Απειροστικός Λογισμός ΙΙ

Πρόχειρες Σημειώσεις

Τμήμα Μαθηματικών
Πανεπιστήμιο Αθηνών
2010-11

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Υπακολουθίες και βασικές ακολουθίες

1.1 Υπακολουθίες

Ορισμός 1.1.1. Έστω (a_n) μια ακολουθία πραγματικών αριθμών. Η ακολουθία (b_n) λέγεται *υπακολουθία* της (a_n) αν υπάρχει γνησίως αύξουσα ακολουθία φυσικών αριθμών $k_1 < k_2 < \cdots < k_n < k_{n+1} < \cdots$ ώστε

$$b_n = a_{k_n} \ \text{ για κάθε } \ n \in \mathbb{N}. \tag{1.1.1}$$

Με άλλα λόγια, οι όροι της (b_n) είναι οι $a_{k_1}, a_{k_2}, \ldots, a_{k_n}, \ldots$, όπου $k_1 < k_2 < \cdots < k_n < k_{n+1} < \cdots$. Γενικά, μια ακολουθία έχει πολλές (συνήθως άπειρες το πλήθος) διαφορετικές υπακολουθίες.

Παραδείγματα 1.1.2. Έστω (a_n) μια ακολουθία πραγματικών αριθμών.
(α) Η υπακολουθία (a_{2n}) των «άρτιων όρων» της (a_n) έχει όρους τους

$$a_2, a_4, a_6, \ldots.$$

Εδώ, $k_n = 2n$.
(β) Η υπακολουθία (a_{2n-1}) των «περιττών όρων» της (a_n) έχει όρους τους

$$a_1, a_3, a_5, \ldots.$$

Εδώ, $k_n = 2n - 1$.
(γ) Η υπακολουθία (a_{n^2}) της (a_n) έχει όρους τους

$$a_1, a_4, a_9, \ldots.$$

Εδώ, $k_n = n^2$.
(δ) Κάθε τελικό τμήμα $(a_m, a_{m+1}, a_{m+2}, \ldots)$ της (a_n) είναι υπακολουθία της (a_n). Εδώ, $k_n = m + n - 1$.

Παρατήρηση 1.1.3. Έστω (k_n) μια γνησίως αύξουσα ακολουθία φυσικών αριθμών. Τότε, $k_n \geq n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Απόδειξη. Με επαγωγή: αφού ο k_1 είναι φυσικός αριθμός, είναι φανερό ότι $k_1 \geq 1$. Για το επαγωγικό βήμα υποθέτουμε ότι $k_m \geq m$. Αφού η (k_n) είναι γνησίως αύξουσα, έχουμε $k_{m+1} > k_m$, άρα $k_{m+1} > m$. Αφού οι k_{m+1} και m είναι φυσικοί αριθμοί, έπεται ότι $k_{m+1} \geq m+1$ (θυμηθείτε ότι ανάμεσα στον m και στον $m+1$ δεν υπάρχει άλλος φυσικός). □

Η επόμενη Πρόταση δείχνει ότι αν μια ακολουθία συγκλίνει σε πραγματικό αριθμό τότε όλες οι υπακολουθίες της είναι συγκλίνουσες και συγκλίνουν στον ίδιο πραγματικό αριθμό.

Πρόταση 1.1.4. *Αν $a_n \to a$ τότε για κάθε υπακολουθία (a_{k_n}) της (a_n) ισχύει $a_{k_n} \to a$.*

Απόδειξη. Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού $a_n \to a$, υπάρχει $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ με την εξής ιδιότητα:

$$\text{Για κάθε } m \geq n_0 \text{ ισχύει } |a_m - a| < \varepsilon.$$

Από την Παρατήρηση 1.1.3 για κάθε $n \geq n_0$ έχουμε $k_n \geq n \geq n_0$. Θέτοντας λοιπόν $m = k_n$ στην προηγούμενη σχέση, παίρνουμε:

$$\text{Για κάθε } n \geq n_0 \text{ ισχύει } |a_{k_n} - a| < \varepsilon.$$

Αυτό αποδεικνύει ότι $a_{k_n} \to a$: για το τυχόν $\varepsilon > 0$ βρήκαμε $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε όλοι οι όροι $a_{k_{n_0}}, a_{k_{n_0+1}}, \dots$ της (a_{k_n}) να ανήκουν στο $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$. □

Παρατήρηση 1.1.5. Η προηγούμενη Πρόταση είναι πολύ χρήσιμη αν θέλουμε να δείξουμε ότι μια ακολουθία (a_n) δεν συγκλίνει σε κανέναν πραγματικό αριθμό. Αρκεί να βρούμε δύο υπακολουθίες της (a_n) οι οποίες να έχουν διαφορετικά όρια.

Για παράδειγμα, ας θεωρήσουμε την $(a_n) = (-1)^n$. Τότε, $a_{2n} = (-1)^{2n} = 1 \to 1$ και $a_{2n-1} = (-1)^{2n-1} = -1 \to -1$.

