Νικολαου Δαφνη
Μαθηματικου

# ΠΙΘΑΝΟΘΕΩΡΗΤΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΙ ΣΤΗΝ ΑΣΥΜΠΤΩΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

Διδακτορικη Διατριβη

Τμημα Μαθηματικων
Πανεπιστημιο Αθηνων
Αθηνα 2009

Εισηγητης: Α. Γιαννοπουλος

# Περιεχόμενα

# Κεφάλαιο 1

# Εισαγωγή

## 1.1 Ισοτροπικά κυρτά σώματα

Ένα κυρτό σώμα $K$ στον $\mathbb{R}^n$ λέγεται ισοτροπικό αν έχει όγκο $|K| = 1$, κέντρο βάρους στην αρχή των αξόνων και υπάρχει μια σταθερά $L_K > 0$ τέτοια ώστε

$$\int_K \langle x, \theta \rangle^2 dx = L_K^2 \tag{1.1}$$

για κάθε $\theta$ στην Ευκλείδεια μοναδιαία σφαίρα $S^{n-1}$. Δεν είναι δύσκολο να δεί κανείς ότι για κάθε κυρτό σώμα $K$ στον $\mathbb{R}^n$ υπάρχει ένας αφινικός μετασχηματισμός $T$ του $\mathbb{R}^n$ τέτοιος ώστε το $T(K)$ να είναι ισοτροπικό. Επιπλέον, αυτή η ισοτροπική εικόνα του $K$ είναι μοναδική αν αγνοήσουμε ορθογώνιους μετασχηματισμούς. Μπορούμε λοιπόν να ορίσουμε την ισοτροπική σταθερά $L_K$ ως αναλλοίωτη της αφινικής κλάσης του $K$. Μπορεί κανείς να ελέγξει ότι η ισοτροπική θέση του $K$ ελαχιστοποιεί την ποσότητα

$$\frac{1}{|T(K)|^{1+\frac{2}{n}}} \int_{T(K)} \|x\|_2^2 dx \tag{1.2}$$

πάνω από όλους τους μη εκφυλισμένους αφινικούς μετασχηματισμούς $T$ του $\mathbb{R}^n$. Ειδικότερα,

$$nL_K^2 \leqslant \frac{1}{|K|^{1+\frac{2}{n}}} \int_K \|x\|_2^2 dx. \tag{1.3}$$

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει η εξής εικασία: υπάρχει μια απόλυτη σταθερά $C > 0$ τέτοια ώστε $L_K \leqslant C$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και για κάθε κυρτό σώμα $K$ στον $\mathbb{R}^n$.

Το καλύτερο ως τώρα αποτέλεσμα πάνω σε αυτή την εικασία αποδείχθηκε πρόσφατα από τον Klartag [26], ο οποίος έδειξε ότι $L_K \leqslant c\sqrt[4]{n}$. Ο Bourgain είχε δείξει στο [6] ότι $L_K \leqslant c\sqrt[4]{n}\ln n$. Η εικασία σχετίζεται με το πρόβλημα των τομών ένος κυρτού σώματος, που ρωτάει αν υπάρχει μια απόλυτη σταθερά $c > 0$ τέτοια ώστε για κάθε κυρτό σώμα $K$ με όγκο 1 υπάρχει ένα υπερεπίπεδο η τομή του οποίου με το $K$ έχει όγκο μεγαλύτερο από $c$. Η σύνδεση των δύο αυτών προβλημάτων είναι άμεση από τη διπλή ανισότητα

$$c_1 \leqslant L_K \cdot |K \cap \theta^{\perp}| \leqslant c_2 \tag{1.4}$$

που ισχύει για κάθε $\theta \in S^{n-1}$ και κάθε ισοτροπικό κυρτό σώμα $K$ ($c_1, c_2 > 0$ είναι απόλυτες σταθερές). Παραπέμπουμε στο άρθρο [41] των Milman και Pajor για τις βασικές ιδιότητες των ισοτροπικών κυρτών σωμάτων.

Σε αυτή τη διατριβή μελετάμε προβλήματα που προκύπτουν από τη μελέτη της εικασίας για την ισοτροπική σταθερά.

## 1.2 Συμβολισμός και βασικοί ορισμοί

### 1.2α′ Κυρτά σώματα

Δουλεύουμε στον $\mathbb{R}^n$, τον οποίο θεωρούμε εφοδιασμένο με μια Ευκλείδεια δομή $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Συμβολίζουμε με $\|\cdot\|_2$ την αντίστοιχη Ευκλείδεια νόρμα. Γράφουμε $B_2^n$ για την Ευκλείδεια μοναδιαία μπάλα και $S^{n-1}$ για τη μοναδιαία σφαίρα. Ο όγκος συμβολίζεται με $|\cdot|$. Συμβολίζουμε με $\omega_n$ τον όγκο της $B_2^n$ και με $\sigma$ το αναλλοίωτο ως προς ορθογώνιους μετασχηματισμούς μέτρο πιθανότητας στη σφαίρα $S^{n-1}$. Η πολλαπλότητα Grassmann $G_{n,k}$ των $k$-διάστατων υποχώρων του $\mathbb{R}^n$ είναι εφοδιασμένη με το μέτρο πιθανότητας του Haar $\mu_{n,k}$. Για κάθε $k \leqslant n$ και $F \in G_{n,k}$ συμβολίζουμε με $P_F$ την ορθογώνια προβολή από τον $\mathbb{R}^n$ στον $F$.

Τα γράμματα $c, c', c_1, c_2$ κλπ, συμβολίζουν απόλυτες, θετικές σταθερές οι οποίες μπορεί να αλλάζουν από γραμμή σε γραμμή. Οποτεδήποτε γράφουμε $a \simeq b$, εννοούμε ότι υπάρχουν απόλυτες σταθερές $c_1, c_2 > 0$ τέτοιες ώστε $c_1 a \leqslant b \leqslant c_2 a$. Επίσης αν $K, L \subseteq \mathbb{R}^n$ θα γράφουμε $K \simeq L$ αν υπάρχουν απόλυτες σταθερές $c_1, c_2 > 0$ τέτοιες ώστε $c_1 K \subseteq L \subseteq c_2 K$.

Σε αυτή την εργασία, κυρτό σώμα λέμε ένα συμπαγές κυρτό υποσύνολο $K$ του $\mathbb{R}^n$ με $0 \in \mathrm{int}(K)$. Το $K$ λέγεται συμμετρικό αν $x \in K \Rightarrow -x \in K$. Το $K$ έχει κέντρο βάρους το 0 αν

$$\int_K \langle x, \theta\rangle dx = 0 \tag{1.5}$$

για κάθε $\theta \in S^{n-1}$. Η ακτινική συνάρτηση $\rho_K : \mathbb{R}^n \backslash \{0\} \to \mathbb{R}^+$ του $K$ ορίζεται από την

$$\rho_K(x) = \max\{\lambda > 0 : \lambda x \in K\}. \tag{1.6}$$

Η συνάρτηση στήριξης $h_K : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ του $K$ ορίζεται από την

$$h_K(x) = \max\{\langle x, y\rangle : y \in K\}. \tag{1.7}$$

Το πλάτος του $K$ στη διεύθυνση του $\theta \in S^{n-1}$ είναι η ποσότητα $w(K,\theta) = h_K(\theta) + h_K(-\theta)$, και το μέσο πλάτος του $K$ ορίζεται από την

$$w(K) = \frac{1}{2}\int_{S^{n-1}} w(K,\theta)\sigma(d\theta) = \int_{S^{n-1}} h_K(\theta)\sigma(d\theta). \tag{1.8}$$

Η ακτίνα του $K$ είναι η ποσότητα

$$R(K) = \max\{\|x\|_2 : x \in K\}. \tag{1.9}$$

Αν $0 \in \mathrm{int}(K)$, το πολικό σώμα $K^\circ$ του $K$ είναι το

$$K^\circ := \{y \in \mathbb{R}^n : \langle x, y\rangle \leq 1 \ \text{ για κάθε } \ x \in K\}. \tag{1.10}$$

Η ανισότητα Brunn-Minkowski συνδέει τον όγκο με την πρόσθεση κατά Minkowski: Αν $A$ και $B$ είναι δύο μη κενά συμπαγή υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$, τότε

$$|A + B|^{1/n} \geq |A|^{1/n} + |B|^{1/n}, \tag{1.11}$$

όπου $A + B := \{a + b \mid a \in A, b \in B\}$. Έπεται ότι, για κάθε $\lambda \in (0,1)$

$$|\lambda A + (1-\lambda)B|^{1/n} \geq \lambda|A|^{1/n} + (1-\lambda)|B|^{1/n}, \tag{1.12}$$

και, από την ανισότητα αριθμητικού-γεωμετρικού μέσου,

$$|\lambda A + (1-\lambda)B| \geq |A|^{\lambda}|B|^{1-\lambda}. \tag{1.13}$$

Έστω $K$ συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Η απεικόνιση

$$\|x\|_K = \min\{\lambda \geq 0 : x \in \lambda K\} \tag{1.14}$$

είναι νόρμα στον $\mathbb{R}^n$. Ο $\mathbb{R}^n$ εφοδιασμένος με την νόρμα $\|\cdot\|_K$ θα συμβολίζεται με $X_K$. Αντίστροφα, αν $X = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ είναι ένας χώρος με νόρμα, τότε η μοναδιαία του μπάλα $K_X = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq 1\}$ είναι συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$.

### 1.2β′ $\Psi_\alpha$-νόρμα

Έστω $K$ ένα κυρτό σώμα όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$. Αν $f : K \to \mathbb{R}$ είναι μια φραγμένη μετρήσιμη συνάρτηση και αν $\alpha \geq 1$, η Orlicz νόρμα $\|f\|_{\psi_\alpha}$ της $f$ ορίζεται από την

$$\|f\|_{\psi_\alpha} = \inf\left\{t > 0 : \int_K \exp\left((|f(x)|/t)^\alpha\right) dx \leq 2\right\}. \tag{1.15}$$

Η Orlicz νόρμα τάξης $\alpha$ της $f$ περιγράφεται ισοδύναμα ως εξής.

**Πρόταση 1.2.1.** *Αν $f : K \to \mathbb{R}$ είναι μια φραγμένη μετρήσιμη συνάρτηση και αν $\alpha \geq 1$, τότε*

$$\|f\|_{\psi_\alpha} \simeq \sup\left\{\frac{\|f\|_p}{p^{1/\alpha}} : p \geq \alpha\right\}. \tag{1.16}$$

Έστω $\alpha \geq 1$ και $y \neq 0$ στον $\mathbb{R}^n$. Λέμε ότι το $K$ ικανοποιεί $\psi_\alpha$-εκτίμηση με σταθερά $b_\alpha$ στη διεύθυνση του $y$ αν

$$\|\langle \cdot, y\rangle\|_{\psi_\alpha} \leq b_\alpha \|\langle \cdot, y\rangle\|_1. \tag{1.17}$$

Λέμε ότι το $K$ είναι $\psi_\alpha$-σώμα με σταθερά $b_\alpha$ αν η (1.17) ισχύει για κάθε $y \neq 0$. Απλός υπολογισμός δείχνει ότι αν το $K$ ικανοποιεί $\psi_\alpha$-εκτίμηση με σταθερά $b_\alpha$ στη διεύθυνση του $y$ και αν $T \in SL(n)$, τότε το $T(K)$ ικανοποιεί $\psi_\alpha$-εκτίμηση με την ίδια σταθερά στη διεύθυνση του $T^*(y)$. Έπεται ότι το $T(K)$ είναι $\psi_\alpha$-σώμα με σταθερά $b_\alpha$ αν και μόνο αν το $K$ είναι $\psi_\alpha$-σώμα με την ίδια σταθερά.

Συνέπεια της ανισότητας Brunn–Minkowski είναι το εξής πολύ γενικό αποτέλεσμα.

**Θεώρημα 1.2.2.** *Υπάρχει απόλυτη σταθερά $C > 0$ με την εξής ιδιότητα: για κάθε κυρτό σώμα $K$ στον $\mathbb{R}^n$ και για κάθε $y \neq 0$,*

$$\|\langle \cdot, y\rangle\|_{\psi_1} \leq C \|\langle \cdot, y\rangle\|_1. \tag{1.18}$$

Με άλλα λόγια, υπάρχει απόλυτη σταθερά $C > 0$ τέτοια ώστε κάθε κυρτό σώμα $K$ να είναι $\psi_1$-σώμα με σταθερά $C$. Στην πρόταση αυτή ενσωματώνεται όλη η πληροφορία που μπορεί να μας δώσει η ανισότητα Brunn-Minkowski για τα γραμμικά συναρτησοειδή σε κυρτά σώματα: αν το $K$ είναι «κώνος» στη διεύθυνση του $y$ τότε, στην (1.18) δεν μπορούμε να αντικαταστήσουμε την $\psi_1$-νόρμα με την $\psi_\alpha$-νόρμα για κάποιο $\alpha > 1$.

## 1.3 Αποτελέσματα της διατριβής

### 1.3α′ Ισοτροπική σταθερά τυχαίων πολυτόπων

Στο Κεφάλαιο 2, σκοπός μας είναι να δώσουμε καταφατική απάντηση στο πρόβλημα της ισοτροπικής σταθεράς για κάποιες κλάσεις τυχαίων κυρτών σωμάτων. Η μελέτη του συγκεκριμένου προβλήματος ξεκίνησε από τους Klartag και Kozma στο [27], οι οποίοι μελέτησαν την περίπτωση των Gaussian τυχαίων πολυτόπων. Απέδειξαν ότι αν $N > n$ και $G_1, \dots, G_N$ είναι ανεξάρτητα τυπικά κανονικά τυχαία διανύσματα στον $\mathbb{R}^n$, τότε η ισοτροπική σταθερά των τυχαίων πολύτοπων

$$K_N := \mathrm{conv}\{\pm G_1, \dots, \pm G_N\} \quad \text{και} \quad S_N := \mathrm{conv}\{G_1, \dots, G_N\} \tag{1.19}$$

είναι φραγμένη από μια απόλυτη σταθερά $C > 0$ με πιθανότητα μεγαλύτερη από $1 - Ce^{-cn}$. Το επιχείρημά τους (στο [27]) δουλεύει και για άλλες κλάσεις τυχαίων πολυτόπων με κορυφές που έχουν ανεξάρτητες συντεταγμένες (για παράδειγμα, αν οι κορυφές είναι ομοιόμορφα κατανεμημένες στον κύβο $Q_n := [-1/2, 1/2]^n$ ή στον διακριτό κύβο $E_2^n := \{-1, 1\}^n$). Πρόσφατα, ο Alonso–Gutiérrez (στο [1]) απάντησε καταφατικά και στην περίπτωση που το $K_N$ ή το $S_N$ παράγονται από $N$ ανεξάρτητα τυχαία σημεία, ομοιόμορφα κατανεμημένα στην Ευκλείδεια σφαίρα $S^{n-1}$. Μελετάμε το παρακάτω πρόβλημα:

> **Πρόβλημα**. *Έστω $K$ ένα κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Για κάθε $N > n$ θεωρούμε $N$ τυχαία σημεία $x_1, \dots, x_N$, ανεξάρτητα και ομοιόμορφα κατανεμημένα στο $K$, και ορίζουμε τα τυχαία πολύτοπα*
>
> $$K_N := \mathrm{conv}\{\pm x_1, \dots, \pm x_N\} \ \textit{και} \ S_N := \mathrm{conv}\{x_1, \dots, x_N\}. \tag{1.20}$$
>
> *Είναι αλήθεια πως, με πιθανότητα που τείνει στο 1 καθώς $n \to \infty$, έχουμε ότι $L_{K_N} \leqslant CL_K$ και $L_{S_N} \leqslant CL_K$ όπου $C > 0$ είναι μια σταθερά ανεξάρτητη από τα $K$, $n$ και $N$;*

Αξίζει να σημειωθεί ότι, παρόλο που τα σημεία $x_1, \dots, x_N$ επιλέγονται ανεξάρτητα και ομοιόμορφα από το $K$, οι συντεταγμένες τους δεν είναι ανεξάρτητες. Με άλλα λόγια, ο τυχαίος $N \times n$ πίνακας $(x_{ij})$ που έχει ως $i$-γραμμή το διάνυσμα $x_i$ έχει ανεξάρτητες στήλες αλλά, για κάθε $i = 1, \dots, N$, οι συντεταγμένες $x_{ij} = \langle x_i, e_j \rangle$, $j = 1, \dots, n$, δεν είναι ανεξάρτητες. Το πρώτο παράδειγμα αυτού του είδους, το οποίο αντιμετωπίστηκε, είναι αυτό στην εργασία του Alonso–Gutiérrez.

Στο πλαίσιο όμως της $S^{n-1}$, λόγω των συμμετριών της σφαίρας, οι ομοιότητες με την περίπτωση των Gaussian τυχαίων πολυτόπων είναι πολλές.

Δίνουμε καταφατική απάντηση στην περίπτωση που το σώμα $K$ είναι 1-unconditional. Κάνουμε δηλαδή τις επιπλέον υποθέσεις ότι το σώμα $K$ είναι συμμετρικό ως προς την αρχή των αξόνων και ότι, ίσως μετά από έναν γραμμικό μετασχηματισμό, η συνήθης ορθοκανονική βάση $\{e_1, \dots, e_n\}$ του $\mathbb{R}^n$ είναι 1-unconditional βάση για την $\|\cdot\|_K$. Δηλαδή, για κάθε επιλογή πραγματικών αριθμών $t_1, \dots, t_n$ και για κάθε επιλογή προσήμων $\varepsilon_j = \pm 1$,

$$\|\varepsilon_1 t_1 e_1 + \cdots + \varepsilon_n t_n e_n\|_K = \|t_1 e_1 + \cdots + t_n e_n\|_K. \tag{1.21}$$

Τότε, ελέγχεται εύκολα ότι μπορούμε να φέρουμε το $K$ στην ισοτροπική θέση με έναν διαγώνιο τελεστή. Είναι επίσης γνωστό ότι η ισοτροπική σταθερά του $K$ στην περίπτωση αυτή ικανοποιεί την $L_K \simeq 1$. Το άνω φράγμα έπεται από την ανισότητα Loomis–Whitney (βλέπε επίσης το [12] όπου αποδεικνύεται η ανισότητα $2L_K^2 \leqslant 1$). Για την αντίστροφη ανισότητα, αρκεί να θυμηθούμε ότι για κάθε κυρτό σώμα $K$ στον $\mathbb{R}^n$ ισχύει η σχέση $L_K \geqslant L_{B_2^n} \geqslant c$, όπου $c > 0$ είναι απόλυτη σταθερά (βλέπε [41]).

Η ακριβής διατύπωση του αποτελέσματός μας είναι η ακόλουθη:

**Θεώρημα 1.3.1.** *Έστω $K$ ένα ισοτροπικό και 1-unconditional κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Για κάθε $N > n$ θεωρούμε $N$ τυχαία σημεία $x_1, \dots, x_N$, ανεξάρτητα και ομοιόμορφα κατανεμημένα στο $K$. Τότε, με πιθανότητα μεγαλύτερη από $1 - C_1 \exp(-cn)$ αν $N \geqslant c_1 n$ και μεγαλύτερη από $1 - C_1 \exp(-cn/\ln n)$ αν $n < N < c_1 n$, τα τυχαία πολύτοπα $K_N := \mathrm{conv}\{\pm x_1, \dots, \pm x_N\}$ και $S_N := \mathrm{conv}\{x_1, \dots, x_N\}$ έχουν ισοτροπική σταθερά φραγμένη από μια απόλυτη σταθερά $C > 0$.*

Η μεθοδός μας βασίζεται στο [27] και στα ακριβή αποτελέσματα των Bobkov και Nazarov από το [13], για την $\psi_2$ συμπεριφορά των γραμμικών συναρτησοειδών πάνω σε ισοτροπικά και 1-unconditional κυρτά σώματα.

### 1.3β΄ Ασυμπτωτικό σχήμα τυχαίων πολυτόπων

Έστω $K$ ένα κυρτό σώμα όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$. Για κάθε $q \geqslant 1$ ορίζουμε το $L_q$–κεντροειδές σώμα $Z_q(K)$ του $K$ μέσω της συνάρτησης στήριξής του:

$$h_{Z_q(K)}(x) = \|\langle \cdot, x\rangle\|_q := \left(\int_K |\langle y, x\rangle|^q dy\right)^{1/q}. \tag{1.22}$$

Στο Κεφάλαιο 3 περιγράφουμε το «ασυμπτωτικό σχήμα» ενός τυχαίου πολυτόπου $K_N = \mathrm{conv}\{x_1, \ldots, x_N\}$ που παράγεται από $N$ ανεξάρτητα τυχαία σημεία $x_1, \ldots, x_N$ ομοιόμορφα κατανεμημένα στο $K$, συγκρίνοντας το $K_N$ με το $L_q$–κεντροειδές σώμα $Z_q(K)$ του $K$ για $q \simeq \ln(N/n)$.

Αφετηρία για τη δουλειά μας είναι η μελέτη της συμπεριφοράς των συμμετρικών τυχαίων $\pm 1$–πολυτόπων (ο όρος $\pm 1$–*πολύτοπο* χρησιμοποιείται στη βιβλιογραφία για την κυρτή θήκη ενός υποσυνόλου του διακριτού κύβου $E_2^n = \{-1,1\}^n$). Ο φυσιολογικός τρόπος για να «φτιάξει» κανείς τυχαία τέτοια πολύτοπα είναι να σταθεροποιήσει $N > n$ και να θεωρήσει την κυρτή θήκη $K_{n,N} = \mathrm{conv}\{\pm\vec{X}_1, \ldots, \pm\vec{X}_N\}$ $N$ τυχαίων σημείων $\vec{X}_1, \ldots, \vec{X}_N$ τα οποία είναι ανεξάρτητα και ομοιόμορφα κατανεμημένα στον $E_2^n$. Προκύπτει (βλέπε [19]) ότι ένα τυχαίο πολύτοπο $K_{n,N}$ έχει τον μεγαλύτερο δυνατό όγκο ανάμεσα σε όλα τα $\pm 1$–πολύτοπα με $N$ κορυφές, για κάθε κλίμακα μεγέθους των $n$ και $N$. Αυτό είναι συνέπεια της ακόλουθης πρότασης: αν $n \geqslant n_0$ και $N \geqslant n(\ln n)^2$, τότε

$$K_{n,N} \supseteq c\left(\sqrt{\ln(N/n)}B_2^n \cap B_\infty^n\right) \tag{1.23}$$

με πιθανότητα μεγαλύτερη από $1 - e^{-n}$, όπου $c > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά, $B_2^n$ είναι η Ευκλείδεια μοναδιαία μπάλα στον $\mathbb{R}^n$ και $B_\infty^n = [-1,1]^n$.

Στο [31] οι Litvak, Pajor, Rudelson και Tomczak–Jaegermann μελέτησαν ένα γενικότερο πλαίσιο που εμπεριέχει το προηγούμενο μοντέλο Bernoulli (αλλά και αυτό των Gaussian τυχαίων πολυτόπων). Έστω $K_{n,N}$ η απόλυτη κυρτή θήκη των γραμμών ενός τυχαίου πίνακα $\Gamma_{n,N} = (\xi_{ij})_{1\leqslant i\leqslant N,\, 1\leqslant j\leqslant n}$, όπου $\xi_{ij}$ είναι ανεξάρτητες και συμμετρικές τυχαίες μεταβλητές που ικανοποιούν κάποιες συγκεκριμένες συνθήκες: $\|\xi_{ij}\|_{L^2} \geqslant 1$ και $\|\xi_{ij}\|_{L^{\psi_2}} \leqslant \rho$ για κάποιο $\rho \geqslant 1$, όπου $\|\cdot\|_{L^{\psi_2}}$ είναι η Orlicz νόρμα που αντιστοιχεί στη συνάρτηση $\psi_2(t) = e^{t^2} - 1$. Για την ευρύτερη αυτή κλάση τυχαίων πολυτόπων, οι εκτιμήσεις του [19] γενικεύτηκαν και βελτιώθηκαν σε δύο κατευθύνσεις: στο άρθρο [31] δίνονται εκτιμήσεις για κάθε $N \geqslant (1+\delta)n$, όπου το $\delta > 0$ μπορεί να κατέβει μέχρι την τιμή $1/\ln n$, και αποδεικνύεται ο ακόλουθος εγκλεισμός: για κάθε $0 < \beta < 1$,

$$K_{n,N} \supseteq c(\rho)\left(\sqrt{\beta\ln(N/n)}B_2^n \cap B_\infty^n\right) \tag{1.24}$$

με πιθανότητα μεγαλύτερη από $1 - \exp(-c_1 n^\beta N^{1-\beta}) - \exp(-c_2 N)$. Η απόδειξη στο [31] βασίζεται σε ένα συγκεκριμένο κάτω φράγμα της τάξης του $\sqrt{N}$, για την μικρότερη ιδιάζουσα τιμή του τυχαίου πίνακα $\Gamma_{n,N}$, το οποίο ισχύει με πιθανότητα μεγαλύτερη από $1 - \exp(-cN)$.

Υπό μία έννοια, οι δύο προσεγγίσεις που περιγράψαμε πιο πάνω, αντιστοιχούν στη μελέτη του μεγέθους ενός τυχαίου πολυτόπου $K_N = \mathrm{conv}\{x_1, \ldots, x_N\}$ που παράγεται από $N$ ανεξάρτητα τυχαία σημεία $x_1, \ldots, x_N$ που κατανέμονται ομοιόμορφα στο μοναδιαίο κύβο $Q_n := [-1/2, 1/2]^n$. Η ακόλουθη παρατήρηση μας δίνει τη σύνδεση των παραπάνω εκτιμήσεων με τα $L_q$–κεντροειδή σώματα.

**Παρατήρηση**. Για $x \in \mathbb{R}^n$ και $t > 0$, ορίζουμε

$$K_{1,2}(x,t) := \inf\left\{\|u\|_1 + t\|x-u\|_2 : u \in \mathbb{R}^n\right\}. \tag{1.25}$$

Αν γράψουμε $(x_j^*)_{j\leqslant n}$ για την φθίνουσα αναδιάταξη των $(|x_j|)_{j\leqslant n}$ τότε από τον τύπο προσέγγισης του Holmstedt έχουμε

$$\frac{1}{c}K_{1,2}(x,t) \leq \sum_{j=1}^{[t^2]} x_j^* + t\left(\sum_{j=[t^2]+1}^{n} (x_j^*)^2\right)^{1/2} \leqslant K_{1,2}(x,t) \tag{1.26}$$

όπου $c > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά (βλέπε [25]).

Αν, για κάθε $\alpha \geqslant 1$ ορίσουμε $C(\alpha) = \alpha B_2^n \cap B_\infty^n$, τότε

$$h_{C(\alpha)}(\theta) = K_{1,2}(\theta, \alpha) \tag{1.27}$$

για κάθε $\theta \in S^{n-1}$. Από την άλλη πλευρά έχουμε ότι

$$\|\langle \cdot, \theta\rangle\|_{L^q(Q_n)} \simeq \sum_{j\leqslant q} \theta_j^* + \sqrt{q}\left(\sum_{q<j\leqslant n} (\theta_j^*)^2\right)^{1/2} \tag{1.28}$$

για κάθε $q \geqslant 1$ (βλέπε, για παράδειγμα, [14]). Με άλλα λόγια,

$$C(\sqrt{q}) \simeq Z_q(Q_n) \tag{1.29}$$

όπου $Z_q(K)$ είναι το $L_q$–κεντροειδές σώμα του $K$. Αυτό δείχνει ότι τα αποτελέσματα των [19] και [31] μπορούν να γραφτούν στην ακόλουθη μορφή:

$$K_{n,N} \supseteq c(\rho) Z_{\beta \ln(N/n)}(Q_n). \tag{1.30}$$

Ξεκινώντας από αυτή την παρατήρηση, θεωρούμε το τυχαίο πολύτοπο

$$K_N = \mathrm{conv}\{x_1, \ldots, x_N\}$$

που παράγεται από $N$ ανεξάρτητα τυχαία σημεία $x_1, \dots, x_N$ που κατανέμονται ομοιόμορφα σε ένα ισοτροπικό κυρτό σώμα $K$ και προσπαθούμε να συγκρίνουμε το $K_N$ με το $Z_q(K)$ για κατάλληλη τιμή της παραμέτρου $q = q(N,n) \simeq \ln(N/n)$. Το πρώτο βασικό μας αποτέλεσμα είναι πως ένα ανάλογο αποτέλεσμα ισχύει σε πλήρη γενικότητα.

**Θεώρημα 1.3.2.** *Έστω $\beta \in (0,1/2]$ και $\gamma > 1$. Αν*

$$N \geqslant N(\gamma, n) = c\gamma n, \tag{1.31}$$

*όπου $c > 0$ είναι μία απόλυτη σταθερά, τότε για κάθε ισοτροπικό κυρτό σώμα $K$ στον $\mathbb{R}^n$ έχουμε*

$$K_N \supseteq c_1\, Z_q(K) \text{ για κάθε } q \leqslant c_2 \beta \ln(N/n), \tag{1.32}$$

*με πιθανότητα μεγαλύτερη από*

$$1 - \exp\left(-c_3 N^{1-\beta} n^{\beta}\right) - \mathbb{P}(\|\Gamma : \ell_2^n \to \ell_2^N\| \geqslant \gamma L_K \sqrt{N}) \tag{1.33}$$

*όπου $\Gamma : \ell_2^n \to \ell_2^N$ είναι ο τυχαίος τελεστής $\Gamma(y) = (\langle x_1, y\rangle, \dots \langle x_N, y\rangle)$ που ορίζεται από τις κορυφές $x_1, \dots, x_N$ του $K_N$.*

Πρέπει να τονιστεί ότι δεν μπορούμε να περιμένουμε αντίστροφο εγκλεισμό της μορφής $K_N \subseteq c_4\, Z_q(K)$ με πιθανότητα κοντά στο $1$, εκτός και αν το $q$ είναι της τάξης του $n$. Αυτό προκύπτει από ένα απλό επιχείρημα όγκου, με χρήση της εκτίμησης του Γ. Παούρη (βλέπε [48]) για τον όγκο του $Z_q(K)$. Παρουσιάζουμε το επιχείρημα αυτό στην τρίτη παράγραφο του τρίτου κεφαλαίου. Εν τούτοις, εύκολα μπορεί κανείς να δει ότι το $K_N$ «συμπιέζεται ασθενώς» ανάμεσα σε δύο $Z_{q_i}(K)$ $(i = 1, 2)$, όπου $q_i \simeq \ln(N/n)$, με την ακόλουθη έννοια:

**Πρόταση 1.3.3.** *Για κάθε $\alpha > 1$ έχουμε*

$$\mathbb{E}\,\left[\sigma(\theta : (h_{K_N}(\theta) \geqslant \alpha h_{Z_q(K)}(\theta))\right] \leqslant N\alpha^{-q}. \tag{1.34}$$

Η πρόταση αυτή μας δείχνει ότι αν $q \geqslant c_5 \ln(N/n)$ τότε, για τα περισσότερα $\theta \in S^{n-1}$, έχουμε $h_{K_N}(\theta) \leqslant c_6 h_{Z_q(K)}(\theta)$. Ετσι λοιπόν προκύπτει ότι διάφορες γεωμετρικές παράμετροι του $K_N$, για παράδειγμα το μέσο πλάτος, μπορούν να προσδιοριστούν από τις αντίστοιχες παραμέτρους του $Z_{[\ln(N/n)]}(K)$.

### 1.3γ΄ Η ακτίνα όγκου τυχαίων πολυτόπων

Στο κεφάλαιο 5, δίνουμε ακριβή εκτίμηση (αν κρατήσουμε την ισοτροπική σταθερά σαν παράμετρο) για την **ακτίνα όγκου** $|K_N|^{1/n}$ του $K_N$. Έστω $K$ ένα κυρτό σώμα όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$. Στο [22] δίνεται μια εκτίμηση για τη μέση τιμή

$$\mathbb{E}(K,N)=\mathbb{E}\,|K_N|^{1/n}=\int_K\cdots\int_K|\mathrm{conv}(x_1,\ldots,x_N)|^{1/n}dx_N\cdots dx_1 \tag{1.35}$$

του $K_N$. Αποδεικνύεται ότι για κάθε ισοτροπικό σώμα $K$ στον $\mathbb{R}^n$ και για κάθε $N\geqslant n+1$,

$$\mathbb{E}(B(n),N)\leqslant\mathbb{E}(K,N)\leqslant cL_K\frac{\ln(2N/n)}{\sqrt{n}}, \tag{1.36}$$

όπου $B(n)$ είναι η μπάλα όγκου 1. Η εκτίμηση αυτή είναι ασθενής για μεγάλες τιμές του $N$: μια ισχυρότερη εικασία είναι ότι

$$\mathbb{E}(K,N)\simeq\min\left\{\frac{\sqrt{\ln(2N/n)}}{\sqrt{n}},1\right\}L_K \tag{1.37}$$

για κάθε $N\geqslant n+1$. Αυτό επαληθεύτηκε στο [20] στην unconditional περίπτωση, όπου επίσης αποδείχθηκε ότι το γενικό πρόβλημα σχετίζεται με την «$\psi_2$-συμπεριφορά» των γραμμικών συναρτησοειδών πάνω σε ισοτροπικά κυρτά σώματα. Χρησιμοποιούμε ένα πρόσφατο αποτέλεσμα του Γ. Παούρη [49] για τις αρνητικές ροπές της συνάρτησης στήριξης $h_{Z_q(K)}$ του $Z_q(K)$ (η σχετική θεωρία των κεντροειδών σωμάτων περιγράφεται στο Κεφάλαιο 4, χρησιμοποιείται δε ακόμα πιο έντονα στο Κεφάλαιο 6). Έτσι, μπορούμε να δώσουμε ικανοποιητική απάντηση στο πρόβλημα, για την πλήρη κλίμακα τιμών του $N$.

