

$$W_j^{-1}(B) = \cap_{i\in I_j} X_i^{-1}(B_i).$$

[1] Δηλαδή τα $I_j (j \in J)$, είναι μή κενά, ξένα ανα δύο, και έχουν ένωση το I.

Σε αυτή την τομή, μόνο πεπερασμένα σύνολα είναι διαφορετικά από το Ω αφού το $\{i \in I_j : B_i \neq \mathbb{R}\}$ είναι πεπερασμένο. Άρα, ως αριθμήσιμη (πεπερασμένη μάλιστα) τομή στοιχείων της σ-άλγεβρας $\mathcal{G}_j$ είναι στοιχείο της $\mathcal{G}_j$. Και επειδή η σ-άλγεβρα γινόμενο παράγεται από τους μετρήσιμους κυλίνδρους, έπεται ότι $\otimes_{i\in I_j}\mathscr{B}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{B}_j$. Ο ισχυρισμός αποδείχθηκε. ■

Για παράδειγμα, αν οι τυχαίες μεταβλητές $(X_n)_{n\geq 1}$ είναι ανεξάρτητες, τότε και οι $(Y_n)_{n\geq 1}$ με $Y_n := \sum_{i=2^n+1}^{2^{n+1}} X_i$ για κάθε $n \geq 1$ είναι ανεξάρτητες. Όμοια είναι ανεξάρτητα και τα σύνολα $\{X_{2n} + X_{2n+1} > 0\}, n \geq 1$.

8.4 Κατασκευή ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών με δεδομένη κατανομή

Σε αυτή την παράγραφο θα χρησιμοποιήσουμε τον χώρο γινόμενο για να κατασκευάσουμε ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές με επιθυμητές ιδιότητες.

Υπενθυμίζουμε ότι αν $(E, \mathcal{E})$ είναι μετρήσιμος χώρος και $X : \Omega \to E$ τυχαία μεταβλητή, κατανομή της X λέμε το μέτρο πιθανότητας $\mathbf{P}^X$ που ορίζεται στον $(E, \mathcal{E})$ με $\mathbf{P}^X(A) = \mathbf{P}(X^{-1}(A))$ για κάθε $A \in \mathcal{E}$.

Έστω I σύνολο δεικτών και $(E_i, \mathcal{E}_i, \mathbf{P}_i)_{i\in I}$ οικογένεια χώρων πιθανότητας. Θέλουμε να κατασκευάσουμε έναν χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ και τυχαίες μεταβλητές $X_i : \Omega \to E_i$ έτσι ώστε

(α) Η κατανομή της X_i να είναι η $\mathbf{P}_i$, για κάθε $i \in I$.
(β) Οι $(X_i)_{i\in I}$ να είναι οικογένεια ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών.

Το να κάνουμε ένα από τα (α) ή (β) είναι εύκολο. Αυτό που είναι μη τετριμμένο είναι να κάνουμε και τα δύο μαζί. Και το κατορθώνουμε με χρήση του χώρου γινομένου ως εξής:

Έστω $\Omega = \prod_{i\in I} E_i, \mathcal{F} = \otimes_{i\in I}\mathcal{E}_i$, και $\mathbf{P}$ το μέτρο γινόμενο των $\mathbf{P}_i$, $i \in I$. Για κάθε $r \in I$, ορίζουμε $X_r : \Omega \to E_r$ ως

$$X_r\big((\omega_i)_{i\in I}\big) = \omega_r,$$

δηλαδή η X_r είναι η προβολή στην r-συντεταγμένη.

Εύκολα βλέπουμε ότι η X_r είναι τυχαία μεταβλητή γιατί, για $A \in E_r$, έχουμε

$$X_r^{-1}(A) = \prod_{i\in I} A_i, \text{ με } A_i = \begin{cases} \Omega & \text{αν } i \neq r, \\ A & \text{αν } i = r. \end{cases}$$

Άρα $X_r^{-1}(A) \in \mathcal{F}$ ως μετρήσιμος κύλινδρος.

Θα δείξουμε τώρα ότι πράγματι αυτή η κατασκευή ικανοποιεί τις απαιτήσεις του προβλήματος.

Πρόταση 8.16 *Έστω $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, $(E_i, \mathcal{E}_i, \mathbf{P}_i)_{i\in I}$ όπως πριν και $X_r : \Omega \to E_r$, $r \in I$, η r-προβολή. Τότε*

(i). Η X_r έχει κατανομή $\mathbf{P}_r$.
(ii). Οι $(X_r)_{r\in I}$ είναι ανεξάρτητες.

Απόδειξη (i) Έστω $A \in E_r$. Έχουμε,

$$\mathbf{P}^{X_r}(A) = \mathbf{P}(X_r^{-1}(A)) = \mathbf{P}\Big(\prod_{i\in I} A_i\Big) = \prod_{i\in I} \mathbf{P}_i(A_i) = \mathbf{P}_r(A),$$

γράφοντας το $X_r^{-1}(A)$ ως μετρήσιμο κύλινδρο όπως προηγουμένως. Άρα, $\mathbf{P}^{X_r} = \mathbf{P}_r$.

(*ii*) Έστω $J = \{j_1, j_2, \dots, j_n\} \subset I$, και $B_{j_1} \in \mathcal{E}_{j_1}, B_{j_2} \in \mathcal{E}_{j_2}, \dots, B_{j_n} \in \mathcal{E}_{j_n}$. Τότε

$$\mathbf{P}(\{X_{j_1} \in B_{j_1}\} \cap \{X_{j_2} \in B_{j_2}\} \cap \dots \cap \{X_{j_n} \in B_{j_n}\}) = \mathbf{P}\Big(\prod_{i \in I} A_i\Big),$$

όπου

$$A_i = \begin{cases} \Omega_i & \text{αν } i \in I \backslash J, \\ B_i, & \text{αν } i \in J. \end{cases}$$

Από τον ορισμό του $\mathbf{P}$ έχουμε ότι

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\Big(\prod_{i \in I} A_i\Big) &= \prod_{i \in I} \mathbf{P}(A_i) = \prod_{i \in J} \mathbf{P}(A_i) = \mathbf{P}_{j_1}(B_{j_1})\,\mathbf{P}_{j_2}(B_{j_2}) \dots \mathbf{P}_{j_n}(B_{j_n}) \\ &= \mathbf{P}(X_{j_1} \in B_{j_1})\,\mathbf{P}(X_{j_2} \in B_{j_2}) \cdots \mathbf{P}(X_{j_n} \in B_{j_n}).\end{aligned}$$

Συνεπώς οι $\{X_r : r \in I\}$ είναι ανεξάρτητες. ■

Ορολογία: Έστω $(X_i)_{i \in I}$ τυχαίες μεταβλητές στον ίδιο χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$. Λέμε ότι είναι ανεξάρτητες και ισόνομες αν είναι ανεξάρτητες και έχουν την ίδια κατανομή, δηλαδή $\mathbf{P}^{X_j} = \mathbf{P}^{X_i}$ για κάθε $i, j \in I$.

Ένα πόρισμα αυτής της παραγράφου είναι ότι για δεδομένη κατανομή $\mathbf{Q}$ και σύνολο I, υπάρχει σύνολο ανεξάρτητων και ισόνομων τυχαίων μεταβλητών $(X_i)_{i \in I}$ που καθεμία έχει κατανομή $\mathbf{Q}$.

8.5 Ολοκλήρωση σε χώρο γινόμενο

Ένα ολοκλήρωμα ως προς το μέτρο γινόμενο σε ένα χώρο γινόμενο ανάγεται στον υπολογισμό ολοκληρωμάτων στους χώρους που είναι παράγοντες του γινομένου. Όπως ακριβώς στον απειροστικό λογισμό, ένα διπλό ολοκλήρωμα μπορεί να υπολογιστεί με δύο διαδοχικές ολοκληρώσεις στον $\mathbb{R}$.

Στην παράγραφο αυτή θα δούμε το ανάλογο αποτέλεσμα στην περίπτωση του γινομένου δύο χώρων πιθανότητας, $(E_1, \mathcal{E}_1, \mathbf{P}_1)$ και $(E_2, \mathcal{E}_2, \mathbf{P}_2)$. Δεν θα δώσουμε όμως τις αποδείξεις για τα θεωρήματα που θα διατυπώσουμε[2].

Έστω $\Omega = E_1 \times E_2$ και $\mathcal{F} = \mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2 = \sigma(\{A \times B : A \in \mathcal{E}_1, B \in \mathcal{E}_2\})$, και $\mathbf{P}$ το μέτρο γινόμενο των $\mathbf{P}_1$ και $\mathbf{P}_2$. Για $f : \Omega \to [-\infty, \infty]$ μετρήσιμη συνάρτηση, θέλουμε να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα $\int f(x, y) \, \mathrm{d}\,\mathbf{P}(x, y)$.

Το επόμενο αποτέλεσμα αφορά τη σ-άλγεβρα γινόμενο. Λέει ότι αν σε μία μετρήσιμη συνάρτηση δύο μεταβλητών σταθεροποιήσουμε τη μία, παίρνουμε μία συνάρτηση μιάς μεταβλητής η οποία είναι πάλι μετρήσιμη.

Θεώρημα 8.17 *Έστω $(E_1, \mathcal{E}_1, \mathbf{P}_1)$, $(E_2, \mathcal{E}_2, \mathbf{P}_2)$ χώροι πιθανότητας και $f : E_1 \times E_2 \to [-\infty, \infty]$, $\mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2 / \mathscr{B}([-\infty, \infty])$ μετρήσιμη συνάρτηση. Τότε*

(*i*). *Για $x \in E_1$, η συνάρτηση $y \mapsto f(x, y)$ είναι $E_2 / \mathscr{B}([-\infty, \infty])$ μετρήσιμη.*
(*ii*). *Για $y \in E_2$, η συνάρτηση $x \mapsto f(x, y)$ είναι $E_1 / \mathscr{B}([-\infty, \infty])$ μετρήσιμη.*

[2] Η απόδειξη τους ακολουθεί το σύνηθες μοτίβο αποδείξεων προηγουμένων κεφαλαίων. Πρώτα αποδεικνύουμε τον ισχυρισμό για δείκτριες μετρήσιμων συνόλων, έπειτα για απλές μετρήσιμες, για θετικές μετρήσιμες, και τέλος για μετρήσιμες συναρτήσεις με πεπερασμένο ολοκλήρωμα.

Οι συναρτήσεις $x \mapsto f(x,y)$ και $y \mapsto f(x,y)$ λέγονται τομές της f.

Το πρώτο αποτέλεσμα για το ολοκλήρωμα ως προς το μέτρο γινόμενο αφορά μη αρνητικές συναρτήσεις.

Θεώρημα 8.18 (Tonelli) *Έστω $(E_1, \mathcal{E}_1, \mathbf{P}_1)$, $(E_2, \mathcal{E}_2, \mathbf{P}_2)$ χώροι πιθανότητας, $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ ο χώρος γινόμενο και $f : \Omega \to [0, \infty]$ μετρήσιμη συνάρτηση. Τότε οι συναρτήσεις*

$$x \mapsto \int f(x,y) \,\mathrm{d}\,\mathbf{P}_2(y), \quad y \mapsto \int f(x,y) \,\mathrm{d}\,\mathbf{P}_1(x) \tag{8.7}$$

είναι $\mathcal{E}_2/\mathscr{B}([-\infty,\infty])$, $\mathcal{E}_2/\mathscr{B}([-\infty,\infty])$ μετρήσιμες, αντίστοιχα, και

$$\int f(x,y) \,\mathrm{d}\,\mathbf{P}(x,y) = \int \Big(\int f(x,y) \,\mathrm{d}\,\mathbf{P}_2(y) \Big) \,\mathrm{d}\,\mathbf{P}_1(x) = \int \Big(\int f(x,y) \,\mathrm{d}\,\mathbf{P}_1(x) \Big) \,\mathrm{d}\,\mathbf{P}_2(y).$$

Τα ολοκληρώματα στην (8.7) ορίζονται γιατί από το Θεώρημα 8.17 οι συναρτήσεις τις οποίες ολοκληρώνουμε είναι μετρήσιμες.

Όταν η συνάρτηση την οποία ολοκληρώνουμε δεν διατηρει απαραίτητα πρόσημο, έχουμε το εξής αποτέλεσμα.

Θεώρημα 8.19 (Fubini) *Έστω $(E_1, \mathcal{E}_1, \mathbf{P}_1)$, $(E_2, \mathcal{E}_2, \mathbf{P}_2)$, $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ όπως πριν, και $f : \Omega \to [-\infty, \infty]$ μετρήσιμη συνάρτηση. Αν $\displaystyle\int |f(x,y)| \,\mathrm{d}\,\mathbf{P}(x,y) < \infty$, τότε ισχύουν οι ισχυρισμοί του Θεωρήματος 8.18 (Tonelli).*

Από το Θεώρημα Tonelli,

$$\int |f(x,y)| \,\mathrm{d}\,\mathbf{P}(x,y) = \int \int |f(x,y)| \,\mathrm{d}\,\mathbf{P}_2(y) \,\mathrm{d}\,\mathbf{P}_1(x) = \int \int |f(x,y)| \,\mathrm{d}\,\mathbf{P}_1(x) \,\mathrm{d}\,\mathbf{P}_2(y). \tag{8.8}$$

Έτσι όταν εφαρμόζουμε το Θεώρημα Fubini και θέλουμε να ελεγξουμε αν το ολοκλήρωμα $\int |f(x,y)| \,\mathrm{d}\,\mathbf{P}(x,y)$ είναι πεπερασμένο, ελέγχουμε αν είναι πεπερασμένο κάποιο από τα δύο διαδοχικά ολοκληρώματα στην (8.8).

Ασκήσεις

8.1 Έστω $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2 \subset \mathcal{F}$ σ-άλγεβρες στον $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$. Αν για κάθε $A \in \mathcal{F}_1$ ισχύει ότι $\mathbf{P}(A) = 0$ ή $\mathbf{P}(A) = 1$, να δείξετε ότι η $\mathcal{F}_1$ είναι ανεξάρτητη της $\mathcal{F}_2$.

8.2 Έστω X, Y ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές με τιμές στο $\mathbb{R}$ ώστε $\mathbf{P}(X = Y) = 1$. Να δειχθεί ότι υπάρχει $c \in \mathbb{R}$ ώστε $\mathbf{P}(X = c) = 1$.

8.3 Έστω $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων τυχαίων μεταβλητών έτσι ώστε $\mathbf{P}(X_1 = -1) = \mathbf{P}(X = 1) = \frac{1}{2}$. Θέτουμε $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$ για κάθε $n \geq 1$. Να δείξετε ότι $\frac{S_n}{n} \xrightarrow{\mathbf{P}} 0$.
[Υποδ.: Χρησιμοποιήστε την ανισότητα Chebyshev.]

8.4 Έστω $(X_n)_{n\geq 1}$ ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων τυχαίων μεταβλητών καθεμία με την ομοιόμορφη κατανομή στο $(0,1)$. Για κάθε $n \geq 1$ θεωρούμε τις τυχαίες μεταβλητές

$$m_n = \min\{X_1, X_2, \ldots, X_n\},$$
$$M_n = \max\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}.$$

Να δειχθεί ότι $m_n \to 0$ και $M_n \to 1$ κατά πιθανότητα καθώς $n \to \infty$.

9

Τα λήμματα Borel-Cantelli και ο νόμος 0-1 του Kolmogorov

Τα βασικότερα εργαλεία για την απόδειξη θεωρημάτων που αφορούν σχεδόν βέβαια σύγκλιση είναι δύο απλά αποτελέσματα, τα δύο λήμματα Borel-Cantelli, τα οποία θα δούμε σε αυτό το κεφάλαιο. Επίσης θα δούμε τον νόμο 0-1 του Kolmogorov ο οποίος είναι πολύ χρήσιμος όταν θέλουμε να δείξουμε ότι μια ιδιότητα ισχύει με πιθανότητα 1. Σύμφωνα με αυτό το νόμο, αν η ιδιότητα έχει μια συγκεκριμένη μορφή, τότε αναγκαστικά έχει πιθανότητα 0 ή 1. Επομένως για να δείξουμε ότι ισχύει με πιθανότητα 1, αρκεί να δείξουμε ότι ισχύει με θετική πιθανότητα. Και το τελευταίο, πολλές φορές, είναι σημαντικά ευκολότερο.

9.1 Τα λήμματα Borel-Cantelli

Έστω $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ χώρος πιθανότητας και $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία στοιχείων της $\mathcal{F}$. Υπενθυμίζουμε ότι

$$\limsup_{n\geq 1} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k = \{\omega\in\Omega : \omega \text{ ανήκει σε άπειρα } A_n\}.$$

Το ίδιο σύνολο το γράφουμε μερικές φορές ως $\{A_n$ συμβαίνει για άπειρα $n\}$.

Πρόταση 9.1 (Πρώτο Λήμμα Borel-Cantelli) *Έστω $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία ενδεχομένων στον $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$. Άν $\sum_{n=1}^{\infty}\mathbf{P}(A_n) < \infty$, τότε*

$$\mathbf{P}(\limsup_{n\geq 1} A_n) = 0.$$

Απόδειξη Θεωρούμε την τυχαία μεταβλητη $X = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{1}_{A_n}$. Τότε

$$\limsup_{n\geq 1} A_n = \{X = \infty\},$$

και

$$\mathbf{E}(X) = \sum_{n=1}^{\infty}\mathbf{E}(\mathbf{1}_{A_n}) = \sum_{n=1}^{\infty}\mathbf{P}(A_k) < \infty.$$

Επειδή $\mathbf{E}(X) < \infty$ και $X \geq 0$, η Πρόταση 6.16(iii) δίνει ότι $\mathbf{P}(X = \infty) = 0$, δηλαδή $\mathbf{P}(\limsup_{n\geq 1} A_n) = 0$. ■

Λήμμα 9.2 *Αν $A_1, A_2, \ldots, A_n$, $n \geq 2$, ανεξάρτητα ενδεχόμενα στον $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, τότε και τα $A_1^c, A_2^c, \ldots, A_n^c$ είναι ανεξάρτητα.*

Απόδειξη Δείχνουμε πρώτα τον εξής ισχυρισμό.

Ισχυρισμος: Τα $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}, A_n^c$ είναι ανεξάρτητα.

Πράγματι, για $k \leq n$, έστω δείκτες $1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leq n$.

- Αν $i_k < n$, τότε τα $A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_k}$ είναι ανεξάρτητα από υπόθεση. Επομένως

$$\mathbf{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_{k-1}} \cap A_{i_k}) = \mathbf{P}(A_{i_1})\,\mathbf{P}(A_{i_2}) \cdots \mathbf{P}(A_{i_k}) \tag{9.1}$$

- Αν $i_k = n$, τότε

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_{k-1}} \cap A_n^{\mathrm{c}}) &= \mathbf{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_{k-1}}) - \mathbf{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_{k-1}} \cap A_n) \\
&= \mathbf{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_{k-1}}) - \mathbf{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_{k-1}})\,\mathbf{P}(A_n) \\
&= \mathbf{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_{k-1}})(1 - \mathbf{P}(A_n)) \\
&= \mathbf{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_{k-1}})\,\mathbf{P}(A_n^{\mathrm{c}}) \\
&= \mathbf{P}(A_{i_1})\,\mathbf{P}(A_{i_2}) \cdots \mathbf{P}(A_n^{\mathrm{c}}).
\end{aligned}$$

  Στην δεύτερη και στην τελευταία ισότητα χρησιμοποιήσαμε την ανεξαρτησία των $A_1, A_2, \ldots, A_{i_k}$.

Άρα και στις δύο περιπτώσεις η πιθανότητα της τομής ισούται με το γινομενο των πιθανοτήτων, και ο ισχυρισμός αποδείχθηκε.
Χρησιμοποιώντας τον ισχυρισμό δείχνουμε επαγωγικά ότι τα $A_1^{\mathrm{c}}, A_2^{\mathrm{c}}, \ldots, A_n^{\mathrm{c}}$ είναι ανεξάρτητα. ■

Το δεύτερο Λήμμα Borel-Cantelli αφορά την περίπτωση που η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}(A_n)$ απειρίζεται. Όμως τώρα υποθέτουμε επιπλέον ότι τα $(A_n)_{n\geq 1}$ να είναι ανεξάρτητα. Η ακριβής διατύπωση είναι ως εξής.

Πρόταση 9.3 (Δεύτερο Λήμμα Borel-Cantelli) *Έστω $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία ανεξάρτητων ενδεχομένων στον $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$. Άν $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}(A_n) = \infty$, τότε*

$$\mathbf{P}(\limsup_{n\geq 1} A_n) = 1.$$

Απόδειξη Θα δείξουμε ότι $\mathbf{P}(\{\limsup_{n\geq 1} A_n\}^{\mathrm{c}}) = 0$. Έχουμε ότι

$$\mathbf{P}(\{\limsup_{n\geq 1} A_n\}^{\mathrm{c}}) = \mathbf{P}(\cup_{n=1}^{\infty} \cap_{k=n}^{\infty} A_k^{\mathrm{c}}) = \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(\cap_{k=n}^{\infty} A_k^{\mathrm{c}})$$

εφόσον η ακολουθία $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ με $B_n = \cap_{k=n}^{\infty} A_k^{\mathrm{c}}$ για κάθε $n \geq 1$ είναι αύξουσα. Για δεδομένο $n \geq 1$ έχουμε

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(\cap_{k=n}^{\infty} A_k^{\mathrm{c}}) &= \lim_{m\to\infty} \mathbf{P}(\cap_{k=n}^{m} A_k^{\mathrm{c}}) = \lim_{m\to\infty} \prod_{k=n}^{m} \mathbf{P}(A_k^{\mathrm{c}}) \\
&= \lim_{m\to\infty} \prod_{k=n}^{m} (1 - \mathbf{P}(A_n)) \leq \lim_{m\to\infty} \prod_{k=n}^{m} e^{-\mathbf{P}(A_k)} \\
&= \lim_{m\to\infty} e^{-\sum_{k=n}^{m} \mathbf{P}(A_k)} = e^{-\sum_{k=n}^{\infty} \mathbf{P}(A_k)} \\
&= e^{-\infty} = 0.
\end{aligned}$$

Στην δεύτερη ισότητα χρησιμοποιήσαμε το Λήμμα 9.2, ενώ η ανισότητα προκύπτει από την $1 + x \leq e^x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Άρα $\mathbf{P}((\limsup_{n\geq 1} A_n)^{\mathrm{c}}) = 0$, και το ζητούμενο αποδείχθηκε. ■

Παράδειγμα 9.4 Θεωρούμε το πείραμα ρίψης ενός νομίσματος, άπειρες (αριθμήσιμες) φορές, που φέρνει κορώνα (Κ) με πιθανότητα $p \in (0, 1)$. Θα υπολογίσουμε την πιθανότητα $\mathbf{P}(K$ έρχεται απειρες φορές$)$.

Ο χώρος πιθανότητας του πειράματος είναι ο χώρος γινόμενο $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ των $(\Omega_n, \mathcal{F}_n, \mathbf{P}_n)_{n\geq 1}$, όπου, για κάθε $n \geq 1$, $\Omega_n = \{K, \Gamma\}$ ($\Gamma =$ το ενδεχόμενο "γράμματα") , $\mathcal{F}_n = \mathscr{P}(\Omega_n)$ και $\mathbf{P}_n = \mathbf{P}^{(p)}$ ($\mathbf{P}^{(p)}$ το μέτρο πιθανότητας με $\mathbf{P}^{(p)}(\{K\}) = p$). Για $n \geq 1$, θεωρούμε το ενδεχόμενο $A_n = \{$έρχεται K στην n ρίψη$\}$ και την τυχαία μεταβλητή $X_n : \Omega \to \{K, \Gamma\}$ με $X_n(\omega) = \omega_n =$ το αποτέλεσμα της n ρίψης.

Γνωρίζουμε ότι οι $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ανεξάρτητες (Πρόταση 8.16), και εφόσον $A_n = X_n^{-1}(\{K\})$, έχουμε ότι τα $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ανεξάρτητα. Επιπλέον, $\mathbf{P}(A_n) = p$, άρα

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}(A_n) = \infty.$$

Από το 2ο Λήμμα Borel-Cantelli έχουμε ότι $\mathbf{P}(\limsup_{n\geq 1} A_n) = 1$, δηλαδή $\mathbf{P}(K \text{ έρχεται άπειρες φορές}) = 1$.

Παράδειγμα 9.5 [Ένα πρώτο οριακό αποτέλεσμα] Έστω $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ χώρος πιθανότητας, και $(X_n)_{n\geq 1}$ ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές σε αυτόν έτσι ώστε $X_n \in \{K, \Gamma\}$ και $\mathbf{P}(X_n = K) = \mathbf{P}(X_n = \Gamma) = \frac{1}{2}$. Οι $(X_n)_{n\geq 1}$ μοντελοποιούν ακολουθία ρίψεων αμερόληπτου νομίσματος.

Θέτουμε

$$\mathscr{C}_n := \max\{m \geq 1 : X_n = X_{n+1} = \ldots = X_{n+m-1}\}.$$

Για παράδειγμα αν έχουμε το αποτέλεσμα $(K, K, \Gamma, \Gamma, K, \Gamma, \Gamma, \Gamma, K, \ldots)$ τότε $\mathscr{C}_1 = 2$, $\mathscr{C}_5 = 1$, και $\mathscr{C}_6 = 3$. Θα δείξουμε ότι:

(α) $\displaystyle\varlimsup_{n\to\infty} \frac{\mathscr{C}_n}{\log_2 n} \leq 1$, με πιθανότητα 1.

(β) $\displaystyle\varliminf_{n\to\infty} \mathscr{C}_n = 1$, με πιθανότητα 1.

Ισχύει μάλιστα ότι $\varlimsup_{n\to\infty} \frac{\mathscr{C}_n}{\log_2 n} = 1$ με πιθανότητα 1, αλλά δεν θα το αποδείξουμε (δες Παράδειγμα 2.3.3 στο Durrett (2010)).

(α) Έστω $\epsilon > 0$. Θέτουμε $B_\epsilon = \left\{\varlimsup_{n\to\infty} \dfrac{\mathscr{C}_n}{\log_2 n} \leq 1 + \epsilon\right\}$. Θα δείξουμε ότι $\mathbf{P}(B_\epsilon) = 1$.

Έστω $A_n = \{\frac{\mathscr{C}_n}{\log_2 n} > 1 + \epsilon\}$. Τότε

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(A_n) &= \mathbf{P}(\mathscr{C}_n > (1+\epsilon)\log_2 n) = \mathbf{P}(X_n = X_{n+1} = \ldots = X_{n+[(1+\epsilon)\log_2 n]-1} = K \text{ ή } \Gamma) \\
&= 2\,\mathbf{P}(X_n = X_{n+1} = \ldots = X_{n+[(1+\epsilon)\log_2 n]-1} = K) \\
&= 2\left(\frac{1}{2}\right)^{[(1+\epsilon)\log_2 n]} \leq 2\left(\frac{1}{2}\right)^{(1+\epsilon)\log_2 n - 1} = \frac{4}{2^{(1+\epsilon)\log_2 n}} = \frac{4}{n^{1+\epsilon}}.
\end{aligned}$$

Συνεπώς,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}(A_n) < \infty,$$

και από το 1ο Λήμμα Borel-Cantelli, $\mathbf{P}(\limsup_{n\geq 1} A_n) = 0$, δηλαδή $\mathbf{P}(\{\limsup_{n\geq 1} A_n\}^c) = 1$.

Έστω τώρα $\omega \in (\limsup\limits_{n\geq 1} A_n)^c$. Τότε υπάρχει $n_0(\omega) \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε για κάθε $n \geq n_0(\omega)$ να ισχύει:

$$\frac{\mathscr{C}_n(\omega)}{\log_2 n} \leq 1 + \epsilon,$$

άρα

$$\varlimsup_{n\to\infty} \frac{\mathscr{C}_n(\omega)}{\log_2 n} \leq 1 + \epsilon.$$

Προκύπτει, λοιπόν, ότι $\omega \in B_\epsilon$. Άρα $(\limsup\limits_{n\geq 1} A_n)^c \subset B_\epsilon$, οπότε $\mathbf{P}(B_\epsilon) = 1$.

Επειδή

$$\left\{\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\mathscr{C}_n}{\log_2 n} \le 1\right\} = \cap_{k=1}^{\infty} B_{\frac{1}{k}}$$

και $\mathbf{P}(B_{1/k}) = 1$ για κάθε $k \ge 1$, από την Άσκηση 2.2 (β) έχουμε

$$\mathbf{P}(\cap_{k=1}^{\infty} B_{\frac{1}{k}}) = 1.$$

Έτσι το (α) αποδείχθηκε.

(β) Επειδή κάθε $\mathscr{C}_n$ παίρνει τιμή που είναι ένας θετικός ακέραιος ή ∞, το ζητούμενο ισοδυναμεί με $\mathbf{P}(\mathscr{C}_n = 1$ άπειρες φορές$) = 1$ (δηλαδή ο μόνος τρόπος να πλησιάσει η $\mathscr{C}_n$ το 1 είναι να πέσει πάνω του). Έστω

$$B_n = \{X_{2n} = K, X_{2n+1} = \Gamma\}$$

για κάθε $n \ge 1$. Εύκολα βλέπουμε ότι τα $(B_n)_{n\ge1}$ είναι ανεξάρτητα και ισχύει ότι $\mathbf{P}(B_n) = \frac{1}{2}\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$. Άρα,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}(B_n) = \infty.$$

Από το $2\underline{\text{ο}}$ Λήμμα Borel-Cantelli, έχουμε ότι $\mathbf{P}(\limsup_{n\ge1} B_n) = 1$. Όμως

$$\limsup_{n\ge1} B_n \subset \{\mathscr{C}_n = 1 \text{ άπειρες φορές}\}.$$

Άρα και το τελευταίο ενδεχόμενο έχει πιθανότητα 1.