Ας υποθέσουμε ότι $a_n \to a$. Οι (a_{2n}) και (a_{2n-1}) είναι υπακολουθίες της (a_n), πρέπει λοιπόν να ισχύει $a_{2n} \to a$ και $a_{2n-1} \to a$. Από τη μοναδικότητα του ορίου της (a_{2n}) παίρνουμε $a = 1$ και από τη μοναδικότητα του ορίου της (a_{2n-1}) παίρνουμε $a = -1$. Δηλαδή, $1 = -1$. Καταλήξαμε σε άτοπο, άρα η (a_n) δεν συγκλίνει.

1.2 Θεώρημα Bolzano–Weierstrass

Θεώρημα 1.2.1 (Bolzano–Weierstrass). *Κάθε φραγμένη ακολουθία έχει τουλάχιστον μία υπακολουθία που συγκλίνει σε πραγματικό αριθμό.*

Θα δώσουμε δύο αποδείξεις αυτού του Θεωρήματος. Η πρώτη βασίζεται στο γεγονός ότι κάθε μονότονη και φραγμένη ακολουθία συγκλίνει. Για να βρούμε συγκλίνουσα υπακολουθία μιας φραγμένης ακολουθίας αρκεί να βρούμε μια μονότονη υπακολουθία της. Το τελευταίο ισχύει εντελώς γενικά, όπως δείχνει το επόμενο Θεώρημα:

Θεώρημα 1.2.2. *Κάθε ακολουθία έχει τουλάχιστον μία μονότονη υπακολουθία.*

Απόδειξη. Θα χρειαστούμε την έννοια του σημείου κορυφής μιας ακολουθίας.

Ορισμός 1.2.3. Έστω (a_n) μια ακολουθία πραγματικών αριθμών. Λέμε ότι ο a_m είναι **σημείο κορυφής** της (a_n) αν $a_m \geq a_n$ για κάθε $n \geq m$.

[Για να εξοικειωθείτε με τον ορισμό ελέγξτε τα εξής. Αν η (a_n) είναι φθίνουσα τότε κάθε όρος της είναι σημείο κορυφής της. Αν η (a_n) είναι γνησίως αύξουσα τότε δεν έχει κανένα σημείο κορυφής.]

Έστω (a_n) μια ακολουθία πραγματικών αριθμών. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

(α) *Η (a_n) έχει άπειρα το πλήθος σημεία κορυφής.* Τότε, υπάρχουν φυσικοί αριθμοί $k_1 < k_2 < \cdots < k_n < k_{n+1} < \cdots$ ώστε όλοι οι όροι $a_{k_1}, \ldots, a_{k_n}, \ldots$ να είναι σημεία κορυφής της (a_n) (εξηγήστε γιατί). Αφού $k_n < k_{n+1}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, η (a_{k_n}) είναι υπακολουθία της (a_n). Από τον ορισμό του σημείου κορυφής βλέπουμε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει $a_{k_n} \geq a_{k_{n+1}}$ (έχουμε $k_{n+1} > k_n$ και ο a_{k_n} είναι σημείο κορυφής της (a_n)). Δηλαδή,

$$a_{k_1} \geq a_{k_2} \geq \cdots \geq a_{k_n} \geq a_{k_{n+1}} \geq \cdots . \tag{1.2.1}$$

Άρα, η υπακολουθία (a_{k_n}) είναι φθίνουσα.

(β) *Η (a_n) έχει πεπερασμένα το πλήθος σημεία κορυφής.* Τότε, υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ με την εξής ιδιότητα: αν $m \geq N$ τότε ο a_m δεν είναι σημείο κορυφής της (a_n) (πάρτε $N = k+1$ όπου a_k το τελευταίο σημείο κορυφής της (a_n) ή $N = 1$ αν δεν υπάρχουν σημεία κορυφής).

Με βάση τον ορισμό του σημείου κορυφής αυτό σημαίνει ότι: αν $m \geq N$ τότε υπάρχει $n > m$ ώστε $a_n > a_m$.

Εφαρμόζουμε διαδοχικά το παραπάνω. Θέτουμε $k_1 = N$ και βρίσκουμε $k_2 > k_1$ ώστε $a_{k_2} > a_{k_1}$. Κατόπιν βρίσκουμε $k_3 > k_2$ ώστε $a_{k_3} > a_{k_2}$ και ούτω καθεξής. Υπάρχουν δηλαδή $k_1 < k_2 < \cdots < k_n < k_{n+1} < \cdots$ ώστε

$$a_{k_1} < a_{k_2} < \cdots < a_{k_n} < a_{k_{n+1}} < \cdots . \tag{1.2.2}$$

Τότε, η (a_{k_n}) είναι γνησίως αύξουσα υπακολουθία της (a_n). □

Μπορούμε τώρα να αποδείξουμε το Θεώρημα Bolzano–Weierstrass.