**Θεώρημα 1.3.4.** *Για κάθε $N\leq\exp(n)$, έχουμε*

$$c_4\frac{\sqrt{\ln(2N/n)}}{\sqrt{n}}\leqslant|K_N|^{1/n}\leqslant c_5L_K\frac{\sqrt{\ln(2N/n)}}{\sqrt{n}} \tag{1.38}$$

*με πιθανότητα μεγαλύτερη από $1-\frac{1}{N}$, όπου $c_4,c_5>0$ είναι απόλυτες σταθερές.*

### 1.3δ′ Η εικασία του υπερεπιπέδου

Αφετηρία για το Κεφάλαιο 6 είναι το επιχείρημα του Bourgain, ο οποίος απέδειξε στο [6] ότι $L_K \leqslant c\sqrt[4]{n}\ln n$ για κάθε ισοτροπικό κυρτό σώμα $K$ στον $\mathbb{R}^n$. Βασική ιδέα του Bourgain είναι η αναγωγή του προβλήματος στην περίπτωση των κυρτών σωμάτων που ικανοποιούν $\psi_2$-εκτίμηση (με σταθερά $\beta = O(\sqrt[4]{n})$). Λέμε ότι το $K$ ικανοποιεί *$\psi_2$-εκτίμηση με σταθερά* $\beta$ αν

$$\|\langle \cdot, y\rangle\|_{\psi_2} \leqslant \beta \|\langle \cdot, y\rangle\|_2 \tag{1.39}$$

για κάθε $y \in \mathbb{R}^n$. Πιο πρόσφατα, ο Bourgain απέδειξε στο [8] ότι, αν το $K$ ικανοποιεί $\psi_2$-εκτίμηση με σταθερά $\beta$, τότε

$$L_K \leqslant C\beta \ln \beta. \tag{1.40}$$

Σκοπός μας εδώ είναι να εισάγουμε μια καινούρια μέθοδο που δίνει άνω φράγμα για την $L_K$. Αποδεικνύουμε ότι η καταφατική απάντηση στην εικασία του υπερεπιπέδου είναι ισοδύναμη με μια πολύ ισχυρή εκτίμηση για τη «συμπεριφορά σε μικρές μπάλες» της Ευκλείδειας νόρμας πάνω σε ισοτροπικά κυρτά σώματα. Πιο αναλυτικά, για $-n < p \leqslant \infty$, $p \neq 0$, ορίζουμε

$$I_p(K) := \left(\int_K \|x\|_2^p dx\right)^{1/p} \tag{1.41}$$

και για $\delta \geqslant 1$, θεωρούμε την παράμετρο

$$q_{-c}(K,\delta) := \max\{p \geqslant 1 : I_2(K) \leq \delta I_{-p}(K)\}. \tag{1.42}$$

Αποδεικνύουμε ότι η εικασία του υπερεπιπέδου είναι ισοδύναμη με το ακόλουθο:

> Υπάρχουν απόλυτες σταθερές $C, \xi > 0$ τέτοιες ώστε, για κάθε ισοτροπικό κυρτό σώμα $K$ στον $\mathbb{R}^n$,
>
> $$q_{-c}(K,\xi) \geqslant Cn. \tag{1.43}$$

Η κύρια ιδέα στην προσέγγισή μας για το πρόβλημα, είναι να ξεκινήσουμε από ένα ακραίο ισοτροπικό κυρτό σώμα $K$ στον $\mathbb{R}^n$ με μεγιστική ισοτροπική σταθερά

$$L_K \simeq L_n := \sup\{L_K : K \text{ κυρτό σώμα στον } \mathbb{R}^n\}. \tag{1.44}$$

Χρησιμοποιώντας ιδέες από το άρθρο [15] των Bourgain, Klartag και Milman, κατασκευάζουμε ένα δεύτερο ισοτροπικό κυρτό σώμα $K_1$ το οποίο είναι επίσης ακραίο και, συγχρόνως, είναι σε $\alpha$-κανονική $M$-θέση με την έννοια του Pisier. Έτσι, εκμεταλλευόμενοι το γεγονός ότι οι εκτιμήσεις για τη «συμπεριφορά σε μικρές μπάλες» είναι στενά συνδεδεμένες με εκτιμήσεις για τους αριθμούς κάλυψης, παίρνουμε

$$L_{K_1} I_{-c\frac{n}{(2-\alpha)t^{\alpha}}}(K_1) \leq Ct\sqrt{n} \tag{1.45}$$

για $t \geq C(\alpha)$, όπου $c, C > 0$ είναι απόλυτες σταθερές. Αποδεικνύουμε ένα γενικό θεώρημα από το οποίο παίρνουμε άμεσα τα εξής πορίσματα:

**Θεώρημα 1.3.5.** *Αν ένα κυρτό σώμα $K$ ικανοποιεί $\psi_2$-εκτίμηση με σταθερά $\beta$, τότε*

$$L_K \leq C\beta\sqrt{\ln \beta}. \tag{1.46}$$

**Θεώρημα 1.3.6.** *Για κάθε ισοτροπικό κυρτό σώμα $K$ στον $\mathbb{R}^n$,*

$$L_K \leq C\sqrt[4]{n}\sqrt{\ln n}. \tag{1.47}$$

Το πρώτο αποτέλεσμα βελτιώνει λίγο την εκτίμηση του Bourgain από το [8]. Το δεύτερο είναι ασθενέστερο από το φράγμα $O(\sqrt[4]{n})$ του Klartag στο [26]. Παρ' όλα αυτά, η μεθοδός μας έχει το πλεονέκτημα ότι συνυπολογίζει κάθε πρόσθετη πληροφορία σχετικά με την $\psi_\alpha$–συμπεριφορά του $K$.

# Κεφάλαιο 2

# Ισοτροπική σταθερά τυχαίων πολυτόπων

## 2.1 Το πρόβλημα

Σε αυτό το κεφάλαιο μελετάμε το εξής γενικό πρόβλημα:

> **Πρόβλημα**. *Έστω $K$ ένα κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Για κάθε $N > n$ θεωρούμε $N$ τυχαία σημεία $x_1, \ldots, x_N$, ανεξάρτητα και ομοιόμορφα κατανεμημένα στο $K$, και ορίζουμε τα τυχαία πολύτοπα*
>
> (2.1) $K_N := \mathrm{conv}\{\pm x_1, \ldots, \pm x_N\}$ *και* $S_N := \mathrm{conv}\{x_1, \ldots, x_N\}$.
>
> *Είναι αλήθεια πως, με πιθανότητα που τείνει στο 1 καθώς $n \to \infty$, έχουμε ότι $L_{K_N} \leqslant CL_K$ και $L_{S_N} \leqslant CL_K$ όπου $C > 0$ είναι μια σταθερά ανεξάρτητη από τα $K$, $n$ και $N$;*

Δίνουμε καταφατική απάντηση στην περίπτωση που το σώμα $K$ είναι 1-unconditional. Κάνουμε δηλαδή τις επιπλέον υποθέσεις ότι το σώμα $K$ είναι συμμετρικό ως προς την αρχή των αξόνων και ότι, ίσως μετά από έναν γραμμικό μετασχηματισμό, η συνήθης ορθοκανονική βάση $\{e_1, \ldots, e_n\}$ του $\mathbb{R}^n$ είναι 1-unconditional βάση για την $\|\cdot\|_K$. Δηλαδή, για κάθε επιλογή πραγματικών αριθμών $t_1, \ldots, t_n$ και για κάθε επιλογή προσήμων $\varepsilon_j = \pm 1$,

$$\|\varepsilon_1 t_1 e_1 + \cdots + \varepsilon_n t_n e_n\|_K = \|t_1 e_1 + \cdots + t_n e_n\|_K. \tag{2.2}$$

Τότε, ελέγχεται εύκολα ότι μπορούμε να φέρουμε το $K$ στην ισοτροπική θέση με έναν διαγώνιο τελεστή. Είναι επίσης γνωστό ότι η ισοτροπική σταθερά του $K$ στην περίπτωση αυτή ικανοποιεί την $L_K \simeq 1$. Η ακριβής διατύπωση του αποτελέσματός μας είναι η ακόλουθη:

**Θεώρημα 2.1.1.** *Έστω $K$ ένα ισοτροπικό και 1-unconditional κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Για κάθε $N > n$ θεωρούμε $N$ τυχαία σημεία $x_1, \ldots, x_N$, ανεξάρτητα και ομοιόμορφα κατανεμημένα στο $K$. Τότε, με πιθανότητα μεγαλύτερη από $1 - C_1 \exp(-cn)$ αν $N \geqslant c_1 n$ και μεγαλύτερη από $1 - C_1 \exp(-cn/\ln n)$ αν $n < N < c_1 n$, τα τυχαία πολύτοπα $K_N := \mathrm{conv}\{\pm x_1, \ldots, \pm x_N\}$ και $S_N := \mathrm{conv}\{x_1, \ldots, x_N\}$ έχουν ισοτροπική σταθερά φραγμένη από μια απόλυτη σταθερά $C > 0$.*

Η μεθοδός μας βασίζεται στο [27] και στα ακριβή αποτελέσματα των Bobkov και Nazarov από το [13], για την $\psi_2$ συμπεριφορά των γραμμικών συναρτησοειδών πάνω σε ισοτροπικά και 1-unconditional κυρτά σώματα.

## 2.2 Φράγμα για την ισοτροπική σταθερά

Όπως αναφέρθηκε στην εισαγωγή, αν $D$ είναι ένα κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ τότε

$$|D|^{2/n} n L_D^2 \leqslant \frac{1}{|D|} \int_D \|x\|_2^2 dx. \tag{2.3}$$

Θα χρησιμοποιήσουμε μια ισχυρότερη ανισότητα για την $L_D$ ως προς την $\ell_1^n$-νόρμα (βλέπε [41, Παράγραφος 3.6]):

**Λήμμα 2.2.1.** *Έστω $D$ ένα κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Τότε,*

$$|D|^{1/n} n L_D \leqslant c\, \frac{1}{|D|} \int_D \|x\|_1 \, dx, \tag{2.4}$$

*όπου $c > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.*

Βάσει του λήμματος 2.2.1, για να αποδείξουμε ότι το $K_N := \mathrm{conv}\{\pm x_1, \ldots, \pm x_N\}$ (ή το $S_N := \mathrm{conv}\{x_1, \ldots, x_N\}$) έχει φραγμένη ισοτροπική σταθερά με πιθανότητα κοντά στο 1, αρκεί να βρούμε κατάλληλο κάτω φράγμα για τον όγκο $|K_N|^{1/n}$ (ή τον όγκο $|S_N|^{1/n}$ αντίστοιχα) και ένα άνω φράγμα για τη μέση τιμή της $\|\cdot\|_1$ στο $K_N$ (ή στο $S_N$ αντίστοιχα). Παρατηρούμε ότι το πρόβλημα είναι αφινικά αναλλοίωτο, οπότε μπορούμε να υποθέσουμε ότι το $K$ είναι ένα ισοτροπικό κυρτό σώμα.

### 2.2α′ Κάτω φράγμα για τον όγκο

Μιας και για οποιαδήποτε επιλογή σημείων $x_1, \dots, x_N \in K$ ισχύει ότι $K_N \supseteq S_N$, αρκεί να δώσουμε ένα κάτω φράγμα για τον όγκο $|S_N|^{1/n}$. Αυτό με τη σειρά του είναι απόρροια των παρακάτω παρατηρήσεων:

*Παρατήρηση* 1. Έχει αποδειχθεί στο [22, Λήμμα 3.3] (βλέπε επίσης [24, Λήμμα 2.5]) ότι αν το $K$ είναι ένα κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ με όγκο 1 και $\overline{B}_2^n$ είναι η μπάλα στον $\mathbb{R}^n$ με όγκο 1, τότε

$$\mathrm{Prob}(|S_N| \geqslant \rho) \geqslant \mathrm{Prob}(|[\overline{B}_2^n]_N| \geqslant \rho) \tag{2.5}$$

για κάθε $\rho > 0$. Αυτό ανάγει το πρόβλημα στην περίπτωση της μπάλας. Δηλαδή, όταν $K = \overline{B}_2^n$.

*Παρατήρηση* 2. Στο [20] έχει αποδειχθεί ότι υπάρχουν σταθερές $c_1 > 1$ και $c_2 > 0$ τέτοιες ώστε αν $N \geqslant c_1 n$ και $x_1, \dots, x_N$ είναι τυχαία σημεία ανεξάρτητα και ομοιόμορφα κατανεμημένα στην $\overline{B}_2^n$, τότε

$$S_N := \mathrm{conv}\{x_1, \dots, x_N\} \supseteq c_2 \min\left\{\frac{\sqrt{\ln(2N/n)}}{\sqrt{n}}, 1\right\} \overline{B}_2^n \tag{2.6}$$

με πιθανότητα μεγαλύτερη από $1 - \exp(-n)$. Μάλιστα, από το επιχείρημα στο [20] προκύπτει ότι, για κάθε $\delta > 0$, αν $N \geqslant (1+\delta)n$ τότε η (2.6) ισχύει για το τυχαίο $K_N$ με $c_2 = c_2(\delta)$. Βλέπε [1, Λήμμα 3.1].

Συνδυάζοντας τα παραπάνω έχουμε το πρώτο μέρος της επόμενης πρότασης:

**Πρόταση 2.2.2.** *Έστω $K$ ένα κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ με όγκο $|K| = 1$ και έστω $x_1, \dots, x_N$ τυχαία σημεία ανεξάρτητα και ομοιόμορφα κατανεμημένα στο $K$.*

(i) *Αν $N \geqslant c_1 n$ τότε, με πιθανότητα μεγαλύτερη από $1 - \exp(-n)$ έχουμε ότι*

$$|K_N|^{1/n} \geqslant |S_N|^{1/n} \geqslant c_2 \min\left\{\frac{\sqrt{\ln(2N/n)}}{\sqrt{n}}, 1\right\}, \tag{2.7}$$

*όπου $c_1 > 1$ και $c_2 > 0$ είναι απόλυτες σταθερές.*

(ii) *Αν $n < N < c_1 n$ τότε η (2.7) ισχύει με πιθανότητα μεγαλύτερη από $1 - \exp(-cn/\ln n)$, όπου $c > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.*

Το δεύτερο μέρος της πρότασης (η περίπτωση όπου $n < N < c_1 n$) χρειάζεται διαφορετικούς χειρισμούς. Πρώτα θα ασχοληθούμε με το συμμετρικό τυχαίο πολύτοπο $K_N$. Από την παρατήρηση 1, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $K = \overline{B}_2^n$, και από τη μονοτονία ως προς το $N$ αρκεί να αποδείξουμε ότι, με πιθανότητα κοντά στο 1, το $K_n = \mathrm{conv}\{\pm x_1, \ldots, \pm x_n\}$ έχει τον κατάλληλο όγκο. Γράφουμε λοιπόν

$$|K_n| = \frac{2^n}{n!} \prod_{k=1}^{n} d(x_k, \mathrm{span}\{x_1, \ldots, x_{k-1}\}) \tag{2.8}$$

όπου $\mathrm{span}(\emptyset) = \{0\}$ και $d(z, A)$ είναι η Ευκλείδεια απόσταση του $z$ από το $A$. Όπως και στο [27], παρατηρούμε ότι οι τυχαίες μεταβλητές $Y_k := d(x_k, \mathrm{span}\{x_1, \ldots, x_{k-1}\})$ είναι ανεξάρτητες. Η ακτίνα της $\overline{B_2^n}$ είναι της τάξης του $\sqrt{n}$ και από το αναλλοίωτο ως προς μεταφορές, παίρνουμε ότι υπάρχει μια απόλυτη σταθερά $c_2 > 0$ τέτοια ώστε

$$\mathrm{Prob}(Y_k \leqslant c_2 t\sqrt{n}) \leqslant \mathrm{Prob}(d(x, E_{k-1}) \leqslant t) \tag{2.9}$$

για κάθε $t > 0$, όπου το $x$ κατανέμεται ομοιόμορφα στην $B_2^n$ και $E_k = \mathrm{span}\{e_1, \ldots, e_k\}$.

Ένα παρόμοιο πρόβλημα έχει μελετηθεί στο [2] (εκεί το $x$ κατανέμεται ομοιόμορφα στην $S^{n-1}$, αλλά η απόδειξη και οι εκτιμήσεις για την περίπτωσή μας, όπου $x \in B_2^n$, είναι όμοιες). Θα χρησιμοποιήσουμε το [2, Θεώρημα 4.3]: υποθέτουμε ότι $3 \leqslant k \leqslant n-3$ και θέτουμε $\lambda = k/n$. Αν

$$\frac{1}{n} \leqslant \frac{\sin^2 \varepsilon}{1-\lambda} \leqslant n \text{ και } \frac{1}{n} \leqslant \frac{\cos^2 \varepsilon}{\lambda} \leqslant n,$$

τότε

$$c_1 \frac{e^{-\alpha_n u}}{\sqrt{u}} \leqslant \mathrm{Prob}(\rho(x, E_k) \leqslant \varepsilon) \leqslant c_2 \frac{e^{-\alpha_n u}}{\sqrt{u}}, \tag{2.10}$$

όπου $\rho$ είναι η γεωδαισιακή απόσταση, $\alpha_n > 0$ και $\alpha_n \to 1$, $c_1, c_2 > 0$ είναι απόλυτες σταθερές και

$$u = \frac{n}{2}\left[(1-\lambda)\ln\frac{1-\lambda}{\sin^2 \varepsilon} + \lambda \ln \frac{\lambda}{\cos^2 \varepsilon}\right].$$

Εφαρμόζουμε το παραπάνω αποτέλεσμα ως εξής: Ας υποθέσουμε ότι $\lambda = \frac{k}{n} \leqslant 1 - \frac{1}{\ln n}$. Ορίζουμε $\varepsilon_k$ μέσω της εξίσωσης $\sin^2 \varepsilon_k = (1-\lambda)/4$. Τότε,

$$u_k = \frac{n}{2}\left[(1-\lambda)\ln 4 + \lambda \ln \frac{4\lambda}{3+\lambda}\right] = \frac{n}{2}\left[\ln 4 + \lambda \ln \frac{\lambda}{3+\lambda}\right]. \tag{2.11}$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $H : [0,1] \to \mathbb{R}$ με τύπο $H(\lambda) = \ln 4 + \lambda \ln \frac{\lambda}{3+\lambda} - \delta(1-\lambda)$, όπου $\delta = \ln 2 - 3/8 > 0$. Τότε, $H'(\lambda) < 0$ στο $[0,1]$ και $H(1) = 0$. Άρα λοιπόν,

$$u_k \geqslant \frac{\delta(1-\lambda)n}{2} \geqslant \frac{\delta n}{2\ln n}. \tag{2.12}$$

Μιας και οι $\rho$, $d$ είναι ισοδύναμες, έπεται ότι

$$\text{Prob}(Y_k \leqslant c_3\sqrt{n-k}) \leqslant \exp(-cn/\ln n) \tag{2.13}$$

για όλα τα $k \leqslant k_0 := \lfloor n - \frac{n}{\ln n} \rfloor$. Για $k > k_0$ ορίζουμε $\varepsilon_k$ μέσω της εξίσωσης $\sin^2 \varepsilon_k = (1-\lambda)/n$. Σε αυτή την περίπτωση είναι εύκολο να ελέγξουμε ότι $u_k \geqslant cn \ln n$.

Με αυτή την επιλογή του $\varepsilon_k$ είναι φανερό ότι, με πιθανότητα μεγαλύτερη από $1 - \exp(-cn/\ln n)$, έχουμε ότι

$$|K_n| \geqslant \frac{2^n}{n!} \prod_{k=1}^{k_0} (c_3\sqrt{n-k}) \times \prod_{k=k_0+1}^{n} \frac{c_4}{\sqrt{n}} \geqslant \left(\frac{c}{\sqrt{n}}\right)^n. \tag{2.14}$$

Αυτό επεκτείνει την εκτίμηση της σχέσης (2.7) της πρότασης 2.2.2 και στην περίπτωση που $n \leqslant N < c_1 n$ (στη συμμετρική περίπτωση, του $K_N$) με ελαφρώς χειρότερη εκτίμηση της πιθανότητας.

Για το τυχαίο πολύτοπο $S_N$ ακολουθούμε το [27]: μπορούμε να υποθέσουμε ότι $N = n+1$. Ορίζουμε $y_i = x_i - x_1$, $i = 1, \ldots, n+1$ και θεωρούμε το συμμετρικό τυχαίο πολύτοπο $K'_{n+1} = \text{conv}\{\pm y_2, \ldots, \pm y_{n+1}\}$. Από την ανισότητα Rogers–Shephard (βλέπε [55]) έχουμε

$$|S_{n+1}| = |\text{conv}\{0, y_2, \ldots, y_{n+1}\}| \geqslant 4^{-n} |K'_{n+1}|, \tag{2.15}$$

και άρα, αρκεί να εκτιμήσουμε τον όγκο $|K'_{n+1}|$ από κάτω. Θεωρούμε τον γραμμικό μετασχηματισμό $F$ που ορίζεται από τις $F(x_i) = x_i - x_1$, $2 \leqslant i \leqslant n+1$. Με πιθανότητα 1 έχουμε ότι τα $x_2, \ldots, x_{n+1}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, και ότι $K'_{n+1} = F(D_n)$, όπου $D_n = \text{conv}\{\pm x_2, \ldots, \pm x_{n+1}\}$. Επομένως,

$$|K'_{n+1}| = |\det F| \cdot |D_n|. \tag{2.16}$$

Έστω $v \in \mathbb{R}^n$ τέτοιο ώστε $\langle v, x_i \rangle = 1$, $2 \leqslant i \leqslant n+1$. Αφού $\|x_i\|_2 \leqslant c\sqrt{n}$ για όλα τα $i$, από την ανισότητα Cauchy–Schwarz έχουμε ότι $\|v\|_2 \geqslant c_1/\sqrt{n}$ . Παρατηρήστε ότι $F(x) = x - \langle x, v \rangle x_1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$, άρα $\det F = 1 - \langle v, x_1 \rangle$. Έπεται ότι η $\mathbb{P}(|\det F| < 2^{-n})$ είναι ίση με

$$\mathbb{E}_v \left[ \mathbb{P}(|\langle v, x \rangle - 1| < 2^{-n}) \right] \leqslant \left| \{x : |\langle x, \theta_v \rangle| \leqslant \frac{1}{\|v\|_2 2^n}\} \right|, \tag{2.17}$$

όπου $\theta_v = v/\|v\|_2$, αφού η κεντρική τομή έχει το μεγαλύτερο όγκο ανάμεσα από όλες τις τομές με πλάτος $2^{-n}$ που είναι κάθετες στο $\theta_v$. Τέλος μιας και $\|v\|_2 \geqslant c/\sqrt{n}$, ευκολα ελέγχουμε ότι η τελευταία ποσότητα στην (2.17) φράσεται από $\sqrt{n}\exp(-cn)$. Έχουμε ήδη δει ότι, με πιθανότητα μεγαλύτερη από $1-\exp(-cn/\ln n)$, ο όγκος της $D_n$ είναι μεγαλύτερος από $(c/\sqrt{n})^n$. Επίσης είναι $|\det F| \geqslant 2^{-n}$, άρα η απόδειξη είναι πλήρης.

### 2.2β΄ Άνω φράγμα για τη μέση τιμή της $\ell_1^n$–νόρμας

Σκοπός μας είναι τώρα ο υπολογισμός της μέσης τιμής της $\|x\|_1$ στο $K_N$ ή το $S_N$. Περιγράφουμε πρώτα τα πιθανοθεωρητικά εργαλεία που θα χρησιμοποιήσουμε.

Έστω $(\Omega,\mu)$ ένας χώρος πιθανότητας και έστω $\phi:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ μια γνησίως αύξουσα και κυρτή συνάρτηση με $\phi(0)=0$. Ο χώρος Orlicz $L_\phi(\mu)$ είναι ο χώρος όλων των μετρήσιμων συναρτήσεων $f$ στον $\Omega$ για τις οποίες ισχύει $\int_\Omega \phi(|f|/t)d\mu<\infty$ για κάποιο $t>0$, εφοδιασμένος με τη νόρμα $\|f\|_\phi=\inf\{t>0:\int_\Omega\phi(|f|/t)d\mu\leqslant 1\}$. Εμείς θα χρειαστούμε μόνο τις συναρτήσεις $\psi_\alpha(t)=e^{t^\alpha}-1$. Ειδικότερα,

$$\|f\|_{\psi_2}=\inf\left\{t>0:\int e^{(f(x)/t)^2}d\mu(x)\leqslant 2\right\}. \tag{2.18}$$

Θα χρησιμοποιήσουμε την παρακάτω ανισότητα τύπου Bernstein (βλέπε [11]):

**Λήμμα 2.2.3.** *Έστω $g_1,\ldots,g_m$ ανεξάρτητες τυχαίες μετάβλητές με $\mathbb{E}\,g_j=0$ σε ένα χώρο πιθανότητας $(\Omega,\mu)$. Υποθέτουμε ότι $\|g_j\|_{\psi_2}\leqslant A$ για κάθε $j\leqslant m$ και για κάποια σταθερά $A>0$. Τότε,*

$$\mathrm{Prob}\left\{\left|\sum_{j=1}^m g_j\right|>\alpha m\right\}\leqslant 2\exp(-\alpha^2 m/8A^2) \tag{2.19}$$

*για κάθε $\alpha>0$.*

Έστω $K$ ένα ισοτροπικό και 1-unconditional κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Η $\psi_2$ συμπεριφορά των γραμμικών συναρτησοειδών $x\mapsto\langle x,\theta\rangle$ πάνω στο $K$ περιγράφεται από το παρακάτω αποτέλεσμα των Bobkov και Nazarov στο [13].

**Λήμμα 2.2.4.** *Έστω $K$ ένα ισοτροπικό και 1-unconditional κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Για κάθε $\theta\in\mathbb{R}^n$,*

$$\|\langle\cdot,\theta\rangle\|_{\psi_2}\leqslant c\sqrt{n}\|\theta\|_\infty, \tag{2.20}$$

*όπου $c>0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.*

Έστω τώρα $y_1, \ldots, y_n$ ανεξάρτητα τυχαία σημεία ομοιόμορφα κατανεμημένα στο $K$. Σταθεροποιούμε ένα $\theta \in \mathbb{R}^n$ με $\|\theta\|_\infty = 1$, μια επιλογή προσήμων $\varepsilon_j = \pm 1$, και εφαρμόζουμε το λήμμα 2.2.3 (με $m = n$) για τις τυχαίες μεταβλητές $g_j(y_1, \ldots, y_n) = \langle \varepsilon_j y_j, \theta \rangle$ στον $\Omega = K^n$. Παίρνουμε

$$\mathrm{Prob}\left\{ |\langle \varepsilon_1 y_1 + \cdots + \varepsilon_n y_n, \theta \rangle| > \alpha n \right\} \leqslant 2\exp(-c\alpha^2) \tag{2.21}$$

για κάθε $\alpha > 0$.

Θεωρούμε ένα 1/2-δίκτυο $\mathcal{N}$ για την $S_\infty^n$ με πληθάριθμο $|\mathcal{N}| \leqslant 5^n$. Επιλέγοντας $\alpha = C\sqrt{n}\sqrt{\ln(2N/n)}$ όπου $C > 0$ είναι μια κατάλληλα μεγάλη απόλυτη σταθερά, βλέπουμε ότι, με πιθανότητα μεγαλύτερη από $1 - \exp(-c_1 n \ln(2N/n))$, έχουμε

$$|\langle \varepsilon_1 y_1 + \cdots + \varepsilon_n y_n, \theta \rangle| \leqslant C n^{3/2} \sqrt{\ln(2N/n)} \tag{2.22}$$

για κάθε $\theta \in \mathcal{N}$ και για κάθε επιλογή προσήμων $\varepsilon_j = \pm 1$. Χρησιμοποιώντας ένα συνηθισμένο επιχείρημα διαδοχικών προσεγγίσεων και θεωρώντας όλες τις $2^n$ δυνατές επιλογές προσήμων $\varepsilon_j = \pm 1$, παίρνουμε ότι, με πιθανότητα μεγαλύτερη από $1 - \exp(-c_2 n \ln(2N/n))$, έχουμε

$$\max_{\varepsilon_j = \pm 1} \|\varepsilon_1 y_1 + \cdots + \varepsilon_n y_n\|_1 \leqslant C n^{3/2} \sqrt{\ln(2N/n)}. \tag{2.23}$$

Έστω τώρα $N \geqslant n$ και έστω $x_1, \ldots, x_N$ ανεξάρτητα τυχαία σημεία, ομοιόμορφα κατανεμημένα στο $K$. Αφού το πλήθος των υποσυνόλων $\{y_1, \ldots, y_n\}$ του $\{\pm x_1, \ldots, \pm x_N\}$ είναι φραγμένο από $(2eN/n)^n$, παίρνουμε απευθείας την επόμενη πρόταση.

**Πρόταση 2.2.5.** *Έστω $K$ ένα ισοτροπικό και 1-unconditional κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Σταθεροποιούμε $N > n$ και θεωρούμε $x_1, \ldots, x_N$ ανεξάρτητα τυχαία σημεία, ομοιόμορφα κατανεμημένα στο $K$. Τότε, με πιθανότητα μεγαλύτερη από $1 - \exp(-cn \ln(2N/n))$ έχουμε ότι*

$$\max_{\varepsilon_j = \pm 1} \|\varepsilon_1 x_{i_1} + \cdots + \varepsilon_n x_{i_n}\|_1 \leqslant C n^{3/2} \sqrt{\ln(2N/n)} \tag{2.24}$$

*για κάθε $\{i_1, \ldots, i_n\} \subseteq \{1, \ldots, N\}$.*

*Εκτίμηση της μέσης τιμής της $\|x\|_1$ στο $K_N$.* Παρατηρούμε ότι, με πιθανότητα 1, όλες οι έδρες του $K_N$ ή του $S_N$ είναι simplices. Ακόμα, αν $F = \mathrm{conv}\{y_1, \ldots, y_n\}$

είναι μια έδρα του $K_N$ τότε $y_j = \varepsilon_j x_{i_j}$ και $i_j \neq i_s$ για κάθε $1 \leqslant j \neq s \leqslant n$. Με άλλα λόγια, τα $x_i$ και $-x_i$ δεν μπορεί να ανήκουν στην ίδια έδρα του $K_N$.

Πρώτα θεωρούμε την περίπτωση του συμετρικού τυχαίου πολύτοπου $K_N$. Το επόμενο λήμμα ανάγει τον υπολογισμό της μέσης τιμής της $\|x\|_1$ στο $K_N$ σε ένα όμοιο πρόβλημα πάνω στις έδρες του $K_N$ (η ιδέα αυτή προέρχεται από το [27]).

**Λήμμα 2.2.6.** *Έστω $F_1, \dots, F_m$ οι έδρες του $K_N$. Τότε,*

$$\frac{1}{|K_N|}\int_{K_N} \|x\|_1 dx \leqslant \max_{1\leqslant s\leqslant m} \frac{1}{|F_s|}\int_{F_s} \|u\|_1 du. \tag{2.25}$$

*Απόδειξη.* Ακολουθώντας το [27, Λήμμα 2.5], μπορεί κανείς να ελέγξει ότι

$$\frac{1}{|K_N|}\int_{K_N} \|x\|_1 dx = \frac{1}{|K_N|}\sum_{s=1}^{m} \frac{d(0,F_s)}{n+1}\int_{F_s} \|u\|_1 du, \tag{2.26}$$

όπου $d(0,F_s)$ είναι η Ευκλείδεια απόσταση του αφινικού υπόχωρου που παράγει η $F_s$ από την αρχή των αξόνων. Αφού

$$|K_N| = \frac{1}{n}\sum_{s=1}^{m} d(0,F_s)|F_s|, \tag{2.27}$$

το αποτέλεσμα είναι άμεσο. □

Έστω $y_1, \dots, y_n \in \mathbb{R}^n$ και $F = \mathrm{conv}\{y_1, \dots, y_n\}$. Τότε, $F = T(\Delta^{n-1})$ όπου $\Delta^{n-1} = \mathrm{conv}\{e_1, \dots, e_n\}$ και $T_{ij} = \langle y_j, e_i\rangle =: y_{ji}$. Υποθέτουμε ότι $\det T \neq 0$. Άρα,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{|F|}\int_F \|u\|_1 du &= \frac{1}{|\Delta^{n-1}|}\int_{\Delta^{n-1}} \|Tu\|_1 du \\
&= \frac{1}{|\Delta^{n-1}|}\int_{\Delta^{n-1}} \sum_{i=1}^{n}\left|\sum_{j=1}^{n} y_{ji}u_j\right| du \\
&= \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{|\Delta^{n-1}|}\int_{\Delta^{n-1}} \left|\sum_{j=1}^{n} y_{ji}u_j\right| du \\
&\leqslant \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{|\Delta^{n-1}|}\int_{\Delta^{n-1}} \left(\sum_{j=1}^{n} y_{ji}u_j\right)^2 du\right)^{1/2}.
\end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας τη σχέση

$$\frac{1}{|\Delta^{n-1}|}\int_{\Delta^{n-1}} u_{j_1}u_{j_2} = \frac{1+\delta_{j_1,j_2}}{n(n+1)}, \tag{2.28}$$

παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned}\frac{1}{|F|}\int_F \|u\|_1 du &\leqslant \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}\sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n y_{ji}^2 + \left(\sum_{j=1}^n y_{ji}\right)^2\right)^{1/2} \\ &\leqslant \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \left[\left(\sum_{j=1}^n y_{ji}^2\right)^{1/2} + \left|\sum_{j=1}^n y_{ji}\right|\right].\end{aligned}$$

Από την κλασική ανισότητα του Khintchine (βλέπε [59] για την καλύτερη σταθερά $\sqrt{2}$) παίρνουμε ότι

$$\frac{1}{|F|}\int_F \|u\|_1 du \leq \frac{\sqrt{2}+1}{n}\max_{\varepsilon_j=\pm 1}\|\varepsilon_1 y_1 + \cdots + \varepsilon_n y_n\|_1 . \tag{2.29}$$

Τώρα, η Πρόταση 2.2.5 και το Λήμμα 2.2.6 δίνουν το άνω φράγμα:

**Πρόταση 2.2.7.** *Έστω $K$ ένα ισοτροπικό και 1-unconditional κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Σταθεροποιούμε $N > n$ και θεωρούμε $x_1,\ldots,x_N$ ανεξάρτητα τυχαία σημεία, ομοιόμορφα κατανεμημένα στο $K$. Τότε, με πιθανότητα μεγαλύτερη από $1-\exp(-cn\ln(2N/n))$, έχουμε ότι*

$$\frac{1}{|K_N|}\int_{K_N} \|x\|_1 dx \leqslant C\sqrt{n}\sqrt{\ln(2N/n)} \tag{2.30}$$

*όπου $C > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.*

### 2.2γ′ Εκτίμηση της μέσης τιμής της $\|x\|_1$ στο $S_N$

Η περίπτωση του $S_N$ χρειάζεται κάποιες μικρές τροποποιήσεις. Κατ' αρχήν, το ρόλο του 0 θα παίξει τώρα το διάνυσμα $w = \frac{1}{N}(x_1+\cdots+x_N)$ το οποίο ανήκει στο $S_N := \mathrm{conv}\{x_1,\ldots,x_N\}$. Η σχέση που θα αντικαταστήσει την (2.26) είναι η

$$\frac{1}{|S_N|}\int_{S_N} \|x\|_1 dx = \frac{1}{|S_N|}\sum_{s=1}^m \frac{d(0,F_s)}{n+1}\int_{F_s} \|u-w\|_1 du, \tag{2.31}$$

όπου $F_1,\dots,F_m$ είναι οι έδρες του $S_N$ (βλέπε [27, Λήμμα 2.5]). Τότε όπως και στο Λήμμα 2.2.6 (και αφού $\|u-w\|_1\leqslant\|w\|_1+\|u\|_1$ για κάθε $s\leqslant m$ και για κάθε $u\in F_s$) έχουμε ότι

$$\begin{aligned}\frac{1}{|S_N|}\int_{S_N}\|x\|_1dx &\leqslant \max_{1\leqslant s\leqslant m}\frac{1}{|F_s|}\int_{F_s}\|u-w\|_1du\\ &\leqslant \|w\|_1+\max_{1\leqslant s\leqslant m}\frac{1}{|F_s|}\int_{F_s}\|u\|_1du.\end{aligned}$$

Από την (2.29) και την Πρόταση 2.2.5 παίρνουμε ότι

$$\max_{1\leqslant s\leqslant m}\frac{1}{|F_s|}\int_{F_s}\|u\|_1du\leqslant C\sqrt{n}\sqrt{\ln(2N/n)} \tag{2.32}$$

Μένει τώρα να εκτιμήσουμε την $\|w\|_1$. Αλλά, εφαρμόζοντας την ανισότητα Bernstein (λήμμα 2.2.3, με $m=N$) στις τυχαίες μεταβλητές $g_j(x_1,\dots,x_N)=\langle x_j,\theta\rangle$, όπου $\theta\in S_\infty^{n-1}$, βλέπουμε ότι

$$\mathrm{Prob}\left\{|\langle x_1+\cdots+x_N,\theta\rangle|>C\sqrt{n}\sqrt{\ln(2N/n)}N\right\}\leqslant 2e^{-cN\ln(2N/n)} \tag{2.33}$$

και συνεχίζοντας όπως και στην §2.2β′ με ένα επιχείρημα δικτύων, έχουμε ότι

$$\|w\|_1=\frac{1}{N}\|x_1+\cdots+x_N\|_1\leqslant C\sqrt{n}\sqrt{\ln(2N/n)} \tag{2.34}$$

με πιθανότητα μεγαλύτερη από $1-C\exp(-cN\ln(2N/n))$. Έχουμε λοιπόν το ανάλογο της Πρότασης 2.2.7 για το $S_N$.