Παρατήρηση 9.6 Στο προηγούμενο παράδειγμα, ορίσαμε κάποια σύνολα (τα B_ε και A_n) και μιλήσαμε για τις πιθανότητες τους. Τυπικά θα πρεπε προηγουμένως να δείξουμε ότι είναι στοιχεία της $\mathcal{F}$, δηλαδή είναι μετρήσιμα σύνολα. Δεν το κάναμε, ούτε θα το κάνουμε στο εξής για τα σύνολα που θα ορίζουμε. Όλα θα είναι μετρήσιμα. Όποιος έχει διάθεση, μπορεί να το κάνει, δεν είναι δύσκολο.

Παράδειγμα 9.7 Έστω $(X_n)_{n\ge1}$ ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές με $X_1 \sim Exp(1)$, δηλαδή με πυκνότητα $f(x) = e^{-x}\mathbf{1}_{x>0}$. Θα δείξουμε ότι

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{X_n}{\log n} = 1 \text{ με πιθανότητα } 1.$$

Για κάθε $n \ge 1$ και $r > 0$, θέτουμε $A_n^{(r)} = \{X_n \ge r \log n\}$. Τότε,

$$\mathbf{P}(A_n^{(r)}) = \mathbf{P}(X_n \ge r\log n) = e^{-r\log n} = \frac{1}{n^r}.$$

Έστω $r > 1$. Τότε

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}(A_n) < \infty$$

και από το πρώτο Λήμμα Borel-Cantelli έχουμε ότι $\mathbf{P}(\limsup_{n\ge1} A_n^{(r)}) = 0$, άρα

$$\mathbf{P}\left(\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{X_n}{\log n} \ge r\right) = 0.$$

Συνεπώς, θέτοντας $C_r = \left\{ \varlimsup_{n\to\infty} \frac{X_n}{\log n} \ge r \right\}$, έχουμε ότι

$$\left\{ \varlimsup_{n\to\infty} \frac{X_n}{\log n} > 1 \right\} = \cup_{k=1}^{\infty} C_{1+\frac{1}{k}},$$

άρα $\mathbf{P}\left(\varlimsup_{n\to\infty} \frac{X_n}{\log n} > 1 \right) = 0$ εφόσον $\mathbf{P}(C_{1+\frac{1}{k}}) = 0$ για κάθε $k \ge 1$. Επομένως,

$$\mathbf{P}\left(\varlimsup_{n\to\infty} \frac{X_n}{\log n} \le 1 \right) = 1. \tag{9.2}$$

Έστω $r = 1$. Τότε, εφόσον τα $(A_n)_{n\ge 1}$ είναι ανεξάρτητα (οι $(X_n)_{n\ge 1}$ είναι ανεξάρτητες) και

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}(A_n^{(1)}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty,$$

από το 2ο Λήμμα Borel-Cantelli, έχουμε ότι $\mathbf{P}(\limsup_{n\ge 1} A_n^{(1)}) = 1$. Συνεπώς, για $\omega \in \limsup\limits_{n\ge 1} A_n^{(1)}$, ισχύει ότι $X_n(\omega) \ge \log n$ για άπειρα $n \ge 1$. Δηλαδή,

$$\varlimsup_{n\to\infty} \frac{X_n(\omega)}{\log n} \ge 1,$$

από το οποίο προκύπτει ότι $\mathbf{P}\left(\varlimsup_{n\to\infty} \frac{X_n}{\log n} \ge 1 \right) = 1$. Η τελευταία ισότητα μαζί με την (9.2) δίνουν το ζητούμενο.

9.2 Ο νόμος 0-1 του Kolmogorov

Έστω $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ χώρος πιθανότητας, $((E_n, \mathcal{E}_n))_{n\ge 1}$ μετρήσιμοι χώροι, και $X_n : \Omega \to E_n$, $n \ge 1$, τυχαίες μεταβλητές. Για $n \ge 1$ θέτουμε

$$\mathscr{C}_n := \sigma(\{X_k : k \ge n+1\}),$$

τη σ-άλγεβρα που παράγεται από τις $X_{n+1}, X_{n+2}, \ldots$.

Ορισμός 9.8 Η τελική σ-άλγεβρα που παράγεται από τις $(X_n)_{n\ge 1}$ ορίζεται ως

$$\mathscr{C}_\infty = \cap_{n=1}^{\infty} \mathscr{C}_n.$$

Τι σημαίνει πρακτικά για ένα ενδεχόμενο A να ανήκει στην $\mathscr{C}_\infty$; Σημαίνει ότι για κάθε $n \ge 1$ η πραγματοποίση ή όχι του A δεν εξαρτάται από την τιμή που παίρνουν οι πρώτες n από τις X_i. Δηλαδή οποιοδήποτε δεδομένο πεπερασμένο πλήθος από τις X_i δεν επηρεάζει την πραγματοποίηση του A. Αυτός ο ασαφής χαρακτηρισμός θα γίνει πιο ξεκάθαρος στο επόμενο παράδειγμα.

Παράδειγμα 9.9 Έστω $(X_n)_{n\ge 1}$ όπως προηγουμένως, με τιμές στο $\mathbb{R}$. Τότε τα σύνολα

(α) $A = \{\omega : \varlimsup_{k\to\infty} X_k(\omega) \ge 1\}$,

(β) $B = \{\omega : \varlimsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{\infty} X_k(\omega) \ge 0\}$

ανήκουν στην $\mathscr{C}_\infty$, ενώ τα σύνολα (γ) $\Gamma = \{\omega : \inf_{n\in\mathbb{N}} X_n(\omega) \le 0\}$

(δ) $\Delta = \{\omega : \sum_{n=1}^{\infty} X_n(\omega) \le 10\}$

δεν ανήκουν αναγκαστικά στην $\mathscr{C}_\infty$.

Πράγματι, για τα (α), (β) έχουμε ότι για κάθε $m \ge 1$ ισχύει

$$A = \{\omega : \overline{\lim_{k\to\infty}}\, X_k(\omega) \ge 1\} = \{\omega : \overline{\lim_{k\to\infty}}\, X_{m+1+k}(\omega) \ge 1\} \in \mathscr{C}_m$$

και

$$\begin{aligned} B &= \left\{\omega : \overline{\lim_{n\to\infty}}\, \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{\infty} X_k(\omega) \ge 0\right\} = \left\{\omega : \overline{\lim_{n\to\infty}} \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{m} X_k(\omega) + \frac{1}{n}\sum_{k=m+1}^{\infty} X_k(\omega)\right) \ge 0\right\} \\ &= \left\{\omega : \overline{\lim_{n\to\infty}}\, \frac{1}{n}\sum_{k=m+1}^{\infty} X_k(\omega) \ge 0\right\} \in \mathscr{C}_m \end{aligned}$$

εφόσον

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{m} X_k(\omega) = 0.$$

Άρα $A, B \in \mathscr{C}_\infty$.

Για τα (γ) και (δ) αρκεί να παρατηρήσουμε ότι για συγκεκριμένες επιλογές των τυχαίων μεταβλητών $(X_n)_{n\ge1}$, τα σύνολα Γ και Δ εξαρτώνται από την τιμή του X_1. Για παράδειγμα, στο (γ), αν $X_1 \le 0$ και $X_n > 0$ για κάθε $n \ge 2$, τότε $\Gamma \notin \mathscr{C}_\infty$.

Πριν κάνουμε τις παραπάνω αποδείξεις για τα (α), (β), βλέπουμε ότι για δεδομένο ω (δηλαδή για μία πραγματοποίηση του πειράματος), το αν $\omega \in A$, δηλαδή το αν το A πραγματοποιήθηκε, δεν εξαρτάται από τις πρώτες τιμές της $(X_n(\omega))_{n\ge1}$. Για το (α), η τιμή του $\overline{\lim}$ μένει η ίδια αν αλλάξουμε π.χ. τους πρώτους 1000 όρους της ακολουθίας. Το ίδιο συμβαίνει και με το (β). Αυτή η παρατήρηση μας πείθει ότι $A, B \in \mathscr{C}_\infty$ και την χρησιμοποιούμε στην τυπική απόδειξη.

Το βασικό αποτέλεσμα αυτής της παραγράφου αφορά την τελική σ-άλγεβρα ακολουθίας *ανεξάρτητων* τυχαίων μεταβλητών.

Θεώρημα 9.10 (Νόμος 0-1 του Kolmogorov) *Έστω $(X_n)_{n\ge1}$ ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές στον $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ και $\mathscr{C}_\infty$ η τελική σ-άλγεβρά τους. Αν $C \in \mathscr{C}_\infty$, τότε $\mathbf{P}(C) = 0$ ή 1.*

Απόδειξη Θα δείξουμε ότι το C είναι ανεξάρτητο από τον εαυτό του. Γιατί αυτό δίνει $\mathbf{P}(C \cap C) = \mathbf{P}(C)\,\mathbf{P}(C)$, δηλαδή $\mathbf{P}(C) = \mathbf{P}^2(C)$, που γράφεται $\mathbf{P}(C)\{1 - \mathbf{P}(C)\} = 0$, από το οποίο προκύπτει το ζητούμενο.

Ισχυρισμος 1: Για κάθε $n \ge 1$, οι σ-άλγεβρες $\mathscr{D}_n = \sigma(\{X_k : k \le n\})$, $\mathscr{C}_n$ είναι ανεξάρτητες.

Αυτό έπεται απο το ότι οι $(X_n)_{n\ge1}$ είναι ανεξάρτητες, τους ορισμούς 8.3, 5.15 , και το Θεώρημα 8.14 για τη διαμέριση $\{\{1, 2, \ldots, n\}, \{n+1, n+2, \ldots\}\}$ του $\mathbb{N}^+$.

Θέτουμε τώρα $\mathscr{D} = \cup_{n\in\mathbb{N}} \mathscr{D}_n$.

Ισχυρισμος 2: Το C είναι ανεξάρτητο από κάθε στοιχείο της $\sigma(\mathscr{D})$.

Επειδή το C είναι στοιχείο της $\mathscr{C}_n$ για κάθε $n \ge 1$, έπεται ότι το C είναι ανεξάρτητο από κάθε $\mathscr{D}_n$ και άρα από κάθε στοιχείο της ένωσης τους, που είναι το $\mathscr{D}$. Το σύνολο $\mathcal{E}$ των στοιχείων της $\sigma(\mathscr{D})$ που είναι ανεξάρτητα από το C είναι μια κλάση Dynkin (Άσκηση 3.1) που περιέχει την $\mathscr{D}$, και η $\mathscr{D}$ είναι κλειστή στις πεπερασμένες τομές. Άρα, από το Θεώρημα μονότονης κλάσης, $\sigma(\mathscr{D}) = \delta(\mathscr{D})$. Όμως $\delta(\mathscr{D}) \subset \mathcal{E} \subset \sigma(\mathscr{D})$, οπότε $\mathcal{E} = \sigma(\mathscr{D})$.

Τώρα $\mathscr{C}_\infty \subset \sigma(\mathscr{D})$ γιατί εύκολα βλέπουμε ότι $\sigma(\mathscr{D}) = \sigma(\{X_n : n \geq 1\})$. Άρα από τον Ισχυρισμό 2 έχουμε ότι το C είναι ανεξάρτητο από τον εαυτό του. ∎

Πόρισμα 9.11 *Έστω $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές στον $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ και $X : \Omega \to [-\infty, \infty]$ τυχαία μεταβλητή $\mathscr{C}_\infty$-μετρήσιμη. Τότε η X είναι σταθερή με πιθανοτητα 1.*

Απόδειξη Εφόσον η X είναι $\mathscr{C}_\infty$-μετρήσιμη, τα σύνολα $\{X = -\infty\}, \{X = \infty\}$ είναι στοιχεία της $\mathscr{C}_\infty$, και επομένως έχουν πιθανότητα 0 ή 1. Άν κάποιο από αυτά έχει πιθανότητα 1, δείχθηκε το ζητούμενο. Διαφορετικά, έχουμε ότι η X παίρνει τιμές στο $\mathbb{R}$. Σε αυτή την περίπτωση, για την συνάρτηση κατανομής της, F, το Θεώρημα 9.10 δίνει ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$F(x) = \mathbf{P}(X \leq x) = \mathbf{P}(X^{-1}((-\infty, x])) \in \{0, 1\}. \tag{9.3}$$

Ξέρουμε όμως ότι η $\mathbf{F}$ είναι αύξουσα, δεξιά συνεχής και $\mathbf{F}(-\infty) = 0$, $\mathbf{F}(\infty) = 1$. Αυτές οι ιδιότητες μαζί με την (9.3) συνεπάγονται ότι υπάρχει $c \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{αν } x < c, \\ 1 & \text{αν } x \geq c. \end{cases}$$

Συνεπώς $\mathbf{P}(X = c) = \mathbf{F}(c) - \mathbf{F}(c^-) = 1$, δηλαδή η X ισούται με την σταθερά c με πιθανότητα 1. ∎

Παρατήρηση 9.12 Στην απόδειξη του Πορίσματος 9.11, από το ότι η X είναι $\mathscr{C}_\infty$-μετρήσιμη χρησιμοποιήσαμε μόνο ότι όλα τα σύνολα της $\mathscr{C}_\infty$ έχουν πιθανότητα 0 ή 1. Έτσι, το ίδιο επιχείρημα δίνει ότι αν η είναι X τυχαία μεταβλητή στον $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ με τιμές στο $[-\infty, \infty]$, και $\mathcal{A} \subset \mathcal{F}$ σ-άλγεβρα τέτοια ώστε η X να είναι $\mathcal{A}/\mathscr{B}([-\infty, \infty])$-μετρήσιμη και $\mathbf{P}(A) \in \{0, 1\}$, για κάθε $A \in \mathcal{A}$, τότε η X είναι σταθερή με πιθανότητα 1.

Επιστρέφουμε στο Παράδειγμα 9.7. Εκεί η $Z := \overline{\lim}_{n\to\infty}(X_n/\log n)$ είναι μία $\mathscr{C}_\infty$-μετρήσιμη τυχαία μεταβλητή με τιμές στο $[0, \infty]$, και οι $(X_n)_{n\geq 1}$ είναι ανεξάρτητες. Το Πόρισμα 9.11 εφαρμόζεται. Άρα εκ των προτέρων ξέρουμε ότι η Z είναι σταθερή με πιθανότητα 1.

Ασκήσεις

* 9.1 Έστω $(A_n)_{n\geq 1}$ ακολουθία ανεξάρτητων ενδεχομένων με $\mathbf{P}(A_n) < 1$ για κάθε $n \geq 1$, και $\mathbf{P}(\cup_{n=1}^\infty A_n) = 1$. Να δείξετε ότι $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}(A_n) = \infty$.

9.2 Έστω $(X_n)_{n\geq 1}$ ακολουθία τυχαίων μεταβλητών με $\mathbf{P}(X_n \neq 0) = \frac{1}{n}$, για κάθε $n \geq 1$. Να δείξετε ότι με πιθανότητα 1, για κάθε $\omega \in \Omega$, υπάρχει $n(\omega) \in \mathbb{N}$ ώστε $X_n(\omega) = 0$, για κάθε $n \geq n(\omega)$. (Συνεπώς $X_n \to 0$, με πιθανότητα 1.)

9.3 Στην Άσκηση 8.4, να δειχθεί ότι επίσης $m_n \to 0$ και $M_n \to 1$ σχεδόν βέβαια καθώς $n \to \infty$.

9.4 Έστω $(X_n)_{n\geq 1}$ ακολουθία ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών ώστε

$$\mathbf{P}(X_n = 1) = \frac{1}{n}, \mathbf{P}(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n}.$$

Να δειχθεί ότι

(α) $X_n \to 0$ κατά πιθανότητα καθώς $n \to \infty$,

(β) αλλά δεν ισχύει $X_n \to 0$ σχεδόν βεβαίως. Μάλιστα $\mathbf{P}(\lim_{n\to\infty} X_n = 0) = 0$.

9.5 Έστω $(X_n)_{n\geq 1}$ ακολουθία τυχαίων μεταβλητών με τιμές στο $\mathbb{R}$. Να δείξετε ότι υπάρχει ακολουθία $(a_n)_{n\geq 1}$ πραγματικών θετικών αριθμών τέτοια ώστε $\mathbf{P}\left(\lim_{n\to\infty}\frac{X_n}{a_n}=0\right)=1$.

9.6 Έστω $(X_n)_{n\geq 1}$ ακολουθία ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών με τιμές στο $\mathbb{R}$. Να δείξετε ότι, για την τυχαία μεταβλητή $X^*=\sup_{n\geq 1}X_n$ ισχύει ότι $\mathbf{P}(X^*<\infty)=1$ αν και μόνο αν υπάρχει $M\in\mathbb{R}$ έτσι ώστε $\sum_{n=1}^{\infty}\mathbf{P}(X_n>M)<\infty$.

* 9.7 Έστω $(X_n)_{n\geq 1}$ ακολουθία ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών με $X_n\sim N(0,1)$, για κάθε $n\geq 1$. Να δείξετε ότι με πιθανότητα 1 ισχύει

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{X_n}{\sqrt{2\log n}}=1. \tag{9.4}$$

9.8 Έστω $(X_n)_{n\geq 1}$ ακολουθία ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών με $X_n\sim Exp(1)$ για κάθε $n\geq 1$. Αν $M_n:=\max\{X_1,X_2,\dots,X_n\}$ για κάθε $n\geq 1$, να δείξετε ότι με πιθανότητα 1 ισχύει

$$\lim_{n\to\infty}\frac{M_n}{\log n}=1. \tag{9.5}$$

* 9.9 Έστω $(X_n)_{n\geq 1}$ ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων τυχαίων μεταβλητών. Να δείξετε ότι τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(α) $\lim_{n\to\infty}\frac{X_n}{n}=0$.

(β) $\mathbf{E}\,|X_1|<\infty$.

* 9.10 Έστω $(X_n)_{n\geq 1}$ ακολουθία ισόνομων και ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών με τιμές στο $\mathbb{R}$ ώστε η κατανομή της X_1 να μην είναι συγκεντρωμένη σε ένα σημείο (δηλαδή δεν υπάρχει $c\in\mathbb{R}$ με $\mathbf{P}(X=c)=1$). Να δειχθεί ότι

$$\mathbf{P}(\lim_{n\to\infty}X_n \text{ υπάρχει })=0.$$

9.11 Έστω $(X_n)_{n\geq 1}$ θετικές τυχαίες μεταβλητές. Να δειχθεί ότι με πιθανότητα 1 ισχύει

$$\overline{\lim}\,\frac{1}{n}\log X_n\leq\overline{\lim}\,\frac{1}{n}\log\mathbf{E}\,X_n. \tag{9.6}$$

9.12 Έστω $(X_i)_{i\geq 1}$ ακολουθία τυχαίων μεταβλητών με τιμές στο $\mathbb{R}$, και $\mathcal{C}_\infty:=\cap_{n=1}^{\infty}\sigma(X_n,X_{n+1},...)$ η τελική σ-άλγεβρα.

(α) Υποθέτουμε ότι οι X_i έχουν θετικές τιμές. Ποιές από τις παρακάτω τυχαίες μεταβλητές είναι $\mathcal{C}_\infty$ μετρήσιμες;

(i) $\underline{\lim}_{n\to\infty}\frac{X_n}{n}$, (ii) $\underline{\lim}_{n\to\infty}\frac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{n}$, (iii) $\overline{\lim}_{n\to\infty}n(X_1+X_2+\cdots+X_n)$,

(iv) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{X_k}{2^k}$, (v) $\overline{\lim}_{n\to\infty}(X_n+X_{n+1})$.

(β) Ποιά από τα παρακάτω σύνολα είναι στοιχεία της $\mathcal{C}_\infty$;

(i) $\left\{\sum_{n=1}^{\infty}|X_n|<\infty\right\}$, (ii) $\{X_1+X_2+\cdots+X_n=0 \text{ για άπειρα } n\}$,

(iii) $\left\{\overline{\lim}_{n\to\infty}n|X_1+X_2+\cdots+X_n|\leq 1\right\}$, (iv) $\left\{\sum_{n=1}^{\infty}X_n \text{ συγκλίνει σε πραγματικό άριθμό}\right\}$

(v) $\left\{\sum_{k=n}^{2n}X_k>0 \text{ για άπειρα } n\right\}$.

[Σχόλιο: Κατ΄ αρχάς, τα ερωτήματα να απαντηθούν διαισθητικά. Έπειτα, για το (β), για τα σύνολα τα οποία είναι στοιχεία της $\mathcal{C}_\infty$ να αποδειχθεί αυτό τυπικά. Για τα υπόλοιπα, να μην αποδειχθεί τίποτε. Για εκείνα δεν ισχυριζόμαστε ότι πάντοτε δεν είναι στοιχεία της $\mathcal{C}_\infty$. Εξαρτάται από την συγκεκριμένη επιλογή της ακολουθίας $(X_i)_{i\geq 1}$. Παρόμοιο σχόλιο ισχύει για το μέρος (α) της άσκησης.]

9.13 Έστω $(X_n)_{n\geq 1}$ ακολουθία ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών, καθεμία με κατανομή την τυπική κανονική $N(0,1)$. Για κάθε $n \geq 1$ θέτουμε $S_n := X_1 + X_2 + \cdots + X_n$.

(α) Για κάθε $A > 0$ και $n \geq 1$ να δειχθεί ότι

$$\mathbf{P}\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}} \geq A\right) = 1 - \Phi(A) > 0,$$

όπου Φ είναι η συνάρτηση κατανομής της $N(0,1)$. [Εδώ μπορείτε να χρησιμοποιήσετε πράγματα για κανονικές τυχαίες μεταβλητές και αθροίσματα τους από τις στοιχειώδεις πιθανότητες].

(β) Για κάθε $A > 0$, με πιθανότητα 1 ισχύει

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{S_n}{\sqrt{n}} \geq A.$$

(γ) Με πιθανότητα 1 ισχύει

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{S_n}{\sqrt{n}} = \infty.$$

9.14 Έστω $\{A_i : i \in I\}$ στοιχεία της $\mathcal{A}$.

(α) Θεωρούμε τις τυχαίες μεταβλητές $X_i := \mathbf{1}_{A_i}, i \in I$. Να δειχθεί ότι οι $\{X_i : i \in I\}$ είναι ανεξάρτητες αν και μόνο αν τα $\{A_i : i \in I\}$ είναι ανεξάρτητα.

(β) Αν τα $\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$ είναι ανεξάρτητα, τότε τα σύνολα $\liminf_n A_n, \limsup_n A_n$ έχουν πιθανότητα 0 ή 1.

9.15 Έστω $(X_n)_{n\geq 1}$ ακολουθία ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών. Θεωρούμε την δυναμοσειρά

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} X_n z^n.$$

(α) Να δειχθεί ότι η ακτίνα σύγκλισης R της f είναι μετρήσιμη ως προς την τελική σ-άλγεβρα των $(X_n)_{n\geq 1}$ και άρα είναι σταθερή με πιθανότητα 1.

(β) Αν υποθέσουμε επιπλέον ότι καθεμία από τις $(X_n)_{n\geq 1}$ έχει κατανομή $N(0,1)$, τότε με πιθανότητα 1 ισχύει $R = 1$.

9.16 Έστω $\{A_n : n \geq 1\}$ στοιχεία της $\mathcal{A}$ τα οποία είναι **ανα δύο ανεξάρτητα**. Θέτουμε

$$S_n := \sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}_{A_i}$$

και

$$s_n := \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}(A_i).$$

(α) Να δειχθεί ότι

$$\mathbf{E}(S_n^2) = s_n + s_n^2 - \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}(A_i)^2 \leq s_n + s_n^2.$$

[Υποδ. : Άσκηση 6.9]

(β) Για κάθε $\varepsilon > 0$, να δειχθεί ότι

$$\mathbf{P}(S_n \geq \varepsilon s_n) \geq (1-\varepsilon)^2 \frac{s_n^2}{s_n^2 + s_n}.$$

(γ)* Αν επιπλέον ισχύει ότι $\sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{P}(A_i) = \infty$, να δειχθεί ότι $\mathbf{P}(\limsup_n A_n) = 1$.

[Η άσκηση αυτή γενικεύει το 2ο Λήμμα Borel-Cantelli κατά το ότι υποθέτουμε τα $\{A_n : n \geq 1\}$ ανά δύο ανεξάρτητα και όχι απαραίτητα πλήρως ανεξάρτητα.]

9.17 Έστω $\{A_n : n \geq 1\}$ στοιχεία της $\mathcal{A}$ για τα οποία ισχύει $\sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{P}(A_i) = \infty$ και υπάρχει $C \in (0, \infty)$ ώστε

$$\mathbf{P}(A_i \cap A_j) \leq C \, \mathbf{P}(A_i) \, \mathbf{P}(A_j)$$

για κάθε $i, j \geq 1$. Να δειχθεί ότι

$$\mathbf{P}(\limsup_n A_n) \geq 1/C > 0.$$

10

Ο Νόμος των Μεγάλων Αριθμών

Στην παράγραφο αυτή παρουσιάζουμε ένα από τα σημαντικότερα αποτελέσματα της Θεωρίας Πιθανοτήτων, το Νόμο των Μεγάλων Αριθμών. Το θεώρημα που ακολουθεί δεν αποτελεί την ισχυρότερη μορφή του. Όμως η απόδειξή του είναι ευκολότερη τεχνικά και διατηρεί αρκετά από τα στοιχεία της απόδειξης της ισχυρής μορφής.

Θεώρημα 10.1 (Ισχυρός Νόμος των Μεγάλων Αριθμών) *Έστω $(X_n)_{n\geq 1}$ ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες ματαβλητές στον $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ με τιμές στο $\mathbb{R}$ έτσι ώστε $\mathbf{E}\left(X_1^2\right) < \infty$. Θέτουμε $\mu = \mathbf{E}(X_1)$ και $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$ για κάθε $n \geq 1$. Τότε*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} = \mu \text{ με πιθανότητα 1.}$$

Απόδειξη Έστω $\sigma^2 = \mathrm{Var}(X_1)$.
Πρώτα θα αποδείξουμε το ζητούμενο για $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ με τιμές στο $[0,\infty]$. Για $n \geq 1$, θέτουμε $Y_n = \frac{S_n}{n} - \mu$. Τότε

$$\mathbf{E}(Y_n) = \frac{1}{n}\,\mathbf{E}(S_n) - \mu = \frac{1}{n} n\,\mathbf{E}(X_1) - \mu = 0,$$

και

$$\mathbf{E}\left(Y_n^2\right) = \mathrm{Var}(Y_n^2) = \mathrm{Var}\left(\frac{S_n}{n}\right) = \frac{1}{n^2}\,\mathrm{Var}(S_n).$$

Όμως $\mathrm{Var}(S_n) = n\,\mathrm{Var}(X_1)$ εφόσον οι $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ανεξάρτητες. Επομένως,

$$\mathbf{E}\left(Y_n^2\right) = \frac{\sigma^2}{n}.$$

Έτσι, για την υπακολουθία $(Y_{n^2})_{n\geq 1}$, έχουμε ότι

$$\mathbf{E}\left\{\sum_{n=1}^{\infty} Y_{n^2}^2\right\} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma^2}{n^2} < \infty.$$

Άρα, με πιθανότητα 1, $\sum_{n=1}^{\infty} Y_{n^2}^2 < \infty$, συνεπώς $\lim_{n\to\infty} Y_{n^2} = 0$.

Τώρα, από το $\lim_{n\to\infty} Y_{n^2} = 0$, θέλουμε να περάσουμε στο $\lim_{n\to\infty} Y_n = 0$.
Έστω $k \geq 1$. Θέτουμε $n(k) = [\sqrt{k}]$. Τότε

$$\frac{S_{n(k)^2}}{(n(k)+1)^2} \leq \frac{S_k}{k} \leq \frac{S_{(n(k)+1)^2}}{n(k)^2}$$

εφόσον $n(k) \leq \sqrt{k} \leq n(k)+1$ και η S_n είναι άθροισμα θετικών όρων. Όμως, για $n \to \infty$, με πιθανότητα 1,

$$\frac{S_{n(k)^2}}{(n(k)+1)^2} = \frac{S_{n(k)^2}}{n(k)^2}\Big(\frac{n(k)}{n(k)+1}\Big)^2 \to \mu,$$

και

$$\frac{S_{(n(k)+1)^2}}{n(k)^2} = \frac{S_{(n(k)+1)^2}}{(n(k)+1)^2}\Big(\frac{n(k)+1}{n(k)}\Big)^2 \to \mu.$$

Άρα, με πιθανότητα 1, έχουμε ότι $\lim_{k\to\infty}\frac{S_k}{k} = \mu$.