Απόδειξη του Θεωρήματος 1.2.1. Έστω (a_n) φραγμένη ακολουθία. Από το Θεώρημα 1.2.2 η (a_n) έχει μονότονη υπακολουθία (a_{k_n}). Η (a_{k_n}) είναι μονότονη και φραγμένη, συνεπώς συγκλίνει σε πραγματικό αριθμό. □

1.2α΄ Απόδειξη με χρήση της αρχής του κιβωτισμού

Η δεύτερη απόδειξη του Θεωρήματος Bolzano–Weierstrass χρησιμοποιεί την αρχή των κιβωτισμένων διαστημάτων. Έστω (a_n) μια φραγμένη ακολουθία πραγματικών αριθμών. Τότε, υπάρχει κλειστό διάστημα $[b_1, c_1]$ στο οποίο ανήκουν όλοι οι όροι a_n.

Χωρίζουμε το $[b_1, c_1]$ σε δύο διαδοχικά διαστήματα που έχουν το ίδιο μήκος $\frac{c_1 - b_1}{2}$: τα $\left[b_1, \frac{b_1+c_1}{2}\right]$ και $\left[\frac{b_1+c_1}{2}, c_1\right]$. Κάποιο από αυτά τα δύο διαστήματα περιέχει άπειρους το πλήθος όρους της (a_n). Παίρνοντας σαν $[b_2, c_2]$ αυτό το υποδιάστημα του $[b_1, c_1]$ έχουμε δείξει το εξής.

> Υπάρχει κλειστό διάστημα $[b_2, c_2] \subset [b_1, c_1]$ το οποίο περιέχει άπειρους όρους της (a_n) και έχει μήκος
>
> $$c_2 - b_2 = \frac{c_1 - b_1}{2}. \tag{1.2.3}$$

Συνεχίζουμε με τον ίδιο τρόπο: χωρίζουμε το $[b_2, c_2]$ σε δύο διαδοχικά διαστήματα μήκους $\frac{c_2 - b_2}{2}$: τα $\left[b_2, \frac{b_2+c_2}{2}\right]$ και $\left[\frac{b_2+c_2}{2}, c_2\right]$. Αφού το $[b_2, c_2]$ περιέχει άπειρους όρους της (a_n), κάποιο από αυτά τα δύο διαστήματα περιέχει άπειρους το πλήθος όρους της (a_n). Παίρνοντας σαν $[b_3, c_3]$ αυτό το υποδιάστημα του $[b_2, c_2]$ έχουμε δείξει το εξής.

Υπάρχει κλειστό διάστημα $[b_3, c_3] \subset [b_2, c_2]$ το οποίο περιέχει άπειρους όρους της (a_n) και έχει μήκος

$$c_3 - b_3 = \frac{c_2 - b_2}{2} = \frac{c_1 - b_1}{2^2}. \tag{1.2.4}$$

Συνεχίζοντας με τον ίδιο τρόπο ορίζουμε ακολουθία $\big([b_m, c_m]\big)_{m\in\mathbb{N}}$ κλειστών διαστημάτων που ικανοποιεί τα εξής:

(i) Για κάθε $m \in \mathbb{N}$ ισχύει $[b_{m+1}, c_{m+1}] \subset [b_m, c_m]$.

(ii) Για κάθε $m \in \mathbb{N}$ ισχύει $c_m - b_m = (c_1 - b_1)/2^{m-1}$.

(iii) Για κάθε $m \in \mathbb{N}$ υπάρχουν άπειροι όροι της (a_n) στο $[b_m, c_m]$.

Χρησιμοποιώντας την τρίτη συνθήκη, μπορούμε να βρούμε υπακολουθία (a_{k_m}) της (a_n) με την ιδιότητα: για κάθε $m \in \mathbb{N}$ ισχύει $a_{k_m} \in [b_m, c_m]$. Πράγματι, υπάρχει $k_1 \in \mathbb{N}$ ώστε $a_{k_1} \in [b_1, c_1]$ – για την ακρίβεια, όλοι οι όροι της (a_n) βρίσκονται στο $[b_1, c_1]$. Τώρα, αφού το $[b_2, c_2]$ περιέχει άπειρους όρους της (a_n), κάποιος από αυτούς έχει δείκτη μεγαλύτερο από k_1. Δηλαδή, υπάρχει $k_2 > k_1$ ώστε $a_{k_2} \in [b_2, c_2]$. Με τον ίδιο τρόπο, αν έχουν οριστεί $k_1 < \cdots < k_m$ ώστε $a_{k_s} \in [b_s, c_s]$ για κάθε $s = 1, \ldots, m$, μπορούμε να βρούμε $k_{m+1} > k_m$ ώστε $a_{k_{m+1}} \in [b_{m+1}, c_{m+1}]$ (διότι, το $[b_{m+1}, c_{m+1}]$ περιέχει άπειρους όρους της (a_n)). Έτσι, ορίζεται μια υπακολουθία (a_{k_m}) της (a_n) που ικανοποιεί το ζητούμενο.