### 2.2δ′ Απόδειξη του φράγματος για την ισοτροπική σταθερά

Το Λήμμα 2.2.1 μας λέει ότι

$$|K_N|^{1/n}nL_{K_N}\leqslant c\,\frac{1}{|K_N|}\int_{K_N}\|x\|_1\,dx, \tag{2.35}$$

όπου $c>0$ είναι μια απόλυτη σταθερά. Ας υποθέσουμε πρώτα ότι $N\leqslant\exp(cn)$. Οι Προτάσεις 2.2.2 και 2.2.7 δείχνουν ότι, με πιθανότητα μεγαλύτερη από $1-C_1\exp(-cn)$ αν $N\geqslant c_1n$ και μεγαλύτερη από $1-C_1\exp(-cn/\ln n)$ αν $n<N<c_1n$, έχουμε ότι

$$\frac{\sqrt{\ln(2N/n)}}{\sqrt{n}}\cdot nL_{K_N}\leqslant c\cdot C\sqrt{n}\sqrt{\ln(2N/n)}. \tag{2.36}$$

Έπεται ότι $L_{K_N} \leqslant C_1 := c \cdot C$.

Στο [21, Παράγραφος 5] αποδεικνύεται ότι αν $N \geqslant \exp(cn)$ τότε, με πιθανότητα μεγαλύτερη από $1 - \exp(-cn)$, έχουμε ότι

$$c_1 K \subseteq S_N \subseteq K_N \subseteq K \subseteq c_2 \overline{B}_1^n. \tag{2.37}$$

Ο τελευταίος εγκλεισμός αποδείχθηκε στο [12] για ισοτροπικά και 1-unconditional κυρτά σώματα. Έτσι, $|K_N|^{1/n} \geqslant |S_N|^{1/n} \geqslant c_1$ και

$$\frac{1}{|K_N|} \int_{K_N} \|x\|_1 \, dx \leqslant \frac{1}{|K_N|} \int_{K_N} c_3 n \|x\|_{K_N} \, dx \leqslant c_3 n. \tag{2.38}$$

Άρα, από την (2.35) παίρνουμε και σε αυτήν την περίπτωση ότι $L_{K_N} \leqslant c_4 := c_3/c_1$.

Όμοια επιχειρήματα δουλεύουν και για την περίπτωση του $S_N$. □

## 2.3 Παρατηρήσεις

**§2.3.1**. Έστω $K$ ένα ισοτροπικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ με την ιδιότητα $\|\langle \cdot, \theta \rangle\|_{\psi_2} \leqslant C\|\langle \cdot, \theta \rangle\|_2$ για κάθε $\theta \in \mathbb{R}^n$, όπου $C > 0$ μια απόλυτη σταθερά. Αυτή η κλάση των $\psi_2$–σωμάτων περιλαμβάνει τις μπάλες $\overline{B}_q^n$ των $\ell_q^n$, $2 \leqslant q \leq \infty$ (βλέπε [14]). Είναι επίσης γνωστό ότι τα $\psi_2$–σώματα έχουν φραγμένη ισοτροπική σταθερά: αυτό έχει αποδειχθεί από τον Bourgain στο [8]. Ξεκινώντας από την (1.3) αντί για το Λήμμα 2.2.1 και ακολουθώντας τη μέθοδο της παραγράφου 2 μπορεί κανείς να δείξει ότι, με πιθανότητα μεγαλύτερη απο $1 - \exp(-cn)$, οι ισοτροπικές σταθερές των $K_N$ και $S_N$ είναι φραγμένες από απόλυτη σταθερά. Το επιχείρημα μάλιστα είναι εντελώς παράλληλο με αυτό του Alonso-Gutiérrez στο [1] για την περίπτωση των τυχαίων σημείων από τη σφαίρα $S^{n-1}$. Σημειώνουμε ότι τα 1-unconditional ισοτροπικά κυρτά σώματα δεν είναι αναγκαστικά $\psi_2$–σώματα.

**§2.3.2**. Έστω $x_1, \ldots, x_N$ ανεξάρτητα τυχαία σημεία ομοιόμορφα κατανεμημένα σε ένα κυρτό σώμα $K$ όγου 1 στον $\mathbb{R}^n$. Ορίζουμε

$$\mathbb{E}(K, N) = \mathbb{E}\,|S_N|^{1/n} = \mathbb{E}|\mathrm{conv}\{x_1, \ldots, x_N\}|^{1/n}. \tag{2.39}$$

Στο [20] έχει αποδειχθεί ότι αν $K$ είναι ένα ισοτροπικό 1-unconditional κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$, τότε, για κάθε $N \geqslant n + 1$,

$$\mathbb{E}(K, N) \leqslant C \frac{\sqrt{\ln(2N/n)}}{\sqrt{n}}, \tag{2.40}$$

όπου $C>0$ είναι μια απόλυτη σταθερά. Παρατηρήστε ότι αυτό είναι άμεση συνέπεια της Πρότασης 2.2.7. Έχουμε

$$|K_N|^{1/n} nL_{K_N} \leqslant C\sqrt{n}\sqrt{\ln(2N/n)} \tag{2.41}$$

με πιθανότητα μεγαλύτερη από $1-\exp(-cn)$, άρα το αποτέλεσμα προκύπτει από την $L_{K_N} \geqslant c_1$, όπου $c_1>0$ είναι μια απόλυτη σταθερά. Αυτή είναι μια παρατήρηση του A. Pajor.

Στο [22] έχει αποδειχθεί ότι αν $K$ είναι *οποιοδήποτε* κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$, τότε $\mathbb{E}(K,N) \leqslant CL_K \frac{\ln(2N/n)}{\sqrt{n}}$. Εφαρμόζοντας τις μεθόδους από τα [22], [20] και τα αποτελέσματα συγκέντρωσης του Γ. Παούρη (βλέπε [48]) μπορεί κανείς να αποδείξει ότι για κάθε κυρτό σώμα $K$ στον $\mathbb{R}^n$, αν $n+1 \leqslant N \leqslant ne^{\sqrt{n}}$ ισχύει ότι

$$\mathbb{E}\,(K,N) \leqslant CL_K \frac{\sqrt{\ln(N/n)}}{\sqrt{n}}, \tag{2.42}$$

όπου $C>0$ είναι μια απόλυτη σταθερά. Αυτό θα ήταν συνέπεια (και μάλιστα για όλες τις δυνατές τιμές της παραμέτρου $N$) μιας θετικής απάντησης για το πρόβλημα αυτού του κεφαλαίου. Στο Κεφάλαιο 5 δίνουμε, μεταξύ άλλων, απόδειξη της (2.42) για όλες τις δυνατές τιμές της παραμέτρου $N$, χρησιμοποιώντας διαφορετική μέθοδο.

# Κεφάλαιο 3

# Ασυμπτωτικό σχήμα τυχαίων πολυτόπων

## 3.1 Τα αποτελέσματα

Όπως περιγράψαμε στην Εισαγωγή, σε αυτό το Κεφάλαιο θεωρούμε το τυχαίο πολύτοπο

$$K_N = \mathrm{conv}\{x_1, \ldots, x_N\}$$

που παράγεται από $N$ ανεξάρτητα τυχαία σημεία $x_1, \ldots, x_N$ τα οποία κατανέμονται ομοιόμορφα σε ένα ισοτροπικό κυρτό σώμα $K$. Προσπαθούμε να συγκρίνουμε το $K_N$ με το $Z_q(K)$ για κατάλληλη τιμή της παραμέτρου $q = q(N, n) \simeq \ln(N/n)$.

**Θεώρημα 3.1.1.** *Έστω $\beta \in (0, 1/2]$ και $\gamma > 1$. Αν $N \geqslant N(\gamma, n) = c\gamma n$, όπου $c > 0$ είναι μία απόλυτη σταθερά, τότε για κάθε ισοτροπικό κυρτό σώμα $K$ στον $\mathbb{R}^n$ έχουμε*

$$K_N \supseteq c_1 \, Z_q(K) \text{ για κάθε } q \leqslant c_2 \beta \ln(N/n),$$

*με πιθανότητα μεγαλύτερη από*

$$1 - \exp\left(-c_3 N^{1-\beta} n^{\beta}\right) - \mathbb{P}(\|\Gamma : \ell_2^n \to \ell_2^N\| \geqslant \gamma L_K \sqrt{N})$$

*όπου $\Gamma : \ell_2^n \to \ell_2^N$ είναι ο τυχαίος τελεστής $\Gamma(y) = (\langle x_1, y\rangle, \ldots \langle x_N, y\rangle)$ που ορίζεται από τις κορυφές $x_1, \ldots, x_N$ του $K_N$.*

Πρέπει να τονιστεί ότι δεν μπορούμε να περιμένουμε αντίστροφο εγκλεισμό της μορφής $K_N \subseteq c_4\, Z_q(K)$ με πιθανότητα κοντά στο 1, εκτός και αν το $q$ είναι της τάξης του $n$. Αποδεικνύουμε όμως ότι το $K_N$ «συμπιέζεται ασθενώς» ανάμεσα σε δύο $Z_{q_i}(K)$ $(i=1,2)$, όπου $q_i \simeq \ln(N/n)$, με την ακόλουθη έννοια:

**Πρόταση 3.1.2.** *Για κάθε $\alpha > 1$ έχουμε*

$$\mathbb{E}\,\left[\sigma(\theta : (h_{K_N}(\theta) \geqslant \alpha h_{Z_q(K)}(\theta))\right] \leqslant N\alpha^{-q}.$$

Η πρόταση αυτή μας δείχνει ότι αν $q \geqslant c_5 \ln(N/n)$ τότε, για τα περισσότερα $\theta \in S^{n-1}$, έχουμε $h_{K_N}(\theta) \leqslant c_6 h_{Z_q(K)}(\theta)$. Ετσι προκύπτει ότι διάφορες γεωμετρικές παράμετροι του $K_N$, για παράδειγμα το μέσο πλάτος, μπορούν να προσδιοριστούν από τις αντίστοιχες παραμέτρους του $Z_{[\ln(N/n)]}(K)$.

## 3.2 Ο βασικός εγκλεισμός

Στην ενότητα αυτή αποδεικνύουμε το θεώρημα 3.1.1. Έστω $K$ ένα ισοτροπικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Για κάθε $q \geqslant 1$ θεωρούμε το $L_q$–κεντροειδές σώμα $Z_q(K)$ του $K$. Υπενθυμίζουμε ότι

$$h_{Z_q(K)}(x) = \|\langle\cdot,x\rangle\|_q := \left(\int_K |\langle y,x\rangle|^q dy\right)^{1/q}. \tag{3.1}$$

Αφού $|K|=1$, εύκολα βλέπουμε ότι $Z_1(K)\subseteq Z_p(K)\subseteq Z_q(K)\subseteq Z_\infty(K)$ για κάθε $1\leqslant p\leqslant q\leqslant\infty$, όπου $Z_\infty(K)=\mathrm{conv}\{K,-K\}$. Από την άλλη, ισχύουν οι αντίστροφοι εγκλεισμοί

$$Z_q(K) \subseteq \frac{cq}{p} Z_p(K) \tag{3.2}$$

για κάθε $1\leqslant p<q<\infty$, σαν συνέπεια της $\psi_1$–συμπεριφοράς της $y\mapsto\langle y,x\rangle$. Σημειώνουμε ότι το $Z_q(K)$ είναι πάντα συμμετρικό και ότι $Z_q(TK)=T(Z_q(K))$ για κάθε $T\in SL(n)$ και $q\in[1,\infty]$. Ακόμα, αν το $K$ έχει κέντρο βάρους στο 0, τότε $Z_q(K)\supseteq cZ_\infty(K)$ για κάθε $q\geqslant n$, όπου $c>0$ είναι μια απόλυτη σταθερά. Παραπέμπουμε στο [18] για τις αποδείξεις των παραπάνω και για περισσότερες πληροφορίες.

**Λήμμα 3.2.1.** *Έστω $0<t<1$. Για κάθε $\theta\in S^{n-1}$ έχουμε ότι*

$$\mathbb{P}\left(\{x\in K : |\langle x,\theta\rangle| \geqslant t\|\langle\cdot,\theta\rangle\|_q\}\right) \geqslant \frac{(1-t^q)^2}{C^q}. \tag{3.3}$$

*Απόδειξη.* Εφαρμόζουμε την ανισότητα Paley-Zygmund

$$\mathbb{P}\left(g(x) \geqslant t^q \mathbb{E}\left(g\right)\right) \geqslant (1-t^q)^2 \frac{[\mathbb{E}\left(g\right)]^2}{\mathbb{E}\left(g^2\right)} \tag{3.4}$$

για τη συνάρτηση $g(x) = |\langle x, \theta\rangle|^q$. Από την (3.2) έχουμε ότι,

$$\mathbb{E}\left(g^2\right) = \mathbb{E}\left|\langle x, \theta\rangle\right|^{2q} \leqslant C^q \left(\mathbb{E}\left|\langle x, \theta\rangle\right|^q\right)^2 = C^q \left[\mathbb{E}\left(g\right)\right]^2 \tag{3.5}$$

για κάποια απόλυτη σταθερά $C > 0$ και αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη του λήμματος. □

**Λήμμα 3.2.2.** *Για κάθε $\sigma \subseteq \{1, \ldots, N\}$ και για κάθε $\theta \in S^{n-1}$ ισχύει ότι*

$$\mathbb{P}\left(\{\vec{X} = (x_j)_{j \leq N} \in K^N \,:\, \max_{j \in \sigma} |\langle x_j, \theta\rangle| \leqslant \frac{1}{2}\|\langle \cdot, \theta\rangle\|_q\}\right) \leqslant e^{-|\sigma|/(4C^q)}, \tag{3.6}$$

*όπου $C > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.*

*Απόδειξη.* Εφαρμόζοντας το λήμμα 3.2.1 με $t = 1/2$ βλέπουμε ότι

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\max_{j \in \sigma} |\langle x_j, \theta\rangle| \leqslant \frac{1}{2}\|\langle \cdot, \theta\rangle\|_q\right) &= \prod_{j \in \sigma} \mathbb{P}\left(|\langle x_j, \theta\rangle| \leqslant \frac{1}{2}\|\langle \cdot, \theta\rangle\|_q\right) \\
&\leqslant \left(1 - \frac{1}{4C^q}\right)^{|\sigma|} \\
&\leqslant \exp\left(-|\sigma|/(4C^q)\right),
\end{aligned}$$

αφού $1 - v < e^{-v}$ για κάθε $v > 0$. □

**Απόδειξη του θεωρήματος 3.1.1**. Έστω $\Gamma : \ell_2^n \to \ell_2^N$ ο τυχαίος τελεστής που ορίζεται από την

$$\Gamma(y) = (\langle x_1, y\rangle, \ldots, \langle x_N, y\rangle). \tag{3.7}$$

Σε ό,τι ακολουθεί τροποποιούμε μια ιδέα από το [31]. Ορίζουμε $m = [8(N/n)^{2\beta}]$ και $k = [N/m]$. Σταθεροποιούμε μια διαμέριση $\sigma_1, \ldots, \sigma_k$ του $\{1, \ldots, N\}$ με $m \leqslant |\sigma_i|$ για κάθε $i = 1, \ldots, k$ και ορίζουμε τη νόρμα

$$\|u\|_0 = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} \|P_{\sigma_i}(u)\|_\infty. \tag{3.8}$$

Τότε έχουμε ότι

$$h_{K_N}(z)=\max_{1\leqslant j\leqslant N}|\langle x_j,z\rangle|\geqslant\|P_{\sigma_i}\Gamma(z)\|_\infty \tag{3.9}$$

για κάθε $z\in\mathbb{R}^n$ και για κάθε $i=1,\ldots,k$. Επίσης, παρατηρούμε πως

$$h_{K_N}(z)\geqslant\|\Gamma(z)\|_0. \tag{3.10}$$

Αν $z\in\mathbb{R}^n$ και $\|\Gamma(z)\|_0<\frac{1}{4}\|\langle\cdot,z\rangle\|_q$ τότε η ανισότητα του Markov μας δίνει ότι υπάρχει ένα $I\subset\{1,\ldots,k\}$ με $|I|>k/2$ τέτοιο ώστε $\|P_{\sigma_i}\Gamma(z)\|_\infty<\frac{1}{2}\|\langle\cdot,z\rangle\|_q$, για κάθε $i\in I$. Έχουμε λοιπόν ότι, για σταθερά $z\in S^{n-1}$ και $\alpha\geqslant 1$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\|\Gamma(z)\|_0<\frac{1}{4}\|\langle\cdot,z\rangle\|_q\right)&\\
&\leqslant\sum_{|I|=[(k+1)/2]}\mathbb{P}\left(\|P_{\sigma_i}\Gamma(z)\|_\infty<\frac{1}{2}\|\langle\cdot,z\rangle\|_q,\ \text{για κάθε } i\in I\right)\\
&\leqslant\sum_{|I|=[(k+1)/2]}\prod_{i\in I}\mathbb{P}\left(\|P_{\sigma_i}\Gamma(z)\|_\infty<\frac{1}{2}\|\langle\cdot,z\rangle\|_q\right)\\
&\leq\sum_{|I|=[(k+1)/2]}\prod_{i\in I}\exp\left(-|\sigma_i|/(4C^q)\right)\\
&\leqslant\binom{k}{[(k+1)/2]}\exp\left(-c_1km/C^q\right)\\
&\leqslant\exp\left(k\ln 2-c_1km/C^q\right).
\end{aligned}$$

Επιλέγοντας

$$q\simeq\beta\ln(N/n) \tag{3.11}$$

βλέπουμε ότι

$$\mathbb{P}\left(\|\Gamma(z)\|_0<\frac{1}{4}\|\langle\cdot,z\rangle\|_q\right)\leq\exp\left(-c_2N^{1-\beta}n^\beta\right). \tag{3.12}$$

Θέτουμε $S=\{z:\|\langle\cdot,z\rangle\|_q/2=1\}$ και θεωρούμε ένα $\delta$-δίκτυο $U$ του $S$ με πληθάριθμο $|U|\leqslant(3/\delta)^n$. Για κάθε $u\in U$ έχουμε

$$\mathbb{P}\left(\|\Gamma(u)\|_0<\frac{1}{2}\right)\leq\exp\left(-c_2N^{1-\beta}n^\beta\right), \tag{3.13}$$

και άρα,

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{u\in U}\left\{\|\Gamma(u)\|_0 < \frac{1}{2}\right\}\right) \leq \exp\left(n\ln(3/\delta) - c_2N^{1-\beta}n^{\beta}\right). \tag{3.14}$$

Σταθεροποιούμε $\gamma > 1$ και θέτουμε

$$\Omega_\gamma = \{\Gamma : \|\Gamma : \ell_2^n \to \ell_2^N\| \leqslant \gamma L_K\sqrt{N}\}. \tag{3.15}$$

Αφού $Z_q(K) \supseteq cL_K\, B_2^n$, έχουμε ότι

$$\|\Gamma(z)\|_0 \leqslant \frac{1}{\sqrt{k}}\|\Gamma(z)\|_2 \leqslant c\gamma L_K\sqrt{N/k}\|z\|_2 \leqslant c\gamma\sqrt{N/k}\|\langle\cdot, z\rangle\|_q \tag{3.16}$$

για κάθε $z \in \mathbb{R}^n$ και για κάθε $\Gamma$ στο $\Omega_\gamma$.

Έστω $z \in S$. Υπάρχει $u \in U$ τέτοιο ώστε $\frac{1}{2}\|\langle\cdot, z-u\rangle\|_q < \delta$, απ' όπου παίρνουμε ότι

$$\|\Gamma(u)\|_0 \leqslant \|\Gamma(z)\|_0 + c\gamma\delta\sqrt{N/k} \tag{3.17}$$

για κάθε $\Gamma \in \Omega_\gamma$. Διαλέγοντας τώρα $\delta = \sqrt{k/N}/(4c\gamma)$, παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\{\Gamma \in \Omega_\gamma :\ \exists z \in \mathbb{R}^n : \|\Gamma(z)\|_0 \leqslant \|\langle\cdot, z\rangle\|_q/8\}\right)& \\
&= \mathbb{P}\left(\{\Gamma \in \Omega_\gamma :\ \exists z \in S : \|\Gamma(z)\|_0 \leqslant 1/4\}\right)\\
&\leqslant \mathbb{P}\left(\{\Gamma \in \Omega_\gamma :\ \exists u \in U : \|\Gamma(u)\|_0 \leqslant 1/2\}\right)\\
&\leqslant \exp\left(n\ln(12c\gamma\sqrt{N/k}) - c_2N^{1-\beta}n^{\beta}\right)\\
&\leqslant \exp\left(-c_3N^{1-\beta}n^{\beta}\right)
\end{aligned}$$

αν το $N$ είναι αρκετά μεγάλο. Τέλος, αφού $h_{K_N}(z) \geqslant \|\Gamma(z)\|_0$ για κάθε $z \in \mathbb{R}^n$, παίρνουμε ότι $K_N \supseteq cZ_q(K)$ με πιθανότητα μεγαλύτερη από

$$1 - \exp\left(-c_4N^{1-\beta}n^{\beta}\right) - \mathbb{P}(\|\Gamma : \ell_2^n \to \ell_2^N\| \geqslant \gamma L_K\sqrt{N}).$$

Ας αναλύσουμε τώρα τον περιορισμό για το $N$. Θέλουμε $n\ln(12c_4\gamma\sqrt{N/k}) \leqslant CN^{1-\beta}n^{\beta}$ για κατάλληλη σταθερά $C > 0$. Ας υποθέσουμε ότι

$$N \geqslant 12c\gamma n. \tag{3.18}$$

Έχουμε $\beta \in (0, \frac{1}{2}]$ και από τους ορισμούς των $k$ και $m$ βλέπουμε ότι αρκεί να πάρουμε

$$\ln(N/n) \leqslant C\sqrt{N/n},$$

το οποίο ισχύει όταν $N/n \geqslant c_5$ για μια κατάλληλη απόλυτη σταθερά $c_5 > 0$. Από την (3.18) έχουμε το ζητούμενο αποτέλεσμα. □

**Παρατήρηση 3.2.3.** Το θεώρημα 3.1.1 αναδεικνύει το πρόβλημα της εκτίμησης της πιθανότητας

$$\mathbb{P}(\Omega_\gamma) = \mathbb{P}(\|\Gamma : \ell_2^n \to \ell_2^N\| \geqslant \gamma L_K \sqrt{N}). \tag{3.19}$$

Στο [31] αποδεικνύεται ότι αν $\Gamma_{n,N} = (\xi_{ij})_{1\leqslant i\leqslant N, 1\leqslant j\leqslant n}$ είναι ένας τυχαίος πίνακας, όπου τα $\xi_{ij}$ είναι ανεξάρτητες και συμμετρικές τυχαίες μεταβλητές, που ικανοποιούν τις σχέσεις $\|\xi_{ij}\|_{L^2} \geqslant 1$ και $\|\xi_{ij}\|_{L^{\psi_2}} \leqslant \rho$ για κάποιο $\rho \geqslant 1$, τότε $\mathbb{P}(\Omega_\gamma) \leq \exp(-c(\rho,\gamma)N)$. Στην περίπτωσή μας, ο $\Gamma$ είναι ένας τυχαίος $N \times n$ πίνακας, οι γραμμές του οποίου είναι $N$ τυχαία σημεία επιλεγμένα ομοιόμορφα και ανεξάρτητα από ένα ισοτροπικό σώμα $K$ στον $\mathbb{R}^n$. Έτσι, το πρόβλημα τώρα είναι να εκτιμηθεί η πιθανότητα, $N$ ανεξάρτητα τυχαία σημεία $x_1, \ldots, x_N$ από το $K$ να ικανοποιούν την

$$\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} \langle x_j, \theta\rangle^2 \leq \gamma^2 L_K^2 \tag{3.20}$$

για κάθε $\theta \in S^{n-1}$. Αυτό σχετίζεται με ένα γνωστό πρόβλημα των Kannan, Lovász και Simonovits [30], το οποίο με τη σειρά του έχει σαν αφετηρία το πρόβλημα της εύρεσης ενός γρήγορου αλγόριθμου για τον υπολογισμό του όγκου ενός κυρτού σώματος: δοθέντων $\delta, \varepsilon \in (0,1)$, ζητάμε τον μικρότερο θετικό ακέραιο $N_0(n,\delta,\varepsilon)$ που ικανοποιεί το εξής: άν $N \geqslant N_0$ τότε με πιθανότητα μεγαλύτερη από $1-\delta$ έχουμε ότι

$$(1-\varepsilon)L_K^2 \leqslant \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} \langle x_j, \theta\rangle^2 \leqslant (1+\varepsilon)L_K^2 \tag{3.21}$$

για κάθε $\theta \in S^{n-1}$. Στο [30] αποδείχθηκε ότι μπορούμε να πάρουμε $N_0 \simeq c(\delta,\varepsilon)n^2$, εκτίμηση που βελτιώθηκε αργότερα σε $N_0 \simeq c(\delta,\varepsilon)n(\ln n)^3$ από τον Bourgain [7] και μετά σε $N_0 \simeq c(\delta,\varepsilon)n(\ln n)^2$ από τον Rudelson [56]. Στην πραγματικότητα μπορεί κανείς να ελέγξει (βλέπε [21]) ότι η τελευταία εκτίμηση του Rudelson προκύπτει από το επιχείρημα του Bourgain αν χρησιμοποιηθεί επιπλέον η ανισότητα συγκέντρωσης του Alesker. Για περαιτέρω επεκτάσεις των παραπάνω παραπέμπουμε, για παράδειγμα, στα [48], [23], [37] και [3].

Εδώ, ενδιαφερόμαστε μόνο για το άνω φράγμα της (3.21). Στην πράξη, χρειαζόμαστε μια ισομορφική έκδοση της εκτίμησης αυτής, μιας και μας επιτρέπεται να επιλέξουμε κάποια απόλυτη σταθερά $\gamma \gg 1$ στην (3.20). Μια τέτοια εκτίμηση παίρνουμε από το [37] στην ισοτροπική περίπτωση: αν $N \geqslant c_1 n(\ln n)^2$, τότε

$$\text{(3.22)}\quad \mathbb{P}(\|\Gamma : \ell_2^n \to \ell_2^N\| \geqslant \gamma L_K\sqrt{N}) \leqslant \exp\left(-c_2\gamma\left(\frac{N}{(\ln N)(n\ln n)}\right)^{1/4}\right).$$

Μια ελαφρώς καλύτερη εκτίμηση μπορούμε να πάρουμε από τη δουλειά των Guédon και Rudelson στο [23].

Τέλος, τονίζουμε ότι η εκτίμηση που έχουμε για τον όρο $\mathbb{P}(\|\Gamma : \ell_2^n \to \ell_2^N\| \geqslant \gamma L_K\sqrt{N})$ είναι (προς το παρόν) ασθενέστερη από τον όρο $\exp\left(-c_3N^{1-\beta}n^{\beta}\right)$ στο φράγμα για την πιθανότητα να ισχύει ο εγκλεισμός του θεωρήματος 3.1.1. Διατηρούμε την διατύπωση του θεωρήματος όπως είναι, γιατί είναι πιθανό να ισχύει (τελικά) κάτι καλύτερο.

**Παρατήρηση 3.2.4.** Οι Γ. Παούρης και E. Werner [50] μελέτησαν πρόσφατα τη σχέση μεταξύ των $L_q$–κεντροειδών σωμάτων και των «επιπλεόντων σωμάτων» ενός κυρτού σώματος $K$. Για $\delta \in (0, \frac{1}{2}]$, το «επιπλέον σώμα» (floating body) $K_\delta$ του $K$ είναι η τομή όλων των ημιχώρων για τους οποίους τα υπερεπίπεδα που τους ορίζουν αποκόπτουν από το $K$ ένα σύνολο όγκου $\delta$. Στο [41] αποδείχθηκε ότι το $K_\delta$ είναι ισομορφικό με ελλειψοειδές αν το $\delta$ είναι μακριά από το 0. Στο [50] αποδείχθηκε ότι

$$\text{(3.23)}\qquad c_1 Z_{\ln(1/\delta)}(K) \subseteq K_\delta \subseteq c_2 Z_{\ln(1/\delta)}(K)$$

όπου οι $c_1, c_2 > 0$ είναι απόλυτες σταθερές. Από το θεώρημα 3.1.1 προκύπτει ότι αν το $K$ είναι ισοτροπικό και αν, για παράδειγμα, $N \geqslant n^2$ τότε

$$\text{(3.24)}\qquad K_N \supseteq c_3 K_{1/N}$$

με πιθανότητα μεγαλύτερη από $1 - o_n(1)$, όπου $c_3 > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά. Αξίζει τον κόπο να συγκρίνουμε το τελευταίο αποτέλεσμα με το ακόλουθο πολύ γνωστό αποτέλεσμα από το [9]: για κάθε κυρτό σώμα $K$ στον $\mathbb{R}^n$ έχουμε ότι $c|K_{1/N}| \leqslant \mathbb{E}\,|K_N| \leqslant c_n|K_{1/N}|$ (όπου η σταθερά στο αριστερό μέλος είναι απόλυτη, ενώ η δεξιά ανισότητα ικανοποιείται για μια σταθερά $c_n$ που εξαρτάται από τη διάσταση, αρκεί το $N$ να είναι αρκετά μεγάλο: η κρίσιμη τιμή για το $N$ είναι εκθετική ως προς $n$).

## 3.3 Η unconditional περίπτωση

Στην παράγραφο αυτή θεωρούμε ξεχωριστά την περίπτωση των unconditional κυρτών σωμάτων: υποθέτουμε ότι το $K$ είναι συμμετρικό και ότι, μετά από ένα γραμμικό μετασχηματισμό, η συνήθης ορθοκανονική βάση $\{e_1,\dots,e_n\}$ του $\mathbb{R}^n$ είναι μια 1-unconditional βάση για την $\|\cdot\|_K$, δηλαδή για κάθε επιλογή πραγματικών αριθμών $t_1,\dots,t_n$ και για κάθε επιλογή προσήμων $\varepsilon_j=\pm1$,

$$\|\varepsilon_1t_1e_1+\cdots+\varepsilon_nt_ne_n\|_K=\|t_1e_1+\cdots+t_ne_n\|_K. \tag{3.25}$$

Σε αυτή την περίπτωση, το $K$ έρχεται στην ισοτροπική θέση μέσω ενός διαγώνιου τελεστή. Είναι επίσης γνωστό ότι η ισοτροπική σταθερά ενός unconditional κυρτού σώματος $K$ ικανοποιεί την $L_K\simeq 1$.