Στην περίπτωση που οι $(X_n)_{n\geq 1}$ παίρνουν τιμές στο $[-\infty, \infty]$, έχουμε

$$\frac{S_n}{n} = \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n} = \frac{X_1^+ + X_2^+ + \ldots + X_n^+}{n} - \frac{X_1^- + X_2^- + \ldots + X_n^-}{n}.$$

Οι $(X_n^+)_{n\in\mathbb{N}}$, όπως και οι $(X_n^-)_{n\in\mathbb{N}}$, είναι ανεξάρτητες και ισόνομες, και $\mathbf{E}\left((X_1^+)^2\right) < \infty$, $\mathbf{E}\left((X_1^-)^2\right) < \infty$ εφόσον $(X_1^+)^2 \leq X_1^2$, $(X_1^-)^2 \leq X_1^2$. Από τα προηγούμενα, έχουμε ότι

$$\lim_{n\to\infty}\frac{X_1^+ + X_2^+ + \ldots + X_n^+}{n} = \mathbf{E}(X_1^+),$$

και

$$\lim_{n\to\infty}\frac{X_1^- + X_2^- + \ldots + X_n^-}{n} = \mathbf{E}(X_1^+)$$

με πιθανότητα 1. Συνεπώς, με πιθανότητα 1,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n} = \mathbf{E}(X_1^+) - \mathbf{E}(X_1^-) = \mu.$$

■

Το συμπέρασμα του θεωρήματος ισχύει και αν αντί της $\mathbf{E}(X_1^2) < \infty$ υποθέσουμε ότι $\mathbf{E}(|X_1|) < \infty$, δηλαδή κάτι λιγότερο. Αυτή είναι η γενική μορφή του νόμου των μεγάλων αριθμών, και στο εξής θα τον θεωρούμε δεδομένο με αυτή, την ισχυρότερη μορφή.

Επίσης, αν $(X_n)_{n\geq 1}$ είναι τυχαίες μεταβλητές με τιμές στο $\mathbb{R}$, στο εξής, θα συμβολίζουμε με S_n το n-οστό μερικό άθροισμά τους.

Ασκήσεις

10.1 (Ασθενής Νόμος των Μεγάλων Αριθμών) Έστω $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές με τιμές στο $\mathbb{R}$, έτσι ώστε $\mathbf{E}\left(X_1^2\right) < \infty$. Θέτουμε $\mu = \mathbf{E}(X_1)$. Να δειχθεί ότι

$$\lim_{n\to\infty}\mathbf{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - \mu\right| > \epsilon\right) = 0, \text{ για κάθε } \epsilon > 0.$$

Δηλαδή η ακολουθία $\frac{S_n}{n}$ συγκλίνει στο μ κατά πιθανότητα.

* 10.2 Έστω $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές με τιμές στο $\mathbb{R}$ έτσι ώστε $\mathbf{E}(X_1^+) = \infty$ και $\mathbf{E}(X_1^-) < \infty$. Να δείξετε ότι

$$\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n} = \infty$$

με πιθανότητα 1.

* 10.3 (Αντίστροφο του Νόμου των Μεγάλων Αριθμών) Έστω $(X_n)_{n\geq 1}$ ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές με τιμές στο $\mathbb{R}$ έτσι ώστε $\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n} = \mu$ σχεδόν βεβαίως, με $\mu \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι $\mathbf{E}(|X_1|) < \infty$ και $\mathbf{E}(X_1) = \mu$.

10.4 Έστω $(X_n)_{n\geq 1}$ ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές με $X_1 \sim N(1,3)$. Να δείξετε ότι

$$\lim_{n\to\infty}\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{(X_1)^2 + (X_2)^2 + \ldots + (X_n)^2} = \frac{1}{4},$$

με πιθανότητα 1.

10.5 Έστω $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές με τιμές στο $\mathbb{R}$ έτσι ώστε $\mathbf{E}(|X_1|) < \infty$ και $\mathbf{E}(X_1) > 0$. Να δείξετε ότι

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \infty$$

με πιθανότητα 1.

10.6 Έστω $(U_i)_{i\geq 1}$ ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων τυχαίων μεταβλητών, καθεμία με κατανομή $U(0,1)$, δηλαδή ομοιόμορφη στο $(0,1)$. Να δειχθεί ότι

(α) $\lim_{n\to\infty}(U_1 U_2 \cdots U_n)^{1/n} = e^{-1}$ με πιθανότητα 1.

(β) $\lim_{n\to\infty} U_1 U_2 \cdots U_n = 0$ με πιθανότητα 1.

(γ) $\lim_{n\to\infty} \frac{U_1^a + \cdots + U_n^a}{n} = \begin{cases} \frac{1}{1+a} & \text{με πιθανότητα 1 αν } a > -1, \\ \infty & \text{με πιθανότητα 1 αν } a \leq -1. \end{cases}$

10.7 Έστω $(X_i)_{i\geq 1}$ ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων τυχαίων μεταβλητών με $\mu = \mathbf{E}(X_1) \in \mathbb{R}$ και $\sigma^2 = V(X_1) < \infty$. Να δειχθεί ότι

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} (X_k - \mu)^2 = \sigma^2 \text{ με πιθανότητα 1.}$$

11

Πολυδιάστατες τυχαίες μεταβλητές

11.1 Πυκνότητες στον $\mathbb{R}^n$

Έστω λ το μέτρο Lebesgue στον $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$ (Παράδειγμα 2.4). Θεωρούμε το χώρο γινόμενο $(\mathbb{R}^n, \mathscr{B}(\mathbb{R}^n))$, $n \geq 1$, του $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$ n φορές εφοδιασμένο με το μέτρο γινόμενο, που θα συμβολίζουμε με λ_n, όπως αυτό ορίστηκε στην Παράγραφο 8.1. Τότε το μέτρο λ_n είναι το μοναδικό μέτρο στον $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$ με την ιδιότητα

$$\lambda_n(A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n) = \lambda(A_1)\lambda(A_2)\ldots\lambda(A_n), \quad \forall A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathscr{B}(\mathbb{R}).$$

Για το ολοκλήρωμα Lebesgue ως προς το μέτρο λ_n στον $(\mathbb{R}^n, \mathscr{B}(\mathbb{R}^n))$ μιας $\mathscr{B}(\mathbb{R}^n)/\mathscr{B}([-\infty, \infty])$ μετρήσιμης συνάρτησης $f : \mathbb{R}^n \to [-\infty, \infty]$ γράφουμε

$$\int f(x)\,\mathrm{d}\lambda_n(x) \text{ ή } \int f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\,\mathrm{d}\lambda(x_1)\mathrm{d}\lambda(x_2)\ldots\mathrm{d}\lambda(x_n).$$

Γενικεύουμε τώρα τον Ορισμό 6.42 της πυκνότητας ενός μέτρου πιθανότητας στην περίπτωση του $\mathbb{R}^n$.

Ορισμός 11.1 Έστω $\mathbf{P}$ μέτρο πιθανότητας στον $(\mathbb{R}^n, \mathscr{B}(\mathbb{R}^n))$ και $f : \mathbb{R}^n \to [0, \infty]$ Borel μετρήσιμη συνάρτηση. Η f λέγεται πυκνότητα του $\mathbf{P}$ αν

$$\mathbf{P}(A) = \int_A f(x)\,\mathrm{d}\lambda_n(x)$$

για κάθε $A \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$.

Όπως και στην περίπτωση του $\mathbb{R}$:

- Δεν έχουν όλα τα μέτρα στον $\mathbb{R}^n$ πυκνότητα.
- Για ένα μέτρο πιθανότητας $\mathbf{P}$ στον $\mathbb{R}^n$ και $f_1, f_2 : \mathbb{R}^n \to [0, \infty]$ Borel-μετρήσιμες, αν η f_1 είναι πυκνότητα του $\mathbf{P}$, τότε η f_2 είναι επίσης πυκνότητα του $\mathbf{P}$ αν και μόνο αν $\lambda_n(\{f_1 \neq f_2\}) = 0$.

Ορισμός 11.2 Έστω X τυχαία μεταβλητή σε χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ με τιμές στον $\mathbb{R}^n$. Μία μετρήσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R}^n \to [0, \infty]$ λέγεται πυκνότητα της X αν η f είναι πυκνότητα της κατανομής $\mathbf{P}^X$ της X.

Για λόγους απλότητας περιοριζόμαστε τώρα στην περίπτωση που $n = 2$. Το επόμενο θεώρημα γενικεύεται εύκολα στην περίπτωση του $\mathbb{R}^n$, $n > 2$.

Θεώρημα 11.3 *Έστω X τυχαία μεταβλητή σε χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, με τιμές στον $\mathbb{R}^2$ και πυκνότητα $f : \mathbb{R} \to [0, \infty]$. Αν $X = (Y, Z)$, με $Y, Z : \Omega \to \mathbb{R}$ τυχαίες μεταβλητές, ισχύουν τα εξής:*

(i). Οι Y, Z έχουν αντίστοιχα πυκνότητες

$$f_Y(y) = \int f(y, z)\,\mathrm{d}z \text{ και } f_Z(z) = \int f(y, z)\,\mathrm{d}y.$$

(ii). Οι Y, Z *είναι ανεξάρτητες αν και μόνο αν* $f(y,z) = f_Y(y) f_Z(z)$ *σχεδόν παντού στον* $\mathbb{R}^2$.

Απόδειξη (i) Θα δείξουμε ότι η $f_Y(y)$ είναι πυκνότητα της Y. Για την $f_Z(z)$ δουλεύουμε όμοια. Έστω $A \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$. Τότε

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(Y \in A) = \mathbf{P}\left((Y,Z) \in A \times \mathbb{R}\right) &= \int_{A\times\mathbb{R}} f(y,z)\,\mathrm{d}\lambda_2(y,z) \\
&= \int f(y,z)\mathbf{1}_{A\times\mathbb{R}}(y,z)\,\mathrm{d}\lambda_2(y,z) = \int\int f(y,z)\mathbf{1}_{A\times\mathbb{R}}(y,z)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y \\
&= \int_A\int f(y,z)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y = \int_A f_Y(y)\,\mathrm{d}y.
\end{aligned}$$

με την f_Y όπως στην εκφώνηση. Αποδείχθηκε το ζητούμενο.

(ii) Έστω ότι οι Y, Z είναι ανεξάρτητες. Θεωρούμε το σύνολο

$$\mathcal{C} = \left\{ C \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^2) : \int_C f(y,z)\,\mathrm{d}\lambda_2(y,z) = \int_C f_Y(y) f_Z(z)\,\mathrm{d}\lambda_2 \right\}.$$

Εφόσον οι Y, Z είναι ανεξάρτητες, για $A, B \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$ και $C = A \times B$, έχουμε

$$\mathbf{P}\left((Y,Z) \in C\right) = \mathbf{P}(Y \in A)\,\mathbf{P}(Z \in B).$$

Όμως

$$\mathbf{P}\left((Y,Z) \in C\right) = \int_{A\times B} f(x,y)\,\mathrm{d}\lambda_2(y,z),$$

άρα

$$\begin{aligned}
\int_{A\times B} f(x,y)\,\mathrm{d}\lambda_2(y,z) &= \int_A f_Y(y)\,\mathrm{d}y \int_B f_Z(z)\,\mathrm{d}z \\
&= \int_A\int_B f_Y(y) f_Z(z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \\
&= \int_{A\times B} f_Y(y) f_Z(z)\,\mathrm{d}\lambda_2(y,z),
\end{aligned}$$

σύμφωνα με το Θεώρημα 8.19 (Tonelli-Fubini). Συνεπώς, η οικογένεια $\mathcal{D} = \{A \times B\colon A, B \in \mathscr{B}(\mathbb{R})\}$ περιέχεται στη $\mathcal{C}$. Επιπλέον, η $\mathcal{D}$ είναι κλειστή στις πεπερασμένες τομές και παράγει τη σ-άλγεβρα $\mathscr{B}(\mathbb{R}^2)$, ενώ η $\mathcal{C}$ είναι κλάση Dynkin (γιατί;). Από το Θεώρημα 3.6, έχουμε ότι $\mathscr{B}(\mathbb{R}^2) = \sigma(\mathcal{D}) = \delta(\mathcal{D}) \subset \mathcal{C}$. Άρα $\mathcal{C} = \mathscr{B}(\mathbb{R}^2)$. Δηλαδή

$$\mathbf{P}\left((Y,Z) \in C\right) = \int_C f(y,z)\,\mathrm{d}\lambda_2(y,z) = \int_C f_Y(y) f_Z(z)\,\mathrm{d}\lambda_2(y,z) \text{ για κάθε } C \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^2).$$

Από την σχεδόν παντού μοναδικότητα της πυκνότητας, έχουμε $f(y,z) = f_Y(y) f_Z(z)$ σχεδόν παντού στον $\mathbb{R}^2$. Αντίστροφα, αν $f(y,z) = f_Y(y) f_Z(z)$ σχεδόν παντού στο $\mathbb{R}^2$, για $A, B \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^2)$ έχουμε

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}\left((Y,Z) \in A \times B\right) &= \int_{A\times B} f(y,z)\,\mathrm{d}\lambda_2(y,z) = \int_{A\times B} f_Y(y) f_Z(z)\,\mathrm{d}\lambda_2(y,z) \\
&= \int f_Y(y) f_Z(z)\mathbf{1}_{A\times B}(y,z)\,\mathrm{d}\lambda_2(y,z) = \int\int f_Y(y) f_Z(z)\mathbf{1}_A(y)\mathbf{1}_B(z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \\
&= \int f_Y(y)\mathbf{1}_A(y)\,\mathrm{d}y \int f_Z(z)\mathbf{1}_B(z)\,\mathrm{d}Z = \mathbf{P}(Y \in A)\,\mathbf{P}(Z \in B).
\end{aligned}$$

Συνεπώς, οι Y, Z είναι ανεξάρτητες. ■

Ασκήσεις

11.1 Έστω $A \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^2)$. Θέτουμε $A_x = \{y \in \mathbb{R} : (x,y) \in A\}$ και $A^y = \{x \in \mathbb{R} : (x,y) \in \mathbb{R}\}$. Να δείξετε ότι τα εξής είναι ισοδύναμα:

(α) $\lambda_2(A) = 0$.

(β) $\lambda(\{x \in \mathbb{R} : \lambda(A_x > 0)\}) = 0$.

(γ) $\lambda(\{y \in \mathbb{R} : \lambda(A^y > 0)\}) = 0$.

12

Χαρακτηριστικές συναρτήσεις

12.1 Μετασχηματισμός Fourier μέτρου πιθανότητας στο $\mathbb{R}$

Έστω $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ χώρος μέτρου, και $f : \Omega \to \mathbb{C}$ Borel μετρήσιμη συνάρτηση. Το πραγματικό και φανταστικό μέρος της f, που τα συμβολίζουμε με $\mathrm{Re}(f), \mathrm{Im}(f)$, είναι συναρτήσεις στο Ω με πραγματικές τιμές, και είναι εύκολο να δει κανείς ότι είναι Borel μετρήσιμες.

Ορίζουμε το ολοκλήρωμα Lebesgue της f ως προς το μέτρο μ ως εξής:

$$\int f \, \mathrm{d}\mu = \int \mathrm{Re}(f) \, \mathrm{d}\mu + i \int \mathrm{Im}(f) \, \mathrm{d}\mu.$$

Ισχύει ότι

$$\Big| \int f \, \mathrm{d}\mu \Big| \le \int |f| \, \mathrm{d}\mu$$

όπου $|\cdot|$ συμβολίζει το μέτρο μιγαδικού, και

$$\int \overline{f} \, \mathrm{d}\mu = \overline{\int f \, \mathrm{d}\mu}.$$

Η δεύτερη ιδιότητα είναι προφανής ενώ για την πρώτη αρκεί κανείς να παρατηρήσει ότι αν z μιγαδικός αριθμός υπάρχει $\theta \in [0, 2\pi)$ έτσι ώστε

$$\Big| \int f \, \mathrm{d}\mu \Big| = e^{i\theta} \int f \, \mathrm{d}\mu.$$

Τότε

$$\Big| \int f \, \mathrm{d}\mu \Big| = e^{i\theta} \int f \, \mathrm{d}\mu = \int e^{i\theta} f \, \mathrm{d}\mu,$$

και εφόσον $\displaystyle\int e^{i\theta} f \, \mathrm{d}\mu = \int \mathrm{Re}(e^{i\theta} f) \, \mathrm{d}\mu$ (γιατί;), έχουμε ότι

$$\int \mathrm{Re}(e^{i\theta} f) \, \mathrm{d}\mu \le \int |e^{i\theta} f| \, \mathrm{d}\mu = \int |f| \, \mathrm{d}\mu,$$

από το οποίο προκύπτει το ζητούμενο.

Δίνουμε τώρα τον ορισμό του μετασχηματισμού Fourier ενός μέτρου πιθανότητας μ στον $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$.

Ορισμός 12.1 Έστω μ μέτρο πιθανότητας στον $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$. Μετασχηματισμό Fourier του μ ονομάζουμε την συνάρτηση $\hat{\mu}$ που ορίζεται ως

$$\hat{\mu}(u) := \int e^{iux} \, \mathrm{d}\mu(x) = \int \cos(ux) \, \mathrm{d}\mu(x) + i \int \sin(ux) \, \mathrm{d}\mu(x)$$

για κάθε $u \in \mathbb{R}$. Η $\hat{\mu}$ παίρνει τιμές στο $\mathbb{C}$.

Θεώρημα 12.2 *Έστω μ μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}$. Τότε*

(i). $|\hat{\mu}(u)| \leq 1$, *για κάθε* $u \in \mathbb{R}$.
(ii). $\hat{\mu}(0) = 1$.
(iii). *Η $\hat{\mu}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής.*

Απόδειξη (i) Για $u \in \mathbb{R}$, εχουμε ότι

$$|\hat{\mu}(u)| = |\int e^{iux}\, \mathrm{d}\mu(x)| \leq \int |e^{iux}|\, \mathrm{d}\mu(x) = \int 1\, \mathrm{d}\mu(x) = 1.$$

(ii) $\hat{\mu}(0) = \int e^{0}\, \mathrm{d}\mu(x) = 1$.

(iii) Αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε ακολουθία $(\delta_k)_{k\in\mathbb{N}}$ στον $\mathbb{R}$ με $\delta_k \to 0$ ισχύει ότι

$$\lim_{k\to\infty} \sup_{u\in\mathbb{R}} |\hat{\mu}(u+\delta_k) - \hat{\mu}(u)| = 0.$$

Έστω $u, \zeta \in \mathbb{R}$. Τότε,

$$\begin{aligned} |\hat{\mu}(u+\zeta) - \hat{\mu}(u)| &= \left|\int (e^{i(u+\zeta)x} - e^{iux})\, \mathrm{d}\mu(x)\right| = \left|\int e^{iux}(e^{i\zeta x} - 1)\, \mathrm{d}\mu(x)\right| \\ &\leq \int |e^{iux}||e^{i\zeta x} - 1|\, \mathrm{d}\mu(x) = \int |e^{i\zeta x} - 1|\, \mathrm{d}\mu(x). \end{aligned}$$

Άρα, αν $(\delta_k)_{k\in\mathbb{N}}$ μηδενική ακολουθία, για $k \in \mathbb{N}$ έχουμε,

$$\sup_{u\in\mathbb{R}} |\hat{\mu}(u+\delta_k) - \hat{\mu}(u)| \leq \int |e^{i<\delta_k, x>} - 1|\, \mathrm{d}\mu(x).$$

Έστω $f_k(x) = |e^{i\delta_k x} - 1|$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Τότε

α. $\lim_{k\to\infty} f_k(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
β. $|f_k(x)| \leq g(x)$ όπου $g(x) = 2$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
γ. $\int g(x)\, \mathrm{d}\mu(x) = 2 < \infty$.

Συνεπώς, από το Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης, έχουμε

$$\lim_{k\to\infty} \int f_k(x)\, \mathrm{d}\mu(x) = 0,$$

και έτσι προκύπτει το ζητούμενο. ∎

12.2 Χαρακτηριστικές συναρτήσεις

Ορισμός 12.3 Έστω X τυχαία μεταβλητή σε χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ με τιμές στον $\mathbb{R}$. Χαρακτηριστική συνάρτηση της X λέμε τη συνάρτηση $\phi_X : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ με

$$\phi_X(u) = \mathbf{E}(e^{iuX}).$$

Από την Πρόταση 6.39, $\phi_X(u) = \int e^{iux}\, \mathrm{d}\,\mathbf{P}^X(x)$, δηλαδή $\phi_X = \widehat{\mathbf{P}^X}$.

Πρόταση 12.4 *Έστω X, Y τυχαίες μεταβλητές στον $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ με τιμές στον $\mathbb{R}$, και $a, b \in \mathbb{R}$. Τότε για κάθε $u \in \mathbb{R}$ έχουμε* *(i).* $\phi_X(-u) = \overline{\phi_X(u)}$,

(ii). $\phi_{aX+b}(u) = e^{iub}\phi_X(au)$

(iii). *Αν* X, Y *ανεξάρτητες, τότε* $\phi_{X+Y} = \phi_X(u)\phi_Y(u)$.

Απόδειξη (i). $\phi_X(-u) = \mathbf{E}(e^{i(-u)X}) = \mathbf{E}\left(\overline{e^{iuX}}\right) = \overline{\mathbf{E}(e^{iuX>})} = \overline{\phi_X(u)}$.

(ii). $\phi_{aX+b}(u) = \mathbf{E}(e^{iu(aX+b)}) = e^{iub}\,\mathbf{E}(e^{iauX}) = e^{iub}\phi_X(au)$.

(iii). $\phi_{X+Y}(u) = \mathbf{E}(e^{iu(X+Y)}) = \mathbf{E}(e^{iuX}e^{iuY}) = \mathbf{E}(e^{iuX})\,\mathbf{E}(e^{iuY}) = \phi_X(u)\phi_Y(u)$, όπου στην τρίτη ισότητα χρησιμοποιήσαμε την ανεξαρτησία των X, Y και το Θεώρημα 8.8.

■

Στο επόμενο παράδειγμα, υπολογίζουμε τη χαρακτηριστική συνάρτηση τυχαίων μεταβλητών που ακολουθούν κάποια από τις γνωστές κατανομές.

Παράδειγμα 12.5 (i). Έστω $X \sim \mathbf{Bin}(n, p)$. Τότε, $\phi_X(u) = (pe^{iu} + 1 - p)^n$. Πράγματι,

$$\begin{aligned}\phi_X(u) = \mathbf{E}(e^{iuX}) &= \sum_{k=0}^{n} e^{iuk}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}\\ &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(e^{iu}p)^k(1-p)^{n-k}\\ &= (e^{iu}p + 1 - p)^n.\end{aligned}$$

(ii). Έστω $X \sim \mathbf{Poisson}(\lambda)$, $\lambda > 0$. Τότε, $\phi_X(u) = e^{\lambda(e^{iu}-1)}$ (αποδεικνύεται όμοια με το (*i*)).

(iii). Έστω $X \sim \mathbf{U}(-a, a)$. Τότε

$$\phi_X(u) = \begin{cases} \frac{\sin(au)}{au} & \text{αν } u \in \mathbb{R}\backslash\{0\}, \\ 1 & \text{αν } u = 0. \end{cases}.$$

Πράγματι, η X έχει πυκνότητα

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2a}, & x \in (-a, a) \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus (-a, a) \end{cases}.$$

Άρα, για $u \neq 0$, έχουμε

$$\begin{aligned}\phi_X(u) = \mathbf{E}(e^{iuX}) &= \int_{-a}^{a} e^{iux}\frac{1}{2a}\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{2a}\int_{-a}^{a}\cos(ux)\,\mathrm{d}x + i\frac{1}{2a}\int_{-a}^{a}\sin(ux)\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{2a}\frac{\sin(ux)}{u}\bigg|_{-a}^{a} = \frac{1}{2a}\Big(\frac{\sin(ua)}{u} - \frac{\sin(-ua)}{u}\Big)\\ &= \frac{\sin(ua)}{ua}.\end{aligned}$$

Για $u = 0$, προφανώς $\phi_X(0) = 1$.

(iv). Έστω $X \sim \mathbf{N}(0, 1)$. Τότε, $\phi_X(u) = e^{-u^2/2}$.

Ο υπολογισμός της χαρακτηριστικής συνάρτησης στην περίπτωση αυτή είναι πιο περίπλοκος. Ένας τρόπος είναι με χρήση επιχειρημάτων από τη Μιγαδική Ανάλυση.[1] Ένας άλλος, όχι και τόσο προφανής τρόπος, είναι ο εξής:

$$\begin{aligned}\phi_X(u) = \mathbf{E}(e^{iux}) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{iux} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \cos(ux) e^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x + i\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \sin(ux) e^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \cos(ux) e^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Η τελευταία ισότητα ισχύει γιατί η συνάρτηση $x \mapsto \sin(ux)e^{-x^2/2}$ είναι περιττή. Πλέον η συνάρτηση $\phi_X(u)$ είναι πραγματική, παραγωγίσιμη και ισχύει ότι

$$\phi_X'(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (-x) \sin(ux) e^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x.$$

Η παραγώγιση κάτω από το ολοκλήρωμα απαιτεί δικαιολόγηση την οποία παραλείπουμε. Ολοκληρώνοντας κατά μέρη, έχουμε

$$\phi_X'(u) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u \cos(ux) e^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x = -u\phi_X(u).$$

Έστι καταλήγουμε στη συνήθη διαφορική εξίσωση $\phi_X'(u) = -u\phi_X(u)$, η οποία έχει γενική λύση

$$\phi_X(u) = Ce^{-u^2/2}.$$

Και εφόσον $\phi_X(0) = 1$, έχουμε ότι $C = 1$. Άρα $\phi_X(u) = e^{-u^2/2}$.

(v). Έστω $X \sim \mathbf{N}(\mu, \sigma^2)$. Τότε

$$\phi_X(u) = e^{iu\mu - u^2 \frac{\sigma^2}{2}}.$$

Από τα προηγούμενα, θεωρώντας την τυχαία μεταβλητή $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$, έχουμε ότι $Z \sim \mathbf{N}(0,1)$ και $X = \sigma Z + \mu$. Άρα, $\phi_X(u) = \phi_{\sigma Z+\mu}(u) = e^{iu\mu}\phi_Y(u\sigma) = e^{iu\mu}e^{-u^2\frac{\sigma^2}{2}}$.

(vi). Έστω $X \sim \mathbf{Exp}(\lambda)$, $\lambda > 0$. Τότε, $\phi_X(u) = \frac{\lambda}{\lambda - iu}$, για κάθε $u \in \mathbb{R}$. Πράγματι,

$$\begin{aligned}\phi_X(u) = \mathbf{E}(e^{iuX}) &= \int_0^{\infty} e^{iux} \lambda e^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x \\ &= \lambda \int_0^{\infty} e^{x(i\lambda + iu)}\,\mathrm{d}x = \lim_{M\to\infty} \lambda \int_0^{M} e^{x(-\lambda+iu)}\,\mathrm{d}x \\ &= \lim_{M\to\infty} \lambda \frac{e^{x(-\lambda+iu)}}{-\lambda+iu}\Bigg|_0^M = \lim_{M\to\infty} \lambda \frac{e^{M(-\lambda+iu)} - 1}{-\lambda + iu} \\ &= \frac{\lambda}{\lambda - iu},\end{aligned}$$

αφού $|e^{iuM}| = 1$, άρα $\lim_{M\to\infty} e^{-\lambda M} e^{iuM} = 0$.

[1] Ο τρόπος αυτός χρησιμοποιεί το Θεώρημα Αναλυτικής Συνέχισης για ολόμορφες μιγαδικές συναρτήσεις. Συγκεκριμένα, πρώτα δείχνουμε ότι $\mathbf{E}(e^{tX}) = e^{t^2/2}$, για κάθε $t \in \mathbb{R}$ (αυτός είναι υπολογισμός με πραγματικούς αριθμούς). Έπειτα θεωρούμε τις μιγαδικές συναρτήσεις $\psi(z) = e^{z^2/2}$, $g(z) = \mathbf{E}(e^{zX})$. Δείχνουμε ότι η g αναλύεται σε δυναμοσειρά του z με ακτίνα σύγκλισης $R = \infty$, άρα είναι ολόμορφη σε όλο το $\mathbb{C}$. Επιπλέον, για κάθε $t \in \mathbb{R}$, $g(t) = \mathbf{E}(e^{tX}) = e^{t^2/2} = \psi(t)$. Από την αρχή αναλυτικής συνεχίσεως, εφόσον οι g και ψ ταυτίζονται στο $\mathbb{R}$, ταυτίζονται σε όλο το $\mathbb{C}$. Συνεπώς, $\phi_X(t) = g(it) = \psi(it) = e^{-t^2/2}$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$. Περισσότερα για αυτή τη μέθοδο προσδιορισμού της χαρακτηριστικής συνάρτησης θα δούμε στην επόμενη παράγραφο.

12.3 Χαρακτηριστικές συναρτήσεις και ροπογεννήτριες

Για μία τυχαία μεταβλητή X με τιμές στο $\mathbb{R}$ η ροπογεννήτρια της είναι η συνάρτηση $M_X : \mathbb{R} \to [0, \infty]$ με $M_X(t) = \mathbf{E}(e^{tX})$. Μια διαφορά της ροπογεννήτριας από την χαρακτηριστική συνάρτηση είναι ότι η τελευταία είναι πάντοτε πεπερασμένη ως ολοκλήρωμα συνάρτησης με μέτρο (μιγαδικού) το πολύ 1. Αντίθετα, η ροπεγεννήτρια είναι σίγουρα πεπερασμένη στο 0 με τιμή 1, αλλά για τις υπόλοιπες τιμές του t ενδέχεται να είναι ∞. Το αν είναι πεπερασμένη σε ένα $t \neq 0$ μας δίνει πολλές πληροφορίες για την τυχαία μεταβλητή X.

Η επόμενη πρόταση καταγράφει κάποιες συνέπειες της υπόθεσης ότι μια ροπογεννήτρια είναι πεπερασμένη σε μια περιοχή του 0.

Πρόταση 12.6 *Αν υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε $M_X(-\varepsilon), M_X(\varepsilon) < \infty$, τότε*

(i). $M_X(t) < \infty$ *για κάθε* $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$.

(ii). $\mathbf{E}(|X|^k) < \infty$ *για κάθε* $k \in \mathbb{N}$.