Θα δείξουμε ότι η (a_{k_m}) συγκλίνει. Από την αρχή των κιβωτισμένων διαστημάτων (και λόγω της (ii)) υπάρχει μοναδικός $a \in \mathbb{R}$ ο οποίος ανήκει σε όλα τα κλειστά διαστήματα $[b_m, c_m]$. Θυμηθείτε ότι

$$\lim_{m\to\infty} b_m = a = \lim_{m\to\infty} c_m.$$

Αφού $b_m \leq a_{k_m} \leq c_m$ για κάθε m, το κριτήριο των ισοσυγκλινουσών ακολουθιών δείχνει ότι $a_{k_m} \to a$. □

1.3 Ανώτερο και κατώτερο όριο ακολουθίας

Σκοπός μας σε αυτήν την Παράγραφο είναι να μελετήσουμε πιο προσεκτικά τις υπακολουθίες μιας φραγμένης ακολουθίας. Θυμηθείτε ότι αν η ακολουθία (a_n) συγκλίνει σε κάποιον πραγματικό αριθμό a τότε η κατάσταση είναι πολύ απλή. Αν (a_{k_n}) είναι τυχούσα υπακολουθία της (a_n), τότε $a_{k_n} \to a$. Δηλαδή, όλες οι υπακολουθίες μιας συγκλίνουσας ακολουθίας συγκλίνουν και μάλιστα στο όριο της ακολουθίας.

Ορισμός 1.3.1. Έστω (a_n) μια ακολουθία. Λέμε ότι ο $x \in \mathbb{R}$ είναι **οριακό σημείο** (ή **υπακολουθιακό όριο**) της (a_n) αν υπάρχει υπακολουθία (a_{k_n}) της (a_n) ώστε $a_{k_n} \to x$.

Τα οριακά σημεία μιας ακολουθίας χαρακτηρίζονται από το επόμενο Λήμμα.

Λήμμα 1.3.2. *Ο x είναι οριακό σημείο της (a_n) αν και μόνο αν για κάθε $\varepsilon > 0$ και για κάθε $m \in \mathbb{N}$ υπάρχει $n \geq m$ ώστε $|a_n - x| < \varepsilon$.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε πρώτα ότι ο x είναι οριακό σημείο της (a_n). Υπάρχει λοιπόν υπακολουθία (a_{k_n}) της (a_n) ώστε $a_{k_n} \to x$.

Έστω $\varepsilon > 0$ και $m \in \mathbb{N}$. Υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $|a_{k_n} - x| < \varepsilon$ για κάθε $n \geq n_0$. Θεωρούμε τον $n_1 = \max\{m, n_0\}$. Τότε $k_{n_1} \geq n_1 \geq m$ και $n_1 \geq n_0$, άρα $|a_{k_{n_1}} - x| < \varepsilon$.

Αντίστροφα: Παίρνουμε $\varepsilon = 1$ και $m = 1$. Από την υπόθεση υπάρχει $k_1 \geq 1$ ώστε $|a_{k_1} - x| < 1$. Στη συνέχεια παίρνουμε $\varepsilon = \frac{1}{2}$ και $m = k_1 + 1$. Εφαρμόζοντας την υπόθεση βρίσκουμε $k_2 \geq k_1 + 1 > k_1$ ώστε $|a_{k_2} - x| < \frac{1}{2}$.

Επαγωγικά βρίσκουμε $k_1 < k_2 < \cdots < k_n < \cdots$ ώστε

$$|a_{k_n} - x| < \frac{1}{n}$$

(κάνετε μόνοι σας το επαγωγικό βήμα). Είναι φανερό ότι $a_{k_n} \to x$. □

Έστω (a_n) μια φραγμένη ακολουθία. Δηλαδή, υπάρχει $M > 0$ ώστε $|a_n| \leq M$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Θεωρούμε το σύνολο

$$K = \{x \in \mathbb{R} : x \text{ είναι οριακό σημείο της } (a_n)\}. \tag{1.3.1}$$

1. *Το K είναι μη κενό.* Από το Θεώρημα Bolzano–Weierstrass υπάρχει τουλάχιστον μία υπακολουθία (a_{k_n}) της (a_n) που συγκλίνει σε πραγματικό αριθμό. Το όριο της (a_{k_n}) είναι εξ ορισμού στοιχείο του K.

2. *Το K είναι φραγμένο.* Αν $x \in K$, υπάρχει $a_{k_n} \to x$ και αφού $-M \leq a_{k_n} \leq M$ για κάθε n, έπεται ότι $-M \leq x \leq M$.

Από το αξίωμα της πληρότητας προκύπτει ότι υπάρχουν τα $\sup K$ και $\inf K$. Το επόμενο Λήμμα δείχνει ότι το K έχει μέγιστο και ελάχιστο στοιχείο.

Λήμμα 1.3.3. *Έστω (a_n) φραγμένη ακολουθία και*

$$K = \{x \in \mathbb{R} : x \text{ είναι οριακό σημείο της } (a_n)\}.$$

Τότε, $\sup K \in K$ και $\inf K \in K$.