Οι Bobkov και Nazarov έχουν αποδείξει ότι $K\supseteq c_2Q_n$, όπου $Q_n=[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]^n$ (βλέπε [12]). Το ακόλουθο επιχείρημα του R. Latala (προσωπική επικοινωνία), δείχνει ότι, για την κλάση των unconditional σωμάτων, η οικογένεια των $L_q$–κεντροειδών σωμάτων του κύβου $Q_n$ είναι ακραία, με την έννοια ότι $Z_q(K)\supseteq cZ_q(Q_n)$ για κάθε $q\geqslant 1$, όπου $c>0$ είναι απόλυτη σταθερά: Έστω $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\dots,\varepsilon_n$ ανεξάρτητες και ισόνομες $\pm1$ τυχαίες μεταβλητές, ορισμένες σε έναν χώρο πιθανότητας $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$, με κατανομή $\mathbb{P}(\varepsilon_i=1)=\mathbb{P}(\varepsilon_i=-1)=\frac{1}{2}$. Αφού το $K$ είναι unconditional, η ανισότητα του Jensen και η αρχή της συστολής μας δίνουν, για κάθε $\theta\in S^{n-1}$,

$$\begin{aligned}\|\langle\cdot,\theta\rangle\|_{L^q(K)} &= \left(\int_K\left|\sum_{i=1}^n\theta_ix_i\right|^q dx\right)^{1/q}=\left(\int_\Omega\int_K\left|\sum_{i=1}^n\theta_i\varepsilon_i|x_i|\right|^q dx\,d\mathbb{P}(\varepsilon)\right)^{1/q}\\ &\geqslant \left(\int_\Omega\left|\sum_{i=1}^n\theta_i\varepsilon_i\int_K|x_i|\,dx\right|^q d\mathbb{P}(\varepsilon)\right)^{1/q}=\left(\int_\Omega\left|\sum_{i=1}^n t_i\theta_i\varepsilon_i\right|^q d\mathbb{P}(\varepsilon)\right)^{1/q}\\ &\geqslant \left(\int_{Q_n}\left|\sum_{i=1}^n t_i\theta_iy_i\right|^q dy\right)^{1/q}=\|\langle\cdot,(t\theta)\rangle\|_{L^q(Q_n)},\end{aligned}$$

όπου $t_i = \int_K |x_i|\,dx$ και $t\theta = (t_1\theta_1, \dots, t_n\theta_n)$. Αφού $t_i \simeq 1$ για κάθε $i = 1, \dots, n$, βλέπουμε αμέσως ότι

$$\|\langle \cdot, \theta\rangle\|_{L^q(K)} \geqslant \|\langle \cdot, (t\theta)\rangle\|_{L^q(Q_n)} \geqslant c\|\langle \cdot, \theta\rangle\|_{L^q(Q_n)}.$$

Αυτή η παρατήρηση και το θεώρημα 3.1.1 δείχνουν ότι, αν το $K$ είναι unconditional, τότε το τυχαίο πολύτοπο $K_N$ περιέχει το $Z_{\ln(N/n)}(Q_n)$:

**Θεώρημα 3.3.1.** *Έστω $\beta \in (0, 1/2]$ και $\gamma > 1$. Υπάρχει απόλυτη σταθερά $c > 0$ τέτοια ώστε, αν*

$$N \geqslant N(\gamma, n) = c\gamma n \tag{3.26}$$

*και αν $K_N = \mathrm{conv}\{x_1, \dots, x_N\}$ είναι ένα τυχαίο πολύτοπο που παράγεται από $N$ ανεξάρτητα τυχαία σημεία $x_1, \dots, x_N$ ομοιόμορφα κατανεμημένα σε ένα unconditional και ισοτροπικό κυρτό σώμα $K$ στον $\mathbb{R}^n$, τότε έχουμε*

$$K_N \supseteq c_1\, C(\alpha) = c_1\,(\alpha B_2^n \cap B_\infty^n) \quad \text{για κάθε } \alpha \leqslant c_2\sqrt{\beta \ln(N/n)} \tag{3.27}$$

*με πιθανότητα μεγαλύτερη από*

$$1 - \exp\left(-c_3 N^{1-\beta} n^{\beta}\right) - \mathbb{P}(\|\Gamma : \ell_2^n \to \ell_2^N\| \geqslant \gamma\sqrt{N}) \tag{3.28}$$

*όπου $\Gamma : \ell_2^n \to \ell_2^N$, ο τυχαίος τελεστής $\Gamma(y) = (\langle x_1, y\rangle, \dots \langle x_N, y\rangle)$ που ορίζεται από τις κορυφές $x_1, \dots, x_N$ του $K_N$.*

Στη συνέχεια, σκιαγραφούμε μια άμεση απόδειξη του θεωρήματος 3.3.1 (στην οποία δεν χρησιμοποιούνται τα $L_q$–κεντροειδή σώματα): Για $k \in \mathbb{N}$ και $y \in \mathbb{R}^n$, ορίζουμε

$$\|y\|_{P(k)} := \sup\left\{ \sum_{i=1}^k \left( \sum_{j\in B_i} y_j^2 \right)^{1/2} : \bigcup_{i=1}^k B_i = [n],\ B_i \cap B_j = \emptyset\ (i \neq j) \right\} \tag{3.29}$$

όπου γράφουμε $[n]$ για το σύνολο $\{1, 2, \dots, n\}$. Ο Montgomery–Smith (βλέπε [45]) έχει δείξει ότι: για κάθε $y \in \mathbb{R}^n$ και $k \in \mathbb{N}$ ισχύει ότι

$$\mathbb{P}\left( \sum_{i=1}^n \varepsilon_i y_i \geqslant \lambda \|y\|_{P(k)} \right) \geqslant \left(\frac{1}{3}\right)^k (1 - 2\lambda^2)^{2k} \qquad (0 \leqslant \lambda \leqslant 1/\sqrt{2}). \tag{3.30}$$

Ακόμα, για καθε $y \in \mathbb{R}^n$ ισχύει

$$\|y\|_{P(t^2)} \leqslant K_{1,2}(y, t) \leq \sqrt{2}\|y\|_{P(t^2)} \tag{3.31}$$

όταν $t^2 \in \mathbb{N}$, απ' όπου προκύπτει το παρακάτω:

**Λήμμα 3.3.2.** *Υπάρχει απόλυτη σταθερά $c>0$ τέτοια ώστε, για κάθε $y\in\mathbb{R}^n$ και για κάθε $t>0$,*

$$\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^n \varepsilon_i y_i \geqslant \lambda K_{1,2}(y,t)\right)\geqslant e^{-\phi(\lambda)t^2} \tag{3.32}$$

*όπου $\phi(\lambda)=4\ln(3(1-2\lambda^2)^{-2})$ για $0<\lambda<1/\sqrt{2}$.*

Ο P. Pivovarov [52] απέδειξε πρόσφατα ότι υπάρχει μια απόλυτη σταθερά $C\geqslant 1$ τέτοια ώστε, για κάθε unconditional ισοτροπικό κυρτό σώμα $K$ στον $\mathbb{R}^n$, το σφαιρικό μέτρο του συνόλου των $\theta\in S^{n-1}$ για τα οποία ισχύει ότι

$$\mathbb{P}_x\left(|\langle x,\theta\rangle|\geqslant t\right)\geqslant \exp(-Ct^2)$$

είναι μεγαλύτερο ή ίσο από $1-2^{-n}$ όταν $C\leqslant t\leqslant \frac{\sqrt{n}}{C\ln n}$. Η απόδειξη του επόμενου λήμματος είναι παρόμοια, σε γενικές γραμμές, με τη δική του δουλειά.

**Λήμμα 3.3.3.** *Έστω $K$ ένα ισοτροπικό unconditional κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Για κάθε $\theta\in S^{n-1}$ και για κάθε $\alpha\geqslant 1$ έχουμε*

$$\mathbb{P}_x\left(\langle x,\theta\rangle\geqslant h_{C(\alpha)}(\theta)\right)\geqslant c_1e^{-c_2\alpha^2}. \tag{3.33}$$

*Απόδειξη.* Για κάθε $\theta=(\theta_i)_{i=1}^n\in\mathbb{S}^{n-1}$, $x\in K$ και $0<s<1/\sqrt{2}$, ορίζουμε το σύνολο

$$K_s(\theta)=\{x\in K\,:\,K_{1,2}(\theta,\alpha)\leqslant sK_{1,2}(x\theta,\alpha)\}, \tag{3.34}$$

όπου με «$x\theta$» συμβολίζουμε το διάνυσμα με συντεταγμένες $x_i\theta_i$. Το $s$ θα το επιλέξουμε κατάλληλα, αργότερα. Έχουμε τότε ότι:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_x\left(\sum_{i=1}^n x_i\theta_i\geqslant h_{C(\alpha)}(\theta)\right) &= \mathbb{P}_x\left(\sum_{i=1}^n \varepsilon_i x_i\theta_i\geqslant h_{C(\alpha)}(\theta)\right)\\
&= \int_K \mathbb{P}_\varepsilon\left(\sum_{i=1}^n \varepsilon_i(x_i\theta_i)\geqslant h_{C(\alpha)}(\theta)\right)dx\\
&= \int_K \mathbb{P}_\varepsilon\left(\sum_{i=1}^n \varepsilon_i(x_i\theta_i)\geqslant K_{1,2}(\theta,\alpha)\right)dx\\
&\geqslant \int_{K_s(\theta)} \mathbb{P}_\varepsilon\left(\sum_{i=1}^n \varepsilon_i(x_i\theta_i)\geqslant sK_{1,2}(x\theta,\alpha)\right)dx\\
&\geqslant e^{-\phi(s)\alpha^2}\,|K_s(\theta)|,
\end{aligned}$$

από το λήμμα 3.3.2.

Υποθέτουμε πρώτα ότι ο $m := \alpha^2$ είναι ακέραιος και θεωρούμε μια διαμέριση $B_1$, $B_2$, …, $B_m$ του συνόλου $\{1, 2, \ldots, n\}$ τέτοια ώστε

$$K_{1,2}(\theta, \alpha) = \sum_{i=1}^{m} \left( \sum_{j \in B_i} |\theta_j|^2 \right)^{1/2} =: A. \tag{3.35}$$

Θεωρούμε την ημινόρμα

$$f(x) = \sum_{i=1}^{m} \left( \sum_{j \in B_i} |x_j \theta_j|^2 \right)^{1/2} . \tag{3.36}$$

Τότε, από την αντίστροφη ανισότητα Hölder $c_1 \|f\|_{L^2(K)} \leqslant \|f\|_{L^1(K)}$ και αφού $L_K \simeq 1$, παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned} \int_K K_{1,2}(x\theta, \alpha)\, dx &\geqslant \int_K \sum_{i=1}^{m} \left( \sum_{j \in B_i} |x_j \theta_j|^2 \right)^{1/2} \\ &\geqslant c_1 \sum_{i=1}^{m} \left( \sum_{j \in B_i} |\theta_j|^2 \int_K |x_j|^2 \right)^{1/2} \\ &\geqslant cA. \end{aligned}$$

Εφαρμόζοντας τώρα την ανισότητα Paley-Zygmund συμπεραίνουμε ότι

$$|K_s(\theta)| = \mathbb{P}_x\left(f > sA\right) \geqslant \frac{(\mathbb{E}|f|^2 - (sA)^2)^2}{\mathbb{E}\left[f^4\right]}. \tag{3.37}$$

Επιλέγοντας $s = \frac{1}{2\sqrt{2}} \min\{c, 1\}$, έχουμε

$$|K_s(\theta)| \geqslant \frac{cA^4}{\mathbb{E}\left[f^4\right]},$$

για μια κατάλληλη καινούρια απόλυτη σταθερά $c > 0$. Από την άλλη πλευρά, μπορούμε να εκτιμήσουμε την $\mathbb{E}\left[f^4\right]$ από πάνω, χρησιμοποιώντας μια αντίστροφη ανισότητα Hölder:

$$\begin{aligned}(\mathbb{E}\,[f^4])^{1/4} &\leq 4c\mathbb{E}|f| = 4c\sum_{i=1}^{m}\mathbb{E}\left(\sum_{j\in B_i}|x_j\theta_j|^2\right)^{1/2}\\ &\leq 4cL_K\sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j\in B_i}|\theta_j|^2\right)^{1/2} \leqslant 4cA.\end{aligned}$$

Επομένως, έχουμε ότι $|K_s(\theta)| \geqslant c$. Επιστρέφοντας τώρα στην εκτίμηση

$$\mathbb{P}_x\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\theta_i \geqslant h_{C(\alpha)}(\theta)\right) \geqslant e^{-\phi(s)\alpha^2}\,|K_s(\theta)| \tag{3.38}$$

έχουμε:

$$\mathbb{P}_x\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\theta_i \geqslant h_{C(\alpha)}(\theta)\right) \geqslant ce^{-c\alpha^2}. \tag{3.39}$$

Αυτό αποδεικνύει το λήμμα για $\alpha^2 \in \mathbb{N}$ και το αποτέλεσμα προκύπτει εύκολα για κάθε $\alpha$. □

*Απόδειξη του θεωρήματος 3.3.1.* Εφαρμόζοντας την τεχνική που χρησιμοποιήσαμε στην απόδειξη του θεωρήματος 3.1.1 ολοκληρώνουμε την απόδειξη του θεωρήματος 3.3.1. □

**Παρατήρηση 3.3.4.** Σε ό,τι αφορά την πιθανότητα $\mathbb{P}(\|\Gamma : \ell_2^n \to \ell_2^N\| \geqslant \gamma\sqrt{N})$, στην unconditional περίπτωση ο Aubrun έχει αποδείξει στο [3] ότι για κάθε $\rho > 1$ και για κάθε $N \geqslant \rho n$, έχουμε ότι

$$\mathbb{P}(\|\Gamma : \ell_2^n \to \ell_2^N\| \geqslant c_1(\rho)\sqrt{N}) \leq \exp(-c_2(\rho)n^{1/5}) \tag{3.40}$$

Ειδικότερα, μπορούμε να βρούμε σταθερές $c, C > 0$ τέτοιες ώστε, αν $N \geqslant Cn$ τότε

$$\mathbb{P}(\|\Gamma : \ell_2^n \to \ell_2^N\| \geqslant C\sqrt{N}) \leq \exp(-cn^{1/5}) \tag{3.41}$$

Αυτό μας επιτρέπει να χρησιμοποιούμε το θεώρημα 3.3.1 με μια εκτίμηση $1 - \exp(-cn^c)$ στην πιθανότητα, για τιμές του $N$ που είναι ως και ανάλογες του $n$.

## 3.4 Ασθενές ασυμπτωτικό σχήμα του $K_N$

Μας ενδιαφέρει τώρα να δούμε πόσο ακριβής είναι ο εγκλεισμός του θεωρήματος 3.1.1. Όπως έχουμε ήδη αναφέρει στην εισαγωγή του κεφαλαίου, δεν μπορούμε να περιμένουμε έναν αντίστροφο εγκλεισμό της μορφής $K_N \subseteq c_4\, Z_q(K)$ με πιθανότητα κοντά στο 1, εκτός και αν το $q$ είναι της τάξης του $n$. Για να το δούμε αυτό, παρατηρούμε ότι, για κάθε $\alpha > 0$,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(K_N \subseteq \alpha Z_q(K)) &= \mathbb{P}(x_1, x_2, \ldots, x_N \in \alpha Z_q(K))\\ &= \Big(\mathbb{P}(x \in \alpha Z_q(K))\Big)^N\\ &\leqslant |\alpha Z_q(K)|^N.\end{aligned}$$

Στο [48] έχει αποδειχθεί ότι, για κάθε $q \leqslant n$, ο όγκος του $Z_q(K)$ είναι φραγμένος από $(c\sqrt{q/n}L_K)^n$. Αυτό μας δίνει άμεσα την παρακάτω εκτίμηση για την πιθανότητα:

$$\mathbb{P}(K_N \subseteq \alpha Z_q(K)) \leqslant (c\alpha\sqrt{q/n}L_K)^{nN}, \tag{3.42}$$

όπου $c > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά. Υποθέτουμε ότι το $K$ έχει φραγμένη ισοτροπική σταθερά και θέλουμε ακόμα $\alpha \simeq 1$. Τότε, από την (3.42) βλέπουμε ότι, ανεξάρτητα από την τιμή του $N$, πρέπει να επιλέξουμε το $q$ να είναι της τάξης του $n$ ώστε, να υπάρχει περίπτωση να είναι κοντά στο 1 η πιθανότητα $\mathbb{P}(K_N \subseteq \alpha Z_q(K))$. Για την ακρίβεια, αν $q \sim n$ τότε αυτό όντως συμβαίνει, αφού ισχύει ότι $Z_n(K) \supseteq cK$.

**Λήμμα 3.4.1.** *Έστω $K$ ένα κυρτό σώμα με όγκο 1 στον $\mathbb{R}^n$, $N > n$ και $\alpha > 1$. Τότε, για κάθε $\theta \in S^{n-1}$ έχουμε*

$$\mathbb{P}\left(h_{K_N}(\theta) \geqslant \alpha h_{Z_q(K)}(\theta)\right) \leqslant N\alpha^{-q}. \tag{3.43}$$

*Απόδειξη.* Από την ανισότητα του Markov έχουμε ότι

$$\mathbb{P}(\alpha, \theta) := \mathbb{P}\left(x \in K : |\langle x, \theta\rangle| \geqslant \alpha \|\langle \cdot, \theta\rangle\|_q\right) \leqslant \alpha^{-q}, \tag{3.44}$$

οπότε

$$\mathbb{P}\left(h_{K_N}(\theta) \geqslant \alpha h_{Z_q(K)}(\theta)\right) = \mathbb{P}\left(\max_{j \leqslant N} |\langle x_j, \theta\rangle| \geqslant \alpha \|\langle \cdot, \theta\rangle\|_q\right) \leqslant N\, \mathbb{P}(\alpha, \theta)$$

και το αποτέλεσμα προκύπτει άμεσα. □

**Λήμμα 3.4.2.** *Έστω $K$ ένα κυρτό σώμα με όγκο 1 στον $\mathbb{R}^n$ και $N > n$. Για κάθε $\alpha > 1$ έχουμε ότι*

$$\mathbb{E}\left[\sigma(\theta : (h_{K_N}(\theta) \geqslant \alpha h_{Z_q(K)}(\theta))\right] \leqslant N\alpha^{-q}. \tag{3.45}$$

*Απόδειξη.* Άμεση: παρατηρούμε ότι, από το θεώρημα Fubini,

$$\mathbb{E}\left[\sigma(\theta : (h_{K_N}(\theta) \geqslant \alpha h_{Z_q(K)}(\theta))\right] = \int_{S^{n-1}} \mathbb{P}\left(h_{K_N}(\theta) \geqslant \alpha h_{Z_q(K)}(\theta)\right) d\sigma(\theta)$$

□

Η εκτίμηση του λήμματος 3.4.2 είναι ήδη αρκετή για να δείξουμε ότι αν $q \geqslant c \ln N$ τότε, κατά μέσο όρο, έχουμε $h_{K_N}(\theta) \leqslant c h_{Z_q(K)}(\theta)$ με πιθανότητα μεγαλύτερη από $1 - N^{-c}$. Ειδικότερα, το μέσο πλάτος του τυχαίου $K_N$ είναι φραγμένο από το μέσο πλάτος του $Z_{\ln(N/n)}(K)$:

**Πρόταση 3.4.3.** *Έστω $K$ ένα ισοτροπικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Αν $q \geqslant 2 \ln N$ τότε*

$$\mathbb{E}\left[w(K_N)\right] \leqslant c\, w(Z_q(K)), \tag{3.46}$$

*όπου $c > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.*

*Απόδειξη.* Γράφουμε

$$w(K_N) \leq \int_{A_N} h_{K_N}(\theta)\, d\sigma(\theta) + c\sigma(A_N^c) n L_K, \tag{3.47}$$

όπου $A_N = \{\theta : h_{K_N}(\theta) \leqslant \alpha h_{Z_q(K)}(\theta)\}$. Τότε,

$$w(K_N) \leqslant \alpha \int_{A_N} h_{Z_q(K)}(\theta)\, d\sigma(\theta) + c\sigma(A_N^c) n L_K, \tag{3.48}$$

και άρα, από το λήμμα 3.4.2, έχουμε

$$\mathbb{E}\, w(K_N) \leqslant \alpha w(Z_q(K)) + cNn\alpha^{-q} L_K. \tag{3.49}$$

Τέλος, αφού $w(Z_q(K)) \geqslant w(Z_2(K)) = L_K$, παίρνουμε ότι

$$\mathbb{E}\, w(K_N) \leqslant (\alpha + cNn\alpha^{-q}) w(Z_q(K)). \tag{3.50}$$

Τώρα, το λήμμα προκύπτει αν επιλέξουμε $\alpha = e$. □

# Κεφάλαιο 4

# Ισοτροπικά λογαριθμικά κοίλα μέτρα πιθανότητας

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζουμε το γενικότερο πλαίσιο των ισοτροπικών λογαριθμικά κοίλων μέτρων πιθανότητας και παραθέτουμε κάποια βασικά αποτελέσματα που θα χρησιμοποιήσουμε για τα επόμενα αποτελέσματα της διατριβής.

## 4.1 Λογαριθμικά κοίλα μέτρα πιθανότητας

***4.1.1 Μέτρα πιθανότητας***. Συμβολίζουμε με $\mathcal{P}_{[n]}$ την κλάση όλων των μέτρων πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$ που είναι απολύτως συνεχή ως προς το μέτρο Lebesgue. Γράφουμε $\mathcal{A}_n$ για την $\sigma$-άλγεβρα των Borel υποσυνόλων του $\mathbb{R}^n$. Η πυκνότητα του $\mu \in \mathcal{P}_{[n]}$ συμβολίζεται με $f_\mu$.

Η υποκλάση $\mathcal{SP}_{[n]}$ αποτελείται από όλα τα συμμετρικά μέτρα $\mu \in \mathcal{P}_{[n]}$. Το $\mu$ λέγεται συμμετρικό αν η πυκνότητά του $f_\mu$, είναι άρτια συνάρτηση στον $\mathbb{R}^n$.

Η υποκλάση $\mathcal{CP}_{[n]}$ αποτελείται από όλα τα μέτρα $\mu \in \mathcal{P}_{[n]}$ που έχουν κέντρο βάρους στην αρχή των αξόνων. Δηλαδή, $\mu \in \mathcal{CP}_{[n]}$ αν

$$\int_{\mathbb{R}^n} \langle x, \theta \rangle d\mu(x) = 0 \tag{4.1}$$

για κάθε $\theta \in S^{n-1}$.

Έστω $\mu \in \mathcal{P}_{[n]}$. Για κάθε $1 \leqslant k \leqslant n-1$ και $F \in G_{n,k}$, ορίζουμε την $F$-προβολή

$\pi_F(\mu)$ του $\mu$ ως εξής: για κάθε $A \in \mathcal{A}_F$,

$$\pi_F(\mu)(A) := \mu(P_F^{-1}(A)). \tag{4.2}$$

Είναι καθαρό ότι $\pi_F(\mu) \in \mathcal{P}_{[\dim F]}$. Σημειώνουμε ότι από τον ορισμό έπεται ότι, για κάθε Borel μετρήσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R}^n \to [0,\infty)$ ισχύει

$$\int_F f(x)\, d\pi_F(\mu)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(P_F(x))\, d\mu(x). \tag{4.3}$$

Η πυκνότητα του $\pi_F(\mu)$ είναι η συνάρτηση

$$\pi_F(f_\mu)(x) := f_{\pi_F(\mu)}(x) = \int_{x+F^\perp} f_\mu(y)\, dy. \tag{4.4}$$

Έστω $\mu_1 \in \mathcal{P}_{[n_1]}$ και $\mu_2 \in \mathcal{P}_{[n_2]}$. Θα γράφουμε $\mu_1 \otimes \mu_2$ για το μέτρο στην $\mathcal{P}_{[n_1+n_2]}$ που ικανοποιεί την σχέση

$$(\mu_1 \otimes \mu_2)(A_1 \times A_2) = \mu_1(A_1)\mu_2(A_2) \tag{4.5}$$

για κάθε $A_1 \in \mathcal{A}_{n_1}$ και $A_2 \in \mathcal{A}_{n_2}$. Εύκολα ελέγχει κανείς ότι $f_{\mu_1\otimes\mu_2} = f_{\mu_1} f_{\mu_2}$.

***4.1.2 Λογαριθμικά κοίλα μέτρα***. Συμβολίζουμε με $\mathcal{L}_{[n]}$ την κλάση όλων των λογαριθμικά κοίλων μέτρων πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$. Ένα μέτρο $\mu$ στον $\mathbb{R}^n$ λέγεται λογαριθμικά κοίλο αν για κάθε $A, B \in \mathcal{A}_n$ και κάθε $\lambda \in (0,1)$,

$$\mu(\lambda A + (1-\lambda)B) \geqslant \mu(A)^\lambda \mu(B)^{1-\lambda}. \tag{4.6}$$

Μια συνάρτηση $f : \mathbb{R}^n \to [0,\infty)$ λέγεται λογαριθμικά κοίλη αν η $\ln f$ είναι κοίλη.

Είναι γνωστό ότι αν $\mu \in \mathcal{L}_{[n]}$ και $\mu(H) < 1$ για κάθε υπερεπίπεδο $H$, τότε $\mu \in \mathcal{P}_{[n]}$ και η πυκνοτητά του $f_\mu$ είναι λογαριθμικά κοίλη (βλέπε [5]). Σαν εφαρμογή της ανισότητας Prékopa-Leindler ([33], [53], [54]) μπορεί κανείς να ελέγξει ότι αν η $f$ είναι λογαριθμικά κοίλη τότε, για κάθε $k \leqslant n-1$ και για κάθε $F \in G_{n,k}$, η $\pi_F(f)$ είναι επίσης λογαριθμικά κοίλη. Όπως και προηγουμένως, γράφουμε $\mathcal{CL}_{[n]}$ και $\mathcal{SL}_{[n]}$ για τα μη εκφυλισμένα $\mu \in \mathcal{L}_{[n]}$ που έχουν κέντρο βάρους στην αρχή των αξόνων ή είναι συμμετρικά αντίστοιχα.

***4.1.3 Κυρτά σώματα***. Ένα κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ είναι ένα συμπαγές κυρτό υποσύνολο $C$ του $\mathbb{R}^n$ με μη κενό εσωτερικό. Λέμε ότι το $C$ είναι συμμετρικό αν, όποτε

$x \in C$ τότε και $-x \in C$. Λέμε ότι το $C$ έχει κέντρο βάρους στην αρχή των αξόνων αν $\int_C \langle x, \theta \rangle \, dx = 0$ για κάθε $\theta \in S^{n-1}$.

Η συνάρτηση στήριξης $h_C : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ του $C$ ορίζεται από την $h_C(x) = \max\{\langle x, y \rangle : y \in C\}$. Το μέσο πλάτος του $C$ είναι η ποσότητα

$$W(C) = \int_{S^{n-1}} h_C(\theta)\sigma(d\theta). \tag{4.7}$$

Για κάθε $-\infty < p < \infty$, $p \neq 0$, ορίζουμε το $p$-μέσο πλάτος του $C$ ως εξής

$$W_p(C) = \left( \int_{S^{n-1}} h_C^p(\theta)\sigma(d\theta) \right)^{1/p}. \tag{4.8}$$

Η ακτίνα του $C$ είναι η ποσότητα $R(C) = \max\{\|x\|_2 : x \in C\}$ και, αν το $0$ είναι εσωτερικό σημείο του $C$, το πολικό σώμα $C^\circ$ του $C$ είναι το

$$C^\circ := \{y \in \mathbb{R}^n : \langle x, y \rangle \leqslant 1 \text{ για κάθε } x \in C\}. \tag{4.9}$$

Σημειώνουμε ότι αν $K$ είναι ένα κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ και $\overline{K} := \frac{1}{|K|}K$, τότε από την ανισότητα Brunn-Minkowski έχουμε ότι $\mathbf{1}_{\overline{K}} \in \mathcal{L}_{[n]}$.

Συμβολίζουμε με $\mathcal{K}_{[n]}$ την κλάση των κυρτών σωμάτων στον $\mathbb{R}^n$ και με $\widetilde{\mathcal{K}}_{[n]}$ την υποκλάση αυτών με όγκο 1. Επίσης, $\mathcal{CK}_{[n]}$ είναι η κλάση των κυρτών σωμάτων με κέντρο βάρους στην αρχή των αξόνων και $\mathcal{SK}_{[n]}$ είναι η κλάση των συμμετρικών ως προς το $0$ κυρτών σωμάτων στον $\mathbb{R}^n$.

Παραπέμπουμε στα βιβλία [57], [43] και [51] για τα βασικά αποτελέσματα της θεωρίας Brunn-Minkowski και της ασυμπτωτικής θεωρίας των χώρων πεπερασμένης διάστασης με νόρμα.

***4.1.4 $L_q$–κεντροειδή σώματα.*** Έστω $\mu \in \mathcal{P}_{[n]}$. Για κάθε $q \geqslant 1$ και $\theta \in S^{n-1}$ ορίζουμε

$$h_{Z_q(\mu)}(\theta) := \left( \int_{\mathbb{R}^n} |\langle x, \theta \rangle|^q f(x) \, dx \right)^{1/q}, \tag{4.10}$$

όπου $f$ είναι η πυκνότητα του $\mu$. Αν $\mu \in \mathcal{L}_{[n]}$ τότε $h_{Z_q(\mu)}(\theta) < \infty$ για κάθε $q \geqslant 1$ και για κάθε $\theta \in S^{n-1}$. Ορίζουμε το $L_q$-κεντροειδές σώμα $Z_q(\mu)$ του $\mu$ να είναι το συμμετρικό (ως προς το 0) κυρτό σώμα με συνάρτηση στήριξης την $h_{Z_q(\mu)}$.

Τα $L_q$–κεντροειδή σώματα εμφανίστηκαν αρχικά, με μια διαφορετική κανονικοποίηση, στο [35] (βλέπε επίσης το [36], όπου αποδείχθηκε μια $L_q$ αφινική ισοπεριμετρική ανισότητα). Εδώ ακολουθούμε την κανονικοποίηση (και το συμβολισμό) που χρησιμοποιείται στο [47]. Ο αρχικός ορισμός αναφερόταν μόνο στην κλάση των μέτρων $\mathbf{1}_K \in \mathcal{L}_{[n]}$, όπου $K$ είναι ένα κυρτό σώμα όγκου 1. Στην περίπτωση αυτή, γράφουμε $Z_q(K)$ αντί του $Z_q(\mathbf{1}_K)$.

Αν $K$ είναι ένα συμπαγές σύνολο στον $\mathbb{R}^n$ με $|K| = 1$, εύκολα ελέγχει κανείς ότι $Z_1(K) \subseteq Z_p(K) \subseteq Z_q(K) \subseteq Z_\infty(K)$ για κάθε $1 \leqslant p \leqslant q \leqslant \infty$, όπου $Z_\infty(K) = \mathrm{conv}\{K, -K\}$. Σημειώνουμε ότι αν $T \in SL_n$ τότε $Z_p(T(K)) = T(Z_p(K))$. Επιπλέον, αν το $K$ είναι κυρτό σώμα, σαν συνέπεια της ανισότητας Brunn–Minkowski (βλέπε Θεώρημα 1.2.2 και, για μια απόδειξη, [47]), έχουμε ότι

$$Z_q(K) \subseteq \overline{c}_0\, q\, Z_2(K) \tag{4.11}$$

για κάθε $q \geqslant 2$ και πιο γενικά,

$$Z_q(K) \subseteq \overline{c}_0 \frac{q}{p} Z_p(K) \tag{4.12}$$

για κάθε $1 \leqslant p < q$, όπου $\overline{c}_0 \geqslant 1$ είναι μια απόλυτη σταθερά. Ακόμα, αν το $K$ έχει κέντρο βάρους στο 0, τότε

$$Z_q(K) \supseteq \overline{c}\, K \tag{4.13}$$

για κάθε $q \geqslant n$, όπου $\overline{c} > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά. Για μια απόδειξη των παραπάνω και επιπλέον πληροφορίες πάνω στα $L_q$–κεντροειδή σώματα, παραπέμπουμε στα [46] και [48].

***4.1.5 Ισοτροπικά μέτρα πιθανότητας***. Έστω $\mu \in \mathcal{CP}_{[n]}$. Λέμε ότι το $\mu$ είναι ισοτροπικό αν $Z_2(\mu) = B_2^n$. Γράφουμε $\mathcal{I}_{[n]}$ και $\mathcal{IL}_{[n]}$ για τις κλάσεις των ισοτροπικών μέτρων πιθανότητας και των λογαριθμικά κοίλων ισοτροπικών μέτρων πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$ αντίστοιχα.

Λέμε ότι ένα κυρτό σώμα $K \in \widetilde{\mathcal{CK}}_{[n]}$ είναι ισοτροπικό αν το $Z_2(K)$ είναι πολλαπλάσιο της μοναδιαίας Ευκλείδειας μπάλας. Ορίζουμε την ισοτροπική σταθερά του $K$ από τη σχέση

$$L_K := \left(\frac{|Z_2(K)|}{|B_2^n|}\right)^{1/n}. \tag{4.14}$$

Έτσι λοιπόν, το $K$ είναι ισοτροπικό αν και μόνο αν $Z_2(K) = L_K B_2^n$. Γράφουμε $\mathcal{IK}_{[n]}$ για την κλάση των ισοτροπικών κυρτών σωμάτων του $\mathbb{R}^n$. Σημειώνουμε ότι $K \in \mathcal{IK}_{[n]}$ αν και μόνο αν $L_K^n \mathbf{1}_{\frac{K}{L_K}} \in \mathcal{IL}_{[n]}$. Ένα κυρτό σώμα $K$ λέγεται *σχεδόν* *ισοτροπικό* αν έχει όγκο 1 και $K \simeq T(K)$, όπου $T(K)$ είναι μια ισοτροπική γραμμική εικόνα του $K$.

Παραπέμπουμε στα [41], [18] και [48] για επιπλέον πληροφορίες πάνω στα ισοτροπικά σώματα.

***4.1.6 Τα σώματα*** $K_p(\mu)$. Ο K. Ball στο [4], εισάγει έναν τρόπο με τον οποίο μπορούμε να περνάμε από τα λογαριθμικά κοίλα μέτρα στα κυρτά σώματα. Δίνουμε εδώ τους ορισμούς του K. Ball σε ένα γενικότερο πλαίσιο. Έστω $\mu \in \mathcal{P}_{[n]}$. Για κάθε $p > 0$ ορίζουμε ένα σύνολο $K_p(\mu)$ ως εξής:

$$K_p(\mu) := \left\{ x \in \mathbb{R}^n : p \int_0^\infty f_\mu(rx) r^{p-1} dr \geqslant f_\mu(0) \right\}. \tag{4.15}$$

Είναι φανερό ότι το $K_p(\mu)$ είναι ένα αστρόμορφο σώμα με συναρτησοειδές Minkowski το

$$\|x\|_{K_p(\mu)} := \left( \frac{p}{f_\mu(0)} \int_0^\infty f_\mu(rx) r^{p-1} dr \right)^{-1/p}. \tag{4.16}$$

Έστω $1 \leqslant k < n$ και $F \in G_{n,k}$. Για κάθε $\theta \in S_F$ ορίζουμε

$$\|\theta\|_{B_{k+1}(\mu,F)} := \|\theta\|_{K_{k+1}(\pi_F(\mu))}. \tag{4.17}$$

Στην ακόλουθη πρόταση παραθέτουμε κάποιες βασικές ιδιότητες των αστρόμορφων σώμάτων $K_p(\mu)$. Παραπέμπουμε στα [4], [41], [48] και [49] για τις αποδείξεις, για επιπλέον πληροφορίες και αναφορές (στο παράρτημα αυτού του κεφαλαίου παρουσιάζουμε τα βασικά αποτελέσματα που χρησιμοποιούνται για την απόδειξη της πρότασης).