(iii). Η M_X *αναλύεται σε δυναμοσειρά ως*

$$M_X(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathbf{E}(X^k)}{k!} t^k \tag{12.1}$$

με ακτίνα σύγκλισης τουλάχιστον ε.

(iv). $\mathbf{E}(X^k) = M_X^{(k)}(0)$ *για κάθε* $k \in \mathbb{N}$.

Απόδειξη (i) Έπεται από την ανισότητα $e^{tX} \leq e^{|tX|} \leq e^{-\varepsilon X} + e^{\varepsilon X}$ και το ότι $M_X(-\varepsilon) + M_X(\varepsilon) < \infty$.

(ii) Το ανάπτυγμα σε δυναμοσειρά της $e^{\varepsilon|X|}$ δίνει $\varepsilon^k |X|^k \leq k!\, e^{|\varepsilon|X|} \leq k!(e^{-\varepsilon X} + e^{\varepsilon X})$. Το συμπέρασμα έπεται από την υπόθεση.

(iii) Για $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ έχουμε

$$M_X(t) = \mathbf{E}\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k X^k}{k!}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{E}\left(\frac{t^k X^k}{k!}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k\, \mathbf{E}(X^k)}{k!}.$$

Η εναλλαγή ολοκληρώματος και αθροίσματος έπεται από το θεώρημα Fubini (εφαρμοσμένο στα μέτρα $\mathbf{P}$, αριθμητικό μέτρο στο $\mathbb{N}$) γιατί

$$\mathbf{E}\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{|t^k X^k|}{k!}\right) = \mathbf{E}(e^{|tX|}) < \infty$$

όπως είδαμε στην απόδειξη του (i).

(iv) Έπεται από το (iii) και τη θεωρία των δυναμοσειρών. ■

Για να θυμάται κανείς τον τύπο $\mathbf{E}(X^k) = M_X^{(k)}(0)$ χρήσιμη είναι η εξής "απόδειξη" του. Στην $M_X(t) = \mathbf{E}(e^{tX})$ παραγωγίζουμε k φορές και παίρνουμε

$$M_X^{(k)}(t) = \mathbf{E}(X^k e^{tX}). \tag{12.2}$$

Δηλαδή περνάμε την παράγωγο μέσα από την μέση τιμή. Το ότι αυτό είναι σωστό αποδεικνύεται με χρήση του θεωρήματος κυριαρχημένης σύγκλισης, αλλά το παραλείπουμε. Έπειτα θέτουμε $t = 0$ στην (12.2).

Από το (ii) της προηγούμενης πρότασης έπεται ότι μια τυχαία μεταβλητή με $\mathbf{E}(X^+) = \mathbf{E}(X^-) = \infty$ έχει αυτόματα $M_X(t) = \infty$ για κάθε $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Η ροπογεννήτρια της δεν την χαρακτηρίζει.

Από την άλλη, ο υπολογισμός της ροπεγεννήτριας αφορά πραγματικούς αριθμούς, και είναι συνήθως ευκολότερος καθώς ανάγεται σε ολοκληρώματα ή αθροίσματα πραγματικών συναρτήσεων. Έχοντας υπολογίσει κανείς την M_X, είναι δελεαστικό να υποθέσει ότι

$$\phi_X(t) = \mathbf{E}(e^{itX}) \stackrel{?}{=} M_X(it).$$

Ένα πρώτο πρόβλημα είναι ότι το σύμβολο $M_X(it)$ δεν έχει νόημα αφού η M_X έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$. Ας το παραβλέψουμε. Η ίδέα είναι να βρούμε έναν τύπο για την M_X στον οποίο να μπορέσουμε να βάλουμε όπου t το it. Και έχουμε παραδείγματα που αυτό δουλεύει. Π.χ. στην περίπτωση που η X ακολουθεί κάποια κανονική ή εκθετική κατανομή.

Ας δούμε τι γίνεται αν η $X \sim N(0,1)$. Βρίσκουμε ότι $M_X(t) = e^{t^2/2}$. Βάζοντας όπου t το it βρίσκουμε $e^{-t^2/2}$ που είναι ο σωστός τύπος για την χαρακτηριστική συνάρτηση της X. Είναι δυνατόν όμως να πει κανείς ότι $M_X(t) = e^{|t|^2/2}$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$, και η αντικατάσταση $t \to it$ δίνει $e^{t^2/2}$, που είναι λάθος. Τι καλύτερο έχει ο τύπος $e^{t^2/2}$ από τον $e^{|t|^2/2}$;

Πρόταση 12.7 *Έστω X πραγματική τυχαία μεταβλητή με ροπεγεννήτρια M_X. Υποθέτουμε ότι υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε*

(i). Η M_X είναι πεπερασμένη στο $(-\varepsilon, \varepsilon)$.

(ii). Υπάρχει αναλυτική συνάρτηση $f : \{z \in \mathbb{C} : |\,Re(z)| < \varepsilon\} \to \mathbb{C}$ ώστε το σύνολο των σημείων $t \in \mathbb{R}$ που ικανοποιούν $M_X(t) = f(t)$ να έχει σημείο συσσώρευσης στο $(-\varepsilon, \varepsilon)$.

Τότε $\phi_X(t) = f(it)$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$.

Απόδειξη Έστω $A_\varepsilon := \{z \in \mathbb{C} : |\,\mathrm{Re}(z)| < \varepsilon\}$. Θέτουμε $g : A_\varepsilon \to \mathbb{C}$ με $g(z) := \mathbf{E}(e^{zX})$ για κάθε $z \in A_\varepsilon$.

Ισχυρισμος: Η g είναι καλά ορισμένη[2] και αναλυτική στο A_ε.

Επειδή $|e^{zX}| = e^{X \operatorname{Re} z}$ και $\mathbf{E}(e^{X \operatorname{Re} z}) < \infty$ από την υπόθεση (i), έπεται ότι η g είναι καλά ορισμένη. Τώρα για $z_0 \in A_\varepsilon$ και $z \in \mathbb{C}$ με $|z| < \varepsilon - |\,\mathrm{Re}(z_0)|$ ισχύει

$$g(z_0 + z) = \mathbf{E}(e^{z_0 X} e^{zX}) = \mathbf{E}\left\{ e^{z_0 X} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(zX)^k}{k!} \right\} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathbf{E}\left\{X^k e^{z_0 X}\right\}}{k!}\, z^k. \tag{12.3}$$

Χρειάζεται δικαιολόγηση μόνο η τελευταία ισότητα. Δηλαδή η αλλαγή σειράς μέσης τιμής και άθροισης. Αυτό έπεται από το θεώρημα Fubini αφού

$$\mathbf{E}\left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \left| e^{z_0 X} \frac{(zX)^k}{k!} \right| \right\} = \mathbf{E}\left\{ e^{\mathrm{Re}(z_0) X + |zX|} \right\} \le \mathbf{E}\left(^{|X|(|z| + |\,\mathrm{Re}(z_0)|)}\right) < \infty.$$

Το ότι η τελευταία ποσότητα είναι πεπερασμένη έπεται από το ότι $|z| + |\,\mathrm{Re}(z_0)| < \varepsilon$ και την υπόθεση (i). Εδώ λοιπον είναι κρίσιμη η υπόθεση ότι η M_X είναι πεπερασμένη στο $(-\varepsilon, \varepsilon)$. Επίσης συμπεραίνουμε ότι στο δεξί μέλος της (12.3) έχουμε μια δυναμοσειρά του z με πεπερασμένους συντελεστές η οποία συγκλίνει αφού η $g(z_0 + z)$ είναι πεπερασμένη. Έπεται ότι η g αναλύεται σε δυναμοσειρά με κέντρο z_0 και ακτίνα σύγκλισης τουλάχιστον $\varepsilon - |\,\mathrm{Re}(z_0)| > 0$, πράγμα που αποδεικνύει τον ισχυρισμό.

Από την υπόθεση (ii), το σύνολο των σημείων που $g(z) = f(z)$ έχει σημείο συσσώρευσης στο $(-\varepsilon, \varepsilon) \subset A_\varepsilon$. Από την αρχή αναλυτικής συνέχισης, οι συναρτήσεις f, g ταυτίζονται στο A_ε. Άρα, για $t \in \mathbb{R}$,

$$\phi_X(t) = g(it) = f(it)$$

[2] Το καλά ορισμένη σημαίνει ότι η μέση τιμή μπορεί να οριστεί και είναι στοιχείο του $\mathbb{C}$. Δεν εμφανίζεται κάποια μορφή $\infty - \infty$.

αφού $it \in A_\varepsilon$. ■

Επιστρέφοντας στην συζήτηση πριν την πρόταση, το πρόβλημα με την $e^{|z|^2/2}$ είναι ότι δεν είναι αναλυτική συνάρτηση. Έτσι δεν μπορεί να παίξει τον ρόλο της f που ανεφέρει η πρόταση.

Παράδειγμα 12.8 (i) Μια $X \sim N(0,1)$ έχει ροπογεννήρια $M_X(t) = e^{t^2/2}$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$. Η M_X είναι σαφώς πεπερασμένη σε περιοχή του 0. Η συνάρτηση $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ με $f(z) = e^{z^2/2}$ για κάθε $z \in \mathbb{C}$ είναι αναλυτική σε όλο το $\mathbb{C}$ και συμφωνεί με την M_X στο $\mathbb{R}$ (Είναι η μόνη αναλυτική που το κάνει αυτό). Άρα η Πρόταση 12.7 εφαρμόζεται, και δίνει ότι $\phi_X(t) = f(it) = e^{-t^2/2}$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$.

(ii) Μια $X \sim \mathbf{Exp}(\lambda)$ $(\lambda > 0)$ έχει ροπογεννήτρια

$$M_X(t) = \begin{cases} \frac{\lambda}{\lambda - t} & \text{αν } t < \lambda, \\ \infty & \text{αν } t \geq \lambda. \end{cases}$$

Η M_X είναι πεπερασμένη στην περιοχή $(-\lambda, \lambda)$ του 0. Η συνάρτηση $f : \mathbb{C} \backslash \{\lambda\} \to \mathbb{C}$ με $f(z) = \lambda/(\lambda - z)$ είναι αναλυτική στο πεδίο ορισμού της (το οποίο περιέχει μια λωρίδα της μορφής $\{z : |\operatorname{Re}(z)| < \varepsilon\}$ με $\varepsilon > 0$. Π.χ. με $\varepsilon = \lambda$.) και συμφωνεί με την M_X στο $(-\infty, \lambda)$. Άρα η Πρόταση 12.7 εφαρμόζεται, και δίνει ότι $\phi_X(t) = f(it) = \lambda/(\lambda - it)$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$.

12.4 Μετασχηματισμός Fourier στο $\mathbb{R}^n$

Έστω $n \geq 1$. Για $x, y \in \mathbb{R}^n$ με $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ και $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$, το σύνηθες εσωτερικό γινόμενο των x και y, $< x, y >$, ορίζεται ως:

$$< x, y > := \sum_{k=1}^{n} x_i y_i.$$

Ορισμός 12.9 Έστω μ μέτρο πιθανότητας στον $(\mathbb{R}^n, \mathscr{B}(\mathbb{R}^n))$. Μετασχηματισμό Fourier του μ ονομάζουμε την συνάρτηση $\hat{\mu}$ που ορίζεται ως

$$\hat{\mu}(u) := \int e^{i\langle u, x\rangle} \, \mathrm{d}\mu(x) = \int \cos(\langle u, x\rangle) \, \mathrm{d}\mu(x) + i \int \sin(\langle u, x\rangle) \, \mathrm{d}\mu(x)$$

για κάθε $u \in \mathbb{R}^n$. Η $\hat{\mu}$ παίρνει τιμές στο $\mathbb{C}$.

Και σε αυτή την περίπτωση η συνάρτηση $\hat{\mu}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής, έχει μέτρο φραγμένο από 1, και $\hat{\mu}(0) = 1$.

Ορισμός 12.10 Έστω X τυχαία μεταβλητή σε χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ με τιμές στον $\mathbb{R}^n$. Χαρακτηριστική συνάρτηση της X λέμε τη συνάρτηση $\phi_X : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ με

$$\phi_X(u) = \mathbf{E}(e^{i\langle u, X\rangle}).$$

Το ανάλογο της Πρότασης 12.11 είναι η εξής.

Πρόταση 12.11 *Έστω X, Y τυχαίες μεταβλητές στον $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ με τιμές στον $\mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, και $b \in \mathbb{R}$. Τότε για κάθε $u \in \mathbb{R}$ έχουμε*

(i). $\phi_X(-u) = \overline{\phi_X(u)}$,

(ii). $\phi_{AX+b}(u) = e^{i\langle u, b\rangle} \phi_X(A^t u)$

(iii). Αν X, Y ανεξάρτητες, τότε $\phi_{X+Y} = \phi_X(u)\phi_Y(u)$.

A^t *είναι ο ανάστροφος του πίνακα* A.

12.5 Θεώρημα μοναδικότητας και εφαρμογές

Στην παράγραφο αυτή βασιζόμαστε στο επόμενο θεώρημα, το οποίο είναι απόρροια του Θεωρήματος Μοναδικότητας του μετασχηματισμού Fourier και η απόδειξή του παραλείπεται γιατί ξεφεύγει από τα πλαίσια του σκοπού μας. Ο αναγνώστης μπορεί να αναζητήσει την απόδειξη του σε βιβλία Ανάλυσης Fourier ή Πιθανοτήτων (π.χ., Θεώρημα 14.1 στο Jacod and Protter (2003)).

Θεώρημα 12.12 (Θεώρημα Μοναδικότητας) *Έστω* μ, ν *μέτρα πιθανότητας στον* $(\mathbb{R}^n, \mathscr{B}(\mathbb{R}^n))$ *ώστε* $\hat{\mu}(u) = \hat{\nu}(u)$ *για κάθε* $u \in \mathbb{R}^n$. *Τότε,* $\mu = \nu$.

Το θεώρημα μεταφέρει τον έλεγχο $\mu(A) = \nu(A)$ για κάθε $A \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$ στον $\hat{\mu}(u) = \hat{\nu}(u)$ για κάθε $u \in \mathbb{R}^n$, που είναι ένας έλεγχος πάνω σε αριθμούς.

Αναδιατύπωση του θεωρήματος είναι το ακόλουθο πόρισμα, το οποίο αφορά τυχαίες μεταβλητές.

Πόρισμα 12.13 *Έστω* X, Y *τυχαίες μεταβλητές με τιμές στον* $\mathbb{R}^n$. *Αν* $\phi_X(u) = \phi_Y(u)$ *για κάθε* $u \in \mathbb{R}^n$, *τότε οι* X, Y *έχουν την ίδια κατανομή, δηλαδή* $\mathbf{P}^X = \mathbf{P}^Y$.

Απόδειξη Επειδή $\phi_X(u) = \widehat{\mathbf{P}^X}(u)$, από το Θεώρημα Μοναδικότητας προκύπτει το ζητούμενο. ■

Πόρισμα 12.14 *Έστω* $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ *τυχαία μεταβλητή με τιμές στον* $\mathbb{R}^n$. *Τότε οι* $\{X_j : 1 \leq j \leq n\}$ *είναι ανεξάρτητες αν και μόνο αν* $\phi_X(u_1, u_2, \ldots, u_n) = \phi_{X_1}(u_1)\phi_{X_2}(u_2) \cdots \phi_{X_n}(u_n)$, *για κάθε* $(u_1, u_2, \ldots, u_n) \in \mathbb{R}^n$.

Απόδειξη $\Rightarrow$ Έστω ότι οι $X_1, X_2, \ldots, X_n$ είναι ανεξάρτητες. Τότε

$$\phi_X(u_1, u_2, \ldots, u_n) = \mathbf{E}\left(e^{i\sum_{j=1}^n u_j X_j}\right) = \mathbf{E}(e^{iu_1X_1}e^{iu_2X_2} \cdots e^{iu_nX_n}).$$

Εφόσον οι $X_1, X_2, \ldots, X_n$ είναι ανεξάρτητες, από το Θεώρημα 8.8, οι $e^{iu_1X_1}e^{iu_2X_2} \ldots e^{iu_nX_n}$ είναι ανεξάρτητες (και προφανώς φραγμένες), άρα

$$\mathbf{E}(e^{iu_1X_1}e^{iu_2X_2} \cdots e^{iu_nX_n}) = \mathbf{E}(e^{iu_1X_1})\,\mathbf{E}(e^{iu_2X_2}) \cdots \mathbf{E}(e^{iu_nX_n}),$$

από το οποίο προκύπτει το ζητούμενο.

$\Leftarrow$ Από την υπόθεση, για $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$, έχουμε

$$\begin{aligned}
\widehat{P^X}(u) = \phi_X(u) &= \phi_{X_1}(u_1)\phi_{X_2}(u_2) \cdots \phi_{X_n}(u_n) \\
&= \widehat{\mathbf{P}^{X_1}}(u_1)\widehat{\mathbf{P}^{X_2}}(u_2) \cdots \widehat{\mathbf{P}^{X_n}}(u_n) \\
&= \int e^{iu_1x_1}\,\mathrm{d}\,\mathbf{P}^{X_1} \int e^{iu_2x_2}\,\mathrm{d}\,\mathbf{P}^{X_2} \cdots \int e^{iu_nx_n}\,\mathrm{d}\,\mathbf{P}^{X_n} \\
&= \int e^{i\sum_{j=0}^n u_j x_j}\,\mathrm{d}\,\mathbf{P}^{X_1} \otimes \mathbf{P}^{X_2} \otimes \ldots \otimes \mathbf{P}^{X_n} \\
&= \mathbf{P}^{X_1} \otimes \mathbf{P}^{\widehat{X_2} \otimes} \ldots \otimes \mathbf{P}^{X_n}(u).
\end{aligned}$$

Συνεπώς, από το Θεώρημα Μοναδικότητας, έχουμε ότι

$$\mathbf{P}^X = \mathbf{P}^{X_1} \otimes \mathbf{P}^{X_2} \otimes \ldots \otimes \mathbf{P}^{X_n},$$

το οποίο από την Πρόταση 8.13 ισοδυναμεί με το ζητούμενο. ■

Έστω X, Y τυχαίες μεταβλητές με τιμές στον ίδιο χώρο. Αν οι X και Y έχουν την ίδια κατανομή, δηλαδή $\mathbf{P}^X = \mathbf{P}^Y$, θα γράφουμε $X \stackrel{d}{=} Y$.[3]

Ορισμός 12.15 Έστω X τυχαία μεταβλητή με τιμές στο $\mathbb{R}$. Λέμε ότι η X έχει συμμετρική κατανομή αν $X \stackrel{d}{=} -X$, δηλαδή, για κάθε $A \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$, ισχύει $\mathbf{P}(X \in A) = \mathbf{P}(-X \in A)$.

Παράδειγμα 12.16 Έστω X τυχαία μεταβλητή με τιμές στο $\mathbb{R}$ και πυκνότητα, f, άρτια συνάρτηση. Τότε η X έχει συμμετρική κατανομή. Πράγματι,

$$\mathbf{P}(X \in A) = \int_A f \,\mathrm{d}\lambda = \int_{-A} f \,\mathrm{d}\lambda = \mathbf{P}(X \in -A).$$

Παράδειγμα τέτοιας τυχαίας μεταβλητής είναι μία $X \sim \mathbf{N}(0, \sigma^2)$. Όμως μία $X \sim \mathbf{Exp}(\lambda)$, $\lambda > 0$, δεν έχει συμμετρική κατανομή.

Παράδειγμα 12.17 (i). Έστω $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές τέτοιες ώστε $X_1 \sim \mathbf{Bernoulli}(p)$. Αν $Y = \sum_{j=1}^{n} X_j$, τότε $Y \sim \mathbf{Bin}(n, p)$. Πράγματι, η χαρακτηριστική συνάρτηση καθεμίας από τις X_j ισούται με $\phi_{X_1}(t) = e^{it}p + 1 - p$, και από την Πρόταση 12.4(iii) έπεται ότι

$$\phi_Y(t) = \phi_{X_1}(t)^n = (e^{it}p + 1 - p)^n,$$

που είναι η χαρακτηριστική συνάρτηση της $\mathbf{Bin}(n, p)$. Το Θεώρημα μοναδικότητας (Πόρισμα 12.13) δίνει ότι $Y \sim \mathbf{Bin}(n, p)$.

(ii). Έστω X, Y ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές τέτοιες ώστε $X \sim \mathbf{Poisson}(\lambda)$ και $Y \sim \mathbf{Poisson}(\mu)$. Τότε, για τη $Z \sim X + Y$, έχουμε ότι $Z \sim \mathbf{Poisson}(\lambda + \mu)$. Πράγματι, κατάρχάς παρατηρούμε ότι η χαρακτηριστική συνάρτηση της Z είναι

$$\phi_Z(u) = \phi_X(u)\phi_Y(u) = e^{\lambda(e^{iu}-1)}e^{\mu(e^{iu}-1)} = e^{(\lambda+\mu)(e^{iu}-1)},$$

όπου η πρώτη ισότητα ισχύει γιατί οι X, Y είναι ανεξάρτητες. Συνεπώς, η ϕ_Z είναι χαρακτηριστική συνάρτηση της κατανομής $\mathbf{Poisson}(\lambda + \mu)$, και από το Θεώρημα Μοναδικότητας, η Z έχει κατανομή $\mathbf{Poisson}(\lambda + \mu)$.

(iii). Έστω $X \sim \mathbf{Bin}(n, p)$ και $Y \sim \mathbf{Bin}(m, p)$, ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές. Τότε, η $Z = X + Y$ έχει κατανομή $\mathbf{Bin}(n + m, p)$. Αυτό προκύπτει εύκολα με τη χρήση χαρακτηριστικών συναρτήσεων ή, με χρήση του (i), αναπαριστώντας τις X, Y ως άθροισμα ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών κατανομής $\mathbf{Bernoulli}(p)$.

(iv). Έστω $X \sim \mathbf{N}(\mu, \sigma^2)$ και $Y \sim \mathbf{N}(\nu, \tau^2)$ ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές. Τότε, η $Z = X + Y$ έχει κατανομή $\mathbf{N}(\mu + \nu, \sigma^2 + \tau^2)$. Αυτό γιατί η χαρακτηριστική συνάρτηση της Z είναι

$$\phi_Z(u) = \phi_X(u)\phi_Y(u) = e^{iu\mu - u^2\frac{\sigma^2}{2}}e^{iu\nu - u^2\frac{\tau^2}{2}} = e^{iu(\mu+\nu) - u^2\frac{\sigma^2+\tau^2}{2}}.$$

Η τελευταία συνάρτηση είναι η χαρακτηριστική συνάρτηση της κατανομής $\mathbf{N}(\mu + \nu, \sigma^2 + \tau^2)$, και από το Θεώρημα Μοναδικότητας προκύπτει το ζητούμενο.

(v). Έστω $X \sim \mathbf{Gamma}(a_1, \lambda)$ και $Y \sim \mathbf{Gamma}(a_2, \lambda)$ ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές. Τότε, εργαζόμενοι όμοια με τα προηγούμενα, η $Z = X + Y$ έχει κατανομή $\mathbf{Gamma}(a_1 + a_2, \lambda)$.

[3] Το d προέρχεται από το αρχικό της λέξης distribution

(vi). Υπενθυμίζουμε ότι αν $X \sim \chi^2_p$, $p \in \mathbb{N}^+$, τότε $X \sim \mathbf{Gamma}(\frac{p}{2}, \frac{1}{2})$. Στην περίπτωση $p = 1$, ισοδύναμα $X = Y^2$, όπου $Y \sim \mathbf{N}(0,1)$. Άρα, αν $Y_1, Y_2, \ldots, Y_p$ ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές με κατανομή $\mathbf{N}(0,1)$, τότε η $X = Y_1^2 + Y_2^2 + \ldots + Y_p^2$ έχει κατανομή $\mathbf{Gamma}(\frac{p}{2}, \frac{1}{2})$, δηλαδή χ^2_p. Συνεπώς, κάθε τυχαία μεταβλητή με κατανομή χ^2_p είναι άθροισμα τετραγώνων p ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών με κατανομή $\mathbf{N}(0,1)$.

12.6 Άθροισμα ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών

Ορισμός 12.18 Έστω μ, ν μέτρα πιθανότητας στο $\mathbb{R}$. Συνέλιξη των μ, ν λέμε το μέτρο πιθανότητας $\mu * \nu$ στο $\mathbb{R}$ που ορίζεται ως εξής:

$$\mu * \nu(A) = \int \int \mathbf{1}_A(x+y)\,\mathrm{d}\mu(x)\,\mathrm{d}\nu(y).$$

για κάθε $A \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$.

Παρατήρηση 12.19 Εύκολα βλέπουμε ότι η συνέλιξη είναι συμμετρική, δηλαδή $\mu * \nu = \nu * \mu$. Επίσης, ισχύει ότι

$$\mu * \nu(A) = \int \int \mathbf{1}_{(A-y)}(x)\,\mathrm{d}\mu(x)\,\mathrm{d}\nu(y) = \int \mu(A-y)\,\mathrm{d}\nu(y) = \int \nu(A-x)\,\mathrm{d}\mu(x).$$

Θεώρημα 12.20 *Έστω X, Y ανεξάρτητες τυχαίες με τιμές στο $\mathbb{R}$ και κατανομές $\mathbf{P}^X, \mathbf{P}^Y$ αντίστοιχα. Τότε $\mathbf{P}^{X+Y} = \mathbf{P}^X * \mathbf{P}^Y$.*

Απόδειξη Εφόσον οι X, Y είναι ανεξάρτητες, η κατανομή της (X,Y) είναι το μέτρο γινόμενο $\mathbf{P}^X \otimes \mathbf{P}^Y$ στον $\mathbb{R}^2$ (Πρόταση 8.13). Για $A \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$ έχουμε

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}^{X+Y}(A) &= \mathbf{P}(X+Y \in A) = \mathbf{E}\{\mathbf{1}_A(X+Y)\} \\
&= \int \mathbf{1}_A(x+y)\,\mathrm{d}(\mathbf{P}^X \otimes \mathbf{P}^Y)(x,y) = \int \int \mathbf{1}_A(x+y)\,\mathrm{d}\,\mathbf{P}^X(x)\,\mathrm{d}\,\mathbf{P}^Y(y) \\
&= \mathbf{P}^X * \mathbf{P}^Y(A).
\end{aligned}$$

Στην πρώτη ισότητα της δεύτερης γραμμής χρησιμοποιήσαμε την Πρόταση 6.39 για την συνάρτηση $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με $g(x,y) = \mathbf{1}_A(x+y)$, και την τυχαία μεταβλητή (X,Y). ■

Θεώρημα 12.21 *Έστω X, Y ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές με τιμές στο $\mathbb{R}$ και $Z = X + Y$. Τότε*

(i). Αν η X έχει πυκνότητα f_X, τότε η Z έχει πυκνότητα, και μία τέτοια είναι η

$$f_Z(z) = \int f_X(z-y)\,\mathrm{d}\,\mathbf{P}^Y(y)$$

για κάθε $z \in \mathbb{R}$.

(ii). Αν οι X, Y έχουν αντίστοιχα πυκνότητες f_X, f_Y, τότε η

$$f_Z(z) = \int f_X(z-y) f_Y(y)\,\mathrm{d}y = \int f_X(x) f_Y(z-x)\,\mathrm{d}x$$

για κάθε $z \in \mathbb{R}$ είναι πυκνότητα της Z.

Απόδειξη (i) Έστω $A \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$. Τότε, από το Θεώρημα 12.20,

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(Z \in A) &= \int \mathbf{P}^X(A-y)\,\mathrm{d}\,\mathbf{P}^Y(y) = \int \int_{A-y} f_X(x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\,\mathbf{P}^Y(y) \\ &\overset{x=z-y}{=} \int \int_A f_X(z-y)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\,\mathbf{P}^Y(y) = \int_A \int f_X(z-y)\,\mathrm{d}\,\mathbf{P}^Y(y)\,\mathrm{d}z,\end{aligned}$$

άρα η $f_Z(z) = \displaystyle\int f_X(z-y)\,\mathrm{d}\,\mathbf{P}^Y(y)$ είναι πυκνότητα της Z. (ii) Έστω $z \in \mathbb{R}$. Τότε, από το (i) και την Πρόταση 6.43 έχουμε

$$f_Z(z) = \int f_X(z-y)\,\mathrm{d}\,\mathbf{P}^Y(y) = \int f_X(z-y) f_Y(y)\,\mathrm{d}y$$

Η δεύτερη ισότητα στην εκφώνηση προκύπτει με μία απλή αλλαγή μεταβλητής. ■

Το προηγούμενο θεώρημα συμπληρώνει την τεχνική προσδιορισμού κατανομής αθροίσματος που είδαμε στο Παράδειγμα 12.17. Το θεώρημα είναι χρήσιμο όταν η χαρακτηριστική συνάρτηση του αθροίσματος δεν είναι κάποια από τις γνωστές χαρακτηριστικές συναρτήσεις. Μία τέτοια περίπτωση περιγράφεται στην Άσκηση 12.4.

Ασκήσεις

12.1 Έστω $X \sim \Gamma(a,\lambda)$. Δηλαδή η X έχει πυκνότητα

$$f_X(x) = \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)}\, x^{a-1} e^{-\lambda x}\, \mathbf{1}_{x \geq 0}.$$

Να δειχθεί ότι η X έχει χαρακτηριστική συνάρτηση

$$\phi_X(t) = \frac{1}{\left(1 - \frac{it}{\lambda}\right)^a}$$

για κάθε $t \in \mathbb{R}$.