Απόδειξη. Έστω $a = \sup K$. Θέλουμε να δείξουμε ότι ο a είναι οριακό σημείο της (a_n), και σύμφωνα με το Λήμμα 1.3.2 αρκεί να δούμε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ και για κάθε $m \in \mathbb{N}$ υπάρχει $n \geq m$ ώστε $|a_n - a| < \varepsilon$.

Έστω $\varepsilon > 0$ και $m \in \mathbb{N}$. Αφού $a = \sup K$, υπάρχει $x \in K$ ώστε $a - \frac{\varepsilon}{2} < x \leq a$. Ο x είναι οριακό σημείο της (a_n), άρα υπάρχει $n \geq m$ ώστε $|a_n - x| < \frac{\varepsilon}{2}$. Τότε,

$$|a_n - a| \leq |a_n - x| + |x - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \tag{1.3.2}$$

Με ανάλογο τρόπο δείχνουμε ότι $\inf K \in K$. □

Ορισμός 1.3.4. Έστω (a_n) μια φραγμένη ακολουθία. Αν

$$K = \{x \in \mathbb{R} : x \text{ είναι οριακό σημείο της } (a_n)\},$$

ορίζουμε

(i) $\limsup a_n = \sup K$, το **ανώτερο όριο** της (a_n),

(ii) $\liminf a_n = \inf K$ το **κατώτερο όριο** της (a_n).

Σύμφωνα με το Λήμμα 1.3.3, το $\limsup a_n$ είναι το μέγιστο στοιχείο και το $\liminf a_n$ είναι το ελάχιστο στοιχείο του K αντίστοιχα:

Θεώρημα 1.3.5. *Έστω (a_n) φραγμένη ακολουθία. Το $\limsup a_n$ είναι ο μεγαλύτερος πραγματικός αριθμός x για τον οποίο υπάρχει υπακολουθία (a_{k_n}) της (a_n) με $a_{k_n} \to x$. Το $\liminf a_n$ είναι ο μικρότερος πραγματικός αριθμός y για τον οποίο υπάρχει υπακολουθία (a_{l_n}) της (a_n) με $a_{l_n} \to y$.* □

Το ανώτερο και το κατώτερο όριο μιας φραγμένης ακολουθίας περιγράφονται μέσω των περιοχών τους ως εξής:

Θεώρημα 1.3.6. *Έστω (a_n) φραγμένη ακολουθία πραγματικών αριθμών και έστω $x \in \mathbb{R}$. Τότε,*

(1) $x \leq \limsup a_n$ αν και μόνο αν: για κάθε $\varepsilon > 0$ το σύνολο $\{n \in \mathbb{N} : x - \varepsilon < a_n\}$ είναι άπειρο.

(2) $x \geq \limsup a_n$ αν και μόνο αν: για κάθε $\varepsilon > 0$ το σύνολο $\{n \in \mathbb{N} : x + \varepsilon < a_n\}$ είναι πεπερασμένο.

(3) $x \geq \liminf a_n$ αν και μόνο αν: για κάθε $\varepsilon > 0$ το σύνολο $\{n \in \mathbb{N} : a_n < x + \varepsilon\}$ είναι άπειρο.

(4) $x \leq \liminf a_n$ αν και μόνο αν: για κάθε $\varepsilon > 0$ το σύνολο $\{n \in \mathbb{N} : a_n < x - \varepsilon\}$ είναι πεπερασμένο.

(5) $x = \limsup a_n$ αν και μόνο αν: για κάθε $\varepsilon > 0$ το $\{n \in \mathbb{N} : x - \varepsilon < a_n\}$ είναι άπειρο και το $\{n \in \mathbb{N} : x + \varepsilon < a_n\}$ είναι πεπερασμένο.

(6) $x = \liminf a_n$ αν και μόνο αν: για κάθε $\varepsilon > 0$ το $\{n \in \mathbb{N} : a_n < x + \varepsilon\}$ είναι άπειρο και το $\{n \in \mathbb{N} : a_n < x - \varepsilon\}$ είναι πεπερασμένο.

Απόδειξη. (1:$\Rightarrow$) Έστω $\varepsilon > 0$. Υπάρχει υπακολουθία (a_{k_n}) της (a_n) με $a_{k_n} \to \limsup a_n$, άρα υπάρχει n_0 ώστε για κάθε $n \geq n_0$

$$a_{k_n} > \limsup a_n - \varepsilon \geq x - \varepsilon. \tag{1.3.3}$$

Έπεται ότι το $\{n : a_n > x - \varepsilon\}$ είναι άπειρο.