**Πρόταση 4.1.1.** *Έστω $\mu \in \mathcal{P}_{[n]}$, $p > 0$, $1 \leqslant k < n$ και $F \in G_{n,k}$.*

(i) *Αν $\mu \in \mathcal{L}_{[n]}$ τότε $K_p(\mu) \in \mathcal{K}_{[n]}$. Επιπλέον, αν $\mu \in \mathcal{SL}_{[n]}$ τότε $K_p(\mu) \in \mathcal{SK}_{[n]}$.*

(ii) *Αν $\mu \in \mathcal{CL}_{[n]}$ τότε $K_{n+1}(\mu) \in \mathcal{CK}_{[n]}$. Αν $\mu \in \mathcal{SIL}_{[n]}$ τότε $\overline{K_{n+2}}(\mu) \in \widetilde{\mathcal{SK}}_{[n]}$.*

(iii) *Αν $\mu \in \mathcal{IL}_{[n]}$ τότε το $\overline{K_{n+1}}(\mu)$ είναι σχεδόν ισοτροπικό.*

(iv) *Έστω $1 \leqslant p \leqslant n$ και $\mu \in \mathcal{CL}_{[n]}$. Τότε, $f_\mu(0)^{\frac{1}{n}} Z_p(\mu) \simeq Z_p(\overline{K_{n+1}}(\mu))$.*

(v) *Έστω $1 \leqslant p \leqslant k < n$, $F \in G_{n,k}$, $\mu \in \mathcal{CL}_{[n]}$ και $K \in \mathcal{CL}_{[n]}$. Τότε,*

$$f_{\pi_F(\mu)}(0)^{\frac{1}{k}} P_F(Z_p(\mu)) \simeq f_\mu(0)^{\frac{1}{n}} Z_p(\overline{B_{k+1}}(\mu, F)) \tag{4.18}$$

*και*

$$|K\cap F^{\perp}|^{\frac{1}{k}}P_F(Z_p(K))\simeq Z_p(\overline{B_{k+1}}(K,F)). \tag{4.19}$$

(vi) *Έστω* $1\leqslant k<n$, $F\in G_{n,k}$ *και* $K\in\mathcal{IK}_{[n]}$. *Τότε,*

$$|K\cap F^{\perp}|^{\frac{1}{k}}\simeq\frac{L_{\overline{B_{k+1}}(K,F)}}{L_K}. \tag{4.20}$$

(vii) *Αν* $\mu\in\mathcal{IL}_{[n]}$, *τότε*

$$L_{K_{n+1}(\mu)}\simeq f_\mu(0)^{\frac{1}{n}}. \tag{4.21}$$

***4.1.7 Η*** $\psi_\alpha$***-νόρμα.*** Έστω $\mu\in\mathcal{P}_{[n]}$. Για κάθε $\alpha\geqslant 1$, η Orlicz νόρμα $\|f\|_{\psi_\alpha}$ μιας φραγμένης και μετρήσιμης συνάρτησης $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ ως προς το μέτρο $\mu$ ορίζεται από την

$$\|f\|_{\psi_\alpha}=\inf\left\{t>0:\int_{\mathbb{R}^n}\exp\left(\left(\frac{|f(x)|}{t}\right)^\alpha\right)d\mu(x)\leqslant 2\right\}. \tag{4.22}$$

Είναι εύκολο να ελέγξει κανείς ότι

$$\|f\|_{\psi_\alpha}\simeq\sup\left\{\frac{\|f\|_p}{p^{1/\alpha}}:p\geqslant\alpha\right\}. \tag{4.23}$$

Έστω $\theta\in S^{n-1}$. Λέμε ότι το $\mu$ ικανοποιεί $\psi_\alpha$-εκτίμηση στη διεύθυνση του $\theta$ με σταθερά $\beta_{\alpha,\mu,\theta}$, αν

$$\|\langle\cdot,\theta\rangle\|_{\psi_\alpha}\leqslant\beta_{\alpha,\mu,\theta}\|\langle\cdot,\theta\rangle\|_2. \tag{4.24}$$

Λέμε ότι το $\mu$ είναι ένα $\psi_\alpha$-μέτρο με σταθερά $\beta_{\alpha,\mu}$ όπου $\beta_{\alpha,\mu}:=\sup_{\theta\in S^{n-1}}\beta_{\alpha,\mu,\theta}$, αν η τελευταία ποσότητα είναι πεπερασμένη.

Ομοίως, αν $K\in\widetilde{\mathcal{K}}_{[n]}$ ορίζουμε

$$\beta_{\alpha,K}:=\sup_{\theta\in S^{n-1}}\sup_{p\geqslant\alpha}\frac{h_{Z_p(K)}(\theta)}{p^{1/\alpha}h_{Z_2(K)}(\theta)}. \tag{4.25}$$

Παρατηρήστε ότι η $\beta_{\alpha,\mu}$ είναι αφινικά αναλλοίωτη, μιας και $\beta_{\alpha,\mu\circ T^{-1}}=\beta_{\alpha,\mu}$ για κάθε $T\in SL_n$. Τέλος, ορίζουμε

$$\mathcal{P}_{[n]}(\alpha,\beta):=\{\mu\in\mathcal{P}_{[n]}:\beta_{\alpha,\mu}\leqslant\beta\} \tag{4.26}$$

και

$$\mathcal{K}_{[n]}(\alpha,\beta):=\{K\in\widetilde{\mathcal{K}}_{[n]}:\beta_{\alpha,K}\leqslant\beta\}. \tag{4.27}$$

***4.1.8 Η παράμετρος*** $k_*(C)$. Έστω $C$ ένα συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Ορίζουμε την παράμετρο $k_*(C)$ ως τον μεγαλύτερο θετικό ακέραιο $k \leqslant n$ για τον οποίο ισχύει ότι

$$\mu_{n,k}\left(F \in G_{n,k} : \frac{1}{2}W(C)(B_2^n \cap F) \subseteq P_F(C) \subseteq 2W(C)(B_2^n \cap F)\right) \geqslant \frac{n}{n+k}.$$

Δηλαδή, η $k_*(C)$ είναι η μεγαλύτερη διάσταση $k$ με την ιδιότητα η «τυχαία» $k$-διάστατη προβολή του $C$ να είναι 4-Ευκλείδεια.

Η παράμετρος $k_*(C)$ προσδιορίζεται πλήρως από τις παραμέτρους $W(C)$ και $R(C)$: Υπάρχουν $c_1, c_2 > 0$ ώστε

$$c_1 n\frac{W(C)^2}{R(C)^2} \leqslant k_*(C) \leqslant c_2 n\frac{W(C)^2}{R(C)^2} \tag{4.28}$$

για κάθε συμμετρικό κυρτό σώμα $C$ στον $\mathbb{R}^n$. Το κάτω φράγμα εμφανίζεται στην απόδειξη του Milman για το θεώρημα του Dvoretzky (βλέπε [38]) ενώ το πάνω φράγμα αποδεικνύεται στο [44].

***4.1.9 Αρνητικές ροπές της Ευκλείδειας νόρμας***. Έστω $\mu \in \mathcal{P}_{[n]}$. Αν $-n < p \leqslant \infty$, $p \neq 0$, ορίζουμε την ποσότητα

$$I_p(\mu) := \left(\int_{\mathbb{R}^n} \|x\|_2^p d\mu(x)\right)^{1/p}. \tag{4.29}$$

Ως συνήθως, αν το $K$ είναι Borel υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ με μέτρο Lebesgue $|K| = 1$, γράφουμε $I_p(K) := I_p(\mathbf{1}_K)$.

**Ορισμός 4.1.2.** *Έστω $\mu \in \mathcal{P}_{[n]}$ και $\delta \geqslant 1$. Ορίζουμε*

$$\begin{aligned} q_*(\mu) &:= \max\{k \leqslant n : k_*(Z_k(\mu)) \geqslant k\} \\ q_{-c}(\mu,\delta) &:= \max\{p \geqslant 1 : I_{-p}(\mu) \geqslant \frac{1}{\delta} I_2(\mu)\} \\ q_*(\mu,\delta) &:= \max\{k \leqslant n : k_*(Z_k(\mu)) \geqslant \frac{k}{\delta^2}\}. \end{aligned}$$

Στο [49] αποδεικνύεται ότι οι $p$–ροπές της Ευκλείδειας νόρμας ως προς ένα λογαριθμικά κοίλο μετρο ικανοποιούν μια ισχυρή αντίστροφη ανισότητα Hölder για κάθε $p \leqslant q_*$:

**Θεώρημα 4.1.3.** *Έστω $\mu \in \mathcal{CL}_{[n]}$. Τότε για κάθε $p \leqslant q_*(\mu)$,*

$$I_p(\mu) \leqslant C I_{-p}(\mu), \tag{4.30}$$

*όπου $C > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.*

Είναι φανερό ότι, για να έχει κάποιο νόημα το θεώρημα 4.1.3, θα πρέπει να έχουμε κάποια μη τετριμμένη εκτίμηση για την παράμετρο $q_*$. Η επόμενη πρόταση (βλέπε [48, Πρόταση 3.10] ή [49, Πρόταση 5.7]) μας δίνει ένα κάτω φράγμα για το $q_*$, με εξάρτηση από την $\psi_\alpha$ σταθερά, στην ισοτροπική περίπτωση.

**Πρόταση 4.1.4.** *Έστω $\mu \in \mathcal{I}_{[n]} \cap \mathcal{P}_{[n]}(\alpha, \beta)$. Τότε*

$$q_*(\mu) \geq c \frac{n^{\frac{\alpha}{2}}}{\beta^\alpha}, \tag{4.31}$$

*όπου $c > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.*

### *4.1.10 Μέτρα μικρής διαμέτρου*

**Ορισμός 4.1.5.** Έστω $\mu \in \mathcal{P}_{[n]}$. Λέμε ότι το μέτρο $\mu$ είναι *μικρής διαμέτρου* (με σταθερά $A > 0$) αν για κάθε $p \geqslant 2$ έχουμε ότι

$$I_p(\mu) \leqslant A I_2(\mu). \tag{4.32}$$

Ο ορισμός που δίνουμε εδώ είναι απλή γενίκευση του ορισμού που δίνεται στο [47] για την περίπτωση των κυρτών σωμάτων.

Θεωρούμε $\mu \in \mathcal{P}_{[n]}$ και θέτουμε $B := 4I_2(\mu) B_2^n$. Παρατηρήστε ότι από την ανισότητα του Markov, είναι $\frac{3}{4} \leqslant \mu(B) \leqslant 1$. Ορίζουμε λοιπόν ένα καινούριο μέτρο $\bar{\mu}$ στην $\mathcal{A}_n$ με τον ακόλουθο τρόπο: για κάθε $A \in \mathcal{A}_n$ θέτουμε

$$\bar{\mu}(A) := \frac{\mu(A \cap B)}{\mu(B)}.$$

Υποθέτουμε επιπλέον ότι $\mu \in \mathcal{L}_{[n]}$. Τότε, δεν είναι δύσκολο να δούμε ότι

$$I_2(\mu) \simeq I_2(\bar{\mu}),\ Z_2(\mu) \simeq Z_2(\bar{\mu}) \text{ και } f_{\bar{\mu}}(0)^{\frac{1}{n}} \simeq f_\mu(0)^{\frac{1}{n}}. \tag{4.33}$$

Επομένως, για κάθε μέτρο $\mu \in \mathcal{L}_{[n]}$, μπορούμε πάντα να βρούμε ένα μέτρο $\bar{\mu} \in \mathcal{L}_{[n]}$ μικρής διαμέτρου (που ικανοποιεί την (4.32) με μια απόλυτη σταθερά $A > 0$) που να ικανοποιεί την σχέση $f_{\bar{\mu}}(0)^{\frac{1}{n}} \simeq f_\mu(0)^{\frac{1}{n}}$.

Ακόμα, αν το $\mu$ είναι ισοτροπικό, τότε το $\bar{\mu}$ είναι σχεδόν ισοτροπικό. Σαν συνέπεια του [49, Θεώρημα 5.6] έχουμε το ακόλουθο:

**Πρόταση 4.1.6.** *Έστω $\mu \in \mathcal{L}$. Τότε,*

$$q_*(\bar{\mu}, \xi_1) \simeq q_{-c}(\bar{\mu}, \xi_2), \tag{4.34}$$

*όπου $\xi_1, \xi_2 \geqslant 1$ είναι απόλυτες σταθερές.*

## 4.2 Παράρτημα: τα σώματα $B_p(K,F)$ και $K_p(\mu)$

### 4.2α′ Τα σώματα $B_p(K,F)$

**Ορισμός 4.2.1.** Έστω $K$ κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$, $F \in G_{n,k}$, $1 \leq k < n$, $\theta \in S_F$ και $E := F^\perp$. Ορίζουμε $E^+(\theta) := \big\{x \in \big\langle E, \theta\big\rangle : \langle x, \theta\rangle \geq 0\big\}$. Για $p \geq 1$ ορίζουμε $B_p(K,F)$ το σώμα στον $F$ που έχει ακτινική συνάρτηση την

$$\rho_{B_p(K,F)}(\theta) = \Big(\int_{K\cap E^+(\theta)} \langle x, \theta\rangle^{p-1} dx\Big)^{\frac{1}{p}}, \qquad \theta \in S_F.$$

Η απόδειξη του επόμενου λήμματος χρησιμοποιεί την ανισότητα Prékopa–Leindler και έχει τις ρίζες της σε μια κλασική ανισότητα του Busemann.

**Λήμμα 4.2.2.** *Το $B_p(K,F)$ είναι κυρτό σώμα στον $F$ για κάθε $p \geq 1$.*

Στη συνέχεια χρησιμοποιούμε συχνά την εξής ταυτότητα: για κάθε Borel μετρήσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ και για κάθε κυρτό σώμα $A$ στον $\mathbb{R}^n$ ισχύει ότι:

$$\int_A f(x)dx = n\omega_n \int_{S^{n-1}} \int_0^{\rho_A(\theta)} t^{n-1} f(t\theta)dt \; d\sigma(\theta). \tag{4.35}$$

**Λήμμα 4.2.3 (πρώτη βασική ταυτότητα).** *Έστω $K$ κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$, $F \in G_{n,k}$ και $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ μια Borel μετρήσιμη συνάρτηση. Τότε,*

$$\int_K f(x)dx = k\omega_k \int_{S_F} \int_{K\cap E^+(\theta)} \langle x, \theta\rangle^{k-1} f(x)dx \, d\sigma_F(\theta). \tag{4.36}$$

*Απόδειξη.* Γράφουμε

$$\begin{aligned}
\int f(x)dx &= \int_F \left(\int_E f(y+z)dz\right) dy \\
&= k\omega_k \int_{S_F} \int_0^{+\infty} \left(\int_E t^{k-1} f(t\theta + z)dz\right) dt \, d\sigma_F(\theta) \\
&= k\omega_k \int_{S_F} \left(\int_0^{+\infty} \int_E t^{k-1} f(t\theta + z)dz \, dt\right) d\sigma_F(\theta) \\
&= k\omega_k \int_{S_F} \left(\int_{E^+(\theta)} \langle x, \theta\rangle^{k-1} f(x)dx\right) d\sigma_F(\theta).
\end{aligned}$$

Χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι, αν $x = t\theta + z$ τότε $x \in E^+(\theta)$ αν και μόνο αν $z \in E$ και $t \in (0, +\infty)$ (και τότε, $t = \langle x, \theta\rangle$). Εφαρμόζοντας την ταυτότητα που ελέγξαμε για την $f(x)\mathbf{1}_K(x)$ αντί για την $f(x)$, παίρνουμε τον ισχυρισμό του λήμματος. □

**Πόρισμα 4.2.4.** *Έστω $K$ κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$, $F \in G_{n,k}$, $1 \leq k < n$. Για κάθε $\phi \in S_F$ και $p \geq 0$ ισχύει ότι*

$$\begin{aligned}\int_K |\langle x, \phi\rangle|^p dx &= k\omega_k \int_{S_F} |\langle \theta, \phi\rangle|^p \left( \int_{K\cap E^+(\theta)} \langle x, \theta\rangle^{k+p-1} dx \right) d\sigma_F(\theta) \\ &= k\omega_k \int_{S_F} |\langle \theta, \phi\rangle|^p \ \rho^{k+p}_{B_{k+p}(K,F)}(\theta)\ d\sigma_F(\theta).\end{aligned}$$

*Απόδειξη.* Αν $x \in E^+(\theta)$, όπου $\theta \in S_F$, τότε $x = \langle x, \theta\rangle\theta + z$ όπου $z \in E$. Άρα, για κάθε $\phi \in S_F$ είναι $\langle x, \phi\rangle = \langle x, \theta\rangle\langle\theta, \phi\rangle$. Παίρνοντας λοιπόν στο προηγούμενο λήμμα $f(x) = |\langle x, \phi\rangle|^p$ για $\phi \in S_F$, έχουμε

$$\begin{aligned}\int_K |\langle x, \phi\rangle|^p dx &= k\omega_k \int_{S_F} \int_{K\cap E^+(\theta)} \langle x, \theta\rangle^{k-1}\ |\langle x, \phi\rangle|^p dx\, d\sigma_F(\theta) \\ &= k\omega_k \int_{S_F} |\langle \theta, \phi\rangle|^p \left( \int_{K\cap E^+(\theta)} \langle x, \theta\rangle^{k+p-1} dx \right) d\sigma_F(\theta).\end{aligned}$$ □

Εφαρμόζοντας το πόρισμα 4.2.4 για $p = 0$ παίρνουμε το εξής: αν $|K| = 1$ τότε

$$k\omega_k \int_{S_F} \left( \int_{K\cap E^+(\theta)} \langle x, \theta\rangle^{k-1} dx \right) d\sigma_F(\theta) = k\omega_k \int_{S_F} \rho^k_{B_k(K,F)}(\theta)\ d\sigma_F(\theta) = 1. \tag{4.37}$$

Από την άλλη, για κάθε $A \subseteq \mathbb{R}^k$ έχουμε

$$|A| = \omega_k \int_{S^{k-1}} \rho^k_A(\theta)\ d\sigma(\theta). \tag{4.38}$$

Συνδυάζοντας τις δύο σχέσεις έχουμε το εξης:

**Πόρισμα 4.2.5.** *Έστω $K$ κυρτό σώμα όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$ και $F \in G_{n,k}$, $1 \leq k < n$. Τότε,*

$$|B_k(K, F)| = \frac{1}{k} \tag{4.39}$$

*και*

$$\begin{aligned}|B_{2k}(K, F)| &= \omega_k \int_{S_F} \rho^k_{B_{2k}(K,F)}(\theta)\ d\sigma_F(\theta) \\ &= \omega_k \int_{S_F} \left( \int_{K\cap E^+(\theta)} \langle x, \theta\rangle^{2k-1} dx \right)^{\frac{1}{2}}\ d\sigma_F(\theta).\end{aligned}$$

**Λήμμα 4.2.6 (δεύτερη βασική ταυτότητα).** *Έστω $K$ κυρτό σώμα όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$ και $F \in G_{n,k}$, $1 \leq k < n$. Για κάθε $p \geq 1$,*

$$P_F\left(Z_p(K)\right) = (k+p)^{\frac{1}{p}} Z_p\left(B_{k+p}(K,F)\right). \tag{4.40}$$

*Απόδειξη.* Έστω $\theta \in S_F$. Τότε, έχουμε

$$\begin{aligned} h^p_{Z_p(B_{k+p}(K,F))}(\theta) &= (k+p)\int_{B_{k+p}(K,F)} |\langle x,\theta\rangle|^p\, dx \\ \text{(πολικές συντεταγμενες)} &= k\omega_k \int_{S_F}\int_0^{\rho_{B_{k+p}(K,F)}(\phi)} t^{k+p-1}\, |\langle \phi,\theta\rangle|^p\, dt\, d\sigma_F(\phi) \\ &= k\omega_k \int_{S_F} \rho^{k+p}_{B_{k+p}(K,F)}(\phi)\, |\langle\phi,\theta\rangle|^p\, d\sigma_F(\phi) \\ \text{(πόρισμα 4.2.4)} &= h^p_{Z_p(K)}(\theta) = h^p_{P_F(Z_p(K))}(\theta) \end{aligned}$$

όπου η τελευταία ισότητα ισχύει γενικότερα: αν $A$ είναι κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$, $F \in G_{n,k}$ και $\theta \in F$, τότε $h_A(\theta) = h_{P_F(A)}(\theta)$. □

**Παρατήρηση (αλλαγή μεταβλητής).** Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $T \in GL(n)$ και $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ Borel μετρήσιμη συνάρτηση. Τότε,

$$\int_{T(A)} f(x)\, dx = |\det(T)| \int_A f(Tx)\, dx. \tag{4.41}$$

**Λήμμα 4.2.7.** *Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^k$, $\lambda > 0$ και $p \geq 1$. Τότε,*

$$Z_p(\lambda A) = \lambda^{\frac{k}{p}+1} Z_p(A)$$

*Απόδειξη.* Αν $T = \lambda I_k$ τότε $\det(T) = \lambda^k$ και $T(A) = \lambda A$. Άρα για κάθε $\theta \in S^{k-1}$ έχουμε

$$\begin{aligned} h^p_{Z_p(\lambda A)}(\theta) &= \int_{\lambda A} |\langle x,\theta\rangle|^p\, dx = \lambda^k \int_A |\langle \lambda x,\theta\rangle|^p\, dx \\ &= \lambda^{k+p}\int_A |\langle x,\theta\rangle|^p\, dx = \lambda^{k+p}\, h^p_{Z_p(A)}(\theta). \qquad \square \end{aligned}$$

**Πόρισμα 4.2.8.** *Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^k$ και $p \geq 1$. Τότε αν $\overline{A} := \frac{1}{|A|^{1/k}} A$ είναι η κανονικοποιημένη ομοιοθετική εικόνα του $A$, ισχύει ότι*

$$Z_p(A) = |A|^{\frac{1}{p}+\frac{1}{k}}\, Z_p\left(\overline{A}\right).$$

*Απόδειξη.* Είναι $A = |A|^{1/k}\overline{A}$, οπότε εφαρμόζουμε το προηγούμενο λήμμα με $\lambda = |A|^{1/k}$.
□

**Πόρισμα 4.2.9.** *Έστω $K$ κυρτό σώμα όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$ και $F \in G_{n,k}$, $1 \leq k < n$. Για κάθε $1 \leq p \leq n$,*

$$P_F\left(Z_p(K)\right) = (k+p)^{\frac{1}{p}}\, |B_{k+p}(K,F)|^{\frac{1}{p}+\frac{1}{k}}\, Z_p\left(\overline{B_{k+p}}(K,F)\right). \tag{4.42}$$

### 4.2β′ Τα σώματα $K_p(f)$

**Ορισμός 4.2.10.** Έστω $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^+$ μια ολοκληρώσιμη και λογαριθμικά κοίλη συνάρτηση, με $\int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx = 1$. Για $p \geq 0$ ορίζουμε

(i) $Z_p(f)$ να είναι το σώμα στον $\mathbb{R}^n$ με συνάρτηση στήριξης

$$h_{Z_p(f)}(\theta) := \Big(\int_{\mathbb{R}^n} |\langle x,\theta\rangle|^p\, f(x)\, dx\Big)^{\frac{1}{p}}, \quad \theta \in S^{n-1}.$$

(ii) $I_p(f) := \Big(\int_{\mathbb{R}^n} \|x\|_2^p\, f(x)\, dx\Big)^{\frac{1}{p}}$.

(iii) $K_p(f)$ να είναι το σώμα στον $\mathbb{R}^n$ με ακτινική συνάρτηση

$$\rho_{K_p(f)}(\theta) := \Big(\frac{1}{f(0)}\int_0^{+\infty} pt^{p-1}\, f(t\theta)\, dt\Big)^{\frac{1}{p}}, \quad \theta \in S^{n-1}.$$

**Παρατήρηση.** Αν $K$ είναι ένα κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ με $0 \in \mathrm{int}(K)$ τότε για κάθε $p \geq 1$ ισχύει

$$K_p(\mathbf{1}_K) = K.$$

Πράγματι, για κάθε $\theta \in S^{n-1}$ έχουμε

$$\begin{aligned} \rho^p_{K_p(\mathbf{1}_K)}(\theta) &= \frac{1}{\mathbf{1}_K(0)}\int_0^{+\infty} pt^{p-1}\, \mathbf{1}_K(t\theta)\, dt \\ &= \int_0^{\rho_K(\theta)} pt^{p-1}\, dt = \rho_K^p(\theta). \end{aligned}$$

Για τη συνέχεια της παραγράφου θεωρούμε ότι η $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^+$ είναι ολοκληρώσιμη και λογαριθμικά κοίλη συνάρτηση, με $\int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx = 1$.

**Λήμμα 4.2.11.** *Για κάθε $\theta \in S^{n-1}$ και για κάθε $p \geq 0$,*

$$\int_{K_{n+p}(f)} |\langle x,\theta\rangle|^p\, dx = \frac{1}{f(0)}\int_{\mathbb{R}^n} |\langle x,\theta\rangle|^p\, f(x)\, dx. \tag{4.43}$$

*Απόδειξη.* Γράφουμε

$$\begin{aligned} \int_{K_{n+p}(f)} |\langle x,\theta\rangle|^p\, dx &= n\,\omega_n \int_{S^{n-1}}\int_0^{\rho_{K_{n+p}(f)}(\phi)} t^{n-1}\, |\langle t\,\phi,\theta\rangle|^p\, dt\, d\sigma(\phi) \\ &= \frac{n}{n+p}\,\omega_n \int_{S^{n-1}} \rho^{n+p}_{K_{n+p}(f)}(\phi)\, |\langle \phi,\theta\rangle|^p\, d\sigma(\phi) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{n}{n+p}\,\omega_n \int_{S^{n-1}} \frac{|\langle \phi,\theta\rangle|^p}{f(0)} \int_0^{+\infty} (n+p)\, t^{n+p-1}\, f(t\phi)\, dt\, d\sigma(\phi) \\ &= \frac{n\,\omega_n}{f(0)} \int_{S^{n-1}} \int_0^{+\infty} t^{n-1}\, |\langle t\phi,\theta\rangle|^p\, f(t\phi)\, dt\, d\sigma(\phi) \\ &= \frac{1}{f(0)} \int_{\mathbb{R}^n} |\langle x,\theta\rangle|^p\, f(x)\, dx. \qquad \square \end{aligned}$$

**Πόρισμα 4.2.12.** *Για κάθε* $p \geq 1$,

$$Z_p(f) = f(0)^{1/p}\, Z_p\left(K_{n+p}(f)\right). \tag{4.44}$$

*Επίσης, απο το πόρισμα (4.2.8),*

$$Z_p(f) = f(0)^{1/p}\, |K_{n+p}(f)|^{\frac{1}{p}+\frac{1}{n}}\, Z_p\left(\overline{K_{n+p}}(f)\right). \tag{4.45}$$

Όμοια αποδεικνύονται τα παρακάτω:

**Λήμμα 4.2.13.** *Για κάθε* $p > -n$,

$$\int_{K_{n+p}(f)} \|x\|_2^p\, dx = \frac{1}{f(0)} \int_{\mathbb{R}^n} \|x\|_2^p\, f(x)\, dx. \tag{4.46}$$

**Πόρισμα 4.2.14.** *Για κάθε* $p > -n$

$$I_p(f) = f(0)^{1/p}\, I_p\left(K_{n+p}(f)\right) = f(0)^{1/p}\, |K_{n+p}(f)|^{\frac{1}{p}+\frac{1}{n}}\, I_p\left(\overline{K_{n+p}}(f)\right). \tag{4.47}$$

### 4.2γ΄ Εκτιμήσεις όγκων

**Λήμμα 4.2.15.** *Έστω* $g : [0,\ +\infty) \longrightarrow [0,\ +\infty)$ *λογαριθμικά κοίλη συνάρτηση. Τότε,*

(i) *Η συνάρτηση*

$$p \longmapsto \Big(\frac{p}{\|g\|_\infty} \int_0^{+\infty} t^{p-1}\, g(t)\, dt\Big)^{\frac{1}{p}}$$

*είναι αύξουσα.*

(ii) *Η συνάρτηση*

$$p \longmapsto \Big(\frac{p}{g(0)\,\Gamma(p+1)} \int_0^{+\infty} t^{p-1}\, g(t)\, dt\Big)^{\frac{1}{p}}$$

*είναι φθίνουσα.*

**Πρόταση 4.2.16.** (α) *Το* $K_p(f)$ *είναι κυρτό σώμα στον* $\mathbb{R}^n$ *για κάθε* $p \geq 1$.

(β) *Αν η* $f$ *είναι άρτια, τότε* $f(0) = \|f\|_\infty$.

(γ) *Αν η* $f$ *έχει κέντρο βάρους το* $0$, *τότε*

$$f(0) \leq \|f\|_\infty \leq e^n f(0).$$

**Πρόταση 4.2.17.** *Για κάθε* $p < q$ *και* $\theta \in S^{n-1}$ *έχουμε ότι*

$$\begin{aligned}(4.48)\qquad \frac{\Gamma(p+1)^{1/p}}{\Gamma(q+1)^{1/q}}\,\rho_{K_q(f)}(\theta) \le \rho_{K_p(f)}(\theta) &\le \left(\frac{\|f\|_\infty}{f(0)}\right)^{\frac{1}{p}+\frac{1}{q}} \rho_{K_q(f)}(\theta)\\ &\le e^{\frac{n}{p}-\frac{n}{q}}\,\rho_{K_q(f)}(\theta).\end{aligned}$$

*Απόδειξη.* Η ακτινική συνάρτηση του $K_p(f)$ είναι η

$$\rho_{K_p(f)}(\theta) = \Big(\frac{p}{f(0)}\int_0^{+\infty} t^{p-1}\, f(t\,\theta)\, dt\Big)^{\frac{1}{p}}, \quad \theta \in S^{n-1}$$

Για κάθε $\theta \in S^{n-1}$ θεωρούμε την συνάτρηση $g(t) = g_\theta(t) := f(t\,\theta)$ και εφαρμόζουμε το λήμμα 4.2.15. □

**Πόρισμα 4.2.18.** *Για κάθε* $p < q$ *έχουμε ότι*

$$(4.49)\qquad \left(\frac{f(0)}{\|f\|_\infty}\right)^{\frac{1}{p}+\frac{1}{q}} |K_p(f)|^{1/n} \le |K_q(f)|^{1/n} \le \frac{\Gamma(q+1)^{1/q}}{\Gamma(p+1)^{1/p}}\,|K_p(f)|^{1/n},$$

*ή την ασθενέστερη*

$$(4.50)\qquad e^{\frac{n}{q}-\frac{n}{p}}\,|K_p(f)|^{1/n} \le |K_q(f)|^{1/n} \le \frac{\Gamma(q+1)^{1/q}}{\Gamma(p+1)^{1/p}}\,|K_p(f)|^{1/n}.$$

**Πρόταση 4.2.19.** *Ισχύουν τα ακόλουθα:*

(i) $|K_n(f)| = 1/f(0)$.

(ii) *Για κάθε* $p \ge 1$,

$$(4.51)\qquad \frac{1}{e} \le f(0)^{\frac{1}{n}+\frac{1}{p}}\,|K_{n+p}(f)|^{\frac{1}{n}+\frac{1}{p}} \le e^{\frac{n+p}{n}}.$$

(iii) *Για κάθε* $1 \le p \le c\,n$ *(όπου* $c > 0$ *απόλυτη σταθερά)*

$$(4.52)\qquad f(0)^{\frac{1}{n}+\frac{1}{p}}\,|K_{n+p}(f)|^{\frac{1}{n}+\frac{1}{p}} \simeq 1.$$

(iv) *Για κάθε* $1 \le p \le c\,n$ *(όπου* $c > 0$ *απόλυτη σταθερά)*

$$(4.53)\qquad f(0)^{\frac{1}{n}}\,Z_p(f) \simeq Z_p\left(\overline{K_{n+p}}(f)\right).$$

(v) *Για κάθε* $1 \le p \le c\,n$ *(όπου* $c > 0$ *απόλυτη σταθερά)*

$$(4.54)\qquad f(0)^{\frac{1}{n}}\,I_p(f) \simeq I_p\left(\overline{K_{n+p}}(f)\right).$$

*Απόδειξη.* Χρησιμοποιούμε τα προηγούμενα:

(i) Από το λήμμα 4.2.11 (ή το λήμμα 4.2.13) για $p=0$.

(ii) Έστω $p\geq 1$. Από το προηγούμενο πόρισμα για $n<n+p$ έχουμε ότι

$$e^{n(\frac{n}{n+p}-1)}\,|K_n(f)|\leq |K_{n+p}(f)|\leq \left(\frac{\Gamma(n+p+1)^{1/(n+p)}}{\Gamma(n+1)^{1/n}}\right)^n |K_n(f)|.$$

Όμως, από το (i) έχουμε $|K_n(f)|=1/f(0)$. Άρα,

$$e^{n(\frac{n}{n+p}-1)}\,f(0)^{-1}\leq |K_{n+p}(f)|\leq \left(\frac{n+p}{n}\right)^n f^{-1}(0)\leq e^p\,f(0)^{-1},$$

δηλαδή,

$$e^{\frac{n+p}{p}(\frac{n}{n+p}-1)}\,f(0)^{-\frac{n+p}{np}}\leq |K_{n+p}(f)|^{\frac{1}{n}+\frac{1}{p}}\leq e^{\frac{n+p}{n}}\,f(0)^{-\frac{n+p}{np}}.$$

(iii) Άμεσο από το (ii).

(iv) Άμεσο από το (iii) και τη σχέση (4.45).

(v) Άμεσο από το (iii) και τη σχέση (4.47). □

**Πρόταση 4.2.20.** *Ισχύουν οι εκτιμήσεις όγκων*

$$|K_{2n}(f)|^{\frac{2}{n}}\simeq f(0)^{-\frac{2}{n}} \tag{4.55}$$

*και*

$$|Z_n(f)|^{\frac{1}{n}}\simeq f(0)^{-\frac{1}{n}}. \tag{4.56}$$

*Απόδειξη.* Ο πρώτος ισχυρισμός προκύπτει από την προηγούμενη πρόταση (το (ii)) για $p=n$. Ακριβέστερα, έχουμε

$$\frac{1}{e}\leq f(0)^{-\frac{2}{n}}\,|K_{2n}(f)|^{\frac{2}{n}}\leq e^2.$$

Για τον δεύτερο ισχυρισμό, χρησιμοποιώντας τη σχέση (4.45) για $p=n$ έχουμε ότι

$$Z_n(f)=f(0)^{1/n}\,|K_{2n}(f)|^{\frac{2}{n}}\,Z_n\left(\overline{K_{2n}}(f)\right).$$

Όμως, το $\overline{K_{2n}}(f)$ είναι σώμα στον $\mathbb{R}^n$, άρα $\left|Z_n\left(\overline{K_{2n}}(f)\right)\right|=\left|\overline{K_{2n}}(f)\right|\simeq 1$. Έτσι, από την (4.55) παίρνουμε

$$|Z_n(f)|^{\frac{1}{n}}\simeq f(0)^{\frac{1}{n}}\,f(0)^{-\frac{2}{n}}=f(0)^{-\frac{1}{n}}.\qquad \square$$

### 4.2δ′ Προβολές σε υποχώρους

**Ορισμός 4.2.21.** Έστω $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^+$ ολοκληρώσιμη, λογαριθμικά κοίλη συνάρτηση με $\int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx = 1$ και έστω $F \in G_{n,k}$. Η *προβολή* της $f$ στον υπόχωρο $F$ είναι η συνάρτηση $\pi_F(f) : F \longrightarrow \mathbb{R}^+$ που ορίζεται από την

$$\pi_F(f)(x) := \int_{x+F^{\perp}} f(y)\, dy. \tag{4.57}$$

**Λήμμα 4.2.22.** *Ισχύει η*

$$\int_F \pi_F(f)(z)\, dz = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, dx. \tag{4.58}$$

*Ακόμα, για κάθε μετρήσιμη συνάρτηση $g : F \longrightarrow \mathbb{R}$,*

$$\int_F g(z)\, \pi_F(f)(z)\, dz = \int_{\mathbb{R}^n} g\left(P_F(x)\right)\, f(x)\, dx. \tag{4.59}$$

*Απόδειξη.* Η πρώτη σχέση προκύπτει άμεσα από τον ορισμό της $\pi_F(f)$ και το θεώρημα Fubini.