12.2 Έστω X τυχαία μεταβλητή με τιμές στο $\mathbb{R}$. Να δείξετε ότι $X \overset{d}{=} -X$ αν και μόνο αν $\phi_X(u) \in \mathbb{R}$ για κάθε $u \in \mathbb{R}$.

12.3 Έστω X, Y ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές με τιμές στο $\mathbb{R}$. Να δείξετε ότι η $X - Y$ έχει συμμετρική κατανομή.

12.4 Έστω $X, Y \sim \mathbf{U}(0,1)$ ανεξάρτητες τυχαίες ματαβλητές. Να δείξετε ότι η $Z = X + Y$ έχει πυκνότητα

$$f_Z(z) = \begin{cases} z & z \in (0,1] \\ 2-z & z \in (1,2) \\ 2 & z \in \mathbb{R} \setminus (0,2) \end{cases}.$$

12.5 Λέμε ότι η τυχαία μεταβλητή X έχει κατανομή **Cauchy** αν έχει πυκνότητα $f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$, $x \in \mathbb{R}$. Θεωρούμε γνωστό για αυτή την ασκηση ότι $\phi_X(u) = e^{-|u|}$, για κάθε $u \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι:

(α) Αν $X, Y \sim$ **Cauchy** ανεξάρτητες, τότε $\frac{X+Y}{2} \sim$ **Cauchy**.

(β) Αν $X_1, X_2, \ldots, X_n \sim$ **Cauchy** ανεξάρτητες, τότε $\frac{X_1+X_2+\ldots+X_n}{n} \sim$ **Cauchy**.

13

Σύγκλιση κατά κατανομή (Ασθενής σύγκλιση)

13.1 Ασθενής Σύγκλιση

Στην παράγραφο αυτή θα μελετήσουμε μία ασθενέστερη, από όσες έχουμε δει έως τώρα, μορφή σύγκλισης, τη σύγκλιση κατά κατανομή. Θα θεωρήσουμε μέτρα πιθανότητας στο $\mathbb{R}$ και τυχαίες μεταβλητές με τιμές στο $\mathbb{R}$.

Ορισμός 13.1 Έστω $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία μέτρων στον $\mathbb{R}$. Λέμε ότι η (μ_n) *συγκλίνει ασθενώς* σε ένα μέτρο μ στον $\mathbb{R}^d$ αν

$$\mu_n((-\infty, x]) \to \mu((-\infty, x])$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $\mu(\{x\}) = 0$.

Ορισμός 13.2 Έστω $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$, X τυχαίες μεταβλητες με τιμές στο $\mathbb{R}$. Λέμε ότι η (X_n) *συγκλίνει κατά κατανομή* στην X, και γράφουμε[1]

$$X_n \Rightarrow X \text{ ή } X_n \xrightarrow{\mathrm{d}} X \text{ ή } X_n \xrightarrow{\mathscr{L}} X,$$

αν η ακολουθία κατανομών $(\mathbf{P}^{X_n})_{n\in\mathbb{N}}$ των X_n συγκλίνει ασθενώς στην κατανομή $\mathbf{P}^X$ της X.

Θεώρημα 13.3 *Έστω $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$, X όπως στον Ορισμό 13.2. Τότε $X_n \Rightarrow X$ αν και μόνο αν*

$$\boldsymbol{F}_{X_n}(x) \to \boldsymbol{F}_X(x)$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $\boldsymbol{F}_X(x) = \boldsymbol{F}_X(x-)$, δηλαδή για κάθε σημείο συνέχειας της $\boldsymbol{F}_X$.

Απόδειξη Προκύπτει από τον Ορισμό 13.1, τον ορισμό της συνάρτησης κατανομής, και το ότι $\mathbf{P}^X(\{x\}) = \mathbf{P}(X = x) = \mathbf{F}_X(x) - \mathbf{F}_X(x-)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. ■

Μία συνάρτηση κατανομής F έχει αριθμησιμο πλήθος σημείων ασυνέχειας (Άσκηση 4.1). Δηλαδή είναι λίγα. Σε οποιοδήποτε διάστημα μπορούμε να βρούμε σημείο συνέχειας της F.

Παρατήρηση 13.4 (i). Στον Ορισμό 13.2 οι $X, \{X_n : n \in \mathbb{N}\}$, δεν είναι απαραίτητο να ορίζονται στον ίδιο χώρο πιθανότητας. Κάθε μία ορίζεται σε χώρο πιθανότητας $(\Omega_n, \mathcal{F}_n, \mathbf{P}_n)$ και η X σε χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$. Αυτό θα δημιουργούσε πρόβλημα αν θέλαμε να θεωρήσουμε την διαφορά $X_n(\omega) - X(\omega)$.

(ii). Αν οι $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$, και X ορίζονται στον ίδιο χώρο πιθανότητας έχει νόημα να εξετάζουμε πως η σύγκλιση κατά κατανομή συνδέεται με τα υπόλοιπα είδη σύγκλισης που είδαμε στο Κεφάλαιο 7 (σχεδόν βέβαια, στον L^p, κατά πιθανότητα). Το Θεώρημα 13.7 πιο κάτω αφορά αυτό το ερώτημα.

Για την ανάπτυξη της θεωρίας, είναι πιο βολικό αντί να δουλεύουμε με τον ορισμό της σύγκλισης κατά κατανομή να χρησιμοποιούμε το χαρακτηρισμό της που δίνεται από το επόμενο θεώρημα.

[1] d από το distribution, και $\mathscr{L}$ από το Law.

Θεώρημα 13.5 *Έστω $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ τυχαίες μεταβλητές σε χώρους πιθανότητας $(\Omega_n, \mathcal{F}_n, \mathbf{P}_n)$, $n \in \mathbb{N}$, και X τυχαία μεταβλητή σε χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ με τιμές στο $\mathbb{R}$. Τότε $X_n \Rightarrow X$ αν και μόνο αν*

$$\mathbf{E}(f(X_n)) \to \mathbf{E}(f(X)) \tag{13.1}$$

για κάθε $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχή και φραγμένη.

Η μέση τιμή στο αριστερό μέλος της (13.1) είναι ως προς το μέτρο $\mathbf{P}_n$, ενώ στο δεξί ως προς το μέτρο $\mathbf{P}$.

Απόδειξη $\Rightarrow$ Αν τα a, b είναι σημεία συνέχειας της F_X, τότε για την $f := \mathbf{1}_{(a,b]}$ ισχύει η (13.1). Πράγματι

$$\mathbf{E}\{\mathbf{1}_{(a,b]}(X_n)\} = \mathbf{P}(a < X_n \leq b) = F_{X_n}(b) - F_{X_n}(a) \to F_X(b) - F_X(a) \tag{13.2}$$

για $n \to \infty$.

Έστω τώρα f συνεχής και φραγμένη. Θέτουμε $||f||_\infty := \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|$. Παίρνουμε $\varepsilon > 0$. Βρίσκουμε $K > 0$ ώστε τα $-K, K$ να είναι σημεία συνέχειας της F και $F(-K) \leq \varepsilon, 1 - F(K) \leq \varepsilon$. Σταθεροποιούμε $\varepsilon_1 > 0$. Επειδή η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[-K, K]$, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε

$$x, y \in [-K, K], |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon_1. \tag{13.3}$$

Βρίσκουμε στο $[-K, K]$ σημεία $-K = a_0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_{N-1} < a_N = K$ ώστε $0 < a_i - a_{i-1} < \delta$ για κάθε $i = 1, 2, \ldots, N$ και η F να είναι συνεχής σε καθένα από τα $a_1, a_2, \ldots, a_{N-1}$. Έστω $I_i := (a_{i-1}, a_i]$ για $i = 1, 2, \ldots, N$, και

$$s(x) := \sum_{i=1}^N f(a_{i-1}) \mathbf{1}_{(a_{i-1}, a_i]}(x)$$

Τότε

- $\lim_{n\to\infty} \mathbf{E}\, s(X_n) = \mathbf{E}\, s(X)$ λόγω της (13.2) και του ότι τα $a_0, a_1, \ldots, a_N$ είναι σημεία συνέχειας της F.
- $|f(x) - s(x)| < \varepsilon_1$ για κάθε $x \in (-K, K]$. Άρα

$$\begin{aligned}
|\,\mathbf{E}(f(X_n)) - \mathbf{E}(s(X_n))| &\leq \mathbf{E}\,|f(X_n) - s(X_n)| && (13.4)\\
&\leq \mathbf{E}\,|\{f(X_n) - s(X_n)\}\mathbf{1}_{X_n \leq -K}| + \mathbf{E}\,|\{f(X_n) - s(X_n)\}\mathbf{1}_{X_n > -K}| + \mathbf{E}\,|\{f(X_n) - s(X_n)\}\mathbf{1}_{X_n \in (-K,K]}| \\
&\leq ||f||_\infty \{\mathbf{P}(X_n \leq -K) + \mathbf{P}(X_n > K)\} + \varepsilon_1\, \mathbf{P}(-K < X_n \leq -K) && (13.5)\\
&\leq ||f||_\infty \{F_{X_n}(-K) + 1 - F_{X_n}(K)\} + \varepsilon_1 && (13.6)
\end{aligned}$$

  Άρα $\overline{\lim}_{n\to\infty} |\,\mathbf{E}(f(X_n)) - \mathbf{E}(s(X_n))| \leq 2\varepsilon ||f||_\infty + \varepsilon_1$.
- Όμοια, $|\,\mathbf{E}(f(X)) - \mathbf{E}(s(X))| \leq 2\varepsilon ||f||_\infty + 2\varepsilon_1$.

Άρα, από την τριγωνική ανισότητα,

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} |\,\mathbf{E}(f(X_n)) - \mathbf{E}(f(X))| \leq 4\varepsilon ||f||_\infty + \varepsilon_1.$$

Το αριστερό μέλος δεν εξαρτάται από τα $\varepsilon, \varepsilon_1$. Θεωρούμε λοιπόν $\varepsilon, \varepsilon_1 \to 0^+$, και το ζητούμενο έπεται.

$\Leftarrow$ Έστω $x_0 \in \mathbb{R}$ σημείο συνέχειας της F. Για $\varepsilon > 0$, θεωρούμε την συνεχή και φραγμένη συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{αν } x \leq x_0, \\ -(x - x_0 - \varepsilon)/\varepsilon & \text{αν } x \in (x_0, x_0 + \varepsilon], \\ 0 & \text{αν } x \geq x_0 + \varepsilon. \end{cases} \tag{13.7}$$

η οποία ικανοποιεί $\mathbf{1}_{(-\infty,x_0]}(x) \le f(x) \le \mathbf{1}_{(-\infty,x_0+\varepsilon]}(x)$. Άρα

$$\varlimsup_{n\to\infty} F_{X_n}(x_0) \le \varlimsup_{n\to\infty} \mathbf{E}\, f(X_n) = \mathbf{E}\, f(X) \le F(x_0+\varepsilon).$$

Όμως το ε είναι αυθαίρετο. Και επειδή η F είναι δεξιά συνεχής στο x_0, για $\varepsilon \to 0$ παίρνουμε

$$\varlimsup_{n\to\infty} F_{X_n}(x_0) \le F(x_0). \tag{13.8}$$

Για το κάτω φράγμα, παίρνουμε $\varepsilon > 0$, και θεωρούμε τη συνάρτηση

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{αν } x \le x_0 - \varepsilon, \\ -(x-x_0)/\varepsilon & \text{αν } x \in (x_0-\varepsilon, x_0], \\ 0 & \text{αν } x \ge x_0, \end{cases} \tag{13.9}$$

η οποία ικανοποιεί $\mathbf{1}_{(-\infty,x_0-\varepsilon]}(x) \le g(x) \le \mathbf{1}_{(-\infty,x_0]}(x)$. Όπως πρίν, παίρνουμε

$$\varliminf_{n\to\infty} F_{X_n}(x_0) \ge \varliminf_{n\to\infty} \mathbf{E}\, g(X_n) = \mathbf{E}\, g(X) \ge F(x_0-\varepsilon).$$

Επειδή η F είναι αριστερά συνεχής στο x_0 (εδώ μόνο χρησιμοποιούμε το ότι το x_0 είναι σημείο συνέχειας της F), για $\varepsilon \to 0$ παίρνουμε

$$\varliminf_{n\to\infty} F_{X_n}(x_0) \ge F(x_0).$$

Η τελευταία σχέση μαζί με την (13.8) δίνουν το ζητούμενο. ■

Δίνουμε ακόμη έναν χαρακτηρισμό της σύγκλισης κατά κατανομή. Αυτός είναι χρήσιμος στις εφαρμογές.

Θεώρημα 13.6 *Έστω $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ τυχαίες μεταβλητές σε χώρους πιθανότητας $(\Omega_n, \mathcal{F}_n, \mathbf{P}_n)$, $n \in \mathbb{N}$, και X τυχαία μεταβλητή σε χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ με τιμές στον $\mathbb{R}$. Τότε τα εξής είναι ισοδύναμα.*

(i). $X_n \Rightarrow X$

(ii). Για κάθε $A \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$ με $\mathbf{P}(X \in \partial A) = 0$ ισχύει

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(X_n \in A) = \mathbf{P}(X \in A).$$

Απόδειξη (ii) ⇒ (i). Αυτή η κατεύθυνση είναι εύκολη. Αν το x_0 είναι σημείο συνέχειας της F, τότε το σύνολο $A = (-\infty, x_0]$ έχει $\partial A = \{x_0\}$ και $\mathbf{P}(X \in \{x_0\}) = F(x_0) - F(x_0-) = 0$. Άρα

$$F_{X_n}(x_0) = \mathbf{P}(X_n \in A) \to \mathbf{P}(X \in A) = F(x_0)$$

καθώς $n \to \infty$.

(i) ⇒ (ii). Ισχυρισμος: Αν το A είναι κλειστό, τότε

$$\varlimsup_{n\to\infty} \mathbf{P}(X_n \in A) \le \mathbf{P}(X \in A).$$

Σταθεροποιούμε $c > 0$, και θεωρούμε την συνάρτηση $f_c(x) := 1/(1+d(x,A))^c$, όπου $d(x,A) := \inf\{|x-y| : y \in A\}$ είναι η απόσταση του x από το A. Η f_c είναι συνεχής, φραγμένη, και ικανοποιεί $\mathbf{1}_A \le f_c$. Άρα

$$\varlimsup_{n\to\infty} \mathbf{P}(X_n \in A) \le \varlimsup_{n\to\infty} \mathbf{E}\, f_c(X_n) = \mathbf{E}\, f_c(X). \tag{13.10}$$

Τώρα, $\lim_{c\to\infty} f_c(x) = \mathbf{1}_A(x)$ για κάθε x επειδή κάθε $x \in \mathbb{R}\backslash A$ έχει $d(x,A) >$ (το A είναι κλειστό). Οπότε παίρνοντας $c \to \infty$ στην (13.10) κατά μήκος μιας ακολουθίας (π.χ. $c = k$ φυσικός) το θεώρημα φραγμένης σύγκλισης δίνει ότι $\lim_{k\to\infty} \mathbf{E}\, f_k(X) = \mathbf{E}\, \mathbf{1}_A(X) = \mathbf{P}(X \in A)$. Και ο ισχυρισμός αποδείχθηκε.

Αν το A είναι ανοιχτό, τότε εφαρμόζοντας τον ισχυρισμό για το κλειστό $\mathbb{R}\backslash A$ παίρνουμε

$$\varliminf_{n\to\infty} \mathbf{P}(X_n \in A) \geq \mathbf{P}(X \in A).$$

Τώρα για ένα A όπως στην εκφώνηση έχουμε $\mathbf{P}(X \in \bar{A}) = \mathbf{P}(X \in A^\circ) + \mathbf{P}(X \in \partial A) = \mathbf{P}(X \in A^\circ)$. Και από τα πιο πάνω

$$\mathbf{P}(X \in A^\circ) \leq \varliminf_{n\to\infty} \mathbf{P}(X_n \in A^\circ) \leq \varliminf_{n\to\infty} \mathbf{P}(X_n \in A) \leq \varlimsup_{n\to\infty} \mathbf{P}(X_n \in A) \leq \varlimsup_{n\to\infty} \mathbf{P}(X_n \in \bar{A}) \leq \mathbf{P}(X \in \bar{A}).$$

Το ζητούμενο έπεται. ■

Το επόμενο θεώρημα δείχνει ότι η σύγκλιση κατά κατανομή είναι η ασθενέσθερη μορφή σύγκλισης τυχαίων μεταβλητών από όσες έχουμε δει ως τώρα.

Θεώρημα 13.7 *Έστω $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ χώρος πιθανότητας και $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$, X τυχαίες μεταβλητές ορισμένες σε αυτόν και με τιμές στον $\mathbb{R}$. Αν $X_n \xrightarrow{\mathbf{P}} X$, τότε $X_n \Rightarrow X$.*

Απόδειξη Έστω ότι $X_n \not\Rightarrow X$. Τότε υπάρχουν $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής και φραγμένη, $\varepsilon > 0$, και υπακολουθία $(X_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ της $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ έτσι ώστε:

$$|\,\mathbf{E}(f(X_{n_k})) - \mathbf{E}(f(X))| \geq \varepsilon. \tag{13.11}$$

Επειδή $X_{n_k} \xrightarrow{\mathbf{P}} X$, από το Θεώρημα 7.4, υπάρχει υπακολουθία $(X_{n_{k_r}})_{r\in\mathbb{N}}$ της $(X_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ έτσι ώστε $X_{n_{k_r}} \xrightarrow{\sigma.\beta.} X$. Αφού η f είναι συνεχής, από το Θεώρημα 7.6, έχουμε ότι $f(X_{n_{k_r}}) \xrightarrow{\sigma.\beta.} f(X)$. Η f είναι φραγμένη, άρα υπάρχει $M > 0$ έτσι ώστε $|f(x)| \leq M$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^d$. Επομένως, έχουμε $|f(X_{n_{k_r}})| \leq M$ για κάθε $r \in \mathbb{N}$ (και κάθε $\omega \in \Omega$). Από το Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης,

$$\mathbf{E}(f(X_{n_{k_r}})) \to \mathbf{E}(f(X)),$$

το οποίο συγκρούεται με την (13.11). Άρα, $X_n \Rightarrow X$. ■

Μία περίπτωση κατά την οποία η σύγκλιση κατά κατανομή συνεπάγεται αυτήν κατά πιθανότητα είναι εκείνη κατά την οποία το όριο είναι μια σταθερή τυχαία μεταβλητή.

Θεώρημα 13.8 *Έστω $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία τυχαίων μεταβλητών ορισμένες σε κοινό χώρο πιθανότητας, με τιμές στο $\mathbb{R}$, και $C \in \mathbb{R}$. Αν $X_n \Rightarrow C$, τότε $X_n \xrightarrow{\mathbf{P}} C$.*

Απόδειξη Έστω $\varepsilon > 0$. Τότε

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(|X_n - C| > \varepsilon) &= \mathbf{P}(X_n > C + \varepsilon) + \mathbf{P}(X_n < C - \varepsilon)\\ &= 1 - \mathbf{F}_{X_n}(C + \varepsilon) + \mathbf{P}(X_n < C - \varepsilon)\\ &\leq 1 - \mathbf{F}_{X_n}(C + \varepsilon) + \mathbf{F}_n(C - \varepsilon).\end{aligned}$$

Τα $C - \varepsilon$, $C + \varepsilon$ είναι σημεία συνέχειας της $\mathbf{F}_C$ ($\mathbf{F}_C(x) = \mathbf{1}_{[C,\infty)}(x)$), άρα από το Θεώρημα 13.3,

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{F}_{X_n}(C - \varepsilon) = \mathbf{F}_C(C - \varepsilon) = 0$$

και

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{F}_{X_n}(C + \varepsilon) = \mathbf{F}_C(C + \varepsilon) = 1.$$

Συνεπώς $\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(|X_n - C| > \varepsilon) = 0$. ■

Θεώρημα 13.9 (Θεώρημα Slutsky) *Έστω $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθίες τυχαίων μεταβλητών σε χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, με τιμές στο $\mathbb{R}$, έτσι ώστε $X_n - Y_n \xrightarrow{\mathbf{P}} 0$. Αν X τυχαία μεταβλητή και $X_n \Rightarrow X$, τότε $Y_n \Rightarrow X$.*

Απόδειξη Έστω x σημείο συνέχειας της $\mathbf{F}_X$. Θα δείξουμε ότι $\lim_{n\to\infty} \mathbf{F}_{Y_n}(x) = \mathbf{F}_X(x)$.

(i) Πρώτα δείχνουμε ότι $\overline{\lim}_{n\to\infty} \mathbf{F}_{Y_n}(x) \le \mathbf{F}_X(x)$.

Έστω $\varepsilon > 0$. Τότε

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_{Y_n}(x) = \mathbf{P}(Y_n \le x) &= \mathbf{P}(Y_n \le x, X_n \le x+\varepsilon) + \mathbf{P}(Y_n \le x, X_n > x+\varepsilon)\\ &\le \mathbf{P}(X_n \le x+\varepsilon) + \mathbf{P}(X_n - Y_n > \varepsilon)\\ &= \mathbf{F}_{X_n}(x+\varepsilon) + \mathbf{P}(X_n - Y_n > \varepsilon).\end{aligned}$$

Αν το $x+\varepsilon$ είναι σημείο συνέχειας της $\mathbf{F}_X$, τότε

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{F}_{X_n}(x+\varepsilon) = \mathbf{F}_X(x+\varepsilon),$$

και

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(X_n - Y_n > \varepsilon) = 0$$

εφόσον $X_n - Y_n \xrightarrow{\mathbf{P}} 0$. Άρα

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \mathbf{F}_{Y_n}(x) \le \mathbf{F}_X(x+\varepsilon).$$

Τα σημεία ασυνέχειας της $\mathbf{F}_X$ είναι αριθμήσιμα, άρα υπάρχει φθίνουσα μηδενική ακολουθία $(\varepsilon_k)_{k\in\mathbb{N}}$ έτσι ώστε το $x+\varepsilon_k$ να είναι σημείο συνέχειας της $\mathbf{F}_X$. Από τα παραπάνω, για κάθε $k \in \mathbb{N}$ ισχύει

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \mathbf{F}_{Y_n}(x) \le \mathbf{F}_X(x+\varepsilon_k).$$

Εφόσον η $\mathbf{F}_X$ είναι συνεχής στο x, έχουμε $\lim_{k\to\infty} \mathbf{F}_X(x+\varepsilon_k) = \mathbf{F}(x)$, και άρα

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \mathbf{F}_{Y_n}(x) \le \mathbf{F}_X(x).$$

(ii) Δείχνουμε τώρα ότι $\underline{\lim}_{n\to\infty} \mathbf{F}_{Y_n}(x) \ge \mathbf{F}_X(x)$.

Για $\varepsilon > 0$,

$$\mathbf{F}_{Y_n}(x) = \mathbf{P}(Y_n \le x) \ge \mathbf{P}(X_n \le x-\varepsilon) - \mathbf{P}(Y_n - X_n \ge \varepsilon).$$

Συνεπώς $\underline{\lim}_{n\to\infty} \mathbf{F}_{Y_n}(x) \ge \mathbf{F}_X(x-\varepsilon)$. Ακολουθώντας την ίδια διαδικασία όπως προηγουμένως βλέπουμε ότι $\underline{\lim}_{n\to\infty} \mathbf{F}_{Y_n}(x) \ge \mathbf{F}_X(x)$.

Από τα (i) και (ii) προκύπτει το ζητούμενο. ∎

13.2 Σφιχτότητα και συμπάγεια

Ορισμός 13.10 Μία οικογένεια $\{p_i : i \in I\}$ μέτρων πιθανότητας στο $\mathbb{R}$ λέγεται σφιχτή αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $M > 0$ έτσι ώστε

$$p_i(\mathbb{R}\setminus[-M, M]) < \varepsilon$$

για κάθε $i \in I$.

Δηλαδή για μια σφιχτή οικογένεια, υπάρχει ένα φραγμένο υποσύνολο K του $\mathbb{R}$ ώστε κάθε στοιχείο της να δίνει "σχεδόν όλη" του την μάζα στο K (το πολύ μάζα ε βρίσκεται εκτός του $K := [-M, M]$). Το σύνολο K είναι το ίδιο για όλα τα στοιχεία της οικογένειας.

Η απαίτηση του ορισμού μπορεί να διατυπωθεί και ως εξής:

$$\lim_{M\to\infty} \sup_{i\in I} p_i(\mathbb{R}\backslash[-M, M]) = 0.$$

Παρατήρηση 13.11 Αν p μέτρο πιθανότητας στο $\mathbb{R}$, τότε εύκολα βλέπουμε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $M > 0$ έτσι ώστε $p(\mathbb{R}\backslash[-M, M])$ (Άσκηση 13.3).

Ορισμός 13.12 Έστω $\{X_i : i \in I\}$ οικογένεια τυχαίων μεταβλητών με τιμές στο $\mathbb{R}$. Η $\{X_i : i \in I\}$ λέγεται σφιχτή αν η οικογένεια κατανομών $\{\mathbf{P}^{X_i} : i \in I\}$ είναι σφιχτή.

Επειδή $\mathbf{P}^{X_i}(\mathbb{R}\backslash[-M, M]) = \mathbf{P}(|X_i| > M)$, η οικογένεια $\{\mathbf{P}^{X_i} : i \in I\}$ είναι σφιχτή αν και μόνο αν

$$\lim_{M\to\infty} \sup_{i\in I} \mathbf{P}(|X_i| > M) = 0.$$

Παρατήρηση 13.13 Έστω $(X_n)_{n\geq 1}$ ακολουθία τυχαίων μεταβλητών έτσι ώστε $X_n \sim \mathbf{Exp}(\frac{1}{n})$. Τότε η $(X_n)_{n\geq 1}$ δεν είναι σφιχτή. Πράγματι, για $M > 0$,

$$\sup_{n\geq 1} \mathbf{P}(|X_n| > M) = \sup_{n\geq 1} e^{-\frac{M}{N}} = 1.$$

Αυτό συμβαίνει γιατί η X_n έχει μέση τιμή n, και η κατανομή της δίνει την περισσότερη της μάζα γύρω από το n (δηλαδή η X_n πέφτει κοντά στο n με μεγάλη πιθανότητα). Καθώς όμως το $n \to \infty$ αυτό το σημείο συγκέντρωσης απομακρύνεται. Δεν μπορούμε να βρούμε ένα φραγμένο σύνολο ώστε *όλες* οι X_n να πέφτουν εκεί με πιθανότητα κοντά στο 1.

Η έννοια της σφιχτότητας στα μέτρα πιθανότητας είναι ανάλογη της έννοιας της σχετικής συμπάγειας σε μετρικό χώρο. Οι όροι μιας συγκλίνουσας ακολουθίας σε μετρικό χώρο ορίζουν ένα σχετικά συμπαγές σύνολο. Το αντίστοιχο εδώ είναι το ακόλουθο αποτέλεσμα.

Πρόταση 13.14 *Έστω $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^+}$, p μέτρα πιθανότητας στο $\mathbb{R}$ έτσι ώστε $p_n \Rightarrow p$. Τότε η $\{p_n : n \in \mathbb{N}^+\}$ είναι σφιχτή.*

Απόδειξη Έστω $\varepsilon > 0$. Υπάρχει $M > 0$ έτσι ώστε $p(\mathbb{R}\backslash[-M, M]) < \varepsilon/2$ και $\mu(\{-M\}) = \mu(\{M\}) = 0$. Από την υπόθεση έχουμε

$$p_n(\mathbb{R}\backslash[-M, M]) = p_n((-\infty, -M]) + 1 - p_n((-\infty, M]) \to p(\mathbb{R}\backslash[-M, M])(< \varepsilon/2)$$

για $n \to \infty$. Άρα υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}^+$ έτσι ώστε

$$p_n(\mathbb{R}\backslash[-M, M]) < \varepsilon$$

για κάθε $n \geq n_0$.
Έπειτα, για τα $p_1, p_2, \ldots, p_{n_0-1}$, υπάρχει $\tilde{M} > 0$ έτσι ώστε $p_i(\mathbb{R}\backslash[-\tilde{M}, \tilde{M}]) < \varepsilon$, για κάθε $i = 1, 2, \ldots, n_0-1$ (Άσκηση 13.5).
Έστω $L = \max\{M, \tilde{M}\}$. Τότε, $p(\mathbb{R}\backslash[-L, L]) < \varepsilon$ για κάθε $n \in \mathbb{N}^+$. ∎

Το ανάλογο του ότι μια ακολουθία σε έναν συμπαγή μετρικό χώρο έχει συγκλίνουσα υπακολουθία είναι το επόμενο αποτέλεσμα. Η απόδειξη του είναι απαιτητική και την παραλείπουμε. Μπορεί να την βρεί κανείς στο Jacod and Protter (2003) (Θεώρημα 18.6).

Θεώρημα 13.15 *Έστω $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία μέτρων πιθανότητας στο $\mathbb{R}$. Αν η $\{p_n : n \in \mathbb{N}\}$ είναι σφιχτή, τότε υπάρχει υπακολουθία $(p_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ της $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ που συγκλίνει ασθενώς σε κάποιο μέτρο πιθανότητας στο $\mathbb{R}$.*

Ασκήσεις

13.1 Έστω $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία στο $(0,1)$ έτσι ώστε $p_n \to 0$ και $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία τυχαίων μεταβλητών έτσι ώστε $X_n \sim$ **Γεωμετρική**(p_n), για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Να δείξετε ότι $p_n X_n \Rightarrow X$, όπου X τυχαία μεταβλητή τέτοια ώστε $X \sim \mathbf{Exp}(1)$.