(2:$\Rightarrow$) Έστω $\varepsilon > 0$. Ας υποθέσουμε ότι υπάρχουν $k_1 < k_2 < \cdots < k_n < \cdots$ με $a_{k_n} > x + \varepsilon$. Τότε, η υπακολουθία (a_{k_n}) της (a_n) έχει όλους τους όρους της μεγαλύτερους από $x + \varepsilon$. Μπορούμε να βρούμε συγκλίνουσα υπακολουθία $(a_{k_{s_n}})$ της (a_{k_n}) (από το Θεώρημα Bolzano–Weierstrass) και τότε $a_{k_{s_n}} \to y \geq x + \varepsilon$. Όμως τότε, η $(a_{k_{s_n}})$ είναι υπακολουθία της (a_n) (εξηγήστε γιατί), οπότε

$$\limsup a_n \geq y \geq x + \varepsilon \geq \limsup a_n + \varepsilon. \tag{1.3.4}$$

Αυτό είναι άτοπο. Άρα, το $\{n : a_n > x + \varepsilon\}$ είναι πεπερασμένο.

(1: $\Leftarrow$) Έστω ότι $x > \limsup a_n$. Τότε υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε αν $y = x - \varepsilon$ να έχουμε $x > y > \limsup a_n$. Από την υπόθεσή μας, το $\{n \in \mathbb{N} : y < a_n\}$ είναι άπειρο. Όμως $y > \limsup a_n$ οπότε από την (2: $\Rightarrow$) το σύνολο $\{n \in \mathbb{N} : y < a_n\}$ είναι πεπερασμένο (γράψτε $y = \limsup a_n + \varepsilon_1$ για κάποιο $\varepsilon_1 > 0$). Οι δύο ισχυρισμοί έρχονται σε αντίφαση.

(2:$\Leftarrow$) Όμοια, υποθέτουμε ότι $x < \limsup a_n$ και βρίσκουμε y ώστε $x < y < \limsup a_n$. Αφού $y > x$, συμπεραίνουμε ότι το $\{n \in \mathbb{N} : y < a_n\}$ είναι πεπερασμένο (αυτή είναι η υπόθεσή μας) και αφού $y < \limsup a_n$ συμπεραίνουμε ότι το $\{n \in \mathbb{N} : y < a_n\}$ είναι άπειρο (από την (1:$\Rightarrow$).) Έτσι καταλήγουμε σε άτοπο.

Η (5) είναι άμεση συνέπεια των (1) και (2).

Για τις (3), (4) και (6) εργαζόμαστε όμοια. □

Μια εναλλακτική περιγραφή των $\limsup a_n$ και $\liminf a_n$ δίνεται από το επόμενο θεώρημα:

Θεώρημα 1.3.7. *Έστω (a_n) φραγμένη ακολουθία.*

(α) *Θέτουμε $b_n = \sup\{a_k : k \geq n\}$. Τότε, $\limsup a_n = \inf\{b_n : n \in \mathbb{N}\}$.*

(β) *Θέτουμε $\gamma_n = \inf\{a_k : k \geq n\}$. Τότε, $\liminf a_n = \sup\{\gamma_n : n \in \mathbb{N}\}$.*

Απόδειξη. Δείχνουμε πρώτα ότι οι αριθμοί $\inf\{b_n : n \in \mathbb{N}\}$ και $\sup\{\gamma_n : n \in \mathbb{N}\}$ ορίζονται καλά:

Για κάθε $n \in \mathbb{N}$, ισχύει $\gamma_n \leq a_n \leq b_n$ (εξηγήστε γιατί). Επίσης, η (b_n) είναι φθίνουσα, ενώ η (a_n) είναι αύξουσα (εξηγήστε γιατί). Αφού η (a_n) είναι φραγμένη, έπεται ότι η (b_n) είναι φθίνουσα και κάτω φραγμένη, ενώ η (γ_n) είναι αύξουσα και άνω φραγμένη. Από το θεώρημα σύγκλισης μονότονων ακολουθιών συμπεραίνουμε ότι $b_n \to \inf\{b_n : n \in \mathbb{N}\} := b$ και $\gamma_n \to \sup\{\gamma_n : n \in \mathbb{N}\} := \gamma$.

Θα δείξουμε ότι $\limsup a_n = b$. Από το Λήμμα 1.3.3 υπάρχει υπακολουθία (a_{k_n}) της (a_n) με $a_{k_n} \to \limsup a_n$. Όμως, $a_{k_n} \leq b_{k_n}$ και $b_{k_n} \to b$ (εξηγήστε γιατί). Άρα,

$$\limsup a_n = \lim a_{k_n} \leq \lim b_{k_n} = b. \tag{1.3.5}$$

Για την αντίστροφη ανισότητα δείχνουμε ότι ο b είναι οριακό σημείο της (a_n). Έστω $\varepsilon > 0$ και έστω $m \in \mathbb{N}$. Αφού $b_n \to b$, υπάρχει $n \geq m$ ώστε $|b - b_n| < \frac{\varepsilon}{2}$. Αλλά, $b_n = \sup\{a_k : k \geq n\}$, άρα υπάρχει $k \geq n \geq m$ ώστε $b_n \geq a_k > b_n - \frac{\varepsilon}{2}$ δηλαδή $|b_n - a_k| < \frac{\varepsilon}{2}$. Έπεται ότι

$$|b - a_k| \leq |b - b_n| + |b_n - a_k| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \tag{1.3.6}$$

Από το Λήμμα 1.3.2 ο b είναι οριακό σημείο της (a_n), και συνεπώς, $b \leq \limsup a_n$.