Για τη δεύτερη σχέση, αρκεί να θεωρήσουμε χαρακτηριστικές συναρτήσεις. Έστω λοιπόν $A$ ένα Borel υποσύνολο του $F$. Θέλουμε να δείξουμε ότι

$$\int_A \pi_F(f)(z)\, dz = \int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{1}_A\left(P_F(x)\right)\, f(x)\, dx.$$

Όμως, $\mathbf{1}_A\left(P_F(x)\right) = \mathbf{1}_{P_F^{-1}(A)}(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$. Άρα, η προηγούμενη σχέση, από τον ορισμό της $\pi_F(f)$ γίνεται

$$\int_A \int_{z+F^{\perp}} f(y)\, dy\, dz = \int_{P_F^{-1}(A)} f(x)\, dx,$$

το οποίο ισχύει από το θεώρημα Fubini. □

**Πόρισμα 4.2.23.** *Ισχύουν οι ταυτότητες*

$$\int_F \langle z, \theta\rangle\, \pi_F(f)(z)\, dz = \int_{\mathbb{R}^n} \langle x, \theta\rangle\, f(x)\, dx, \quad \theta \in S^{n-1}, \tag{4.60}$$

$$\int_F |\langle z, \theta\rangle|^p\, \pi_F(f)(z)\, dz = \int_{\mathbb{R}^n} |\langle x, \theta\rangle|^p\, f(x)\, dx, \quad \theta \in S^{n-1}\ ,\ p > 0, \tag{4.61}$$

$$\int_F \|z\|_2^p\, \pi_F(f)(z)\, dz = \int_{\mathbb{R}^n} \|P_F(x)\|_2^p\, f(x)\, dx. \quad p > -k \tag{4.62}$$

**Πρόταση 4.2.24.** *Ισχύουν τα παρακάτω:*

(i) *Για κάθε* $p \geq 1$,

$$P_F\left(Z_p(f)\right) = Z_p\left(\pi_F(f)\right). \tag{4.63}$$

(ii) *Για κάθε* $F \in G_{n,k}$,

$$\left|P_F\left(Z_k(f)\right)\right|^{1/k} \pi_F(f)(0)^{1/k} \simeq 1. \tag{4.64}$$

(iii) *Για κάθε κυρτό σώμα* $K$ *όγκου* 1 *στον* $\mathbb{R}^n$ *και για κάθε* $F \in G_{n,k}$,

$$\left|P_F\left(Z_k(K)\right)\right|^{1/k} \left|K \cap F^{\perp}\right|^{1/k} \simeq 1. \tag{4.65}$$

*Απόδειξη.* Για την απόδειξη:

(i) εφαρμόζουμε την (4.61) για $A = Z_p(f)$ και χρησιμοποιούμε το γεγονός ότι

$$h_{P_F(A)}(\theta) = h_A(\theta), \quad \forall \theta \in S_F.$$

(ii) εφαρμόζοντας την (4.56) για την $\pi_F(f)$ παίρνουμε ότι

$$\left|Z_k\left(\pi_F(f)\right)\right|^{1/k} \pi_F(f)(0)^{1/k} \simeq 1,$$

και το ζητούμενο έπεται από το (i).

(iii) εφαρμόζουμε το (ii) για την $f = \mathbf{1}_A$ και το γεγονός ότι

$$\pi_F(\mathbf{1}_K)(0) = \left|K \cap F^{\perp}\right|. \qquad \square$$

Τέλος, χρησιμοποιώντας τους ορισμούς, ελέγχουμε εύκολα ότι για κάθε $F \in G_{n,k}$ και $p > 0$,

$$B_p\left(K,F\right) = K_p\left(\pi_F(\mathbf{1}_K)\right). \tag{4.66}$$

# Κεφάλαιο 5

# Ακτίνα όγκου τυχαίων πολυτόπων

## 5.1 Το πρόβλημα

Έστω $K$ ένα κυρτό σώμα όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$. Θέλουμε να εκτιμήσουμε τη μέση τιμή

$$\mathbb{E}(K,N) = \mathbb{E}\,|K_N|^{1/n} = \int_K \cdots \int_K |\mathrm{conv}(x_1,\ldots,x_N)|^{1/n} dx_N \cdots dx_1 \tag{1.35}$$

της ακτίνας όγκου του $K_N = \mathrm{conv}(x_1,\ldots,x_N)$. Χρησιμοποιώντας ένα πρόσφατο αποτέλεσμα του Γ. Παούρη (βλέπε [49, Πρόταση 5.4]) για τις αρνητικές ροπές της συνάρτησης στήριξης $h_{Z_q(K)}$ του $Z_q(K)$, μπορούμε να δώσουμε ικανοποιητική απάντηση στο πρόβλημα για όλες τις τιμές του $N$.

**Θεώρημα 5.1.1.** *Έστω $K$ ένα κυρτό σώμα όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$. Για κάθε $N \leq \exp(n)$, έχουμε*

$$c_4 \frac{\sqrt{\ln(2N/n)}}{\sqrt{n}} \leqslant |K_N|^{1/n} \leqslant c_5 L_K \frac{\sqrt{\ln(2N/n)}}{\sqrt{n}}$$

*με πιθανότητα μεγαλύτερη από $1-\frac{1}{N}$, όπου $c_4, c_5 > 0$ είναι απόλυτες σταθερές.*

Το κάτω φράγμα προκύπτει από τη σύγκριση με την Ευκλείδεια μπάλα. Έχει αποδειχθεί στο [22, Λήμμα 3.3] ότι αν $K$ είναι ένα κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ με όγκο 1, τότε

$$\mathbb{P}\left(|K_N| \geqslant t\right) \geqslant \mathbb{P}(|[\overline{B}_2^n]_N| \geqslant t) \tag{5.1}$$

για κάθε $t > 0$. Επομένως, αρκεί να περιοριστούμε στην περίπτωση της μπάλας $B_2^n$. Στο [20] έχει επίσης αποδειχθεί ότι υπάρχουν σταθερές $c_1 > 1$ και $c_2 > 0$ τέτοιες ώστε αν $N \geqslant c_1 n$ και $x_1, \ldots, x_N$ είναι τυχαία σημεία που κατανέμονται ανεξάρτητα και ομοιόμορφα στην $\overline{B}_2^n$, τότε

$$[\overline{B}_2^n]_N \supseteq c_2 \min\left\{\frac{\sqrt{\ln(2N/n)}}{\sqrt{n}}, 1\right\} \overline{B}_2^n \tag{5.2}$$

με πιθανότητα μεγαλύτερη από $1 - \exp(-n)$. Έτσι λοιπόν, αν $N \geqslant c_1 n$ τότε, με πιθανότητα μεγαλύτερη από $1 - \exp(-n)$, έχουμε ότι

$$|K_N|^{1/n} \geqslant c_2 \min\left\{\frac{\sqrt{\ln(2N/n)}}{\sqrt{n}}, 1\right\}, \tag{5.3}$$

όπου $c_1 > 1$ και $c_2 > 0$ είναι απόλυτες σταθερές.

Η περίπτωση $n < N < c_1 n$ συζητήθηκε στο Κεφάλαιο 2, όπου αποδείχθηκε ότι η (5.2) ισχύει και εδώ με πιθανότητα μεγαλύτερη από $1 - e^{-cn/\ln n}$, όπου $c > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά. Συγκρίνοντας την τελευταία εκτίμηση με την (5.1), βλέπουμε ότι η (5.3) ισχύει για κάθε $N > n$ (με ελαφρώς ασθενέστερη εκτίμηση για την πιθανότητα).

## 5.2 Άνω φράγμα για τον όγκο τυχαίων πολυτόπων

Η πρόταση 3.4.3, σε συνδυασμό με την ανισότητα του Urysohn, μας δίνει το ακόλουθο:

**Πρόταση 5.2.1.** *Έστω $K$ ένα ισοτροπικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Αν $N > n$ και $q \geqslant 2 \ln N$, τότε*

$$\mathbb{E}(K, N) \leqslant \frac{c_1 \mathbb{E}\,[w(K_N)]}{\sqrt{n}} \leqslant \frac{c_2\, w(Z_q(K))}{\sqrt{n}}, \tag{5.4}$$

*όπου $c_1, c_2 > 0$ είναι απόλυτες σταθερές.*

Η πρόταση 5.2.1 μας οδηγεί, υπό μία έννοια, στο να δώσουμε άνω φράγματα για το μέσο πλάτος $w(Z_q(K))$. Έχει αποδειχθεί στο [48] ότι, αν $q = \ln N \leq \sqrt{n}$ τότε $w(Z_q(K)) \leqslant c\sqrt{q} L_K$. Άρα,

$$\mathbb{E}(K, N) \leqslant c \frac{\sqrt{\ln(N/n)} L_K}{\sqrt{n}}, \tag{5.5}$$

Αυτή είναι και η εκτίμηση που θέλουμε να δείξουμε, τουλάχιστον στην περίπτωση $N \leqslant e^{\sqrt{n}}$. Για $q = \ln N > \sqrt{n}$ ξέρουμε ότι $w(Z_q(K)) \leqslant \frac{qL_K}{\sqrt[4]{n}}$, αφού $Z_q(K) \subseteq (q/\sqrt{n})\, Z_{\sqrt{n}}(K)$. Αυτό το φράγμα για το $w(Z_q(K))$, πιθανότατα δεν είναι βέλτιστο.

Ωστόσο, μπορούμε να εκμεταλλευτούμε περισσότερο την απλή εκτίμηση του λήμματος 3.4.1 και να πάρουμε ακριβή εκτίμηση για μεγαλύτερες τιμές του $N$. Θα χρησιμοποιήσουμε τα παρακάτω:

*Παρατήρηση 1.* Έστω $A$ ένα συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Για κάθε $1 \leqslant q < n$, θέτουμε

$$w_{-q}(A) = \left( \int_{S^{n-1}} \frac{1}{h_A^q(\theta)}\, d\sigma(\theta) \right)^{-1/q} \tag{5.6}$$

Απλή εφαρμογή της ανισότητας του Hölder μας δείχνει ότι

$$\begin{aligned} \left( \frac{|A^\circ|}{|B_2^n|} \right)^{1/n} &= \left( \int_{S^{n-1}} \frac{1}{h_A^n(\theta)}\, d\sigma(\theta) \right)^{1/n} \\ &\geqslant \left( \int_{S^{n-1}} \frac{1}{h_A^q(\theta)}\, d\sigma(\theta) \right)^{1/q} = \frac{1}{w_{-q}(A)}, \end{aligned}$$

και από την ανισότητα Blaschke–Santaló βλέπουμε ότι

$$|A|^{1/n} \leqslant |B_2^n|^{1/n} w_{-q}(A) \leqslant \frac{c_1 w_{-q}(A)}{\sqrt{n}}. \tag{5.7}$$

*Παρατήρηση 2.* Ένα πρόσφατο αποτέλεσμα του Γ. Παούρη (βλέπε [49, Πρόταση 5.4]) μας δείχνει ότι αν $A$ είναι ένα ισοτροπικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ τότε, για κάθε $1 \leqslant q < n/2$,

$$w_{-q}(Z_q(A)) \simeq \frac{\sqrt{q}}{\sqrt{n}}\, I_{-q}(A) \tag{5.8}$$

όπου,

$$I_p(A) = \left( \int_A \|x\|_2^p\, dx \right)^{1/p}, \qquad p > -n. \tag{5.9}$$

*Παρατήρηση 3.* Έστω $K$ ένα ισοτροπικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$, έστω $N > n^2$ και $q = 2\ln(2N)$. Γράφουμε

$$[w_{-q/2}(Z_q(K))]^{-q} = \left( \int_{S^{n-1}} \frac{1}{h_{Z_q(K)}^{q/2}(\theta)}\, d\sigma(\theta) \right)^2$$

$$\leqslant \quad \left(\int_{S^{n-1}} \frac{1}{h_{K_N}^q(\theta)}\,d\sigma(\theta)\right)\left(\int_{S^{n-1}} \frac{h_{K_N}^q(\theta)}{h_{Z_q(K)}^q(\theta)}\,d\sigma(\theta)\right).$$

Παρατηρούμε ότι $K_N \subseteq K \subseteq (n+1)L_K B_2^n$ και $L_K\, B_2^n = Z_2(K) \subseteq Z_q(K)$, άρα, $h_{K_N}(\theta) \leqslant (n+1)h_{Z_q(K)}(\theta)$ για κάθε $\theta \in S^{n-1}$. Οπότε,

$$\int_{S^{n-1}} \frac{h_{K_N}^q(\theta)}{h_{Z_q(K)}^q(\theta)}\,d\sigma(\theta) = \int_0^{n+1} qt^{q-1}\left[\sigma(\theta :\, h_{K_N}(\theta) \geqslant th_{Z_q(K)}(\theta))\right]\,dt. \tag{5.10}$$

*Παρατήρηση 4.* Παίρνοντας μέση τιμή στην (5.10) και κάνοντας χρήση του λήμματος 3.4.2, βλέπουμε ότι, για κάθε $a > 1$,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\int_{S^{n-1}} \frac{h_{K_N}^q(\theta)}{h_{Z_q(K)}^q(\theta)}\,d\sigma(\theta)\right] &\leqslant a^q + \int_a^{n+1} qt^{q-1}Nt^{-q}\,dt \\ &= a^q + qN\ln\left(\frac{n+1}{a}\right).\end{aligned}$$

Επιλέγοντας $a = 2e$ και παρατηρώντας ότι, από την επιλογή του $q$, είναι $e^q = (2N)^2$, έχουμε ότι

$$\mathbb{E}\left[\int_{S^{n-1}} \frac{h_{K_N}^q(\theta)}{h_{Z_q(K)}^q(\theta)}\,d\sigma(\theta)\right] \leqslant c_2^q \tag{5.11}$$

όπου $c_2 > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά. Έτσι, από την ανισότητα του Markov έχουμε ότι

$$\int_{S^{n-1}} \frac{h_{K_N}^q(\theta)}{h_{Z_q(K)}^q(\theta)}\,d\sigma(\theta) \leqslant (c_2 e)^q \tag{5.12}$$

με πιθανότητα μεγαλύτερη από $1 - e^{-q}$. Βάσει λοιπόν της παρατήρησης 3, συμπεραίνουμε ότι $[w_{-q/2}(Z_q(K))]^{-q} \leqslant c_3^q[w_{-q}(K_N)]^{-q}$, δηλαδή

$$w_{-q}(K_N) \leqslant c_4 w_{-q/2}(Z_q(K)) \tag{5.13}$$

με πιθανότητα μεγαλύτερη από $1 - e^{-q}$.

**Απόδειξη του θεωρήματος 5.1.1**. Υποθέτουμε ότι το $K_N$ ικανοποιεί την (5.13) και θέτουμε $S_N = K_N - K_N$. Από την παρατήρηση 1 έχουμε

$$|K_N|^{1/n} \leqslant |S_N|^{1/n} \leqslant \frac{c_1}{\sqrt{n}} w_{-q}(S_N) = \frac{2c_1}{\sqrt{n}} w_{-q}(K_N). \tag{5.14}$$

Έτσι, η παρατήρηση 4 μας δίνει ότι

$$|K_N|^{1/n} \leqslant \frac{c_5}{\sqrt{n}} w_{-q/2}(Z_q(K)) \tag{5.15}$$

με πιθανότητα μεγαλύτερη από $1-e^{-q}$. Αφού $Z_q(K) \subseteq cZ_{q/2}(K)$, χρησιμοποιώντας την παρατήρηση 2 γράφουμε

$$w_{-q/2}(Z_q(K)) \leqslant c_6 w_{-q/2}(Z_{q/2}(K)) \leqslant \frac{c_7\sqrt{q}}{\sqrt{n}} I_{-q/2}(K). \tag{5.16}$$

Το $K$ είναι ισοτροπικό, οπότε $I_{-q/2}(K) \leqslant I_2(K) = \sqrt{n}\, L_K$, από το οποίο έπεται ότι

$$w_{-q/2}(Z_q(K)) \leqslant c_7\sqrt{q}\, L_K. \tag{5.17}$$

Βάζοντας όλα τα παραπάνω μαζί, έχουμε ότι

$$|K_N|^{1/n} \leqslant \frac{c\sqrt{q}}{\sqrt{n}}\, L_K \simeq \frac{\sqrt{\ln(N/n)}L_K}{\sqrt{n}}, \tag{5.18}$$

με πιθανότητα μεγαλύτερη από $1-e^{-q} \geqslant 1-\frac{1}{N}$. Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη.
$\square$

# Κεφάλαιο 6

# $\Psi_2$-συμπεριφορά, αρνητικές ροπές και ισοτροπική σταθερά

## 6.1 Ευσταθείς κλάσεις μέτρων

Ξεκινάμε από μια απλή αλλά κρίσιμη παρατήρηση από το άρθρο [15] των Bourgain, Klartag και Milman. Μπορούμε να δούμε ότι η ακολουθία

$$L_n := \sup\{L_K : K \text{ κυρτό σώμα στον } \mathbb{R}^n\}$$

είναι ουσιαστικά αύξουσα ως προς $n$: για κάθε $k \leqslant n$ έχουμε $L_k \leqslant CL_n$, όπου $C > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά. Έτσι, από την (4.20) βλέπουμε ότι αν $K_0$ είναι ένα ισοτροπικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ τέτοιο ώστε $L_{K_0} \simeq L_n$ τότε, για κάθε $F \in G_{n,k}$,

$$|K_0 \cap F^{\perp}|^{1/k} \simeq \frac{L_{\overline{B_{k+1}(K_0,F)}}}{L_{K_0}} \leqslant C_1 \frac{L_k}{L_n} \leqslant C_2. \tag{6.1}$$

Χρησιμοποιώντας ιδέες από το [15] μπορούμε να εκμεταλλευτούμε αυτή την ιδιότητα των σωμάτων με «ακραία ισοτροπική σταθερά» και να πάρουμε ένα άνω φράγμα για τις αρνητικές ροπές της Ευκλείδειας νόρμας πάνω στο $K_0$. Εισάγουμε πρώτα κάποια ορολογία ώστε να μπορούμε να εφαρμόζουμε επιχειρήματα αυτού του είδους σε ένα γενικότερο πλαίσιο.

**Ορισμός 6.1.1.** Ορίζουμε $\mathcal{P} := \cup_{i=1}^{\infty} \mathcal{P}_{[n]}$. Ομοίως, $\mathcal{IP} := \cup_{i=1}^{\infty} \mathcal{IP}_{[n]}$, κλπ.

Έστω $\mathcal{U}$ μια υποκλάση της $\mathcal{P}$. Θέτουμε $\mathcal{U}_{[n]} = \mathcal{U} \cap \mathcal{P}_{[n]}$. Λέμε ότι η $\mathcal{U}$ είναι **ευσταθής** αν ικανοποιεί τις παρακάτω δύο συνθήκες:

(i) Αν $\mu \in \mathcal{U}_{[n]}$ τότε $\pi_F(\mu) \in \mathcal{U}_{[\dim F]}$ για κάθε $k \leqslant n$ και $F \in G_{n,k}$.

(ii) Αν $m \in \mathbb{N}$ και $\mu_i \in \mathcal{U}_{[n_i]}$, $i = 1, \ldots, m$, τότε

$$\mu_1 \otimes \cdots \otimes \mu_m \in \mathcal{U}_{[n_1+\ldots+n_m]}.$$

Συμφωνούμε ότι η κενή κλάση είναι ευσταθής. Σημειώνουμε τέλος ότι, αν οι $\mathcal{U}_1$ και $\mathcal{U}_2$ είναι ευσταθείς κλάσεις, τότε και η $\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2$ είναι επίσης ευσταθής.

Η επόμενη πρόταση είναι μετάφραση γνωστών αποτελεσμάτων στη γλώσσα των ευσταθών κλάσεων.

**Πρόταση 6.1.2.** *Οι κλάσεις $S\mathcal{P}$, $C\mathcal{P}$, $\mathcal{L}$ και $\mathcal{I}$ είναι ευσταθείς.*

*Σημείωση.* Η κλάση $\mathcal{K} := \bigcup_{n=1}^{\infty}\{\mu \in \mathcal{P}_{[n]} : \mu = \mathbf{1}_{\overline{K}}\ ;\ K \in \mathcal{K}_{[n]}\}$ δεν είναι ευσταθής.

**Πρόταση 6.1.3.** *Έστω $\mathcal{U}$ μια ευσταθής κλάση μέτρων. Αν ο $n$ είναι άρτιος και $k = \frac{n}{2}$ τότε για κάθε $\mu \in \mathcal{U}_{[n]}$ και $F \in G_{n,k}$ έχουμε*

$$f_{\pi_F(\mu)}(0)^{\frac{1}{k}} \leqslant \sup_{\mu \in \mathcal{U}_{[n]}} f_\mu(0)^{\frac{1}{n}} \ . \tag{6.2}$$

*Επίσης, αν $\rho_n(\mathcal{U}) := \sup_{\mu \in \mathcal{U}_{[n]}} f_\mu(0)^{\frac{1}{n}}$ τότε*

$$\rho_{n-1}(\mathcal{U}) \leqslant \rho_n(\mathcal{U}) \left(\frac{\rho_{n-1}(\mathcal{U})}{\rho_1(\mathcal{U})}\right)^{\frac{1}{n}} . \tag{6.3}$$

*Απόδειξη.* Για τον πρώτο ισχυρισμό χρησιμοποιούμε το γεγονός ότι $\pi_F(\mu) \otimes \pi_F(\mu) \in \mathcal{U}_{[n]}$ και

$$f_{(\pi_F(\mu)\otimes\pi_F(\mu))}(0) = [f_{\pi_F(\mu)}(0)]^2.$$

Για τον δεύτερο ισχυρισμό χρησιμοποιούμε την παρατήρηση ότι αν $\mu_1 \in \mathcal{U}_{[n-1]}$ και $\mu_2 \in \mathcal{U}_{[1]}$ τότε $\mu_1 \otimes \mu_2 \in \mathcal{U}_{[n]}$ και $f_{\mu_1 \otimes \mu_2}(0) = f_{\mu_1}(0) f_{\mu_2}(0)$. $\square$

*Σημείωση.* Από την πρόταση 6.1.3 έπεται ότι, σε μια κλάση που ικανοποιεί την

$$e^{-n} \leqslant \rho_n(\mathcal{U}) \leqslant e^n,$$

για να φράξουμε από πάνω την $\rho_n(\mathcal{U})$ αρκεί να εξετάσουμε την περίπτωση που ο $n$ είναι άρτιος. Σημειώνουμε ότι η $\mathcal{IL}$ είναι μια τέτοια κλάση.

Στην παράγραφο αυτη είσάγουμε μία εύσταθή κλάση από $\psi_\alpha$–μέτρα, την $\mathcal{P}_\alpha(\beta)$

Έστω $\mu \in \mathcal{CP}_{[n]}$. Για κάθε $\theta \in S^{n-1}$ και για κάθε $\lambda > 0$ ορίζουμε

$$h_{\mu,\theta}(\lambda) := h(\lambda) = \ln\left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{\lambda\langle x,\theta\rangle} d\mu(x)\right). \tag{6.4}$$

Επίσης, για $\alpha \in (1,2]$, ορίζουμε

$$\tilde{\psi}_{\alpha,\mu}(\theta) := \sup_{\lambda>0} \frac{1}{\lambda} h(\lambda)^{\frac{1}{\alpha_*}} = \sup_{\lambda>0} \frac{1}{\lambda}\left(\ln \int_{\mathbb{R}^n} e^{\lambda\langle x,\theta\rangle} d\mu(x)\right)^{\frac{1}{\alpha_*}}, \tag{6.5}$$

όπου $\alpha_*$ είναι ο συζυγής εκθέτης του $\alpha$, δηλαδή $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha_*} = 1$.

**Ορισμός 6.1.4.** Έστω $\mu$ ένα μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$. Για κάθε $\alpha \in (1,2]$ ορίζουμε

$$\tilde{\beta}_{\mu,\alpha} := \sup_{\theta \in S^{n-1}} \frac{\tilde{\psi}_{\alpha,\mu}(\theta)}{h_{Z_2(\mu)}(\theta)}. \tag{6.6}$$

Επίσης,

$$\mathcal{P}_\alpha(\beta) := \bigcup_{n=1}^{\infty} \{\mu \in \mathcal{P}_{[n]} : \tilde{\beta}_{\mu,\alpha} \leqslant \beta\} \tag{6.7}$$

**Πρόταση 6.1.5.** (i) *Έστω $\mu \in \mathcal{CP}_{[n]}$. Για κάθε $\alpha \in (1,2]$ και για κάθε $\theta \in S^{n-1}$ έχουμε ότι*

$$\|\langle \cdot, \theta\rangle\|_{\psi_\alpha} \leqslant C \max\{\widetilde{\psi}_{\alpha,\mu}(\theta), \widetilde{\psi}_{\alpha,\mu}(-\theta)\} \tag{6.8}$$

*όπου $C > 0$ είναι απόλυτη σταθερά.*

(ii) *Έστω $\mu \in \mathcal{SP}_{[n]}$, τότε για κάθε $\theta \in S^{n-1}$ έχουμε ότι*

$$C_1 \widetilde{\psi}_{2,\mu}(\theta) \leqslant \|\langle \cdot, \theta\rangle\|_{\psi_2} \leqslant C_2 \widetilde{\psi}_{2,\mu}(\theta) \tag{6.9}$$

*όπου $C_1, C_2 > 0$ είναι απόλυτες σταθερές.*

*Απόδειξη.* Έστω $\alpha \in (1,2]$ και $\alpha_* \in (2,\infty)$ ο συζυγής εκθέτης του $\alpha$. Θέτουμε $\psi_{-1} := \tilde{\psi}_{\alpha,\mu}(-\theta)$, $\psi_1 := \tilde{\psi}_{\alpha,\mu}(\theta)$, $\psi_0 := \max\{\tilde{\psi}_{\alpha,\mu}(\theta), \tilde{\psi}_{\alpha,\mu}(-\theta)\}$ και $\psi_2 := \|\langle \cdot, \theta\rangle\|_{\psi_\alpha}$.

Για κάθε $\lambda > 0$ ισχύει ότι

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{\lambda\langle x,\theta\rangle} d\mu(x) \leqslant \exp(\lambda^{\alpha_*}\psi_1^{\alpha_*}). \tag{6.10}$$

Άρα, από την ανισότητα του Markov συμπεραίνουμε ότι για κάθε $t > 0$,

$$\mu\{x : e^{\lambda\langle x,\theta\rangle} \geqslant e^{t^\alpha} e^{\lambda^{\alpha_*}\psi_1^{\alpha_*}}\} \leqslant e^{-t^\alpha}. \tag{6.11}$$

Ισοδύναμα,

$$\mu\left\{x : \langle x,\theta\rangle \geqslant \frac{t^\alpha}{\lambda} + \lambda^{\alpha_*-1}\psi_1^{\alpha_*}\right\} \leqslant e^{-t^\alpha}. \tag{6.12}$$

Επιλέγοντας $\lambda := \frac{t^{\alpha-1}}{\psi_1}$, παίρνουμε

$$\mu\{x : \langle x,\theta\rangle \geqslant 2t\psi_1\} \leqslant e^{-t^\alpha}. \tag{6.13}$$

Όμοια, για κάθε $t > 0$ έχουμε

$$\mu\{x : \langle x,-\theta\rangle \geq 2t\psi_{-1}\} \leqslant e^{-t^\alpha}. \tag{6.14}$$

Επομένως,

$$\begin{aligned}\mu\{x : |\langle x,\theta\rangle| \geq 2t\psi_0\} &= \mu\{x : \langle x,\theta\rangle \geq 2t\psi_0\} + \mu\{x : \langle x,-\theta\rangle \geq 2t\psi_0\}\\ &\leqslant \mu\{x : \langle x,\theta\rangle \geq 2t\psi_1\} + \mu\{x : \langle x,-\theta\rangle \geq 2t\psi_{-1}\}\\ &\leqslant 2e^{-t^\alpha}.\end{aligned}$$

Η τελευταία ανισότητα δείχνει ότι $\psi_2 \leqslant C_1\psi_0$, και έχουμε τελειώσει με το πρώτο μέρος της πρότασης.

Για το δεύτερο μέρος υποθέτουμε το $\mu$ είναι συμμετρικό και ότι $\alpha = 2$. Έχουμε να αποδείξουμε μόνο την αριστερή ανισότητα στην (6.9). Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι το $\mu$ είναι συμμετρικό, βλέπουμε ότι για κάθε περιττό $k \in \mathbb{N}$

$$\int_{\mathbb{R}^n} \langle x,\theta\rangle^k d\mu(x) = 0$$

Άρα,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} e^{\lambda\langle x,\theta\rangle} d\mu(x) &= \sum_{k=0}^{\infty}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{\lambda^k\langle x,\theta\rangle^k}{k!}d\mu(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^{2k}}{(2k)!}\int_{\mathbb{R}^n}\langle x,\theta\rangle^{2k}d\mu(x)\\ &\leqslant \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\lambda)^{2k}}{(2k)!}\,(2k)^k\ \psi_2^{2k}) \leqslant \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\lambda)^{2k}}{(2k)!}\,(2e)^k\ k!\ \psi_2^{2k}\\ &\leqslant \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(2e\lambda^2\psi_2^2)^k}{k!} = \exp\left(2e\lambda^2\psi_2^2\right)\end{aligned}$$

Έπεται ότι

$$\psi_1 := \sup_{\lambda>0}\frac{1}{\lambda}\left(\log\int_{\mathbb{R}^n} e^{\lambda\langle x,\theta\rangle}d\mu(x)\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant \sqrt{2e}\ \psi_2$$

Η απόδειξη είναι πλήρης. □

**Πόρισμα 6.1.6.** *Για κάθε $\alpha\in(1,2]$,*

$$\mathcal{CP}_\alpha(\beta)\subseteq\mathcal{CP}(\alpha,c\beta) \tag{6.15}$$

*και*

$$\mathcal{SP}(2,c_2\beta)\subseteq\mathcal{SP}_2(\beta)\subseteq\mathcal{SP}(2,c_1\beta), \tag{6.16}$$

*όπου $c,c_1,c_2>0$ είναι απόλυτες σταθερές.*

*Απόδειξη.* Πράγματι, αν $\mu\in\mathcal{CP}_\alpha(\beta)$ τότε από την πρόταση 6.1.5 έχουμε ότι

$$\sup_{\theta\in S^{n-1}}\frac{h_{\psi_\alpha(\mu)}(\theta)}{h_{Z_2(\mu)}(\theta)} \leqslant c\sup_{\theta\in S^{n-1}}\frac{\tilde{\psi}_{\alpha,\mu}(\theta)}{h_{Z_2(\mu)}(\theta)} \leqslant c\beta \tag{6.17}$$

Αυτό σημαίνει ότι $\mu\in\mathcal{CP}(\alpha,c\beta)$, λόγω της (4.26). Το δεύτερο μέρος της πρότασης αποδεικνύεται με τον ίδιο τρόπο. □

Στη συνέχεια, αποδεικνύουμε ότι η κλάση $\mathcal{P}_\alpha(\beta)$ είναι ευσταθής. Η συμπεριφορά της $\tilde{\psi}_{\alpha,\mu}$ ως προς γινόμενα μέτρων περιγράφεται από την παρακάτω πρόταση:

**Πρόταση 6.1.7.** *Έστω $k$ ένας θετικός ακέραιος και έστω $\mu_i\in\mathcal{CP}_{[n_i]}$ και $\theta_i\in S^{n_i-1}$, $i=1,\dots k$. Αν $\tilde{\psi}_{\alpha,\mu_i}(\theta_i)<\infty$ για κάθε $i\leqslant k$ και για κάποιο $\alpha\in(1,2]$, τότε*

$$\tilde{\psi}_{\alpha,\mu}\left((\theta_1,\dots,\theta_k)\right)\leqslant\left(\sum_{i=1}^{k}\tilde{\psi}^{\alpha_*}_{\alpha,\mu_i}(\theta_i)\right)^{1/\alpha_*}, \tag{6.18}$$

*όπου $\mu=\mu_1\otimes\cdots\otimes\mu_k$.*

*Απόδειξη.* Για κάθε $\lambda > 0$ γράφουμε το

$$\frac{1}{\lambda^{\alpha_*}} \ln \left( \int_{\mathbb{R}^{n_1}} \cdots \int_{\mathbb{R}^{n_k}} e^{\lambda \sum_{i=1}^k \langle x_i, \theta_i \rangle} d\mu_k(x_k) \dots d\mu_1(x_1) \right)$$

ως εξής:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda^{\alpha_*}} \ln \left( \prod_{i=1}^k \int_{\mathbb{R}^{n_i}} e^{\lambda \langle x_i, \theta_i \rangle} d\mu_i(x_i) \right) &= \frac{1}{\lambda^{\alpha_*}} \sum_{i=1}^k \ln \left( \int_{\mathbb{R}^{n_i}} e^{\lambda \langle x_i, \theta_i \rangle} d\mu_i(x_i) \right) \\ &\leqslant \frac{1}{\lambda^{\alpha_*}} \sum_{i=1}^k \lambda^{\alpha_*} \tilde{\psi}_{\alpha,\mu_i}^{\alpha_*}(\theta_i) \\ &\leqslant \sum_{i=1}^k \tilde{\psi}_{\alpha,\mu_i}^{\alpha_*}(\theta_i). \end{aligned}$$

Παίρνοντας supremum ως προς $\lambda > 0$, έχουμε το αποτέλεσμα. □

Η συμπεριφορά της $\tilde{\psi}_{\alpha,\mu}$ ως προς προβολές περιγράφεται από την παρακάτω πρόταση:

**Πρόταση 6.1.8.** *Έστω $\mu \in \mathcal{CP}_{[n]}$. Έστω $F \in G_{n,k}$ και $\theta \in S_F$. Αν $\alpha \in (1,2]$, τότε*

$$\tilde{\psi}_{\alpha,\pi_F(\mu)}(\theta) \leqslant \tilde{\psi}_{\alpha,\mu}(\theta). \tag{6.19}$$

*Απόδειξη.* Έχουμε ότι, για κάθε $\lambda > 0$,

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{\lambda \langle x, \theta \rangle} d\mu(x) = \int_F e^{\lambda \langle x, \theta \rangle} d\pi_F(\mu)(x) \tag{6.20}$$

Έπεται ότι

$$\frac{1}{\lambda^{\alpha_*}} \ln \left( \int_F e^{\lambda \langle x, \theta \rangle} d\pi_F(\mu)(x) \right) = \frac{1}{\lambda^{\alpha_*}} \ln \left( \int_{\mathbb{R}^n} e^{\lambda \langle x, \theta \rangle} d\mu(x) \right) \leqslant \tilde{\psi}_{\alpha,\mu}^{\alpha_*}(\theta). \tag{6.21}$$

Παίρνοντας supremum ως προς $\lambda > 0$ έχουμε το αποτέλεσμα. □

**Πρόταση 6.1.9.** *Έστω $\alpha \in (1,2]$ και $\beta > 0$. Τότε, η κλάση $\mathcal{P}_\alpha(\beta)$ είναι ευσταθής.*

*Απόδειξη.* Έστω $\mu \in (\mathcal{P}_\alpha(\beta))_{[n]}$. Θεωρούμε $1 \leqslant k < n$ και $F \in G_{n,k}$. Τότε, από την (6.19) και την $h_{Z_2(\pi_F(\mu))}(\theta) = h_{Z_2(\mu)}(\theta)$ για $\theta \in S_F$, έχουμε ότι

$$\tilde{\beta}_{\pi_F(\mu),\alpha} = \sup_{\theta \in S_F} \frac{\tilde{\psi}_{\alpha,\pi_F(\mu)}(\theta)}{h_{Z_2(\pi_F(\mu))}(\theta)} \leqslant \sup_{\theta \in S_F} \frac{\tilde{\psi}_{\alpha,\mu}(\theta)}{h_{Z_2(\mu)}(\theta)} \leqslant \tilde{\beta}_{\mu,\alpha}. \tag{6.22}$$

Άρα, $\pi_F(\mu) \in \mathcal{P}_\alpha(\beta)$.