13.2 Έστω $(X_n)_{n\geq 1}$ ακολουθία τυχαίων μεταβλητών ώστε η X_n να είναι ομοιόμορφη διακριτή στο σύνολο $\{1, 2, \ldots, n\}$. Για κάθε $n \geq 1$ θέτουμε $Y_n := X_n/n$. Να δειχθεί ότι $Y_n \Rightarrow U$ καθώς $n \to \infty$, όπου U είναι τυχαία μεταβλητή που ακολουθεί την ομοιόμορφη κατανομή στο $(0,1)$.

13.3 Έστω p μέτρο πιθανότητας στο $\mathbb{R}$. Να δείξετε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $M > 0$ έτσι ώστε $p(\mathbb{R}\setminus[-M, M]) < \varepsilon$.

13.4 Έστω $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία τυχαίων μεταβλητών έτσι ώστε $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \mathbf{E}(X_n^2) < \infty$. Να δείξετε ότι η $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι σφιχτή.

13.5 Έστω $\{p_i : i \in I\}$ οικογένεια μέτρων πιθανότητας στο $\mathbb{R}$ με I πεπερασμένο. Να δείξετε ότι η $\{p_i : i \in I\}$ είναι σφιχτή.

13.6 Έστω $(X_n)_{n\geq 1}$ ακολουθία τυχαίων μεταβλητών που συγκλίνει κατά κατανομή σε μία τυχαία μεταβλητή X. Για καθένα από τα ακόλουθα ζεύγη κατανομής για την X και συνόλου $A \subset \mathbb{R}$, συνεπάγεται η σύγκλιση κατά κατανομή $X_n \Rightarrow X$ την

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(X_n \in A) = \mathbf{P}(X \in A);$$

	Κατανομή της X	ΣύνολοA
(i)	$Poisson(2)$,	$(2, 32.1) \cup \{100\}$
(ii)	$Poisson(2)$,	$\mathbb{Q}$
(iii)	Γεωμετρική$(1/3)$,	$(-1.5, 2.8)$
(iv)	$N(0,1)$	$(-2, \pi)$
(v)	$U(0,1)$	$(0, 1/3)\setminus\mathbb{Q}$
(vi)	Bernouli$(2/5)$ στο $\{0,1\}$	$(0, 1/2) \cup (2, 4)$

14

Σύγκλιση κατά κατανομή και χαρακτηριστικές συναρτήσεις

14.1 Το Θεώρημα Συνέχειας του Levy

Λήμμα 14.1 *Έστω μ μέτρο πιθανότητας στο $\mathbb{R}$ και $\hat{\mu}$ ο μετασχηματισμός Fourier του. Τότε*

$$\mu\left(\left\{x : |x| > \frac{2}{u}\right\}\right) \le \frac{1}{u}\int_{-u}^{u}(1-\hat{\mu}(t))\,\mathrm{d}t$$

για κάθε $u > 0$.

Απόδειξη Από τον ορισμό του μετασχηματισμού Fourier του μέτρου μ έχουμε

$$\int_{-u}^{u}(1-\hat{\mu}(t))\,\mathrm{d}t = \int_{-u}^{u}\int(1-e^{itx})\,\mathrm{d}\mu(x)\,\mathrm{d}t = \int\int_{-u}^{u}(1-\cos(tx)+i\sin(tx))\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}\mu(x).$$

Η δεύτερη ισότητα προκύπτει από το Θεώρημα 8.19 (Tonelli-Fubini). Εφόσον η συνάρτηση $1-\cos(tx)$ είναι άρτια και η συνάρτηση $\sin(tx)$ είναι περιττή, το τελευταίο ολοκλήρωμα ισούται με

$$2\int\int_{-u}^{u}(1-\cos(tx))\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}\mu(x) = 2\int\left(u-\frac{\sin(ux)}{x}\right)\mathrm{d}\mu(x) = 2u\int\left(1-\frac{\sin(ux)}{ux}\right)\mathrm{d}\mu(x).$$

Παρατηρούμε τώρα ότι η συνάρτηση στο τελευταίο ολοκλήρωμα είναι μη αρνητική $(1-\frac{\sin(ux)}{ux}\ge 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Άρα αν ολοκληρώσουμε σε μικρότερο χωρίο, το ολοκλήρωμα μικραίνει) και για $|ux|>2$ έχουμε

$$\Big|\frac{\sin(ux)}{ux}\Big| \le \frac{1}{ux} \le \frac{1}{2}.$$

Συνεπώς,

$$\int_{-u}^{u}\{1-\hat{\mu}(t)\}\,\mathrm{d}t \ge 2u\int_{\{x:|x|>2/u\}}\frac{1}{2}\,\mathrm{d}\mu(x) = u\mu\left(\left\{x : |x| > \frac{2}{u}\right\}\right). \tag{14.1}$$

που είναι το ζητούμενο. ■

Θεώρημα 14.2 (Συνέχειας του Levy) *Έστω $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία μέτρων στο $\mathbb{R}$ και $(\hat{\mu}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ η ακολουθία μετασχηματισμών Fourier τους.*

(i). Αν μ μέτρο πιθανότητας στο $\mathbb{R}$ έτσι ώστε $\mu_n \Rightarrow \mu$, τότε $\lim_{n\to\infty}\hat{\mu}_n(t) = \hat{\mu}(t)$, για κάθε $t\in\mathbb{R}$.

(ii). Αν το $\lim_{n\to\infty}\hat{\mu}_n(t)$ υπάρχει για κάθε $t\in\mathbb{R}$, και η $f(t) = \lim_{n\to\infty}\hat{\mu}_n(t)$ είναι συνεχής στο 0, τότε υπάρχει μέτρο πιθανότητας μ στο $\mathbb{R}$ ώστε $\hat{\mu}(t) = f(t)$ και $\mu_n \Rightarrow \mu$.

Απόδειξη (*i*) Από υπόθεση, για κάθε συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ συνεχή και φραγμένη έχουμε

$$\int f(x)\,\mathrm{d}\mu_n(x) \to \int f(x)\,\mathrm{d}\mu(x).$$

Εφόσον οι συναρτήσεις $\cos y$, $\sin y$ είναι συνεχείς και φραγμένες,

$$\hat{\mu}_n(t) = \int e^{itx}\,\mathrm{d}\mu_n(x) = \int \cos(tx)\,\mathrm{d}\mu_n(x) + i\int \sin(tx)\,\mathrm{d}\mu_n(x)$$
$$\to \int \cos(tx)\,\mathrm{d}\mu(x) + i\int \sin(tx)\,\mathrm{d}\mu(x) = \hat{\mu}(t)$$

για $n \to \infty$.

(ii) Βημα 1: Η $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι σφιχτή.

Έστω $\varepsilon > 0$. Για $u > 0$ και για κάθε $n \geq 1$, από το Λήμμα 14.1, έχουμε ότι

$$\mu_n\left(\left\{x : |x| > \frac{2}{u}\right\}\right) \leq \frac{1}{u}\int_{-u}^{u}(1 - \hat{\mu}_n(t))\,\mathrm{d}t. \tag{1}$$

Επειδή η f είναι συνεχής στο 0 και $f(0) = 1$ ($\mu_n(0) = 1$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$), υπάρχει $u_0 > 0$ έτσι ώστε $|1 - f(t)| < \frac{\varepsilon}{4}$, για κάθε $t \leq u_0$. Άρα,

$$\frac{1}{u_0}\int_{-u_0}^{u_0}(1 - f(t))\,\mathrm{d}t < \frac{1}{u_0}2u_0\frac{\varepsilon}{4} = \frac{\varepsilon}{2}. \tag{2}$$

Από το Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγλισης,

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-u_0}^{u_0}(1 - \hat{\mu}_n(t))\,\mathrm{d}t = \int_{-u_0}^{u_0}(1 - f(t))\,\mathrm{d}t. \tag{3}$$

Λόγω των (2) και (3) υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε,

$$\frac{1}{u_0}\int_{-u_0}^{u_0}(1 - \hat{\mu}_n(t))\,\mathrm{d}t < \varepsilon$$

για κάθε $n \geq n_0$. Και σε συνδυασμό με την (1) δίνει

$$\mu_n\left(\left\{x : |x| > \frac{2}{u_0}\right\}\right) < \varepsilon \text{ για κάθε } n \geq n_0. \tag{4}$$

Από την (4), και εφόσον η $\{\mu_k : 1 \leq k \leq n_0 - 1\}$ είναι σφιχτή (Άσκηση 13.4), έπεται ότι η $\{\mu_n : n \geq 1\}$ είναι σφιχτή.

Βημα 2: Υπάρχει μέτρο μ ώστε $f(t) = \hat{\mu}(t)$, για κάθε $t \in \mathbb{R}$.

Πράγματι, η $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι σφιχτή και απο το Θεώρημα 13.15 προκύπτει ότι υπάρχει υπακολουθία $(\mu_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ τέτοια ώστε να συγκλίνει ασθενώς σε ένα μέτρο πιθανότητας μ ($\mu_{k_n} \Rightarrow \mu$). Λόγω του (i),

$$\lim_{n\to\infty}\hat{\mu}_{k_n}(t) = \hat{\mu}(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Όμως

$$\lim_{n\to\infty}\hat{\mu}_{k_n}(t) = f(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Συνεπώς, $f(t) = \hat{\mu}(t)$, για κάθε $t \in \mathbb{R}$.

Βημα 3: Αν μία υπακολουθία της $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ σύγκλινει ασθενώς σε ένα μέτρο πιθανότητας ν, τότε $\nu = \mu$.

Πράγματι, αν $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία στο $\mathbb{N}$ και ν μέτρο πιθανότητας στο $\mathbb{R}$ έτσι ώστε $\mu_{\lambda_n} \Rightarrow \nu$, από το (i),

$$\lim_{n\to\infty}\hat{\mu}_{\lambda_n}(t) = \hat{\nu}(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Όμοια με πριν (Βήμα 2), $\hat{\nu}(t) = f(t)$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$, και λόγω μοναδικότητας του μετασχηματισμού Fourier, $\nu = \mu$.

Βημα 4:[1] Η $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει ασθενώς στο μ.

Έστω ότι αυτό δεν ισχύει. Τότε υπάρχει $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής και φραγμένη, $\varepsilon > 0$ και $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία στο $\mathbb{N}$ ετσι ώστε

$$\Big| \int h(x)\,\mathrm{d}\mu_{\lambda_n}(x) - \int h(x)\,\mathrm{d}\mu(x) \Big| \geq \varepsilon, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{5}$$

Η $(\mu_{\lambda_n})_{n\in\mathbb{N}}$ είναι σφιχτή, άρα υπάρχει υπακολουθία της, έστω $(\mu_{\lambda_{r_n}})_{n\in\mathbb{N}}$, και μέτρο πιθανότητας ν στο $\mathbb{R}$ έτσι ώστε $\mu_{\lambda_{r_n}} \Rightarrow \nu$ (Θεώρημα 13.15). Από τα προηγούμενα (Βήμα 3) προκύπτει ότι $\nu = \mu$, δηλαδή $\mu_{\lambda_{r_n}} \Rightarrow \mu$. Συνεπώς,

$$\lim_{n\to\infty} \int h(x)\,\mathrm{d}\mu_{\lambda_{r_n}}(x) = \int h(x)\,\mathrm{d}\mu(x),$$

το οποίο είναι άτοπο λόγω της (5). ■

Πόρισμα 14.3 *Έστω $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$, X τυχαίες μεταβλητές με τιμές στο $\mathbb{R}$. Τότε $X_n \Rightarrow X$ αν και μόνο αν $\phi_{X_n}(t) \to \phi_X(t)$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$ καθώς $n \to \infty$.*

Απόδειξη Ισχύει ότι $\phi_{X_n}(t) = \widehat{\mathbf{P}^{X_n}}(t)$ και $\widehat{\mathbf{P}^{X}}(t) = \widehat{\mathbf{P}^{X}}(t)$, όπου $\mathbf{P}^{X_n}$, $\mathbf{P}^X$ οι κατανομές των X_n και X αντίστοιχα. Το συμπέρασμα έπεται με εφαρμογή του θεωρήματος συνέχεια του Levy για τα μέτρα $(\mathbf{P}^{X_n})_{n\in\mathbb{N}}$ και $\mathbf{P}^X$. ■

Το τελευταίο πόρισμα είναι ο βασικότερος τρόπος για να δείξει κανείς σύγκλιση κατά κατανομή. Θα το ονομάζουμε και αυτό Θεώρημα Συνέχειας του Levy. Θα το χρησιμοποιήσουμε πολλές φορές στο εξής, και ιδιαίτερα για να αποδείξουμε το κεντρικό οριακό θεώρημα.
Σε υπολογισμούς ορίων της μορφής $\lim_{n\to\infty} \phi_{X_n}(t)$ χρήσιμο είναι το εξής απλό αποτέλεσμα.

Λήμμα 14.4 *Για $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία στο $\mathbb{C}$ τέτοια ώστε $C_n \to C$, $C \in \mathbb{C}$, ισχύει ότι*

$$\Big(1 + \frac{C_n}{n}\Big)^n \to e^C.$$

Παράδειγμα 14.5 Έστω $X_n \sim \mathbf{Bin}(n, \frac{\lambda}{n})$, για κάθε $n \in \mathbb{N}^+$, και $X \sim \mathbf{Poisson}(\lambda)$. Τότε

$$\begin{aligned}
\phi_{X_n}(t) = \mathbf{E}(e^{itX_n}) &= \sum_{k=0}^{n} e^{itk} \binom{n}{k} \Big(\frac{\lambda}{n}\Big)^k \Big(1 - \frac{\lambda}{n}\Big)^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \Big(\frac{e^{it}\lambda}{n}\Big)^k \Big(1 - \frac{\lambda}{n}\Big)^{n-k} \\
&= \Big(1 - \frac{\lambda}{n} + \frac{\lambda e^{it}}{n}\Big)^n \\
&= \Big(1 + \frac{\lambda(e^{it} - 1)}{n}\Big)^n
\end{aligned}$$

[1] Για την καλύτερη κατανόηση της απόδειξης θεωρείστε την εξής ανάλογη άσκηση απειροστικού λογισμού: Έστω $\ell \in \mathbb{R}$ και $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ ακολουθία πραγματικών αριθμών έτσι ώστε κάθε υπακολουθία της $(x_{n_k})_{k\geq 1}$ να έχει υπακολουθία $(x_{n_{k_r}})_{r\geq 1}$ που συγκλίνει στο ℓ. Τότε, $x_n \to \ell$.

και

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{\lambda(e^{it}-1)}{n}\right)^n = e^{\lambda(e^{it}-1)}.$$

Όμως

$$\phi_X(t) = \mathbf{E}(e^{itX}) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{itk} e^{-\lambda}\frac{\lambda^t}{k^t} = e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\lambda e^{it})^k}{k!} = e^{\lambda(e^{it}-1)}.$$

Άρα, $\phi_{X_n}(t) \to \phi_X(t)$. Συνεπώς, από το Θεώρημα Συνέχειας του Levy, προκύπτει ότι $X_n \Rightarrow X$.

Παράδειγμα 14.6 Έστω $X_n \sim \mathbf{Poisson}(n)$ και $Z \sim \mathbf{N}(0,1)$. Θέτουμε $Z_n = \frac{X_n - n}{\sqrt{n}}$. Τότε

$$\begin{aligned}\phi_{Z_n}(t) &= \mathbf{E}(e^{itZ_n}) = \mathbf{E}\left(e^{it\left(\frac{X_n-n}{\sqrt{n}}\right)}\right) \\ &= e^{-it\sqrt{n}}\,\mathbf{E}(e^{i\frac{t}{\sqrt{n}}X_n}\Big) = e^{-it\sqrt{n}}\phi_{X_n}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) \\ &= e^{it\sqrt{n}}e^{n(e^{i\frac{t}{\sqrt{n}}}-1)} = e^{n(e^{i\frac{t}{\sqrt{n}}}-1)-it\sqrt{n}}.\end{aligned}$$

Θέτουμε $\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{n}}$. Τότε ο εκθέτης στην τελευταία ποσότητα ισούται με

$$\frac{e^{i\varepsilon t}-1}{\varepsilon^2} - \frac{it}{\varepsilon} = \frac{e^{i\varepsilon t}-1-i\varepsilon t}{\varepsilon^2}.$$

Χρησιμοποιώντας τον κανόνα του L' Hospital,

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{e^{i\varepsilon t}-1-i\varepsilon t}{\varepsilon^2} = \frac{-t^2}{2}.$$

Άρα $\phi_{Z_n}(t) \to \phi_Z(t) = e^{\frac{-t^2}{2}}$, και από το Θεώρημα Συνέχειας του Levy προκύπτει ότι $Z_n \Rightarrow Z$.

Ασκήσεις

14.1 (α) Έστω X τυχαία μεταβλητή με κατανομή εκθετική με παράμετρο $a > 0$. Να υπολογιστεί η χαρακτηριστική συνάρτηση της X.

(β) Έστω Y τυχαία μεταβλητή με κατανομή γεωμετρική με παράμετρο $p \in (0,1]$. Δηλαδή

$$\mathbf{P}(Y=k) = p\,(1-p)^{k-1}$$

για $k = 1, 2, \ldots$. Να υπολογιστεί η χαρακτηριστική συνάρτηση της Y.

(γ) Έστω $a > 0$, και $(X_n)_{n\geq 1}$ ακολουθία τυχαίων μεταβλητών ώστε η X_n να ακολουθεί την γεωμετρική κατανομή με παράμετρο $p_n = a/n$. Να δειχθεί ότι η ακολουθία $(X_n/n)_{n\geq 1}$ συγκλίνει κατά κατανομή στην τυχαία μεταβλητή X του ερωτήματος (α) χρησιμοποιώντας

(i) τον χαρακτηρισμό της σύγκλισης κατά κατανομή μέσω συναρτήσεων κατανομής,

(ii) χαρακτηριστικές συναρτήσεις.

14.2 (α) Έστω X τυχαία μεταβλητή με κατανομή Poisson με παράμετρο $\lambda > 0$. Να υπολογιστεί η χαρακτηριστική συνάρτηση της X.

(β) Έστω Y τυχαία μεταβλητή με κατανομή διωνυμική με παραμέτρους $n \in \mathbb{N}^+, p \in [0,1]$. Να υπολογιστεί η χαρακτηριστική συνάρτηση της Y.

(γ) Έστω $(X_n)_{n\geq 1}$ ακολουθία τυχαίων μεταβλητών ώστε η X_n να ακολουθεί την διωνυμική κατανομή με παραμέτους $n, p_n \in (0,1)$. Αν $\lim_{n\to\infty} np_n = \lambda$, να δειχθεί ότι η ακολουθία $(X_n)_{n\geq 1}$ συγκλίνει κατά κατανομή στην τυχαία μεταβλητή X του ερωτήματος (α).

15

Το κεντρικό οριακό θεώρημα

15.1 Προετοιμασία

Σε αυτή την παράγραφο θα δούμε δύο τεχνικά αποτελέσματα που χρειαζόμαστε για την απόδειξη του κεντρικού οριακού θεωρήματος.

Λήμμα 15.1 *Για $n \in \mathbb{N}$ και $x \in \mathbb{R}$, θέτουμε*

$$R_n(x) = e^{ix} - \sum_{k=0}^{n} \frac{(ix)^k}{k!}.$$

Τότε

$$|R_n(x)| \leq \min\left\{\frac{2|x|^n}{n!}, \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}\right\} \tag{15.1}$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $x \in \mathbb{R}$.

Για το $|R_n(x)|$, χρειαζόμαστε και τα δύο φράγματα των οποίων παίρνουμε το ελάχιστο. Το $2|x|^n/n!$ είναι καλύτερο για μεγάλα $|x|$, ενώ το $|x|^{n+1}/(n+1)!$ είναι καλύτερο για μικρά $|x|$. Αυτό θα φανεί στην απόδειξη του Λήμματος 15.2 πιο κάτω.

Απόδειξη Θα χρησημοποιήσουμε επαγωγή. Πρώτα δείχνουμε ότι $R_{n+1}(x) = i\int_0^x R_n(t)\,\mathrm{d}t$. Πράγματι, υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα στο δεξί μέλος.

$$\int_0^x R_n(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{i}(e^{ix} - 1) - \sum_{k=0}^{n} \frac{i^k}{k!}\frac{x^{k+1}}{k+1}.$$

Συνεπώς,

$$i\int_0^x R_n(t)\,\mathrm{d}t = e^{ix} - 1 - \sum_{k=0}^{n} \frac{i^{k+1}x^{k+1}}{(k+1)!} = e^{ix} - \sum_{k=0}^{n+1} \frac{(ix)^k}{k!} = R_{n+1}(x).$$

Τώρα, για $n = 0$,

$$R_0(x) = e^{ix} - 1 = i\int_0^x e^{it}\,\mathrm{d}t.$$

Άρα, $|R_0(x)| \leq |e^{ix}| + 1 = 2$ και αν $x > 0$, έχουμε $|R_0(x)| \leq \int_0^x |e^{it}|\,\mathrm{d}t = x = |x|$, ενώ αν $x < 0$

$$|R_0(x)| = \left| -i\int_x^0 e^{it}\,\mathrm{d}t\right| \leq \int_x^0 |e^{it}|\,\mathrm{d}t = -x = |x|.$$

Έστω ότι η (15.1) ισχύει για κάποιο $n \in \mathbb{N}$ για όλα τα $x \in \mathbb{R}$. Θα την αποδείξουμε για $n+1$. Για $x > 0$, χρησιμοποιώντας την επαγωγική υπόθεση, έχουμε ότι

$$|R_{n+1}(x)| = \left|\int_0^x R_n(t)\,\mathrm{d}t\right| \leq \int_0^x |R_n(t)|\,\mathrm{d}t \leq \begin{cases} \int_0^x \frac{2|t|^n}{n!}\,\mathrm{d}t = \frac{2}{n!}\int_0^x t^n\,\mathrm{d}t = \frac{2x^{n+1}}{(n+!)!} \\ \int_0^x \frac{|t|^{n+1}}{(n+1)!}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{(n+1)!}\int_0^x t^{n+1}\,\mathrm{d}t = \frac{x^{n+1}}{(n+2)!} \end{cases}$$

από το οποίο προκύπτει η ζητούμενη ανισότητα. Όμοια εργαζόμαστε για $x < 0$. ■

Λήμμα 15.2 *Έστω X τυχαία μεταβλητή με τιμές στο $\mathbb{R}$ τέτοια ώστε $\mathbf{E}(X^2) < \infty$. Θέτουμε $\mathbf{E}(X) = \mu$ και $\mathbf{E}(X^2) = \beta$. Τότε*

$$\phi_X(t) = 1 + it\mu - \frac{t^2\beta}{2} + \nu(t),$$

όπου η ν ικανοποιεί $\lim_{t\to\infty} \frac{\nu(t)}{t^2} = 0$.

Δηλαδή η συνάρτηση ν που ορίζεται ως $\nu(t) := \phi_X(t) - 1 - it\mu + (1/2)t^2\beta$ τείνει στο 0 γρηγορότερα από το t^2.

Απόδειξη Από το Λήμμα 15.1, για $n = 2$ και για κάθε $t \in \mathbb{R}$, έχουμε

$$\left|e^{itX} - 1 - itX + t^2\frac{X^2}{2}\right| \leq \min\left\{\frac{2t^2X^2}{2!}, \frac{|t^3||X|^3}{3!}\right\} = t^2 \min\left\{X^2, \frac{|t||X|^3}{3!}\right\}.$$

Θέτουμε $Y(t) = \min\left\{X^2, \frac{|t||X|^3}{3!}\right\}$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$. Τότε

$$\left|\mathbf{E}\left(e^{itX} - 1 - itX + t^2\frac{X^2}{2}\right)\right| \leq t^2\,\mathbf{E}(Y(t)) \quad \forall\, t \in \mathbb{R}, \tag{15.2}$$

και βέβαια

$$\mathbf{E}\left(e^{itX} - 1 - itX + t^2\frac{X^2}{2}\right) = \phi_X(t) - 1 - it\mu + \frac{t^2\beta}{2}.$$

Θέτουμε $\nu(t) = \phi_X(t) - 1 - it\mu + \frac{t^2\beta}{2}$. Η (15.2) λέει

$$|\nu(t)| \leq t^2\,\mathbf{E}(Y(t)), \quad \forall\, t \in \mathbb{R}.$$

Επομένως, αρκεί να δείξουμε ότι $\lim_{t\to\infty} \mathbf{E}(Y(t)) = 0$. Έστω ακολουθία $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ τέτοια ώστε $t_n \to 0$. Τότε

- $0 \leq Y(t_n) \leq \frac{|t_n||X|^3}{3!} \to 0$ για $n \to \infty$.
- $|Y(t_n)| \leq X^2$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, και $\mathbf{E}(X^2) < \infty$.

Από το Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης, $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{E}(Y(t_n)) = \mathbf{E}(\lim\limits_{n\to\infty} Y(t_n)) = 0$. ■

15.2 Το κεντρικό οριακό θεώρημα

Θεώρημα 15.3 (Το κεντρικό οριακό θεώρημα) *Έστω $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^+}$ ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων τυχαίων μεταβλητών με $\mathbf{E}(X_1) = \mu$ και $\mathrm{Var}(X_1) = \sigma^2$. Έστω $S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$, $n \geq 1$. Τότε*

$$\frac{S_n - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}} \Rightarrow Z, \quad \text{όπου } Z \sim \boldsymbol{N}(0,1).$$

Απόδειξη Θα αποδείξουμε αρχικά την περίπτωση όπου $\mu = 0$, οπότε $\sigma^2 = \mathbf{E}(X^2)$. Θα χρησιμοποιήσουμε το Θεώρημα συνέχειας του Levy (Πόρισμα 14.3). Υπολογίζουμε τη χαρακτηριστική συνάρτηση της $S_n/\sqrt{n\sigma^2}$. Για $t \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$,

$$\begin{aligned}
\phi_{\frac{S_n}{\sqrt{n\sigma^2}}}(t) &= \mathbf{E}\left(e^{it\frac{S_n}{\sqrt{n\sigma^2}}}\right) = \mathbf{E}\left(e^{it\frac{X_1}{\sqrt{n\sigma^2}}} \cdots e^{it\frac{X_n}{\sqrt{n\sigma^2}}}\right) \\
&= \mathbf{E}\left(e^{it\frac{X_1}{\sqrt{n\sigma^2}}}\right) \cdots \mathbf{E}\left(e^{it\frac{X_n}{\sqrt{n\sigma^2}}}\right) && \text{(λόγω ανεξαρτησίας)} \\
&= \phi_{X_1}\left(\frac{t}{\sqrt{n\sigma^2}}\right) \cdots \phi_{X_n}\left(\frac{t}{\sqrt{n\sigma^2}}\right) \\
&= \left(\phi_{X_1}\left(\frac{t}{\sqrt{n\sigma^2}}\right)\right)^n && \text{(λόγω ισονομίας).}
\end{aligned}$$

Από το Λήμμα 15.2,

$$\phi_{X_1}\left(\frac{t}{\sqrt{n\sigma^2}}\right) = 1 + \frac{it}{\sqrt{n\sigma^2}}\mathbf{E}(X_1) - \frac{t^2}{2n\sigma^2}\mathbf{E}\left((X_1)^2\right) + \nu\left(\frac{t}{\sqrt{n\sigma^2}}\right) = 1 - \frac{t^2}{2n} + \nu\left(\frac{t}{\sqrt{n\sigma^2}}\right),$$

όπου

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\nu\left(\frac{t}{\sqrt{n\sigma^2}}\right)}{\left(\frac{t}{\sqrt{n\sigma^2}}\right)^2} = 0,$$

δηλαδή

$$\lim_{n\to\infty} n\nu\left(\frac{t}{\sqrt{n\sigma^2}}\right) = 0.$$

Άρα

$$\phi_{\frac{S_n}{\sqrt{n\sigma^2}}}(t) = \left(1 - \frac{t^2}{2n} + \nu\left(\frac{t}{\sqrt{n\sigma^2}}\right)\right)^n = \left(1 + \frac{C_n}{n}\right)^n,$$

με $C_n = -\frac{t^2}{2n} + \nu\left(\frac{t}{\sqrt{n\sigma^2}}\right) \to -t^2/2$. Συνεπώς, το Λήμμα 14.4 δίνει

$$\lim_{n\to\infty} \phi_{\frac{S_n}{\sqrt{n\sigma^2}}}(t) = e^{-t^2/2}.$$

Η ίδια σχέση ισχύει προφανώς και για $t = 0$. Μία $Z \sim N(0,1)$ έχει χαρακτηριστική συνάρτηση $e^{-t^2/2}$. Από το Θεώρημα Συνέχειας του Levy, $S_n/\sqrt{n\sigma^2} \Rightarrow Z$.

Στην περίπτωση όπου $\mathbf{E}(X_1) = \mu \neq 0$, θεωρούμε τις ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές $Y_n = X_n - \mu$, για κάθε $n \in \mathbb{N}^+$, και εφαρμόζουμε τα προηγούμενα. ■

Ασκήσεις

15.1 Έστω $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές έτσι ώστε $X_1 \sim \mathbf{Poisson}(1)$ και S_n το n-οστό μερικό άθροισμα αυτών. Να δείξετε ότι,

$$\frac{S_n - n}{\sqrt{n}} \Rightarrow Z, \text{ όπου } Z \sim \mathbf{N}(0,1).$$

15.2 Να δείξετε ότι

$$\lim_{n\to\infty} e^{-n}\sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!} = \frac{1}{2}.$$

15.3 Έστω $(X_i)_{i\geq 1}$ ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων τυχαίων μεταβλητών, με $EX_1 = 2, \mathrm{Var}(X_1) = 1$. Θέτουμε $S_n := X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ για κάθε $n \geq 1$. Να υπολογιστούν τα όρια

(α) $\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(S_n > 2.1n)$,

(β) $\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(S_n > 2n + \sqrt{n})$,

(γ) $\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(S_n > 10\sqrt{n})$,

(δ) $\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(S_n < 3n)$,

(ε) $\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(S_n > 10^{10})$.