Με ανάλογο τρόπο δείχνουμε ότι $\liminf a_n = \gamma$. □

Κλείνουμε με έναν χαρακτηρισμό της σύγκλισης για φραγμένες ακολουθίες.

Θεώρημα 1.3.8. *Έστω (a_n) φραγμένη ακολουθία. Η (a_n) συγκλίνει αν και μόνο αν $\limsup a_n = \liminf a_n$.*

Απόδειξη. Αν $a_n \to a$ τότε για κάθε υπακολουθία (a_{k_n}) της (a_n) έχουμε $a_{k_n} \to a$. Επομένως, ο a είναι το μοναδικό οριακό σημείο της (a_n). Έχουμε $K = \{a\}$, άρα

$$\limsup a_n = \liminf a_n = a.$$

Αντίστροφα: έστω $\varepsilon > 0$. Από το Θεώρημα 1.3.6 ο αριθμός $a = \limsup a_n = \liminf a_n$ έχει την εξής ιδιότητα:

> Τα σύνολα $\{n \in \mathbb{N} : a_n < a - \varepsilon\}$ και $\{n \in \mathbb{N} : a_n > a + \varepsilon\}$ είναι πεπερασμένα.

Δηλαδή, το σύνολο

$$\{n \in \mathbb{N} : |a_n - a| > \varepsilon\} \tag{1.3.7}$$

είναι πεπερασμένο. Ισοδύναμα, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ με την ιδιότητα: για κάθε $n \geq n_0$,

$$|a_n - a| \leq \varepsilon.$$

Αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, έπεται ότι $a_n \to a$. □

Παρατήρηση 1.3.9. Ας υποθέσουμε ότι η ακολουθία (a_n) δεν είναι φραγμένη. Αν η (a_n) δεν είναι άνω φραγμένη, τότε υπάρχει υπακολουθία (a_{k_n}) της (a_n) ώστε $a_{k_n} \to +\infty$ (άσκηση). Με άλλα λόγια, ο $+\infty$ είναι «οριακό σημείο» της (a_n). Σε αυτήν την περίπτωση είναι λογικό να ορίσουμε $\limsup a_n = +\infty$. Εντελώς ανάλογα, αν η (a_n) δεν είναι κάτω φραγμένη, τότε υπάρχει υπακολουθία (a_{k_n}) της (a_n) ώστε $a_{k_n} \to -\infty$ (άσκηση). Δηλαδή, ο $-\infty$ είναι «οριακό σημείο» της (a_n). Τότε, ορίζουμε $\liminf a_n = -\infty$.

1.4 Ακολουθίες Cauchy

Ο ορισμός της ακολουθίας Cauchy έχει σαν αφετηρία την εξής παρατήρηση: ας υποθέσουμε ότι $a_n \to a$. Τότε, οι όροι της (a_n) είναι τελικά «κοντά» στο a, άρα είναι τελικά και «μεταξύ τους κοντά». Για να εκφράσουμε αυστηρά αυτή την παρατήρηση, ας θεωρήσουμε τυχόν $\varepsilon > 0$. Υπάρχει $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n \geq n_0$ να ισχύει $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$. Τότε, για κάθε $n, m \geq n_0$ έχουμε

$$|a_n - a_m| \leq |a_n - a| + |a - a_m| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \tag{1.4.1}$$

Ορισμός 1.4.1. Μια ακολουθία (a_n) λέγεται **ακολουθία Cauchy** (ή **βασική ακολουθία**) αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ ώστε:

$$\text{αν } m, n \geq n_0(\varepsilon), \text{ τότε } \; |a_n - a_m| < \varepsilon. \tag{1.4.2}$$

Παρατήρηση 1.4.2. Αν η (a_n) είναι ακολουθία Cauchy, τότε για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ ώστε

$$\text{αν } n \geq n_0(\varepsilon), \text{ τότε } \; |a_n - a_{n+1}| < \varepsilon. \tag{1.4.3}$$

Το αντίστροφο δεν ισχύει: αν, από κάποιον δείκτη και πέρα, διαδοχικοί όροι είναι κοντά, δεν έπεται αναγκαστικά ότι η ακολουθία είναι Cauchy. Για παράδειγμα, θεωρήστε την

$$a_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}}. \tag{1.4.4}$$

Τότε,

$$|a_{n+1} - a_n| = \frac{1}{\sqrt{n+1}} \to 0 \tag{1.4.5}$$

όταν $n \to \infty$, όμως

$$|a_{2n} - a_n| = \frac{1}{\sqrt{n+1}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{2n}} \geq \frac{n}{\sqrt{2n}} = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2}} \to +\infty \tag{1.4.6}$$

όταν $n \to \infty$, απ' όπου βλέπουμε ότι η (a_n) δεν είναι ακολουθία Cauchy. Πράγματι, αν η (a_n) ήταν ακολουθία Cauchy, θα έπρεπε (εφαρμόζοντας τον ορισμό με $\varepsilon = 1$) για μεγάλα $n, m = 2n$ να ισχύει

$$|a_{2n} - a_n| < 1 \;\text{ δηλαδή }\; \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2}} < 1, \tag{1.4.7}$$

το οποίο οδηγεί σε άτοπο.