Στη συνέχεια, θεωρούμε μέτρα $\mu_i \in (\mathcal{P}_\alpha(\beta))_{[n_i]}$, $i := 1, \ldots, k$ και θέτουμε $N := n_1 + \ldots + n_k$. Αφού $h_{Z_2(\mu_1 \otimes \ldots \otimes \mu_k)}(\theta_1, \ldots \theta_k) = \left(\sum_{i=1}^k h^2_{Z_2(\mu_i)}(\theta_i)\right)^{\frac{1}{2}}$, έχουμε

$$\begin{aligned}
\tilde{\beta}_{\mu_1 \otimes \ldots \otimes \mu_k, \alpha} &= \sup_{(\theta_1, \ldots \theta_k) \in S^{N-1}} \frac{\tilde{\psi}_{\alpha, \mu_1 \otimes \ldots \otimes \mu_k}(\theta_1, \ldots \theta_k)}{h_{Z_2(\mu_1 \otimes \ldots \otimes \mu_k)}(\theta_1, \ldots \theta_k)} \\
&\leqslant \sup_{(\theta_1, \ldots \theta_k) \in S^{N-1}} \frac{\left(\sum_{i=1}^k \tilde{\psi}^{\alpha_*}_{\alpha, \mu_i}(\theta_i)\right)^{\frac{1}{\alpha_*}}}{\left(\sum_{i=1}^k h^2_{Z_2(\mu_i)}(\theta_i)\right)^{\frac{1}{2}}} \\
&\leqslant \beta \sup_{(\theta_1, \ldots \theta_k) \in S^{N-1}} \frac{\left(\sum_{i=1}^k h^{\alpha_*}_{Z_2(\mu_i)}(\theta_i)\right)^{\frac{1}{\alpha_*}}}{\left(\sum_{i=1}^k h^2_{Z_2(\mu_i)}(\theta_i)\right)^{\frac{1}{2}}} \\
&\leqslant \beta,
\end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε τις $\alpha_* \in [2, \infty)$ και $\|x\|_{\ell^k_{\alpha_*}} \leqslant \|x\|_{\ell^k_2}$. Άρα, $\mu_1 \otimes \ldots \otimes \mu_k \in \mathcal{P}_\alpha(\beta)$. □

## 6.2 $M$-θέση και ακραία σώματα

Όλα τα αποτελέσματα αυτής της παραγράφου αποδεικνύονται με την επιπλέον υπόθεση ότι η διάσταση είναι άρτια. Από την πρόταση 6.1.3 ξέρουμε ότι αυτό είναι αρκετό. Ωστόσο, με μικρές αλλαγές στις αποδείξεις, όλα τα αποτελέσματα της παραγράφου ισχύουν και στην περίπτωση της περιττής διάστασης. Ο βασικός μας στόχος είναι να αποδείξουμε το παρακάτω:

**Πρόταση 6.2.1.** *Έστω $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{IL}$ μια ευσταθής κλάση μέτρων πιθανότητας, έστω $n \geqslant 2$ άρτιος, $\alpha \in (1,2)$ και $t \geqslant \left(\frac{C_0}{2-\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$. Τότε, υπάρχει $\mu_1 \in \mathcal{U}_{[n]}$ τέτοιο ώστε*

$$f_{\mu_1}(0)^{\frac{1}{n}} \geqslant C_1 \sup_{\nu \in \mathcal{U}_{[n]}} f_\nu(0)^{\frac{1}{n}} \tag{6.23}$$

*και*

$$I_{-c_2 \frac{n}{(2-\alpha)t^\alpha}}(\mu_1) \leqslant C_3 t \sqrt{n} f_{\mu_1}(0)^{-\frac{1}{n}}, \tag{6.24}$$

*όπου $C_0, C_1, C_3 > 0$ και $c_2 \geqslant 2$ είναι απόλυτες σταθερές.*

*Επιπλέον, αν $\mathcal{U} = \mathcal{IL}$, τότε το $\mu_1$ μπορεί να επιλεγεί έτσι ώστε να είναι μικρής διαμέτρου (με μια απόλυτη σταθερά $C_4 > 0$).*

Θυμίζουμε ότι αν $K$ και $C$ είναι κυρτά σώματα στον $\mathbb{R}^n$, τότε ο *αριθμός κάλυψης* του $K$ από το $C$ είναι ο ελάχιστος αριθμός από μεταφορές του $C$, η ένωση των οποίων καλύπτει το $K$:

$$N(K,C) := \min\left\{k \in \mathbb{N} : \exists z_1, \dots z_k \in \mathbb{R}^n : K \subset \bigcup_{i=1}^{k}(z_i + C)\right\}. \tag{6.25}$$

Έστω $K$ ένα κυρτό σώμα όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$. Ο Milman (βλέπε [39], [40] και [41] για τη μη συμμετρική περίπτωση) απέδειξε ότι υπάρχει ένα ελλειψοειδές $\mathcal{E}$ με $|\mathcal{E}| = 1$, τέτοιο ώστε

$$\ln N(K,\mathcal{E}) \leqslant \kappa n, \tag{6.26}$$

όπου $\kappa > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά. Εδω θα χρειαστούμε την ύπαρξη $\alpha$-κανονικών $M$–ελλειψοειδών για συμμετρικά κυρτά σώματα. Ακριβέστερα, θα χρειαστούμε το παρακάτω θεώρημα του Pisier (βλέπε [51]: εκεί, τα αποτελέσματα διατυπώνονται και αποδεικνύονται για την περίπτωση των συμμετρικών σωμάτων, αλλά μπορούν να επεκταθούν και στην περίπτωση των μη συμμετρικών).

**Θεώρημα 6.2.2.** *Έστω $K$ ένα κυρτό σώμα όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$ με κέντρο βάρους στην αρχή των αξόνων. Για κάθε $\alpha \in (0,2)$ υπάρχει ένα ελλειψοειδές $\mathcal{E}$ με $|\mathcal{E}| = 1$ τέτοιο ώστε, για κάθε $t \geqslant 1$,*

$$\ln N(K,t\mathcal{E}) \leqslant \frac{\kappa(\alpha)}{t^{\alpha}} n, \tag{6.27}$$

*όπου $\kappa(\alpha) > 0$ είναι μια σταθερά που εξαρτάται μόνο από το $\alpha$. Μπορούμε να θεωρούμε ότι $\kappa(\alpha) \leqslant \frac{\kappa}{2-\alpha}$, όπου $\kappa > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.*

Θα χρειαστούμε επίσης τα παρακάτω αποτελέσματα για ελλειψοειδή:

**Λήμμα 6.2.3.** *Έστω $\mathcal{E}$ ένα ελλειψοειδές στον $\mathbb{R}^n$. Υποθέτουμε ότι υπάρχει ένας διαγώνιος πίνακας $T$ με στοιχεία $\lambda_1 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_n > 0$, ώστε $\mathcal{E} = T(B_2^n)$. Τότε,*

$$\max_{F\in G_{n,k}} |\mathcal{E}\cap F| = \max_{F\in G_{n,k}} |P_F(\mathcal{E})| = \omega_k \prod_{i=1}^{k}\lambda_i \tag{6.28}$$

*και*

$$\min_{F\in G_{n,k}} |\mathcal{E}\cap F| = \min_{F\in G_{n,k}} |P_F(\mathcal{E})| = \omega_k \prod_{i=n-k+1}^{n} \lambda_i \tag{6.29}$$

*για κάθε* $1\leqslant k\leqslant n-1$.

*Απόδειξη.* Μια απόδειξη της ισότητας $\min_{F\in G_{n,k}}|\mathcal{E}\cap F| = \omega_k\prod_{i=n-k+1}^n\lambda_i$ δίνεται στο [28, Λήμμα 4.1]. Έστω $F_s(k)=\mathrm{span}\{e_{n-k+1},\dots,e_n\}$. Τότε, για κάθε $F\in G_{n,k}$ έχουμε ότι

$$|P_{F_s(k)}(\mathcal{E})| = |\mathcal{E}\cap F_s(k)| \leqslant |\mathcal{E}\cap F| \leqslant |P_F(\mathcal{E})|. \tag{6.30}$$

Από αυτήν προκύπτει ότι

$$\min_{F\in G_{n,k}} |P_F(\mathcal{E})| = |P_{F_s(k)}(\mathcal{E})| = \omega_k \prod_{i=n-k+1}^{n} \lambda_i \tag{6.31}$$

και αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη της (6.29).

Παρατηρούμε ότι το $\mathcal{E}^\circ = T^{-1}(B_2^n)$ είναι κι αυτό ελλειψοειδές. Επίσης, αφού τα διαγώνια στοιχεία του $T^{-1}$ είναι τα $\lambda_n^{-1}\geqslant\cdots\geqslant\lambda_1^{-1}>0$, έχουμε

$$\min_{F\in G_{n,k}} |\mathcal{E}^\circ\cap F| = \min_{F\in G_{n,k}} |P_F(\mathcal{E}^\circ)| = \omega_k \left(\prod_{i=1}^{k}\lambda_i\right)^{-1}. \tag{6.32}$$

Το $P_F(\mathcal{E})$ είναι ένα ελλειψοειδές στον $F$ και το $\mathcal{E}^\circ\cap F$ είναι το πολικό του στον $F$, άρα από το αφινικά αναλλοίωτο του γινομένου των όγκων ενός σώματος και του πολικού του, παίρνουμε ότι $|P_F(\mathcal{E})|\cdot|\mathcal{E}^\circ\cap F| = |B_2^n\cap F|^2 = \omega_k^2$ για κάθε $F\in G_{n,k}$. Η παρατήρηση αυτή και η (6.32) αποδεικνύουν την (6.28). □

**Λήμμα 6.2.4.** *Έστω $n$ άρτιος και $\mathcal{E}$ ένα ελλειψοειδές στον $\mathbb{R}^n$. Υποθέτουμε ότι υπάρχει ένας διαγώνιος πίνακας $T$ με στοιχεία $\lambda_1\geqslant\cdots\geqslant\lambda_n>0$ τέτοιος ώστε $\mathcal{E}=T(B_2^n)$. Τότε, υπάρχει $F\in G_{n,n/2}$ τέτοιος ώστε $P_F(\mathcal{E})=\lambda_{n/2}(B_2^n\cap F)$.*

*Απόδειξη.* Την απόδειξη μπορεί κανείς να τη βρεί στο [60, σελ. 125-6], αλλά την σκιαγραφούμε κι εδώ για την διευκόλυνση του αναγνώστη. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\lambda_1>\cdots>\lambda_n>0$. Γράφουμε $n=2s$. Τότε, $\mathcal{E}^\circ\cap e_n^\perp = \left\{x\in\mathbb{R}^{2s-1}:\sum_{i=1}^{2s-1}\lambda_i^2x_i^2\leqslant 1\right\}$ (ο λόγος για το βήμα αυτό είναι ότι το επιχείρημα στο [60, σελ. 125-6] δουλεύει μόνο στις περιττές διαστάσεις). Ισχύει ότι $\lambda_i>\lambda_s>$

$\lambda_{2s-i}$ για κάθε $i \leqslant s-1$. Άρα, μπορούμε να ορίσουμε $b_1, \ldots, b_{s-1} > 0$ από τις εξισώσεις

$$\lambda_i^2 b_i^2 + \lambda_{2s-i}^2 = \lambda_s^2 (b_i^2 + 1). \tag{6.33}$$

Θεωρούμε τον υπόχωρο $F = \mathrm{span}\{v_1, \ldots, v_s\} \in G_{2s,s}$, όπου $v_s = e_s$ και

$$v_i = \frac{b_i e_i + e_{2s-i}}{\sqrt{b_i^2 + 1}}, \quad i = 1, \ldots, s-1. \tag{6.34}$$

Ελέγχεται εύκολα ότι τα $\{v_1, \ldots, v_s\}$ είναι μια ορθοκανονική βάση για τον $F$ και από τις (6.33) και (6.34), έχουμε ότι, για κάθε $x \in F$,

$$\lambda_s^2 \|x\|_2^2 = \lambda_s \sum_{i=1}^{s} \langle x, v_i \rangle^2 = \sum_{i=1}^{2s-1} \lambda_i^2 \langle x, e_i \rangle^2 = \|x\|_{\mathcal{E}}^2. \tag{6.35}$$

Αυτό αποδεικνύει ότι $\mathcal{E}^\circ \cap F = \lambda_s^{-1}(B_2^n \cap F)$ και λόγω δυϊσμού έχουμε $P_F(\mathcal{E}) = \lambda_s(B_2^n \cap F) = \lambda_{n/2}(B_2^n \cap F)$. □

**Πρόταση 6.2.5.** *Έστω $K \in \overline{\mathcal{IK}}_{[n]}$. Σταθεροποιούμε $1 \leqslant k \leqslant n-1$ και θέτουμε*

$$\gamma := \max_{F \in G_{n,k}} |K \cap F^\perp|^{\frac{1}{k}}. \tag{6.36}$$

*Τότε,*

$$\min_{H \in G_{n,n-k}} |K \cap H^\perp|^{\frac{1}{n-k}} \geqslant \gamma \left(\frac{\eta}{\gamma}\right)^{\frac{n}{n-k}}, \tag{6.37}$$

*όπου $0 < \eta < 1$ είναι μια απόλυτη σταθερά.*

*Απόδειξη.* Έστω $\alpha = 1$. Θεωρούμε ένα $\alpha$-κανονικό $M$–ελλειψοειδές $\mathcal{E}$ για το $K$ που μας δίνει το θεώρημα 6.2.2 του Pisier. Από το αναλλοίωτο της ισοτροπικής θέσης ως προς ορθογώνιους μετασχηματισμούς, μπορούμε να υποθέσουμε ότι υπάρχει ένας διαγώνιος πίνακας $T$ με στοιχεία $\lambda_1 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_n > 0$ τέτοιος ώστε $\mathcal{E} = T(B_2^n)$. Επίσης, ισχύει ότι $|\mathcal{E}| = 1$.

Έστω $F \in G_{n,k}$, $1 \leqslant k \leqslant n-1$. Εύκολα ελέγχεται ότι προβάλλοντας μια κάλυψη παίρνουμε κάλυψη για την προβολή, άρα έχουμε

$$\frac{|P_F(K)|}{|P_F(\mathcal{E})|} \leqslant N(K, \mathcal{E}) \leqslant e^{\kappa n}. \tag{6.38}$$

Χρησιμοποιούμε την ανισότητα Rogers-Shephard (βλέπε [55]) για το $K$ και το $\mathcal{E}$: αφού $|K|=1$, έχουμε ότι

$$c_1 \leqslant \Big(|K\cap F^{\perp}||P_F(K)|\Big)^{\frac{1}{k}} \leqslant \binom{n}{k}^{\frac{1}{k}} \leqslant \frac{en}{k}, \tag{6.39}$$

όπου $c_1>0$ είναι μια απόλυτη σταθερά (βλέπε [58] και [42] για την αριστερή ανισότητα).

Από την(6.39) και τον ορισμό του $\gamma$ στην (6.36), βλέπουμε ότι

$$|P_F(K)|^{\frac{1}{k}} \geqslant \frac{c_1}{\gamma}. \tag{6.40}$$

Χρησιμοποιώντας την (6.38) παίρνουμε

$$\frac{c_1}{\gamma} \leqslant e^{\frac{\kappa n}{k}}|P_F(\mathcal{E})|^{\frac{1}{k}} . \tag{6.41}$$

Δηλαδή,

$$\min_{F\in G_{n,k}} |P_F(\mathcal{E})|^{\frac{1}{k}} \geqslant \frac{c_1}{\gamma}e^{-\frac{\kappa n}{k}} . \tag{6.42}$$

Μπορούμε τώρα, από το άνω φράγμα στην (6.39), να γράψουμε

$$\frac{c_1}{\gamma}|\mathcal{E}\cap F^{\perp}|^{\frac{1}{k}} \leqslant e^{\frac{\kappa n}{k}}\Big(|P_F(\mathcal{E})||\mathcal{E}\cap F^{\perp}|\Big)^{\frac{1}{k}} \leqslant e^{\frac{\kappa n}{k}}\frac{en}{k} \leqslant e^{\frac{\kappa_1 n}{k}}. \tag{6.43}$$

Έπεται ότι

$$\max_{H\in G_{n,n-k}} |\mathcal{E}\cap H| \leqslant \frac{e^{\kappa_1 n}\gamma^k}{c_1^k} . \tag{6.44}$$

Το λήμμα 6.2.3 μας δίνει

$$\max_{H\in G_{n,n-k}} |P_H(\mathcal{E})| \leqslant \frac{e^{\kappa_1 n}\gamma^k}{c_1^k} , \tag{6.45}$$

και άρα,

$$|P_H(K)| \leqslant e^{\kappa n}|P_H(\mathcal{E})| \leqslant \frac{e^{\kappa_2 n}\gamma^k}{c_1^k} \tag{6.46}$$

για κάθε $H\in G_{n,n-k}$, όπου χρησιμοποιήσαμε πάλι την (6.38). Εφαρμόζοντας τέλος την (6.39) για μία ακόμα φορά, έχουμε ότι

$$c_1 \leqslant \Big(|K\cap H^{\perp}||P_H(K)|\Big)^{\frac{1}{n-k}} \leqslant |K\cap H^{\perp}|^{\frac{1}{n-k}}e^{\frac{\kappa_2 n}{n-k}}\left(\frac{\gamma}{c_1}\right)^{\frac{k}{n-k}} . \tag{6.47}$$

Αυτό αποδεικνύει ότι

$$\min_{H\in G_{n,n-k}} |K\cap H^{\perp}|^{\frac{1}{n-k}} \geqslant \gamma\left(\frac{\eta}{\gamma}\right)^{\frac{n}{n-k}} \tag{6.48}$$

με $\eta = c_1 e^{-\kappa_2}$, όπως θέλαμε. □

**Λήμμα 6.2.6.** *Έστω $K \in \overline{\mathcal{CK}}_{[n]}$. Υποθέτουμε ότι, για κάποιο $s > 0$,*

$$r_s := \ln N(K, sB_2^n) < n. \tag{6.49}$$

*Τότε,*

$$I_{-r_s}(K) \leqslant 3es. \tag{6.50}$$

*Απόδειξη.* Έστω $z_0 \in \mathbb{R}^n$ τέτοιο ώστε $|K\cap(-z_0+sB_2^n)| \geqslant |K\cap(z+sB_2^n)|$ για κάθε $z\in\mathbb{R}^n$. Έπεται ότι

$$|(K+z_0)\cap sB_2^n|\cdot N(K,sB_2^n) \geqslant |K| = 1. \tag{6.51}$$

Έστω $q := r_s < n$. Τότε, από την ανισότητα του Markov, τον ορισμό του $I_{-q}(K+z_0)$ και την (6.49), έχουμε

$$|(K+z_0)\cap 3^{-1}I_{-q}(K+z_0)B_2^n| \leqslant 3^{-q} < e^{-q} = e^{-r_s} \leqslant \frac{1}{N(K,sB_2^n)}. \tag{6.52}$$

Από την (6.51) παίρνουμε ότι

$$|(K+z_0)\cap 3^{-1}I_{-q}(K+z_0)B_2^n| < |(K+z_0)\cap sB_2^n|, \tag{6.53}$$

άρα

$$3^{-1}I_{-q}(K+z_0) \leqslant s. \tag{6.54}$$

Αφού το $K$ έχει κέντρο βάρους στο 0, από ένα θεώρημα του Fradelizi (βλέπε [17]) παίρνουμε ότι $I_{-k}(K+z) \geqslant \frac{1}{e}I_{-k}(K)$ για κάθε $1\leqslant k<n$ και $z\in\mathbb{R}^n$ (μια απόδειξη για τον παραπάνω ισχυρισμό υπάρχει στο [49, Πρόταση 4.6]). Αυτό αποδεικνύει το λήμμα. □

**Θεώρημα 6.2.7.** *Έστω $n$ άρτιος και $K\in\overline{\mathcal{IK}}_{[n]}$. Θέτουμε*

$$\gamma := \max_{F\in G_{n,\frac{n}{2}}} |K\cap F^{\perp}|^{\frac{2}{n}}. \tag{6.55}$$

*Τότε, υπάρχει $K_1 \in \overline{\mathcal{IK}}_{[n]}$ τέτοιο ώστε:*

(i) $\frac{\eta_1}{\gamma} L_K \leqslant L_{K_1} \leqslant \eta_2 \gamma L_K$, *όπου $\eta_1, \eta_2 > 0$ είναι απόλυτες σταθερές.*

(ii) *Αν $\alpha \in (1,2)$ τότε για κάθε $t \geqslant C_1\gamma^2$ ισχύει ότι*

$$\ln N\left(K_1, t\sqrt{n}B_2^n\right) \leqslant C_2\gamma^2 \frac{\kappa(\alpha)n}{t^\alpha} \ ,$$

*όπου $\kappa(\alpha) \leqslant \frac{\kappa}{2-\alpha}$ και $C_1, C_2 > 0$ είναι απόλυτες σταθερές.*

(iii) *Αν το $K$ είναι σώμα μικρής διαμέτρου (με σταθερά $A > 1$) τότε το $K_1$ είναι επίσης σώμα μικρής διαμέτρου (με σταθερά $C_3\gamma^2 A > 1$, όπου $C_3$ είναι μια απόλυτη σταθερά).*

*Απόδειξη.* Έστω $\mathcal{E}$ ένα $\alpha$-κανονικό $M-$ελλειψοειδές για το $K$ που μας δίνει το θεώρημα 6.2.2. Όπως και στην απόδειξη της πρότασης 6.2.5, υποθέτουμε ότι $\mathcal{E} = T(B_2^n)$ για κάποιον διαγώνιο πίνακα $T$ με στοιχεία $\lambda_1 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_n > 0$. Από την (6.42) και το λήμμα 6.2.3 έχουμε ότι

$$\omega_{\frac{n}{2}}\left(\lambda_{\frac{n}{2}}\right)^{\frac{n}{2}} \geqslant \omega_{\frac{n}{2}} \prod_{i=\frac{n}{2}+1}^{n} \lambda_i = \min_{F\in G_{n,\frac{n}{2}}} |P_F\mathcal{E}| \geqslant e^{-\kappa n}\left(\frac{c_1}{\gamma}\right)^{\frac{n}{2}} \ , \tag{6.56}$$

και άρα (αφού $\omega_k^{1/k} \simeq 1/\sqrt{k}$),

$$\lambda_{\frac{n}{2}} \geqslant \frac{c_2\sqrt{n}}{\gamma}. \tag{6.57}$$

Όμοια, η (6.44) και το λήμμα 6.2.3 μας δίνουν ότι

$$\omega_{\frac{n}{2}}\left(\lambda_{\frac{n}{2}}\right)^{\frac{n}{2}} \leqslant \omega_{\frac{n}{2}} \prod_{i=1}^{\frac{n}{2}} \lambda_i = \max_{H\in G_{n,\frac{n}{2}}} |\mathcal{E}\cap H| \leqslant e^{\kappa_1 n}\left(\frac{\gamma}{c_1}\right)^{\frac{n}{2}}, \tag{6.58}$$

και άρα,

$$\lambda_{\frac{n}{2}} \leqslant c_3\gamma\sqrt{n}. \tag{6.59}$$

Τότε, από το λήμμα 6.2.4 μπορούμε να βρούμε $F_0 \in G_{n,\frac{n}{2}}$ τέτοιον ώστε

$$\frac{c_2\sqrt{n}}{\gamma}(B_2^n\cap F_0) \subseteq P_{F_0}(\mathcal{E}) \subseteq c_3\gamma\sqrt{n}(B_2^n\cap F_0). \tag{6.60}$$

Θέτουμε $K_0 := \overline{B_{\frac{n}{2}+1}}(K, F_0)$ και $K_1 := T(K_0\times K_0) \in \mathbb{R}^n$, όπου $T\in SL_n$ τέτοιος ώστε το $K_1$ να είναι ισοτροπικό. Εύκολα ελέγχουμε ότι το $K_0\times K_0$ έχει όγκο 1, κέντρο βάρους στην αρχή των αξόνων και είναι σχεδόν ισοτροπικό. Με άλλα λόγια ο $T$ είναι σχεδόν ισομετρία. Θα δείξουμε ότι το $K_1$ ικανοποιεί τις (i), (ii) και (iii).

(i) Από την πρόταση 4.1.1(vi) έχουμε ότι

$$\overline{c}_2\, L_K |K\cap F_0^{\perp}|^{\frac{2}{n}} \leqslant L_{K_0} \leqslant \overline{c}_1\, L_K |K\cap F_0^{\perp}|^{\frac{2}{n}}, \tag{6.61}$$

όπου $\overline{c}_1, \overline{c}_2 > 0$ είναι απόλυτες σταθερές. Τότε, η πρόταση 6.2.5 μας δίνει ότι

$$\frac{\eta_1}{\gamma} L_K \leqslant L_{K_0} \leqslant \eta_2 \gamma L_K, \tag{6.62}$$

όπου $\eta_1 = \eta^2 \overline{c}_2$ και $\eta_2 = \overline{c}_1$. Παρατηρήστε ότι $L_{K_1} = L_{K_0}$. Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη για το (i).

(ii) Από την πρόταση 4.1.1(v) και από το γεγονός ότι $\overline{c}\,\mathrm{conv}\{C,-C\} \subseteq Z_{\frac{n}{2}}(C) \subseteq \mathrm{conv}\{C,-C\}$ για κάθε $C$ στην $\overline{\mathcal{CK}}_{[\frac{n}{2}]}$, παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned}
\mathrm{conv}\{K_0,-K_0\} &\subseteq \frac{1}{\overline{c}} Z_{\frac{n}{2}}(\overline{B_{\frac{n}{2}+2}}(K,F_0)) \\
&\subseteq \frac{1}{\overline{c}\,\overline{c}_3} |K\cap F_0^{\perp}|^{\frac{2}{n}} P_{F_0}(Z_{\frac{n}{2}}(K)) \\
&\subseteq \frac{1}{\overline{c}\,\overline{c}_3} \gamma P_{F_0}(\mathrm{conv}\{K,-K\})
\end{aligned}$$

και όμοια,

$$\begin{aligned}
\mathrm{conv}\{K_0,-K_0\} &\supseteq Z_{\frac{n}{2}}(\overline{B_{\frac{n}{2}+2}}(K,F_0)) \\
&\supseteq \frac{1}{\overline{c}_4} |K\cap F_0^{\perp}|^{\frac{2}{n}} P_{F_0}(Z_{\frac{n}{2}}(K)) \\
&\supseteq \frac{\eta^2}{\overline{c}_4}\, \frac{\overline{c}}{2\overline{c}_0}\, \frac{1}{\gamma} P_{F_0}(\mathrm{conv}\{K,-K\}),
\end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι $Z_{\frac{n}{2}}(K) \supseteq \frac{1}{2\overline{c}_0} Z_n(K) \supseteq \frac{\overline{c}}{2\overline{c}_0}\mathrm{conv}\{K,-K\}$. Δηλαδή,

$$\frac{\overline{c}_5}{\gamma} P_{F_0}(\mathrm{conv}\{K,-K\}) \subseteq \mathrm{conv}\{K_0,-K_0\} \subseteq \overline{c}_6 \gamma P_{F_0}(\mathrm{conv}\{K,-K\}), \tag{6.63}$$

όπου $\overline{c}_5, \overline{c}_6 > 0$ είναι απόλυτες σταθερές. Για $s > 0$ έχουμε

$$\begin{aligned} N\left(K_1, s\sqrt{n}B_2^n\right) &= N\left(T(K_0 \times K_0), s\sqrt{n}B_2^n\right) \\ &\leqslant N(K_0 \times K_0, cs\sqrt{n}B_2^n) \\ &\leqslant N(K_0 \times K_0, \sqrt{2}cs\sqrt{n}\,(B_2^n \cap F_0 \times B_2^n \cap F_0)) \\ &\leqslant N\left(K_0, c's\sqrt{n}B_2^n \cap F_0\right)^2 . \end{aligned}$$

Εδώ χρησιμοποιήσαμε την παρατήρηση ότι ο $T$ είναι σχεδόν ισομετρία, και άρα, $T(K_0 \times K_0) \subseteq \frac{1}{c}(K_0 \times K_0)$. Επιπλέον, κάναμε χρήση του ότι αν τα $K, C$ είναι κυρτά σώματα, τότε

$$N(K \times K, C \times C) \leqslant N(K, C)^2 \tag{6.64}$$

και $B_2^k \times B_2^k \supseteq \frac{1}{\sqrt{2}}B_2^{2k}$.

Υπενθυμίζουμε ότι οι $c_2$ και $c_3$ στην (6.60) είναι απόλυτες σταθερές. Για κάθε $r > 0$,

$$\begin{aligned} N\left(K_0, c_3 r\gamma\sqrt{n}(B_2^n \cap F_0)\right) &\leqslant N\left(\mathrm{conv}\{K_0, -K_0\}, c_3 r\gamma\sqrt{n}(B_2^n \cap F_0)\right) \\ &\leqslant N(\mathrm{conv}\{K_0, -K_0\}, rP_{F_0}(\mathcal{E})) \\ &\leqslant N(\overline{c}_6\gamma\, P_{F_0}\left(\mathrm{conv}\{K, -K\}\right), rP_{F_0}(\mathcal{E})) \\ &\leqslant N(\overline{c}_6\gamma\,\mathrm{conv}\{K, -K\}, r\,\mathcal{E}) \\ &\leqslant N\left(K - K, \frac{r}{\overline{c}_6\gamma}\mathcal{E}\right) \\ &\leqslant N\left(K, \frac{r}{2\overline{c}_6\gamma}\mathcal{E}\right)^2 . \end{aligned}$$

Έτσι, μπορούμε να γράψουμε ότι για κάθε $t > 0$,

$$N(K_1, t\sqrt{n}\,B_2^n) \leqslant N\left(K, \frac{t}{\overline{c}_7\gamma^2}\,\mathcal{E}\right)^4 \tag{6.65}$$

όπου $\overline{c}_7 = \sqrt{2}c_2\overline{c}_6$. Αφού το $\mathcal{E}$ είναι $\alpha$-κανονικό ελλειψοειδές για το $K$, έχουμε ότι, για κάθε $t \geqslant \overline{c}_7\gamma^2$,

$$\ln N(K_1, t\sqrt{n}\,B_2^n) \leqslant 4\ln N\left(K, \frac{t}{\overline{c}_7\gamma^2}\,\mathcal{E}\right) \leqslant \frac{4\overline{c}_7\kappa(\alpha)\gamma^2 n}{t^\alpha}. \tag{6.66}$$

Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη για το (ii).