15.4 Έστω $(X_n)_{n\geq 1}$ ακολουθία ανεξάρτητων ισόνομων τυχαίων μεταβλητών με $\mathrm{Var}(X_1) = 1$. Να υπολογιστεί το όριο

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left(\left|\frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n - (X_{n+1} + \cdots + X_{2n})}{\sqrt{n}}\right| \leq 1\right).$$

15.5 Έστω $(X_n)_{n\geq 1}$ ακολουθία ανεξάρτητων ισόνομων τυχαίων μεταβλητών με $\mathbf{E}(X_1) = 0$, $\mathrm{Var}(X_1) = 1$. Να δειχθεί ότι

$$\varlimsup_{n\to\infty} \frac{S_n}{\sqrt{n}} = \infty.$$

[Υποδ.: Η στρατηγική της Άσκησης 9.13 λειτουργεί. Απλώς το (α) μέρος χρειάζεται μια μικρή τροποποίηση.]

Υποδείξεις για επιλεγμένες ασκήσεις

Κεφάλαιο 1

1.5 Αν παραγόταν, τότε η διαμέριση θα ήταν αναγκαστικά η $\mathcal{C} := \{\{x\} : x \in \mathbb{R}\}$. Έπειτα, χρησιμοποιούμε την Άσκηση 1.3.

1.6 $B_1 = A_1, B_2 = A_2 \setminus A_1, B_3 = A_3 \setminus (A_1 \cup A_2)$, ...

1.7 (α) $\emptyset \in \mathcal{B}$ γιατί $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$ και $\emptyset \in \mathcal{F}$. Έπειτα, αν $A \in \mathcal{B}$ τότε $f^{-1}(Y \setminus A) = X \setminus f^{-1}(A)$ και εφόσον $f^{-1}(A) \in \mathcal{A}$ και $\mathcal{A}$ σ-άλγεβρα έχουμε ότι $Y \setminus f^{-1}(A) \in \mathcal{F}$. Άρα $Y \setminus A \in \mathcal{B}$. Τέλος, αν $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ακολουθία στην $\mathcal{B}$, τότε

$$f^{-1}\left(\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \cup_{n\in\mathbb{N}} f^{-1}(A_n) \in \mathcal{A}.$$

1.9 Θα αποδείξουμε ότι η $\mathcal{A}$ είναι σ-άλγεβρα στην περίπτωση που ισχύει το 1. Με παρόμοιο τρόπο αποδεικνύονται και οι άλλες δυο περιπτώσεις. Αφού η $\mathcal{A}$ είναι άλγεβρα, αρκεί να δείξουμε ότι είναι κλειστή στις αριθμήσιμες ενώσεις. Έστω $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία στην $\mathcal{A}$. Θέτουμε $A_n = \cup_{i=1}^n B_i$ $n = 1, 2, \ldots$. Τότε, η A_n είναι αύξουσα και $\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \cup_{n\in\mathbb{N}} B_n$. Άρα, λόγω του 1 έχουμε $\cup_{n\in\mathbb{N}} B_n \in \mathcal{A}$.

Κεφάλαιο 2

2.1 Έχουμε ότι $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}(A_n) = \mathbf{P}(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) \leq 1$. Αφού η σειρά συγκλίνει, $\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(A_n) = 0$.

2.2 (α) Ισχύει ότι $\mathbf{P}(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}(A_n) = 0$.
(β) Ισχύει ότι $\mathbf{P}(\cap_{n=1}^{\infty} A_n) = 1 - \mathbf{P}(\cup_{n=1}^{\infty} A_n^c) = 1$ αφού $\mathbf{P}(\cup_{n=1}^{\infty} A_n^c) = 0$ λόγω του (α).

2.3 Λόγω της προηγούμενης άσκησης, πρέπει τα I, I' να είναι υπεραριθμήσιμα. Έστω $\Omega = (0,1), \mathcal{F} = \mathcal{B}((0,1)), \mathbf{P} = \lambda_1$ το μέτρο Lebesgue, $I = I' = (0,1)$, $A_x := \{x\}, B_x := (0,1)\setminus\{x\}$ για κάθε $x \in (0,1)$. Τότε

(α) $\mathbf{P}(A_x) = \mathbf{P}(\{x\}) = 0$, για κάθε $x \in (0,1)$, όμως $\mathbf{P}(\cup_{x\in(0,1)} A_x) = \mathbf{P}((0,1)) = 1$.
(β) $\mathbf{P}(B_x) = 1$, για κάθε $x \in (0,1)$, όμως $\mathbf{P}(\cap_{x\in(0,1)} B_x) = \mathbf{P}(\emptyset) = 0$.

2.4 Για $n \geq 1$, θέτουμε $B_n = \{\beta \in B : \mathbf{P}(A_\beta) \geq \frac{1}{n}\}$. Τότε $|B_n| \leq n$, γιατί $\mathbf{P}(\cup_{\beta\in B_n} A_\beta) \leq 1$ και $\mathbf{P}(\cup_{\beta\in B_n} A_\beta) = \sum_{\beta\in B_n} \mathbf{P}(A_\beta) \geq \frac{1}{n}|B_n|$. Αφού $B = \cup_{n=1}^{\infty} B_n$, όπου $|B_n| < \infty$ για κάθε $n \geq 1$, έχουμε το ζητούμενο αφού το $\mathbb{Q}$ είναι αριθμήσιμο, και οι f, g είναι μετρήσιμες.

2.5 Για την πρώτη ανισότητα έχουμε

$$\mathbf{P}(\liminf A_n) = \mathbf{P}(\cup_{n=1}^{\infty} \cap_{k=n}^{\infty} A_k) = \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(\cap_{k=n}^{\infty} A_k) \leq \varliminf_{n\to\infty} \mathbf{P}(A_n).$$

Η δεύτερη ισότητα ισχύει γιατί η ακολουθία $B_n := \cap_{k=n}^{\infty} A_k$ είναι φθίνουσα, ενώ η ανισότητα ισχύει γιατί $B_n \subset A_n$. Η ανισότητα

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, \mathbf{P}(A_n) \le \mathbf{P}(\limsup A_n)$$

αποδεικνύεται όμοια.

Κεφάλαιο 3

3.1 Χρήσιμη είναι η Πρόταση 2.10

3.2 Η $\mathcal{A}$ δεν περιέχει το $\{2\}$ που είναι τομή των $\{1,2\},\{2,3\}$.

Κεφάλαιο 4

4.1 Έστω $A(F) := \{x \in \mathbb{R} : \text{Η } F \text{ είναι ασυνεχής στο } x\}$. Επειδή η $\mathbf{F}$ είναι αύξουσα, σε κάθε σημείο ασυνέχειας, η F έχει άλμα προς τα πάνω, δηλαδή, $F(x-) < F(x+)$ (βέβαια, $F(x+) = F(x)$, αλλά δεν το χρειαζόμαστε). Για $x \in A(F)$ επιλέγουμε έναν ρητό $q_x \in (F(x-), F(x+))$. Επειδή η F είναι αύξουσα, η απεικόνιση $x \mapsto q_x$ είναι 1-1 από το $A(F)$ στο $\mathbb{Q}$.

Εναλλακτικά, θεωρούμε το σύνολο $B = \{x \in \mathbb{R} : \text{η } \mathbf{F} \text{ είναι ασυνεχής στο } x\}$ και θέτουμε $A_\beta = \{\beta\}$, $\beta \in B$. Τότε $\mathbf{P}(A_\beta) = \mathbf{F}(\beta) - \mathbf{F}(\beta-) > 0$, αφού η $\mathbf{F}$ έχει άλμα στο x, και εφαρμόζουμε το συμπέρασμα της Άσκησης 2.4.

4.2 (α) Έχουμε ότι

$$\begin{aligned}\mathbf{P}((0,4)) &= \lambda\, \mathbf{P}_1((0,4)) + (1-\lambda)\, \mathbf{P}_2((0,4)) = \lambda \int_0^4 e^{-x}\, \mathrm{d}x + (1-\lambda)\frac{1}{2} \\ &= \lambda(1-e^{-4}) + (1-\lambda)\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

(β) Γνωρίζουμε ότι $F(x) = \mathbf{P}((-\infty, x]) = \lambda\, \mathbf{P}_1((-\infty, x]) + (1-\lambda)\, \mathbf{P}_2((-\infty, x])$. Εύκολα μπορεί κανείς να ελέγξει ότι

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{αν } x < -2, \\ (1-\lambda)\frac{1}{2} & \text{αν } -2 \le x \le 0, \\ \lambda(1-e^{-x}) + (1-\lambda)\frac{1}{2} & \text{αν } 0 < x < 3, \\ 1 - \lambda e^{-x} & \text{αν } x \ge 3. \end{cases}$$

Κεφάλαιο 5

5.1 Το σύνολο $\mathcal{A} := \{A \subset \mathbb{R} : f^{-1}(A) \in \mathcal{B}(\Omega)\}$ είναι σ-άλγεβρα (Άσκηση 1.7(i)). Έστω $\mathcal{T}$ η οικογένεια των ανοιχτών υποσυνόλων του $\mathbb{R}$. Προφανώς το (α) συνεπάγεται τα (β), (γ). Αν υποθέσουμε το (β), δηλαδή $\mathcal{T} \subset \mathcal{A}$, τότε $\sigma(\mathcal{T}) \subset \mathcal{A}$, που είναι το (α). Έπειτα θέτουμε $\mathcal{A}_4 := \{[a,b] : a < b, a, b \in \mathbb{R}\}$. Αν ισχύει το (γ), δηλαδή $\mathcal{A}_4 \subset \mathcal{A}$, τότε $\sigma(\mathcal{A}_4) \subset \mathcal{A}$. Μένει να δείξουμε ότι $\sigma(\mathcal{A}_4) = \mathscr{B}(\mathbb{R})$.

5.2 Το σύνολο $\mathcal{A} := \{A \subset \mathbb{R} : f^{-1}(A) \in \mathcal{B}(\Omega)\}$ είναι σ-άλγεβρα (Άσκηση 1.7(i)), και λόγω συνέχειας της f, περιέχει τα ανοιχτά υποσύνολα του $\mathbb{R}$. Άρα $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{A}$.

5.3 Τα σύνολα $\{-\infty\}, \{\infty\}$ είναι κλειστά.

5.4 $\{\omega \in \Omega : \lim_n X_n(\omega) = \infty\} = \cap_{k=1}^{\infty} \cup_{j=1}^{\infty} \cap_{r=j}^{\infty} \{X_r > k\}$. Έπειτα, το $\lim_n X_n(\omega)$ υπάρχει στο $\mathbb{R}$ αν και μόνο αν η ακολουθία $(X_n(\omega))_{n\ge1}$ είναι βασική. Δηλ. για κάθε $k \ge 1$ υπάρχει $j \ge 1$ ώστε $|X_r(\omega) - X_s(\omega)| < 1/k$ για κάθε $r, s \ge j$. Άρα, το δοσμένο σύνολο γράφεται ως ...

5.5 Θεωρούμε την συνάρτηση $h = f - g$. Τότε η h είναι μετρήσιμη και ισχύει ότι $\{f = g\} = h^{-1}(\{0\}) \in \mathcal{A}$, εφόσον $\{0\} \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$.
Εναλλακτικά,

$$\begin{aligned}\Omega \setminus \{f = g\} &= \{f \neq g\} = \{f > g\} \cup \{g > f\} \\ &= (\cup_{q\in\mathbb{Q}} (\{f > q\} \cap \{g < q\})) \cup (\cup_{q\in\mathbb{Q}} (\{g > q\} \cap \{f < q\}))\end{aligned}$$

από το οποίο προφανώς έπεται το ζητούμενο.

Κεφάλαιο 6

6.1 Για την πρώτη ανισότητα, παρατηρούμε ότι η συνάρτηση $x \mapsto \mathbf{P}(X > x)$ έχει παράγωγο $-e^{-x^2/2}/\sqrt{2\pi}$, και μελετούμε την συνάρτηση της διαφοράς των δύο μελών.

6.2

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{|x - r_n|}}\,dx \leq 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx < \infty$$

Από γνωστή πρόταση (Πρόταση 6.14(iii)) έπεται ότι το σύνολο των $x \in (0,1)$ με $f(x) = \infty$ έχει μέτρο Lebesgue 0.

6.3 Στην ισότητα $1 - \mathbf{1}_{\cup_{i=1}^n A_i} = (1 - \mathbf{1}_{A_1})(1 - \mathbf{1}_{A_2}) \cdots (1 - \mathbf{1}_{A_n})$, αναπτύσσουμε το δεξί μέλος και παίρνουμε μέση τιμή.

6.4 Θεωρούμε την τυχαία μεταβλητή $X = \sum_{k=1}^n \mathbf{1}_{A_k}$.

6.5 $X = \sum_{k=1}^X 1 = \sum_{k=1}^\infty \mathbf{1}_{k \leq X}$, και Θεώρημα Beppo Levi.

6.6 $[X] \leq X \leq [X] + 1$.

6.7

6.8

6.9 (α) Δουλεύουμε όπως στην αποδειξη της ανισότητας Chebyshev.

$$\begin{aligned}P(X \leq a\,\mathbf{E}\,X) &= \mathbf{P}(X - \mathbf{E}\,X \leq -(1-a)\,\mathbf{E}\,X) \\ &\leq \mathbf{P}(|X - \mathbf{E}\,X| \geq (1-a)\,\mathbf{E}\,X) \leq \frac{\mathrm{Var}(X)}{(1-a)^2(\mathbf{E}\,X)^2}.\end{aligned}$$

Χρησιμοποιήσαμε το ότι $(1-a)EX > 0$.

(β) Έστω $A := \{\omega : X(\omega) > a\,\mathbf{E}\,X\}$.

$$\begin{aligned}&\mathbf{E}\,X = \mathbf{E}(X1_{A^c}) + \mathbf{E}(X1_A) \leq a\,\mathbf{E}\,X + \mathbf{E}(X^2)^{1/2}\,\mathbf{P}(A)^{1/2} \Rightarrow \\ &(1-a)\,\mathbf{E}\,X \leq \mathbf{E}(X^2)^{1/2}\,\mathbf{P}(A)^{1/2} \Rightarrow \mathbf{P}(A) \geq (1-a)(\mathbf{E}\,X)^2/\,\mathbf{E}(X^2)\end{aligned}$$

6.10 $\mathbf{P}(X > t) = \mathbf{P}(aX > at) = \mathbf{P}(e^{aX} > e^{at}) \leq \mathbf{E}(e^{aX})/e^{at}$. Παίρνουμε $C = \mathbf{E}(e^{aX}) \in (0, \infty)$.

6.12 Χρησιμοποιούμε την ανισότητα Cauchy-Schwarz.

$$1 \leq \mathbf{E}(\sqrt{XY}) \leq (\mathbf{E}(X))^{1/2}(\mathbf{E}(Y))^{1/2}.$$

6.14 Χρησιμοποιούμε την προηγούμενη άσκηση.

6.15 Η ακολουθία $A_n := \{|X| > n\}, n \geq 1$ είναι φθίνουσα με τομή το $\emptyset$ αφού η X παίρνει τιμές στο $\mathbb{R}$. Άρα $\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(A_n) = \mathbf{P}(\emptyset) = 0$.

6.16 Στην απόδειξη της ανισότητας Markov μπορούμε να είμαστε λιγότερο γενναιόδωροι, και να παρατηρήσουμε ότι η ποσότητα $n\,\mathbf{P}(|X| \geq n)$ φράσσεται από την μέση τιμή $\mathbf{E}(|X|\mathbf{1}_{|X|\geq n})$.

6.17 Για το (α), αρκεί να το δείξουμε για κάθε ακολουθία $(\varepsilon_n)_{n\geq 1}$ θετικών αριθμών με $\varepsilon_n \to 0$. Χρησιμοποιούμε το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης με κυριαρχούσα συνάρτηση την 1 αφού

$$\left|\frac{X}{\varepsilon}\,\mathbf{1}_{X<\varepsilon}\right| \leq 1.$$

6.18 Εύκολα ελέγχουμε την ισότητα για $Y = \sum_{i=1}^n a_i \mathbf{1}_{A_i}$, $A_i \in \mathcal{A}$, απλή, αφού $\mathbf{E}_{\mathbf{Q}}(\mathbf{1}_A) = \mathbf{Q}(A) = \mathbf{E}_{\mathbf{P}}(X\mathbf{1}_A)$, για κάθε $A \in \mathcal{A}$, και λόγω γραμμικότητας. Αν τώρα η Y είναι θετική, γνωρίζουμε ότι υπάρχει ακολουθία $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ απλών συναρτήσεων έτσι ώστε $Y_n \nearrow Y$. Από το Θεώρημα Μονότονης Σύγκλισης, έχουμε ότι $\lim_{n\to\infty} \mathbf{E}_{\mathbf{Q}}(Y_n) = \mathbf{E}_{\mathbf{Q}}(Y)$ και $\lim_{n\to\infty} \mathbf{E}_{\mathbf{P}}(Y_n X) = \mathbf{E}_{\mathbf{P}}(YX)$. Όμως, $\mathbf{E}_{\mathbf{Q}}(Y_n) = \mathbf{E}_{\mathbf{P}}(Y_n X)$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, άρα και πάλι το ζητούμενο ισχύει. Τέλος, αν $\mathbf{E}_{\mathbf{P}}(|Y|X) < \infty$, από τα προηγούμενα έχουμε ότι $\mathbf{E}_{\mathbf{Q}}(Y^-) = \mathbf{E}_{\mathbf{P}}(Y^- X)$, $\mathbf{E}_{\mathbf{Q}}(Y^+) = \mathbf{E}_{\mathbf{P}}(Y^+ X)$ όπου και οι τέσσερις αυτοί αριθμοί είναι πεπερασμένοι εφόσον $\mathbf{E}_{\mathbf{P}}(Y^- X) + \mathbf{E}_{\mathbf{P}}(Y^+ X) = \mathbf{E}_{\mathbf{P}}(|Y|X) < \infty$, $\mathbf{E}_{\mathbf{Q}}(Y^-) + \mathbf{E}_{\mathbf{Q}}(Y^+) = \mathbf{E}_{\mathbf{Q}}(|Y|) = \mathbf{E}_{\mathbf{P}}(|Y|X)$ (η τελευταία ισότητα ισχύει αφού η $|Y|$ είναι θετική). Συνεπώς,

$$\mathbf{E}_{\mathbf{Q}}(Y) = \mathbf{E}_{\mathbf{Q}}(Y^+) - \mathbf{E}_{\mathbf{Q}}(Y^-) = \mathbf{E}_{\mathbf{P}}(Y^+ X) - \mathbf{E}_{\mathbf{P}}(Y^- X) = \mathbf{E}_{\mathbf{P}}(YX).$$

Κεφάλαιο 7

7.1 Για τα ω στο σύνολο $\limsup_n A_n^\varepsilon$ έχουμε $|X_n| \geq \varepsilon$ για άπειρα n, και άρα $\limsup_n A_n^\varepsilon \subset \Omega \setminus \{\lim_{n\to\infty} X_n = 0\}$. Για το ότι το (β) δίνει το (α), παρατηρούμε ότι $\Omega \setminus \{\lim_{n\to\infty} X_n = 0\} = \cup_{k=1}^\infty \limsup_n A_n^{1/k}$, και χρησιμοποιούμε την Άσκηση 2.2 (α).

Κεφάλαιο 8

8.1 Θέλουμε $\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A)\,\mathbf{P}(B)$ για κάθε $A \in \mathcal{F}_1, B \in \mathcal{F}_2$. Θεωρούμε τα δύο σενάρια $\mathbf{P}(A) = 0$, $\mathbf{P}(A) = 1$.

8.2. Έστω ότι δεν υπάρχει τέτοιο c. Τότε υπάρχει $a \in \mathbb{R}$ ώστε $\mathbf{P}(X < a) = p \in (0,1)$ και επομένως $\mathbf{P}(X \geq a) = 1 - p \in (0,1)$. Η ανεξαρτησία δίνει

$$\mathbf{P}(X < a, Y \geq a) = \mathbf{P}(X < a)\,\mathbf{P}(Y \geq a) > 0,$$

ενώ το αριστερό μέλος είναι μικρότερο απο $\mathbf{P}(X \neq Y) = 0$ από υπόθεση. Άτοπο.

8.3 Έχουμε ότι $\mathbf{E}(S_n) = n\,\mathbf{E}(X_1)$ και λόγω ανεξαρτησίας ότι $\mathrm{Var}(S_n) = n\,\mathrm{Var}(X_1)$. Επιπλέον, $\mathbf{E}(X_1) = (-1)\frac{1}{2} + 1\frac{1}{2} = 0$ και $\mathrm{Var}(X_1) = \mathbf{E}(X_1^2) - \mathbf{E}(X_1)^2 = \mathbf{E}(X_1^2) = 1$. Έστω $\epsilon > 0$. Τότε,

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\left(\left|\frac{S_n}{n}\right| > \epsilon\right) &= \mathbf{P}(|S_n| > n\epsilon) = \mathbf{P}(S_n^2 > n^2\epsilon^2)\\ &\leq \frac{\mathbf{E}(S_n^2)}{n^2}\epsilon^2 = \frac{\mathrm{Var}\, S_n}{n^2\epsilon^2}\\ &= \frac{n}{n^2\epsilon^2} = \frac{1}{n\epsilon^2} \to 0\end{aligned}$$

για $n \to \infty$.

8.4. Για $\varepsilon > 0$, χρησιμοποιώντας την ανεξαρτησία των $X_1, X_2, \ldots$, βρίσκουμε

$$\mathbf{P}(|m_n| > \varepsilon) = \mathbf{P}(m_n > \varepsilon) = \mathbf{P}(X_1 > \varepsilon, \ldots, X_n > \varepsilon) = (1-\varepsilon)^n \to 0,$$

και όμοια

$$\mathbf{P}(|M_n - 1| > \varepsilon) = \mathbf{P}(M_n < 1-\varepsilon) = \mathbf{P}(X_1 < 1-\varepsilon, \ldots, X_n < 1-\varepsilon) = (1-\varepsilon)^n \to 0.$$

Κεφάλαιο 9

9.3. Αποδεικνύουμε το ζητούμενο για την M_n. Το όριο είναι το πολύ 1 αφού κάθε μία X_i είναι το πολύ 1. Για το κάτω φράγμα, εφαρμόζουμε το πρώτο Λήμμα Borel-Cantelli. Για $\varepsilon > 0$, θέτουμε $A_n^\varepsilon := \{M_n \le 1-\varepsilon\}$. Επειδή $\mathbf{P}(A_n^\varepsilon) \le (1-\varepsilon)^n$, και $\sum_{n\ge 1} \mathbf{P}(A_n) < \infty$, με πιθανότητα 1 για όλα τα μεγάλα n ισχύει $M_n \ge 1-\varepsilon$. Άρα το σύνολο $B_\varepsilon := \{\underline{\lim}_{n\to\infty} M_n \ge 1-\varepsilon\}$ έχει πιθανότητα 1, και επομένως το ίδιο ισχύει και για το $\cap_{k=1}^\infty B_{1/k} = \{\underline{\lim}_{n\to\infty} M_n \ge 1\}$.

Εναλλακτικά, μπορεί να παρατηρήσει κανείς ότι $\mathbf{P}(A_n^{1/\sqrt{n}}) = (1-n^{-1/2})^n \le e^{-\sqrt{n}}$ (με χρήση της $1-x \le e^{-x}$), και $\sum_{n\ge 1} e^{-\sqrt{n}} < \infty$. Το συμπέρασμα έπεται από το πρώτο Λήμμα Borel-Cantelli.

9.5 Αρκεί για κάθε $n \ge 1$ να βρούμε σταθερά M_n ώστε $\mathbf{P}(|X_n| > M_n) \le n^{-2}$. Τότε η $a_n = nM_n$ ικανοποιεί το ζητούμενο (πρώτο Λήμμα Borel-Cantelli).

9.6 Η κατεύθυνση $\Leftarrow$ είναι πιο εύκολη. Αν υπάρχει τέτοιο M τότε (από το πρώτο λήμμα Borel-Cantelli) με πιθανότητα 1, ισχύει $X_n \le M$ για όλα τα μεγάλα n, και έπεται το συμπέρασμα.

[Να το γράψουμε και τυπικά. Το σύνολο $A := \limsup_{n\ge 1}\{X_n > M\}$ έχει πιθανότητα 0, και για κάθε $\omega \in \Omega \setminus A$ υπάρχει φυσικός $n_0(\omega)$ ώστε $X_n \le M$ για κάθε $n \ge n_0(\omega)$. Άρα

$$X^*(\omega) \le \max\{X_1, X_2, \ldots, X_{n_0(\omega)-1}, M\} < \infty,$$

ως μέγιστο πεπερασμένου αριθμού πραγματικών αριθμών.]

Για την άλλη κατεύθυνση, έστω ότι δεν υπάρχει τέτοιο M, τότε για κάθε $K \in \mathbb{N}$, το δεύτερο λήμμα Borel-Cantelli δίνει ότι $\mathbf{P}(\limsup_n\{X_n > K\}) = 1$ (εδώ χρησιμοποιούμε την ανεξαρτησία των X_n). Επομένως το $C_K := \{X^* \ge K\}$ έχει πιθανότητα 1, και άρα και το $\cap_{K=1}^\infty C_K$ (*αριθμήσιμη* τομή συνόλων με πιθανότητα 1). Όμως $\cap_{K=1}^\infty C_K = \{X^* = \infty\}$, το οποίο από υπόθεση έχει πιθανότητα 0, και έχουμε άτοπο.

9.7 Χρήσιμη είναι η Άσκηση 6.1.

9.8. Το όριο είναι το πολύ 1 λόγω της Άσκησης 2.6. Για το κάτω φράγμα, εφαρμόζουμε το πρώτο Λήμμα Borel-Cantelli. Για $\varepsilon > 0$

$$\mathbf{P}\left(\frac{M_n}{\log n} \le 1-\varepsilon\right) = \mathbf{P}(X_1 \le (1-\varepsilon)\log n)^n = (1-n^{-(1-\varepsilon)})^n \le (e^{-n^{\varepsilon-1}})^n = e^{-n^\varepsilon},$$

και συνεχίζουμε όπως στην προηγούμενη άσκηση.

9.9 Με χρήση της Άσκησης 7.1, δείχνουμε πρώτα ότι ο ισχυρισμός για το όριο είναι ισοδύναμος με την $\sum_{n=1} \mathbf{P}(|X_n| \ge \varepsilon n) < \infty$ για κάθε $\varepsilon > 0$. Έπειτα χρησιμοποιούμε την Άσκηση 6.6.

9.14. (β) Από το προηγούμενο ερώτημα, οι $(X_i)_{i\in I}$ είναι ανεξάρτητες. Άρα ο νόμος 0-1 του Kolmogorov εφαρμόζεται για την τελική σ-αλγεβρα τους

$$\mathcal{C}_\infty := \cap_{n=1}^\infty \sigma(X_n, X_{n+1}, \ldots).$$

Βέβαια το αν ένα $\omega \in \Omega$ ανήκει σε ένα από τα $\liminf A_i, \limsup A_i$ δεν εξαρτάται από οποιαδήποτε πεπερασμένο πλήθος $X_1(\omega), \ldots, X_k(\omega)$, οπότε και τα δύο σύνολα ανήκουν στην $\mathcal{C}_\infty$. Τυπικά το αποδεικνύουμε ως εξής. Για κάθε $n \ge 1$,

$$\liminf_i A_i = \cup_{j=1}^\infty \cap_{k=j}^\infty A_k = \cup_{j=n}^\infty \cap_{k=j}^\infty A_k = \cup_{j=n}^\infty \cap_{k=j}^\infty X_k^{-1}(\{1\}) \in \sigma(X_n, X_{n+1}, \ldots).$$

Η δεύτερη ισότητα ισχύει γιατί έχουμε ένωση μιας αύξουσας ακολουθίας συνόλων. Όμοια

$$\limsup_i A_i = \cap_{j=1}^{\infty} \cup_{k=j}^{\infty} A_k = \cap_{j=n}^{\infty} \cup_{k=j}^{\infty} A_k = \cap_{j=n}^{\infty} \cup_{k=j}^{\infty} X_k^{-1}(\{1\}) \in \sigma(X_n, X_{n+1}, \ldots).$$

9.15. (α) Από τον απειροστικό λογισμό ξέρουμε ότι $R^{-1} = \overline{\lim}_{n\to\infty} |X_n|^{1/n}$.

(β) Δείχνουμε όπως στην Άσκηση 9.7 ότι $\overline{\lim}_{n\to\infty} |X_n|^{1/n} = 1$ με πιθανότητα 1. Μάλιστα εδώ αρκεί η χρήση του πρώτου λήμματος Borel-Cantelli για να δείξουμε ότι $\lim_{n\to\infty} |X_n|^{1/n} = 1$.

9.17. Δουλεύουμε όπως στην προηγούμενη άσκηση.