(iii) Έχουμε $R(K_0) \leqslant c\gamma A\sqrt{n}L_K$. Πράγματι, από την πρόταση 4.1.1 έχουμε

$$\begin{aligned} R(K_0) &= R\left(\overline{B_{\frac{n}{2}+1}}(K,F_0)\right) \\ &\leqslant cR\left(Z_{\frac{n}{2}+1}(\overline{B_{\frac{n}{2}+1}}(K,F_0))\right) \\ &\leqslant c'|K\cap F_0^{\perp}|^{\frac{2}{n}} R\left(P_{F_0} Z_{\frac{n}{2}+1}(K)\right) \\ &\leqslant c'\gamma R(\mathrm{conv}\{K,-K\}) \\ &\leqslant 2c'\gamma R(K) \leqslant c\gamma A\sqrt{n}L_K. \end{aligned}$$

Επίσης,

$$R(K_1) = R(K_0\times K_0) = \sqrt{2}R(K_0). \tag{6.67}$$

Για να το δούμε αυτό, γράφουμε

$$R^2(K_0\times K_0) = \max_{(x,y)\in K_0\times K_0} \|x\|_2^2 + \|y\|_2^2 = 2R^2(K_0). \tag{6.68}$$

Έτσι, χρησιμοποιώντας το (i) βλέπουμε ότι

$$R(K_1) \leqslant \sqrt{2}R(K_0) \leqslant c\sqrt{2}\gamma A\sqrt{n}L_K \leqslant C_3\gamma^2 A\sqrt{n}L_{K_1}. \tag{6.69}$$

Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη. □

**Λήμμα 6.2.8.** *Έστω $\mu \in \mathcal{IL}_{[n]}$. Θεωρούμε $1 \leqslant k < n-1$ και $F \in G_{n,k}$. Τότε,*

$$|\overline{K_{n+1}}(\mu)\cap F^{\perp}|^{\frac{1}{k}} \simeq \frac{f_{\pi_F(\mu)}(0)^{\frac{1}{k}}}{f_\mu(0)^{\frac{1}{n}}}, \tag{6.70}$$

$$L_{B_{k+1}(\mu,F)} \simeq f_{\pi_F(\mu)}(0)^{\frac{1}{k}} \simeq L_{B_{k+1}(\overline{K_{n+1}}(\mu),F)}, \tag{6.71}$$

*και*

$$f_\mu(0)^{\frac{1}{n}}\overline{B_{k+1}}(\mu,F) \simeq \overline{B_{k+1}}(\overline{K_{n+1}}(\mu),F). \tag{6.72}$$

*Απόδειξη.* (i) Θα χρειαστούμε τα παρακάτω αποτελέσματα (βλέπε [49], πρόταση 4.2 και θεώρημα 4.4): Αν $\mu \in \mathcal{IL}_{[n]}$, τότε

$$f_{\pi_F(\mu)}(0)^{\frac{1}{k}}|P_F Z_k(\mu)|^{\frac{1}{k}} \simeq 1, \tag{6.73}$$

και αν $K \in \overline{\mathcal{CK}}_{[n]}$ τότε

$$|K \cap F^{\perp}|^{\frac{1}{k}} |P_F Z_k(K)|^{\frac{1}{k}} \simeq 1. \tag{6.74}$$

Τότε, λαμβάνοντας υπ' όψη την πρόταση 4.1.1(iv), παίρνουμε

$$|\overline{K_{n+1}}(\mu) \cap F^{\perp}|^{\frac{1}{k}} \simeq |P_F Z_k(\overline{K_{n+1}}(\mu))|^{-\frac{1}{k}} \simeq f_\mu(0)^{-\frac{1}{n}} |P_F Z_k(\mu)|^{-\frac{1}{k}} \simeq \frac{f_{\pi_F(\mu)}(0)^{\frac{1}{k}}}{f_\mu(0)^{\frac{1}{n}}}. \tag{6.75}$$

Αυτό αποδεικνύει την (6.70).

(ii) Από την πρόταση 4.1.1(v) και (iv), έχουμε ότι

$$\begin{aligned} Z_2\left(\overline{B_{k+1}}(\overline{K_{n+1}}(\mu), F)\right) &\simeq |\overline{K_{n+1}}(\mu) \cap F^{\perp}|^{\frac{1}{k}} P_F\left(Z_2\left(\overline{K_{n+1}}(\mu)\right)\right) \\ &\simeq \frac{f_{\pi_F(\mu)}(0)^{\frac{1}{k}}}{f_\mu(0)^{\frac{1}{n}}} f_\mu(0)^{\frac{1}{n}} P_F(Z_2(\mu)) \\ &= f_{\pi_F(\mu)}(0)^{\frac{1}{k}} P_F(Z_2(\mu)) \\ &= f_{\pi_F(\mu)}(0)^{\frac{1}{k}} B_F, \end{aligned}$$

επειδή $Z_2(\mu) = B_2^n$. Παίρνοντας όγκους, βλέπουμε ότι

$$L_{B_{k+1}(\overline{K_{n+1}}(\mu),F)} \simeq f_{\pi_F(\mu)}(0)^{\frac{1}{k}} \tag{6.76}$$

και από την πρόταση 4.1.1(vii) και την σχέση (4.17) προκύπτει το ζητούμενο.

(iii) Από την πρόταση 4.1.1(v) έχουμε

$$\overline{B_{k+1}}(\mu, F) \simeq Z_k\left(\overline{B_{k+1}}(\mu, F)\right) \simeq \frac{\pi_F(\mu)(0)^{\frac{1}{k}}}{f_\mu(0)^{\frac{1}{n}}} P_F Z_k(\mu) \tag{6.77}$$

και από την πρόταση 4.1.1(v) και (iv) έχουμε

$$\begin{aligned} \overline{B_{k+1}}(\overline{K_{n+1}}(\mu), F) &\simeq Z_k\left(\overline{B_{k+1}}(\overline{K_{n+1}}(\mu), F)\right) \\ &\simeq |\overline{K_{n+1}}(\mu) \cap F^{\perp}|^{\frac{1}{k}} P_F\left(Z_k\left(\overline{K_{n+1}}(\mu)\right)\right) \\ &\simeq \frac{\pi_F(\mu)(0)^{\frac{1}{k}}}{f_\mu(0)^{\frac{1}{n}}} f_\mu(0)^{\frac{1}{n}} P_F(Z_k(\mu)) \\ &= \pi_F(\mu)(0)^{\frac{1}{k}} P_F(Z_k(\mu)). \end{aligned}$$

Έχουμε δείξει λοιπόν ότι

$$\overline{B_{k+1}}(\overline{K_{n+1}}(\mu),F)\simeq \pi_F(\mu)(0)^{\frac{1}{k}}P_F(Z_k(\mu)). \tag{6.78}$$

Συνδυάζοντας τις σχέσεις (6.77) και (6.78) βλέπουμε ότι

$$f_\mu(0)^{\frac{1}{n}}\overline{B_{k+1}}(\mu,F)\simeq \overline{B_{k+1}}(\overline{K_{n+1}}(\mu),F). \tag{6.79}$$

Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη. □

*Απόδειξη της πρότασης 6.2.1.* (i) Έστω $\nu\in\mathcal{U}_{[n]}$ τέτοιο ώστε $\sup_{\mu\in\mathcal{U}_{[n]}}f_\mu(0)^{\frac{1}{n}}=f_\nu(0)^{\frac{1}{n}}$. Έστω

$$K:=T\left(\overline{K_{n+1}}(\nu)\right), \tag{6.80}$$

όπου $T\in SL_n$ είναι τέτοιος ώστε $K\in\overline{\mathcal{IK}}_{[n]}$. Σημειώνουμε ότι, από την πρόταση 4.1.1, ο $T$ είναι σχεδόν ισομετρία και $L_K\simeq f_\nu(0)^{\frac{1}{n}}$.

Αν $\mathcal{U}=\mathcal{IL}$ παίρνουμε $K:=T\left(\overline{K_{n+1}}(\bar{\nu})\right)$. Από την πρόταση 4.1.1 και τη σχέση (4.14) έχουμε ότι $L_K\simeq f_\nu(0)^{\frac{1}{n}}$. Η απόδειξη των δύο πρώτων ισχυρισμών είναι ίδια και για τις δύο περιπτώσεις. Γράφουμε $\mu$ είτε πρόκειται για το $\nu$ είτε για το $\bar{\nu}$.

(i) Έστω $F_0\in G_{n,\frac{n}{2}}$, $K_0\in\overline{\mathcal{IK}}_{[\frac{n}{2}]}$ και $K_1\in\overline{\mathcal{IK}}_{[n]}$ όπως στην απόδειξη του θεωρήματος 6.2.7. Θέτουμε $\mu_1:=\pi_{F_0}(\mu)\otimes\pi_{F_0}(\mu)$. Υποθέτουμε ότι τα δύο αντίγραφα του $\pi_{F_0}(\mu)$ ζουν στον $F$ και στον $F^\perp$ αντίστοιχα, όπου $F\in G_{n,n/2}$. Αφού $\mu\in\mathcal{U}$ και η $\mathcal{U}$ είναι ευσταθής κλάση, έχουμε ότι $\mu_1\in\mathcal{U}$.

Επιπλέον, πάλι από την πρόταση 4.1.1, έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
f_{\mu_1}(0)^{\frac{1}{n}} &= f_{\pi_{F_0}(\mu)}(0)^{\frac{2}{n}}\simeq L_{\overline{K_{\frac{n}{2}+1}}(\pi_{F_0}(\mu))}\\
&= L_{\overline{B_{\frac{n}{2}+1}}(\mu,F_0)}\simeq L_{B_{\frac{n}{2}+1}(\overline{K_{n+1}}(\mu),F_0)}\\
&\simeq L_{B_{\frac{n}{2}+1}(K,F_0)}=L_{K_0}=L_{K_1}\\
&\simeq f_\mu(0)^{\frac{1}{n}}.
\end{aligned}$$

Με αυτό έχουμε δείξει τον πρώτο ισχυρισμό της πρότασης.

(ii) Αφού η $\mathcal{U}$ είναι ευσταθής, για κάθε $F\in G_{n,\frac{n}{2}}$ έχουμε ότι

$$f_{\pi_F(\mu)}(0)^{\frac{2}{n}}\leqslant f_\mu(0)^{\frac{1}{n}}. \tag{6.81}$$

Θέτουμε $\gamma := \max_{F\in G_{n,\frac{n}{2}}} |K\cap F^{\perp}|^{\frac{2}{n}}$. Τότε,

$$\gamma \simeq \frac{L_{B_{\frac{n}{2}+1}(\overline{K_{n+1}}(\mu),F)}}{L_K} \simeq \frac{f_{\pi_F(\mu)}(0)^{\frac{2}{n}}}{f_\mu(0)^{\frac{1}{n}}} \leqslant C, \tag{6.82}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε το λήμμα 6.2.8. Έτσι, από το θεώρημα 6.2.7 έχουμε ότι

$$\ln N(K, t\sqrt{n}B_2^n) \leqslant \frac{Cn}{t^\alpha(2-\alpha)}. \tag{6.83}$$

Παρατηρούμε ότι, για κάθε $p>0$ και για κάθε ζευγάρι μέτρων πιθανότητας $\nu_1,\nu_2$ που ζουν στους $F, F^{\perp}$ αντίστοιχα, έχουμε ότι $P_F(Z_p(\nu_1\otimes\nu_2)) = Z_p(\nu_1)$ και $P_{F^\perp}(Z_p(\nu_1\otimes\nu_2)) = Z_p(\nu_2)$. Πράγματι, αν $\theta\in S_F$, έχουμε ότι

$$\begin{aligned} h^p_{Z_p(\nu_1\otimes\nu_2)}(\theta) &= \int_F\int_{F^\perp} |\langle x+y,\theta\rangle|^p d\nu_2(y)d\nu_1(x) \\ &= \int_F |\langle x,\theta\rangle|^p d\nu_1(x) = h^p_{Z_p(\nu_1)}(\theta). \end{aligned}$$

Όμως, για κάθε κυρτό σώμα $K$ και για κάθε $F\in G_{n,k}$ ισχύει ότι

$$K\subseteq P_F(K)\otimes P_{F^\perp}(K). \tag{6.84}$$

Άρα, έχουμε

$$\begin{aligned} \overline{K_{n+1}}(\mu_1) &\subseteq P_F\left(\overline{K_{n+1}}(\mu_1)\right)\times P_{F^\perp}\left(\overline{K_{n+1}}(\mu_1)\right) \\ &\simeq P_F\left(Z_{\frac{n}{2}}(\overline{K_{n+1}}(\mu_1)\right)\times P_{F^\perp}\left(Z_{\frac{n}{2}}(\overline{K_{n+1}}(\mu_1)\right) \\ &\simeq f_\mu(0)^{\frac{1}{n}}P_F\left(Z_{\frac{n}{2}}(\pi_{F_0}(\mu)\otimes\pi_{F_0}(\mu))\right) \\ &\quad \times f_\mu(0)^{\frac{1}{n}}P_{F^\perp}\left(Z_{\frac{n}{2}}(\pi_{F_0}(\mu)\otimes\pi_{F_0}(\mu))\right) \\ &\simeq f_\mu(0)^{\frac{1}{n}}Z_{\frac{n}{2}}\left(\pi_{F_0}(\mu)\right)\times f_\mu(0)^{\frac{1}{n}}Z_{\frac{n}{2}}\left(\pi_{F_0}(\mu)\right) \\ &\simeq f_\mu(0)^{\frac{1}{n}}\overline{B_{\frac{n}{2}+1}}\left(\mu,F_0\right)\times f_\mu(0)^{\frac{1}{n}}\overline{B_{\frac{n}{2}+1}}\left(\mu,F_0\right) \\ &\simeq \overline{B_{\frac{n}{2}+1}}\left(\overline{K_{n+1}}(\mu),F_0\right)\times\overline{B_{\frac{n}{2}+1}}\left(\overline{K_{n+1}}(\mu),F_0\right) \\ &\simeq \overline{B_{\frac{n}{2}+1}}\left(K,F_0\right)\times\overline{B_{\frac{n}{2}+1}}\left(K,F_0\right) \\ &= K_0\times K_0 = K_1. \end{aligned}$$

Επομένως,

$$R(\overline{K_{n+1}}(\mu_1)) \leqslant cR(K_1) \tag{6.85}$$

και

$$\ln N\left(\overline{K_{n+1}}(\mu_1), t\sqrt{n}B_2^n\right) \leqslant \ln N\left(K, ct\sqrt{n}B_2^n\right) \leqslant \frac{Cn}{t^\alpha(2-\alpha)}. \tag{6.86}$$

Έχουμε υποθέσει ότι $t^\alpha(2-a) \geqslant C$, άρα από το λήμμα 6.2.6 έχουμε

$$I_{-p}(\overline{K_{n+1}(\mu)}) \leqslant 3et\sqrt{n}, \tag{6.87}$$

όπου $p = \frac{Cn}{t^\alpha(2-a)} < n$. Παρατηρούμε ότι αν $\mu \in \mathcal{CL}$ τότε για κάθε $1 \leqslant p \leqslant n-1$ ισχύει ότι (βλέπε [49], πρόταση 3.4)

$$I_{-p}(\mu)f_\mu(0)^{\frac{1}{n}} \simeq I_{-p}(\overline{K_{n+1}}(\mu)). \tag{6.88}$$

Έπεται ότι

$$I_{-\frac{Cn}{t^\alpha(2-a)}}(\mu_1) \leqslant C't\sqrt{n}f_{\mu_1}(0)^{-\frac{1}{n}}, \tag{6.89}$$

και η απόδειξη του δεύτερου ισχυρισμού είναι πλήρης.

Στο υπόλοιπο της απόδειξης θέτουμε $\mu = \bar{\nu}$. Στην περίπτωση αυτή, το $K$ είναι σώμα μικρής διαμέτρου. Πράγματι, για $p \geqslant 2$, από την πρόταση 4.1.1(iv) έχουμε

$$I_p(K) \simeq I_p(\overline{K_{n+1}}(\bar{\nu})) \simeq I_p(\mu)f_{\bar{\nu}}(0)^{\frac{1}{n}} \simeq \sqrt{n}f_{\bar{\nu}}(0)^{\frac{1}{n}} \simeq I_2(\overline{K_{n+1}}(\bar{\nu})) \simeq I_2(K).$$

Από το θεώρημα 6.2.7 έχουμε ότι το $K_1$ είναι σώμα μικρής διαμέτρου και από αυτό συνεπάγεται ότι $\frac{R(K_1)}{I_2(K_1)} \simeq 1$. Ακόμα, από τον πρώτο ισχυρισμό, έχουμε ότι

$$L_{K_1} \simeq f_{\bar{\nu}}(0)^{\frac{1}{n}} \simeq f_{\mu_1}(0)^{\frac{1}{n}} \simeq L_K. \tag{6.90}$$

Τότε, από την σχέση (6.85) βλέπουμε ότι για κάθε $p \geqslant 2$,

$$\frac{I_p(\mu_1)}{I_2(\mu_1)} \simeq \frac{I_p(\overline{K_{n+1}}(\mu_1))}{\sqrt{n}f_{\mu_1}(0)^{\frac{1}{n}}} \leqslant c\frac{R(\overline{K_{n+1}}(\mu_1))}{\sqrt{n}L_{K_1}} \simeq \frac{R(K_1)}{I_2(K_1)} \simeq 1. \tag{6.91}$$

Άρα, το $\mu_1$ είναι μέτρο μικρής διαμέτρου. Η απόδειξη της πρότασης είναι πλήρης. □

## 6.3 Φράγμα για την ισοτροπική σταθερά ευσταθών κλάσεων

Είμαστε τώρα έτοιμοι να διατυπώσουμε και να αποδείξουμε το βασικό αποτέλεσμα αυτού του κεφαλαίου:

**Θεώρημα 6.3.1.** *Έστω $\mathcal{U}$ μια ευσταθής υποκλάση της $\mathcal{IL}$ και έστω $n \geqslant 2$ και $\delta \geqslant 1$. Τότε,*

$$\sup_{\mu\in\mathcal{U}_{[n]}} f_\mu(0)^{\frac{1}{n}} \leqslant C\delta \sup_{\mu\in\mathcal{U}_{[n]}} \sqrt{\frac{n}{q_{-c}(\mu,\delta)} \ln\left(\frac{en}{q_{-c}(\mu,\delta)}\right)}, \tag{6.92}$$

*όπου $C > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά. Επιπλέον, αν $\mathcal{U} = \mathcal{IL}$ τότε το supremum στο δεξιό μέλος της ανισότητας μπορεί να θεωρηθεί πάνω από όλα τα $\bar{\nu} \in \mathcal{IL}$.*

*Απόδειξη.* Από την πρόταση 6.1.3 μπορούμε να υποθέσουμε ότι ο $n$ είναι άρτιος. Θέτουμε $q := \inf_{\mu\in\mathcal{U}_{[n]}} q_{-c}(\mu,\delta)$. Έστω $\alpha := 2-\frac{1}{\ln(e\frac{n}{q})}$ και $t = C_1\sqrt{\frac{n}{q}\ln\frac{en}{q}}$, όπου η απόλυτη σταθερά $C_1 > 0$ μπορεί να επιλεγεί αρκετά μεγάλη ώστε να εξασφαλίσουμε ότι $t^\alpha(2-\alpha) \geqslant C_0$ (εδώ, $C_0 > 0$ είναι η απόλυτη σταθερά που εμφανίζεται στην πρόταση 6.2.1). Έχουμε

$$t^\alpha(2-\alpha) \simeq \frac{n}{q}\ln\frac{en}{q}\frac{1}{\ln\frac{en}{q}} = \frac{n}{q}, \tag{6.93}$$

και άρα,

$$\frac{n}{t^\alpha(2-\alpha)} \simeq q. \tag{6.94}$$

Από την πρόταση 6.2.1, υπάρχει ένα μέτρο $\mu_1 \in \mathcal{U}_{[n]}$ τέτοιο ώστε $f_{\mu_1}(0)^{\frac{1}{n}} \simeq \sup_{\mu\in\mathcal{U}} f_\mu(0)^{\frac{1}{n}}$ και

$$I_{-q}(\mu_1) = I_{-\frac{cn}{t^\alpha(2-\alpha)}}(\mu_1) \leqslant C't\sqrt{n}f_{\mu_1}(0)^{-\frac{1}{n}} \leqslant C''\sqrt{\frac{n}{q}\ln\frac{en}{q}}\sqrt{n}f_{\mu_1}(0)^{-\frac{1}{n}}.$$

Ακόμα, από τον ορισμό του $q$, έχουμε ότι

$$\frac{\sqrt{n}}{\delta} = \frac{1}{\delta}I_2(\mu_1) \leqslant I_{-q_{-c}(\mu_1,\delta)}(\mu_1) \leqslant I_{-q}(\mu_1). \tag{6.95}$$

Συνδυάζοντας τα παραπάνω, παίρνουμε το αποτέλεσμα. □

**Παρατήρηση 6.3.2.** Σημειώνουμε ότι, για $\delta = \sup_{\mu\in\mathcal{U}_{[n]}} f_\mu(0)^{\frac{1}{n}}$, από την πρόταση 4.8 στο [49] έχουμε ότι

$$\inf_{\mu\in\mathcal{U}_{[n]}} q_{-c}(\mu,\delta) \simeq n.$$

Αυτό μας δείχνει ότι το παραπάνω αποτέλεσμα είναι ακριβές (με το κόστος μιας απόλυτης σταθεράς).

Το θεώρημα 4.1.3 εξασφαλίζει την ύπαρξη μιας απόλυτης σταθεράς $\xi > 0$ τέτοιας ώστε $q_{-c}(\mu,\xi) \geqslant q_*(\mu)$ για κάθε $\mu \in \mathcal{IL}$. Έτσι παίρνουμε το παρακάτω:

**Πόρισμα 6.3.3.** *Έστω $\mathcal{U}$ μια ευσταθής υποκλάση της $\mathcal{IL}$. Τότε, για κάθε $n \geqslant 1$,*

$$\sup_{\mu\in\mathcal{U}_{[n]}} f_\mu(0)^{\frac{1}{n}} \leqslant C \sup_{\mu\in\mathcal{U}_{[n]}} \sqrt{\frac{n}{q_*(\mu)} \ln\left(\frac{en}{q_*(\mu)}\right)}, \tag{6.96}$$

*όπου $C > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.*

**Πόρισμα 6.3.4.** *Έστω $\alpha \in (1,2]$, $\beta > 0$ και $\mu \in (\mathcal{P}_\alpha(\beta)\cap\mathcal{IL})_{[n]}$. Τότε,*

$$f_\mu(0)^{\frac{1}{n}} \leqslant C\sqrt{n^{\frac{2-\alpha}{2}}\beta^\alpha}\sqrt{\ln\left(n^{\frac{2-\alpha}{2}}\beta^\alpha\right)}, \tag{6.97}$$

*όπου $C > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.*

*Απόδειξη.* Αφού $\mu \in \mathcal{CP}_\alpha(\beta)$, από το πόρισμα 6.1.6 έχουμε ότι $\mu \in \mathcal{CP}(\alpha, c_1\beta)$. Τότε, από την πρόταση 4.1.4 έχουμε ότι $q_*(\mu) \geqslant c\frac{n^{\frac{\alpha}{2}}}{b^\alpha}$.

Επομένως, το αποτέλεσμα προκύπτει από το προηγούμενο πόρισμα 6.3.3. □

**Θεώρημα 6.3.5.** *Για κάθε ισοτροπικό και λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας $\mu$,*

$$f_\mu(0)^{\frac{1}{n}} \leqslant Cn^{\frac{1}{4}}\sqrt{\ln n}. \tag{6.98}$$

*Επιπλέον, αν το $\mu$ είναι $\psi_2$ με σταθερά $\beta_2 > 0$, τότε*

$$f_\mu(0)^{\frac{1}{n}} \leqslant C\beta_2\sqrt{\ln\beta_2}. \tag{6.99}$$

*Απόδειξη.* Η σχέση (6.98) είναι άμεση συνέπεια του πορίσματος 6.3.3 και της πρότασης 4.1.4. Ακόμα από το πόρισμα 6.1.6 έχουμε ότι, αν $\mu \in \mathcal{SP}(2,\beta)$ τότε $\mu \in \mathcal{SP}_2(c_1\beta)$. Έτσι η (6.99) προκύπτει από το πόρισμα 6.3.4. □

**Παρατήρηση 6.3.6.** Στην απόδειξη του πορίσματος 6.3.3 χρησιμοποιήσαμε την ανισότητα $q_*(\mu) \leqslant q_{-c}(\mu)$. Μπορεί κανείς να ελέγξει ότι γενικά αυτή η ανισότητα απέχει πολύ από το να είναι «ισότητα». Για παράδειγμα, αν $f_\mu := \mathbf{1}_{\overline{B_1^n}}$, έχουμε $q_*(\mu) << q_{-c}(\mu, \xi)$ για $\xi \simeq 1$. Συμφωνα με την πρόταση 4.1.6, η κατάσταση είναι πολύ καλύτερη στην περίπτωση των μέτρων μικρής διαμέτρου.

Κλείνουμε το κεφάλαιο με το εξής:

**Θεώρημα 6.3.7.** *Τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:*

(α) *Υπάρχει σταθερά $C_1 > 0$ τέτοια ώστε*

$$\sup_n \sup_{\mu \in \mathcal{IL}_{[n]}} f_\mu(0)^{\frac{1}{n}} \leqslant C_1.$$

(β) *Υπάρχουν σταθερές $C_2, \xi_1 > 0$ τέτοιες ώστε*

$$\sup_n \sup_{\mu \in \mathcal{IL}_{[n]}} \frac{n}{q_{-c}(\mu, \xi_1)} \leqslant C_2.$$

(γ) *Υπάρχουν σταθερές $C_3, \xi_2 > 0$ τέτοιες ώστε*

$$\sup_n \sup_{\mu \in \mathcal{IL}_{[n]}} \frac{n}{q_*(\bar{\mu}, \xi_2)} \leqslant C_3.$$

*Απόδειξη.* Η συνεπαγωγή (α) $\Longrightarrow$ (β) είναι άμεση συνέπεια της παρατήρησης μετά το θεώρημα 6.3.1. Η συνεπαγωγή (β) $\Longrightarrow$ (γ) έπεται άμεσα από την πρόταση 4.1.6. Τέλος η (γ) $\Longrightarrow$ (α) έπεται από την πρόταση 4.1.6 από το θεώρημα 6.3.1. $\square$

# Βιβλιογραφία

[1] D. Alonso–Gutiérrez, *About the isotropy constant of random convex sets*, Preprint: `http://arxiv.org/abs/0707.1570`.

[2] S. Artstein–Avidan, *Proportional concentration phenomena on the sphere*, Israel J. Math. **132** (2002), 337–358.

[3] G. Aubrun, *Sampling convex bodies: a random matrix approach*, Proc. Amer. Math. Soc. **135** (2007), 1293–1303.

[4] K. M. Ball, *Logarithmically concave functions and sections of convex sets in* $\mathbb{R}^n$, Studia Math. **88** (1988), 69–84.

[5] C. Borell, *Convex set functions in d-space*, Period. Math. Hungar. **6**, no. 2 (1975), 111–136.

[6] J. Bourgain, *On the distribution of polynomials on high dimensional convex sets*, Geom. Aspects of Funct. Analysis (Lindenstrauss-Milman eds.), Lecture Notes in Math. **1469** (1991), 127–137.

[7] J. Bourgain, *Random points in isotropic convex bodies*, in *Convex Geometric Analysis* (Berkeley, CA, 1996) Math. Sci. Res. Inst. Publ. **34** (1999), 53–58.

[8] J. Bourgain, *On the isotropy constant problem for* $\psi_2$*-bodies*, Geom. Aspects of Funct. Analysis (Milman-Schechtman eds.), Lecture Notes in Math. **1807** (2003), 114–121.

[9] I. Bárány and D. G. Larman, *Convex bodies, economic cap coverings, random polytopes*, Mathematika **35** (1988), 274–291.

[10] J. Bourgain, V. D. Milman, *New volume ratio properties for convex symmetric bodies in* $\mathbb{R}^n$, Invent. Math. **88**, no. 2, (1987), 319–340.

[11] J. Bourgain, J. Lindenstrauss and V. D. Milman, *Minkowski sums and symmetrizations*, Geom. Aspects of Funct. Analysis (Lindenstrauss-Milman eds.), Lecture Notes in Math. **1317** (1988), 44–74.

[12] S. G. Bobkov and F. L. Nazarov, *On convex bodies and log-concave probability measures with unconditional basis*, Geom. Aspects of Funct. Analysis (Milman-Schechtman eds.), Lecture Notes in Math. **1807** (2003), 53–69.

[13] S. G. Bobkov and F. L. Nazarov, *Large deviations of typical linear functionals on a convex body with unconditional basis*, Stochastic Inequalities and Applications, Progr. Probab. 56, Birkhäuser, Basel, 2003, 3–13.

[14] F. Barthe, O. Guédon, S. Mendelson and A. Naor, *A probabilistic approach to the geometry of the $\ell_p^n$-ball*, Ann. Prob. **33** (2005), 480–513.

[15] J. Bourgain, B. Klartag and V. D. Milman, *Symmetrization and isotropic constants of convex bodies*, Geometric Aspects of Functional Analysis, Lecture Notes in Math. **1850** (2004), 101–116.

[16] D. Cordero-Erausquin, M. Fradelizi, B. Maurey, *The (B) conjecture for the Gaussian measure of dilates of symmetric convex sets and related problems*, J. Funct. Anal., **214** (2004), no.2, 410–427.

[17] M. Fradelizi, *Sections of convex bodies through their centroid*, Arch. Math. **69** (1997), 515–522.

[18] A. Giannopoulos, *Notes on isotropic convex bodies*, Warsaw University Notes (2003).

[19] A. Giannopoulos and M. Hartzoulaki, *Random spaces generated by vertices of the cube*, Discrete Comput. Geom. **28** (2002), 255–273.

[20] A. Giannopoulos, M. Hartzoulaki and A. Tsolomitis, *Random points in isotropic unconditional convex bodies*, J. London Math. Soc. **72** (2005), 779–798.

[21] A. Giannopoulos and V. D. Milman, *Concentration property on probability spaces*, Adv. in Math. **156** (2000), 77–106.

[22] A. Giannopoulos and A. Tsolomitis, *On the volume radius of a random polytope in a convex body*, Math. Proc. Cambridge Phil. Soc. **134** (2003), 13–21.

[23] O. Guédon and M. Rudelson, *$L_p$-moments of random vectors via majorizing measures*, Adv. Math. **208** (2007), 798–823.

[24] M. Hartzoulaki and G. Paouris, *Quermassintegrals of a random polytope in a convex body*, Arch. Math. **80** (2003), 430–438.

[25] T. Holmstedt, *Interpolation of quasi–normed spaces*, Math. Scand. **26** (1970), 177–199.

[26] B. Klartag, *On convex perturbations with a bounded isotropic constant*, Geom. and Funct. Anal. (GAFA) **16** (2006) 1274–1290.

[27] B. Klartag and G. Kozma, *On the hyperplane conjecture for random convex sets*, Preprint: `http://arxiv.org/abs/math.MG/0612517`.

[28] B. Klartag and V. D. Milman, *Rapid Steiner Symmetrization of most of a convex body and the slicing problem*, Combin. Probab. Comput. **14**, no. 5-6 (2005), 829–843.

[29] B. Klartag R. Vershynin, *Small ball probability and Dvoretzky Theorem*, Israel J. Math. **157** (2007), no.1, 193–207.

[30] R. Kannan, L. Lovász and M. Simonovits, *Random walks and $O^*(n^5)$ volume algorithm for convex bodies*, Random Structures Algorithms II**1** (1997), 1–50.

[31] A. E. Litvak, A. Pajor, M. Rudelson and N. Tomczak–Jaegermann, *Smallest singular value of random matrices and geometry of random polytopes*, Adv. Math. **195** (2005), 491–523.

[32] R. Latala, K.Oleszkiewicz ,*Small ball probability estimates in terms of width*, Studia Math. **169** (2005), 305–314.

[33] L. Leindler, *On a certain converse of Hölder"s inequality*, Linear operators and approximation (Proc. Conf., Oberwolfach, 1971), Internat. Ser. Numer. Math., **20**, Birkhäuser, Basel, (1972), 182–184.

[34] A. Litvak, V. D. Milman and G. Schechtman, *Averages of norms and quasi-norms*, Math. Ann. **312** (1998), 95–124.

[35] E. Lutwak and G. Zhang, *Blaschke-Santaló inequalities*, J. Differential Geom. **47** (1997), 1–16.

[36] E. Lutwak, D. Yang and G. Zhang, *$L^p$ affine isoperimetric inequalities*, J. Differential Geom. **56** (2000), 111–132.

[37] S. Mendelson and A. Pajor, *On singular values of matrices with independent rows*, Bernoulli **12** (2006), 761–773.

[38] V. D. Milman , *A new proof of A. Dvoretzky's theorem in cross-sections of convex bodies*, (Russian), Funkcional. Anal. i Prilozen. **5** (1971), no.4, 28–37.

[39] V. D. Milman, *Inegalité de Brunn-Minkowski inverse et applications à la théorie locale des espaces normés*, C.R. Acad. Sci. Paris **302** (1986), 25–28.

[40] V. D. Milman, *Isomorphic symmetrization and geometric inequalities*, Geom. Aspects of Funct. Analysis (Lindenstrauss-Milman eds.), Lecture Notes in Math. **1317** (1988), 107–131.

[41] V.D. Milman and A. Pajor, *Isotropic positions and inertia ellipsoids and zonoids of the unit ball of a normed $n$-dimensional space*, GAFA Seminar 87-89, Springer Lecture Notes in Math. **1376** (1989), pp. 64–104.

[42] V.D. Milman, A. Pajor, *Entropy and Asymptotic Geometry of Non-Symmetric Convex Bodies*, Advances in Mathematics, **152** (2000), 314–335.

[43] V.D. Milman and G. Schechtman, *Asymptotic Theory of Finite Dimensional Normed Spaces*, Lecture Notes in Math. **1200** (1986), Springer, Berlin.

[44] V.D. Milman and G. Schechtman, *Global versus Local asymptotic theories of finite-dimensional normed spaces*, Duke Math. Journal **90** (1997), 73–93.

[45] S. J. Montgomery-Smith, *The distribution of Rademacher sums*, Proceedings of the AMS, **109**, (1990), 517–522.

[46] G. Paouris, *$\Psi_2$-estimates for linear functionals on zonoids*, Geom. Aspects of Funct. Analysis, Lecture Notes in Math. **1807** (2003), 211–222.

[47] G. Paouris, *On the $\Psi_2$-behavior of linear functionals on isotropic convex bodies*, Studia Math. **168** (2005), no. 3, 285–299.

[48] G. Paouris, *Concentration of mass on convex bodies*, Geom. Funct. Anal. **16** (2006), 1021–1049.

[49] G. Paouris, *Small ball probability estimates for log–concave measures*, Preprint.

[50] G. Paouris and E. Werner, *Personal communication.*

[51] G. Pisier, *The Volume of Convex Bodies and Banach Space Geometry*, Cambridge Tracts in Mathematics **94** (1989).

[52] P. Pivovarov, *Volume of caps and mean width of isotropic convex bodies*, Preprint.

[53] A. Prékopa, *Logarithmic concave measures with application to stochastic programming*, Acta Sci. Math. (Szeged), **32** (1971), 301–316.

[54] A. Prékopa, *On logarithmic concave measures and functions*, Acta Sci. Math. (Szeged), **34** (1973), 335–343.

[55] C. A. Rogers and G. C. Shephard, *Convex bodies associated with a given convex body*, J. London Soc. **33** (1958), 270–281.

[56] M. Rudelson, *Random vectors in the isotropic position*, J. Funct. Anal. **164** (1999), 60–72.

[57] R. Schneider, *Convex Bodies: The Brunn-Minkowski Theory*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications **44**, Cambridge University Press, Cambridge (1993).

[58] J. Spingarn, *An inequality for sections and projections of a convex set*, Proc. Amer. Math. Soc. **118** (1993), 1219–1224.

[59] S. J. Szarek, *On the best constant in the Khinchine inequality*, Studia Math. **58** (1976), 197–208.

[60] C. Zong, *Strange phenomena in convex and discrete geometry*, Universitext, Springer (2003).