Κεφάλαιο 10

10.1 Έστω $Y = \frac{S_n}{n}$. Τότε $\mathbf{E}(Y) = \frac{1}{n}\mathbf{E}(X_1 + X_2 + ... + X_n) = \frac{1}{n} n\, \mathbf{E}(X_1) = \mu$ και $\mathrm{Var}(Y) = \mathrm{Var}(\frac{1}{n}S_n) = \frac{1}{n^2}\mathrm{Var}(X_1 + X_2 + ... + X_n) = \frac{1}{n}\mathrm{Var}(X_1)$. Έστω $\epsilon > 0$. Τότε,

$$\mathbf{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - \mu\right| \geq \epsilon\right) = \mathbf{P}(|Y - \mathbf{E}(Y)| \geq \epsilon) \leq \frac{1}{\epsilon^2}\mathrm{Var}(Y) = \frac{1}{\epsilon^2}\frac{\mathrm{Var}(X_1)}{n} \to 0,$$

για $n \to \infty$, από το οποίο προκύπτει το ζητούμενο.

10.2 Έστω $M > 0$. Για κάθε $i \geq 1$ θέτουμε $Y_i^M = X_i \wedge M$. Οι Y_i^M είναι ανεξάρτητες και ισόνομες, και ισχύει ότι $(Y_i^M)^- = X_i^-$, $(Y_i^M)^+ \leq M$. Συνεπώς $\mathbf{E}(|Y_i^M|) \leq \mathbf{E}(X_i^-) + M < \infty$. Θέτουμε $S_n^M = Y_1^M + Y_2^M + ... + Y_n^M$ για κάθε $n \geq 1$. Τότε, με πιθανότητα 1,

$$\varliminf_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} \geq \varliminf_{n\to\infty} \frac{S_n^M}{n} = \mathbf{E}(Y_1^M),$$

όπου η ισότητα προκύπτει από το Νόμο των Μεγάλων Αριθμών. Έστω τώρα

$$\Omega_M = \left\{\omega \in \Omega : \varliminf_{n\to\infty} \frac{S_n(\omega)}{n} \geq \mathbf{E}(X_1 \wedge M)\right\}.$$

Δείξαμε ότι $\mathbf{P}(\Omega_M) = 1$, για κάθε $M > 0$. Θεωρώντας το σύνολο $A = \cap_{k=1}^{\infty}\Omega_k$, έχουμε ότι $\mathbf{P}(A) = 1$, και για $\omega \in A$, ισχύει ότι

$$\varliminf_{n\to\infty} \frac{S_n(\omega)}{n} \geq \mathbf{E}(X_1 \wedge k), \quad \forall k \geq 1. \tag{.3}$$

Από το Θεώρημα Μονότονης Σύγκλισης $\mathbf{E}(Y_1^k) = \mathbf{E}(X_1^+ \wedge k) - \mathbf{E}(X_1^-) \to \mathbf{E}(X_1^+) - \mathbf{E}(X_1^-) = \infty$, για $k \to \infty$. Άρα, για $\omega \in A$, παίρνοντας $k \to \infty$ στην (.3) έχουμε ότι $\varliminf_{n\to\infty} S_n(\omega)/n = \infty$, οπότε $\lim_{n\to\infty} S_n(\omega)/n = \infty$, που είναι το ζητούμενο.

10.3 Παρατηρούμε ότι

$$\frac{X_n}{n} = \frac{S_n}{n} - \frac{S_{n-1}}{n-1} = \frac{S_n}{n} - \frac{n-1}{n}\frac{S_{n-1}}{n-1} \to \mu - \mu = 0 \tag{.4}$$

για $n \to \infty$ με πιθανότητα 1. Άρα $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}\left(\frac{|X_n|}{n} \geq 1\right) < \infty$ γιατί αν $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}\left(\frac{|X_n|}{n} \geq 1\right) = \infty$ τότε το 2ο Λήμμα Borel-Cantelli εφαρμοζόμενο στην ακολουθία ανεξάρτητων ενδεχομένων $A_n = \left\{\frac{|X_n|}{n} \geq 1\right\}$, $n \geq 1$ θα έδινε ότι $\overline{\lim}\, |X_n|/n \geq 1$ με πιθανότητα 1, το οποίο συγκρούεται με την (.4). Τέλος, ισχύει ότι (Άσκηση 6.6)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}\left(|X_n| \geq n\right) \leq \mathbf{E}(|X_1|) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}\left(|X_n| \geq n\right) + 1$$

Άρα $\mathbf{E}(X_1) \in \mathbb{R}$ και από το Νόμο των Μεγάλων Αριθμών $\frac{S_n}{n} \to \mathbf{E}(X_1)$. Όμως, από υπόθεση $\frac{S_n}{n} \to \mu$, επομένως $\mathbf{E}(X_1) = \mu$.

10.4 Έχουμε ότι $\mathbf{E}(X_1) = 1$ και $\mathbf{E}(X_1^2) = \mathrm{Var}(X_1) + \mathbf{E}(X_1)^2 = 4$, καθώς επίσης και ότι οι $\{X_i^2, i \geq 1\}$ είναι ανεξάρτητες και ισόνομες. Γράφουμε

$$\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{(X_1)^2 + (X_2)^2 + \ldots + (X_n)^2} = \frac{\frac{X_1+X_2+\ldots+X_n}{n}}{\frac{(X_1)^2+(X_2)^2+\ldots+(X_n)^2}{n}}.$$

Από το Νόμο των Μεγάλων Αριθμών ο αριθμητής συγκλίνει στο 1 με πιθανότητα 1 και αντίστοιχα ο παρονομαστής στο 2. Τυπικά, για τα $A_1 = \{\omega \in \Omega : \lim_{n\to\infty} \frac{X_1+X_2+\ldots+X_n}{n} = 1\}$ και $A_2 = \{\omega \in \Omega : \lim_{n\to\infty} \frac{(X_1)^2+(X_2)^2+\ldots+(X_n)^2}{n} = 1\}$ έχουμε ότι $\mathbf{P}(A_1) = \mathbf{P}(A_2) = 1$. Άρα $\mathbf{P}(A_1 \cap A_2) = 1$, και για $\omega \in A_1 \cap A_2$ έχουμε

$$\lim_{n\to\infty} \frac{X_1(\omega) + X_2(\omega) + \ldots + X_n(\omega)}{(X_1)^2(\omega) + (X_2)^2(\omega) + \ldots + (X_n)^2(\omega)} = \frac{1}{4},$$

από το οποίο προκύπτει το ζητούμενο.

10.5. $S_n = n(S_n/n) \to \infty \times \mathbf{E}(X_1) = \infty$ αφού $\mathbf{E}(X_1) > 0$.

10.6. (α) $(U_1 U_2 \cdots U_n)^{1/n} = e^{\frac{1}{n}(\log U_1 + \cdots + \log U_n)}$ Επειδή $\mathbf{E}(\log U_1) = \int_0^1 \log x \, dx = \ldots = -1$, ο ισχυρός νόμος των μεγάλων αριθμών για την ακολουθία $(\log U_i)_{i\geq 1}$ δίνει ότι

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log U_1 + \cdots + \log U_n}{n} = -1 \text{ με πιθανότητα } 1.$$

Το συμπέρασμα έπεται.

(β) Έπεται από το (α). Επιλέγουμε θ ώστε $e^{-1} < \theta < 1$. Με πιθανότητα 1, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε για $n > n_0$ να ισχύει $(U_1 U_2 \cdots U_n)^{1/n} < \theta$. Άρα για $n > n_0$

$$0 < U_1 U_2 \cdots U_n < \theta^n \to 0$$

καθώς $n \to \infty$ επειδή $0 < \theta < 1$.

Εναλλακτικά $U_1 U_2 \cdots U_n = e^{n \frac{\log U_1 + \cdots + \log U_n}{n}} \to 0$ αφού το όριο του εκθέτη είναι $\infty \times (-1) = -\infty$.

(γ) Η ακολουθία $(U_i^a)_{i\geq 1}$ αποτελείται από ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές, καθεμία με μέση τιμή

$$\mathbf{E}(U_1^a) = \int_0^1 x^a \, dx = \begin{cases} \frac{1}{1+a} & \text{αν } a > -1, \\ \infty & \text{αν } a \leq -1. \end{cases}$$

Το συμπέρασμα έπεται από τον ισχυρό νόμο των μεγάλων αριθμών και την Άσκηση 10.2

10.7. Οι όροι της ακολουθίας $((X_i - \mu)^2)_{i\geq 1}$ είναι ανεξάρτητες ισόνομες τυχαίες μεταβλητές, καθεμία με μέση τιμή $\mathbf{E}((X_1 - \mu)^2) = V(X_1) = \sigma^2$. Ο ισχυρός νόμος των μεγάλων αριθμών δίνει το συμπέρασμα.

Κεφάλαιο 11

11.1 Από το Θεώρημα Fubini έχουμε ότι

$$\begin{aligned}\lambda_2(A) &= \int \mathbf{1}_A(x,y)\,\mathrm{d}\lambda_2(x,y)\\ &= \int \left(\int \mathbf{1}_A(x,y)\,\mathrm{d}\lambda(y)\right)\,\mathrm{d}\lambda(x)\\ &= \int\int \mathbf{1}_{A_x}(y)\,\mathrm{d}\lambda(y)\,\mathrm{d}\lambda(x)\\ &= \int \lambda(A_x)\,\mathrm{d}\lambda(x).\end{aligned}$$

Δεδομένου ότι για μία συνάρτηση $f \geq 0$ μετρήσιμη ισχύει ότι $\int f\,\mathrm{d}\lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda(\{x : f(x) > 0\}) = 0$, από τα παραπάνω παίρνουμε την ισοδυναμία των (α) και (β). Όμοια δείχνουμε ότι τα (α), (γ) είναι ισοδύναμα και έτσι έχουμε το ζητούμενο.

Κεφάλαιο 12

12.1 Δουλεύουμε όπως στο Παράδειγμα 12.8.

12.2 Έστω $u \in \mathbb{R}$. Τότε $\phi_{-X}(u) = \mathbf{E}(e^{iu(-X)}) = \phi_X(-u) = \overline{\phi_X(u)}$. Συνεπώς, αν $X \stackrel{d}{=} -X$, έχουμε ότι $\phi_X(u) = \overline{\phi_X(u)}$, για κάθε $u \in \mathbb{R}$, δηλαδή $\phi_X(u) \in \mathbb{R}$. Αντίστροφα, αν $\phi_X(u) \in \mathbb{R}$, έχουμε ότι $\phi_X(u) = \overline{\phi_X(u)}$, όμως από τα παραπάνω $\overline{\phi_X(u)} = \phi_{-X}(u)$, άρα $X \stackrel{d}{=} -X$.

12.3 Έστω $u \in \mathbb{R}$. Τότε,

$$\begin{aligned}\phi_Z(u) &= \mathbf{E}(e^{iuX}e^{-iuY}) = \mathbf{E}(e^{iuX})\,\mathbf{E}(e{-}iuY)\\ &= \phi_X(u)\phi_Y(-u) = \phi_x(u)\phi_X(-u)\\ &= \phi_X(u)\overline{\phi_X(u)} = |\phi_X(u)|^2 \in \mathbb{R},\end{aligned}$$

όπου η δεύτερη ισότητα προκύπτει λόγω ανεξαρτησίας. Από την Άσκηση 12.2 προκύπτει ότι η Z έχει συμμετρική κατανομή.

12.4 Έχουμε ότι $f_X(x) = f_Y(y) = \mathbf{1}_{(0,1)}(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Από το Θεώρημα 12.21 η $X+Y$ έχει πυκνότητα $f_{X+Y}(z) = \int_{\mathbb{R}} f_X(x) f_Y(z-x)\,dx$. Ο ολοκληρωτέος είναι μη μηδενικός για (x,z) τέτοια ώστε $0 < x < 1$ και $0 < z - x < 1$, δηλαδή,

$$\begin{aligned} 0 &< x < 1, \qquad \text{και}\\ z-1 &< x < z. \end{aligned} \tag{ .5}$$

- Αν $z \leq 0$ ή $z \geq 2$, τότε δεν υπάρχουν x που ικανοποιούν την (.5).
- Αν $z \in (0,1)$, τότε από (.5), $0 < x < z$ και $f_{X+Y}(z) = \int_0^z 1\,\mathrm{d}x = z$.
- Αν $z \in (1,2)$ τότε από (.5), $z-1 < x < 1$ και $f_{X+Y}(z) = \int_{z-1}^1 1\,\mathrm{d}x = 2 - z$.

Συνδυάζοντας τα παραπάνω, προκύπτει το ζητούμενο.

12.5 (α) Η χαρακτηριστική συνάρτηση της τυχαίας μεταβλητής $\frac{X+Y}{2}$ είναι

$$\phi_{\frac{X+Y}{2}}(t) = \mathbf{E}(e^{iXt/2}e^{iYt/2}) = \mathbf{E}(e^{iXt/2})\,\mathbf{E}(e^{iYt/2}) = \phi_X\left(\frac{t}{2}\right)\phi_Y\left(\frac{t}{2}\right) = e^{-|t|/2}e^{-|t|/2} = e^{-|t|},$$

όπου η δεύτερη ισότητα προκύπτει λόγω ανεξαρτησίας. Γνωρίζουμε ότι η $e^{-|t|}$ είναι χαρακτηριστική συνάρτηση μίας τυχαίας μεταβλητής με κατανομή Cauchy. Από το Θεώρημα Μοναδικότητας 12.12 έπεται ότι

$\frac{X+Y}{2} \sim \mathbf{Cauchy}$.
(β) Εργαζόμαστε όμοια με το (α) βασιζόμενοι στην ανεξαρτησία των $X_1, X_2, \ldots, X_n$.

Κεφάλαιο 13

13.1 Η $\mathbf{F}_X$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$. Συγκεκριμένα, έχουμε ότι

$$\mathbf{F}_X(x) = \int_{-\infty}^{x} e^{-t}\mathbf{1}_{t>0}\,\mathrm{d}t = \begin{cases} 0 & \text{αν } x \leq 0, \\ 1 - e^{-x} & \text{αν } x > 0. \end{cases}$$

Για $x \leq 0$,

$$\mathbf{F}_{p_nX_n}(x) = \mathbf{P}(p_nX_n \leq 0) = 0,$$

αφού $p_n > 0$ και $X_n \geq 1$. Για $x > 0$,

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{p_nX_n}(x) &= \mathbf{P}\left(X_n \leq \frac{x}{p_n}\right) = 1 - \mathbf{P}\left(X_n > \frac{x}{p_n}\right) \\ &= 1 - \mathbf{P}\left(X_n > \left[\frac{x}{p_n}\right]\right) = 1 - (1-p_n)^{\left[\frac{x}{p_n}\right]}, \end{aligned}$$

εφόσον για $Y \sim \mathbf{Γεωμετρική}(p)$ ισχύει $\mathbf{P}(Y \geq k) = (1-p)^{k-1}$. Τώρα παρατηρούμε ότι

$$(1-p_n)^{\left[\frac{x}{p_n}\right]} = e^{\left[\frac{x}{p_n}\right]p_n \frac{\log(1-p_n)}{p_n}} \to e^{-x}$$

για $n \to \infty$. Άρα, $\mathbf{F}_{p_nX_n}(x) \to 1 - e^{-x}$. Από το Θεώρημα 13.3 έπεται το ζητούμενο.

13.2. Η συνάρτηση κατανομής της Z είναι

$$F_Z(x) = \begin{cases} 0 & \text{αν } x < 0, \\ x & \text{αν } x \in [0,1], \\ 1 & \text{αν } x > 1, \end{cases}$$

και τα σημεία συνέχειας της είναι όλο το $\mathbb{R}$. Για $x \in [0,1]$,

$$F_{Y_n}(x) = \mathbf{P}(X_n \leq nx) = \frac{[nx]}{n} \to x = F_Z(x)$$

για $n \to \infty$ (π.χ. $nx - 1 < [nx] \leq nx$, κ.λπ). Η σύγκλιση για τα υπόλοιπα $x \in \mathbb{R}$ είναι πιο εύκολη.

13.3 Έστω $A_n = \mathbb{R}\backslash[-n,n]$. Τότε η A_n είναι φθίνουσα ακολουθία, άρα,

$$\lim_{n\to\infty} p(A_n) = p(\cap_{n=1}^{\infty} A_n) = p(\emptyset) = 0.$$

Επομένως, για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει n_0 έτσι ώστε $\mu(R \setminus [-n_0, n_0]) < \epsilon$.

13.4 Από την ανισότητα του Markov έχουμε,

$$\mathbf{P}(|X_n| > M) = \mathbf{P}(X_n^2 > M^2) \leq \frac{1}{M^2}\mathbf{E}(X_n^2) \leq \frac{1}{M^2}C,$$

όπου $C = \sup_{n\geq 1}\mathbf{E}(X_n^2) < \infty$. Άρα $\sup_{n\leq 1}\mathbf{P}(|X_n| > M) \leq \frac{C}{M^2} \to 0$ για $M \to \infty$.

13.5 Από την Άσκηση 13.2, για κάθε $i \in I$ υπάρχει $M_i > 0$ έτσι ώστε $p_i([-M_i, M_i]) > 1 - \epsilon$. Θέτοντας $M = \max\{M_i : i \in I\}$ έχουμε ότι $p_i([-M, M]) \geq p_i([-M_i, M_i]) > 1 - \epsilon$, από το οποίο προκύπτει ότι η $(p_i)_{i\in I}$ είναι σφιχτή.

13.6. Με βάση το Θεώρημα 13.6, η σύγκλιση $X_n \Rightarrow X$ συνεπάγεται (μάλιστα ισοδυναμεί με) την

$$\mathbf{P}(X_n \in A) \to \mathbf{P}(X \in A) \text{ για όλα τα } A \subset \mathbb{R} \text{ Borel με } \mathbf{P}(X \in \partial A) = 0.$$

Είναι δυνατόν βέβαια η σχέση $\mathbf{P}(X_n \in A) \to \mathbf{P}(X \in A)$ να ισχύει για ένα σύνολο Borel A συμπτωματικά, ίσως εξαιτίας της φύσης της ακολουθίας $(X_n)_{n\geq 1}$. Πάντως δεν μας την εγγυάται η $X_n \Rightarrow X$.

(i) Όχι. Γιατί $\partial A = \{2, 32.1, 100\}$, στο οποίο η κατανομή της X δίνει θετική πιθανότητα αφού περιέχει τους θετικούς ακέραιους $2, 100$.

(ii) Όχι. Γιατί $\partial A = \bar{A} \setminus A^o = \mathbb{R} \setminus \emptyset = \mathbb{R}$, και $\mathbf{P}(X \in \mathbb{R}) = 1 > 0$.

(iii) Ναι. Γιατί $\partial A = \{-1.5, 2.8\}$ και $\mathbf{P}(X \in \{-1.5, 2.8\}) = 0$, αφού μια γεωμετρική τυχαία μεταβλητή παίρνει μόνο ακέραιες θετικές τιμές.

(iv) Ναι. Γιατί $\partial A = \{-2, \pi\}$ και $\mathbf{P}(X \in \partial A) = 0$ αφού η X είναι συνεχής τυχαία μεταβλητή και το ∂A είναι πεπερασμένο.

(v) Όχι. Γιατί $\partial A = \bar{A} \setminus A^o = [0, 1/3] \setminus \emptyset = [0, 1/3]$, και $\mathbf{P}(X \in [0, 1/3]) = 1/3 > 0$.

(vi) Όχι. Γιατί $\partial A = \{0, 1/2, 2, 4\}$, και $\mathbf{P}(X \in \{0, 1/2, 2, 4\}) = \mathbf{P}(X = 0) = 3/5 > 0$.

Κεφάλαιο 14

14.1. (α) Παράδειγμα 12.17.

(β) Για $t \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$\phi_X(t) = \mathbf{E}(e^{itX}) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{itk}(1-p)^{k-1}p = pe^{it}\sum_{j=0}^{\infty}(e^{it}(1-p))^j = \frac{pe^{it}}{1-(1-p)e^{it}}.$$

Αθροίσαμε μια γεωμετρική πρόοδο της οποίας ο λόγος έχει μέτρο $|(1-p)e^{it}| = 1-p < 1$ αφού $p > 0$.

(γ) (i) Τα σημεία συνέχειας της συνάρτησης κατανομής F_X της X είναι όλο το $\mathbb{R}$. Έστω $x > 0$. Τότε

$$\begin{aligned} F_{X_n/n}(x) &= \mathbf{P}\left(\frac{X_n}{n} \leq x\right) = \mathbf{P}(X_n \leq [nx]) = 1 - \mathbf{P}(X_n > [nx]) \\ &= 1 - (1-p_n)^{[nx]} = 1 - \left(\left(1 - \frac{a}{n}\right)^n\right)^{[nx]/n}. \end{aligned}$$

Επειδή $[nx]/n \to x$ και $(1 - an^{-1})^n \to e^{-a}$, έπεται ότι $\lim_{n\to\infty} F_{X_n/n}(x) = 1 - e^{-ax} = F_X(x)$. Προφανώς το ίδιο ισχύει και για $x \leq 0$.

(ii) Για $t \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$\phi_{X_n/n}(t) = \phi_{X_n}(t/n) = \frac{p_n e^{it/n}}{1-(1-p_n)e^{it/n}} = \frac{e^{it/n}}{\frac{1-e^{it/n}}{a/n} + e^{it/n}} \to \frac{1}{1-\frac{it}{a}} = \phi_X(t)$$

καθώς $n \to \infty$ αφού

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1-e^{it/n}}{a/n} = \lim_{n\to\infty} \frac{it}{a}\frac{1-e^{it/n}}{it/n} = -\frac{it}{a}.$$

Άρα η σύγκλιση $X_n/n \Rightarrow X$ έπεται από γνωστό θεώρημα.

14.2. (α) Για $t \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$\phi_X(t) = \mathbf{E}(e^{itX}) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{itk}e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(e^{it}\lambda)^k}{k!} = e^{\lambda(e^{it}-1)}.$$

(β) Για $t \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$\phi_X(t) = \mathbf{E}(e^{itX}) = \sum_{k=0}^{n} e^{itk}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(pe^{it})^k(1-p)^{n-k}(pe^{it}+1-p)^n.$$

(γ) Για $t \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$\phi_{X_n}(t) = (p_n e^{it} + 1 - p_n)^n = (1 + p_n(e^{it}-1))^n \to e^{\lambda(e^{it}-1)} = \phi_X(t)$$

αφού $\lim_{n\to\infty} p_n(e^{it}-1)n = \lambda(e^{it}-1)$. Άρα η σύγκλιση $X_n \Rightarrow X$ έπεται από γνωστό θεώρημα.

Κεφάλαιο 15

15.1 Παρατηρούμε ότι $\mathbf{E}(X_1) = \operatorname{Var} X_1 = 1$ και εφαρμόζουμε το Κεντρικό Οριακό Θεώρημα.

15.2 Παρατηρούμε ότι $\mathbf{P}(X = k) = e^{-n}\frac{n^k}{k!}$, όπου $X \sim \mathbf{Poisson}(n)$. Έστω $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές με $X_1 \sim \mathbf{Poisson}(1)$. Γνωρίζουμε ότι η $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k \sim \mathbf{Poisson}(n)$. Άρα,

$$\begin{aligned} e^{-n}\sum_{k=0}^{n}\frac{n^k}{k!} &= \sum_{k=0}^{n}\mathbf{P}(S_n \le n) \\ &= \mathbf{P}\left(\frac{S_n - n}{\sqrt{n}} \le 0\right) \\ &= \mathbf{F}_{\frac{S_n-n}{\sqrt{n}}}(0). \end{aligned}$$

Από την Άσκηση 15.1, αφού $\frac{S_n-n}{\sqrt{n}} \Rightarrow Z$, με $Z \sim \mathbf{N}(0,1)$, έχουμε ότι $\mathbf{F}_{\frac{S_n-n}{\sqrt{n}}}(0) \to \mathbf{F}_Z(0) = \frac{1}{2}$ για $n \to \infty$.

15.3. Για την ακολουθία $(S_n)_{n\ge1}$ έχουμε ότι $S_n/n \to 2$ κατά πιθανότητα (ασθενής νόμος των μεγάλων αριθμών) και

$$\frac{S_n - 2n}{\sqrt{n}} \Rightarrow Z \sim N(0,1)$$

(κεντρικό οριακό θεώρημα).

(α) Η σύγκλιση $S_n/n \to 2$ κατά πιθανότητα δίνει

$$\mathbf{P}(S_n > 2.1n) = \mathbf{P}\left(\frac{S_n}{n} > 2.1\right) \le \mathbf{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - 2\right| > 0.1\right) \to 0$$

καθώς $n \to \infty$.

(β) Έχουμε

$$\mathbf{P}(S_n > 2n + \sqrt{n}) = \mathbf{P}\left(\frac{S_n - 2n}{\sqrt{n}} > 1\right) \to \mathbf{P}(Z > 1) = 1 - \Phi(1)$$

καθώς $n \to \infty$ λόγω του κεντρικού οριακού θεωρήματος.

(γ) Ξέρουμε ότι $S_n \sim 2n$, άρα το ενδεχόμενο $S_n > 10\sqrt{n}$ είναι πολύ πιθανό. Τυπικά προχωρούμε ως εξής.

$$\mathbf{P}(S_n > 10\sqrt{n}) = P\left(\frac{S_n}{n} > \frac{10}{\sqrt{n}}\right) = 1 - P\left(\frac{S_n}{n} \le \frac{10}{\sqrt{n}}\right).$$

Για $n > 100$,

$$\mathbf{P}\left(\frac{S_n}{n} \le \frac{10}{\sqrt{n}}\right) \le \mathbf{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - 2\right| > 1\right) \to 0$$

Άρα $\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(S_n > 10\sqrt{n}) = 1$.

(δ)

$$\mathbf{P}(S_n \geq 3n) = \mathbf{P}\left(\frac{S_n}{n} \geq 3\right) \leq \mathbf{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - 2\right| > \frac{1}{2}\right) \to 0$$

καθώς $n \to \infty$. Άρα $\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(S_n < 3n) = 1$.

(ε) Για $n > 10^{10}$ έχουμε

$$\mathbf{P}(S_n \leq 10^{10}) = \mathbf{P}\left(\frac{S_n}{n} \leq \frac{10^{10}}{n}\right) \leq \mathbf{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - 2\right| > \frac{1}{2}\right) \to 0$$

καθώς $n \to \infty$. Άρα $\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(S_n > 10^{10}) = 1$.

15.4. Έστω ακολουθίες $(Y_n)_{n\geq 1}, (Z_n)_{n\geq 1}$ τυχαίες μεταβλητές στον ίδιο χώρο πιθανότητας ώστε οι $\{Y_n, Z_n : n \geq 1\}$ να είναι ανεξάρτητες και ισόνομες και καθεμία να έχει την ίδια κατανομή με την X_1.

Τότε επειδή το διάνυσμα $(X_1, \cdots, X_{2n})$ έχει την ίδια κατανομή με το $(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n, Z_1, Z_2, \ldots, Z_n)$ (το μέτρο γινόμενο $\otimes_{i=1}^{2n} \mathbf{P}^{X_1}$ της κατανομής $\mathbf{P}^{X_1}$ $2n$ φορές με τον εαυτό της), έχουμε ότι

$$\begin{aligned}\mathbf{P}&\left(\left|\frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n - (X_{n+1} + \cdots + X_{2n})}{\sqrt{n}}\right| \leq 1\right) \\ &= \mathbf{P}\left(\left|\frac{Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n - (Z_1 + \cdots + Z_n)}{\sqrt{n}}\right| \leq 1\right) = \mathbf{P}\left(\left|\frac{W_1 + W_2 + \cdots + W_n}{\sqrt{n}}\right| \leq 1\right),\end{aligned}$$

όπου θέσαμε $W_i = Y_i - Z_i$ για κάθε $i \geq 1$. Από την υπόθεση, οι $\{W_i : i \geq 1\}$ είναι ανεξάρτητες και ισόνομες, καθεμία με μέση τιμή $\mathbf{E}(W_1) = 0$ και διασπορά $V(W_1) = V(X_1) + V(Y_1) - 2\mathrm{Cov}(X_1, Y_1) = 1 + 1 - 0 = 2$. Άρα, εφαρμόζοντας το κεντρικό οριακό θεώρημα, βρίσκουμε

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left(\left|\frac{W_1 + W_2 + \cdots + W_n}{\sqrt{n}}\right| \leq 1\right) &= \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left(\left|\frac{W_1 + W_2 + \cdots + W_n}{\sqrt{n2}}\right| \leq \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \\ &= \mathbf{P}(|Z| \leq 1/\sqrt{2}) = \Phi(1/\sqrt{2}) - \Phi(1/\sqrt{2}) \\ &= 2\Phi(1/\sqrt{2}) - 1.\end{aligned}$$

References

Durrett, Richard. 2010. *Probability: theory and examples*. Fourth edn. Cambridge Series in Statistical and Probabilistic Mathematics. Cambridge: Cambridge University Press.

Jacod, Jean, and Protter, Philip. 2003. *Probability essentials*. Second edn. Universitext. Berlin: Springer-Verlag.

Krantz, Steven G, and Parks, Harold R. 2002. *A primer of real analytic functions*. Springer.

Κουμουλλής και Νεγρεπόντης. 1991. *Θεωρία Μέτρου*. Αθήνα: Εκδόσεις Συμμετρία.

Νεγρεπόντης, Γιωτόπουλλος, Γιαννακούλιας. 1992. *Απειροστικός Λογισμός*. Αθήνα: Εκδόσεις Αίθρα.

Stein, Elias M, and Shakarchi, Rami. 2005. *Real analysis: measure theory, integration, and Hilbert spaces*. Princeton University Press.

Varadhan, Srinivasa RS. 2001. *Probability theory, volume 7 of Courant Lecture Notes in Mathematics*.

Williams, David. 1991. *Probability with martingales*. Cambridge Mathematical Textbooks. Cambridge: Cambridge University Press.