Σκοπός μας είναι να δείξουμε ότι μια ακολουθία πραγματικών αριθμών είναι συγκλίνουσα αν και μόνο αν είναι ακολουθία Cauchy. Η απόδειξη γίνεται σε τρία βήματα.

Πρόταση 1.4.3. *Κάθε ακολουθία Cauchy είναι φραγμένη.*

Απόδειξη. Έστω (a_n) ακολουθία Cauchy. Πάρτε $\varepsilon = 1 > 0$ στον ορισμό: υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $|a_n - a_m| < 1$ για κάθε $n, m \geq n_0$. Ειδικότερα, $|a_n - a_{n_0}| < 1$ για κάθε $n > n_0$. Δηλαδή,

$$|a_n| < 1 + |a_{n_0}| \quad \text{για κάθε} \quad n > n_0. \tag{1.4.8}$$

Θέτουμε $M = \max\{|a_1|, \ldots, |a_{n_0}|, 1 + |a_{n_0}|\}$ και εύκολα επαληθεύουμε ότι

$$|a_n| \leq M$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$. □

Πρόταση 1.4.4. *Αν μια ακολουθία Cauchy (a_n) έχει συγκλίνουσα υπακολουθία, τότε η (a_n) συγκλίνει.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι η (a_n) είναι ακολουθία Cauchy και ότι η υπακολουθία (a_{k_n}) συγκλίνει στο $a \in \mathbb{R}$. Θα δείξουμε ότι $a_n \to a$.
Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού $a_{k_n} \to a$, υπάρχει $n_1 \in \mathbb{N}$ ώστε: για κάθε $n \geq n_1$,

$$|a_{k_n} - a| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{1.4.9}$$

Αφού η (a_n) είναι ακολουθία Cauchy, υπάρχει $n_2 \in \mathbb{N}$ ώστε: για κάθε $n, m \geq n_2$

$$|a_n - a_m| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{1.4.10}$$

Θέτουμε $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Έστω $n \geq n_0$. Τότε $k_n \geq n \geq n_0 \geq n_1$, άρα

$$|a_{k_n} - a| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{1.4.11}$$

Επίσης $k_n, n \geq n_0 \geq n_2$, άρα

$$|a_{k_n} - a_n| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{1.4.12}$$

Έπεται ότι

$$|a_n - a| \leq |a_n - a_{k_n}| + |a_{k_n} - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \tag{1.4.13}$$

Δηλαδή, $|a_n - a| < \varepsilon$ για κάθε $n \geq n_0$. Αυτό σημαίνει ότι $a_n \to a$. □

Θεώρημα 1.4.5. *Μια ακολουθία (a_n) συγκλίνει αν και μόνο αν είναι ακολουθία Cauchy.*

Απόδειξη. Η μία κατεύθυνση αποδείχτηκε στην εισαγωγή αυτής της παραγράφου: αν υποθέσουμε ότι $a_n \to a$ και αν θεωρήσουμε τυχόν $\varepsilon > 0$, υπάρχει $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n \geq n_0$ να ισχύει $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$. Τότε, για κάθε $n, m \geq n_0$ έχουμε

$$|a_n - a_m| \leq |a_n - a| + |a - a_m| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \tag{1.4.14}$$

Άρα, η (a_n) είναι ακολουθία Cauchy.

Για την αντίστροφη κατεύθυνση: έστω (a_n) ακολουθία Cauchy. Από την Πρόταση 1.4.3, η (a_n) είναι φραγμένη. Από το Θεώρημα Bolzano–Weierstrass, η (a_n) έχει συγκλίνουσα υπακολουθία. Τέλος, από την Πρόταση 1.4.4 έπεται ότι η (a_n) συγκλίνει. □

Αυτό το κριτήριο σύγκλισης είναι πολύ χρήσιμο. Πολλές φορές θέλουμε να εξασφαλίσουμε την ύπαρξη ορίου για μια ακολουθία χωρίς να μας ενδιαφέρει η τιμή του ορίου. Αρκεί να δείξουμε ότι η ακολουθία είναι Cauchy, δηλαδή ότι οι όροι της είναι «κοντά» για μεγάλους δείκτες, κάτι που δεν απαιτεί να μαντέψουμε εκ των προτέρων ποιό είναι το όριο. Αντίθετα, για να δουλέψουμε με τον ορισμό του ορίου, πρέπει ήδη να ξέρουμε ποιο είναι το υποψήφιο όριο (συγκρίνετε τους δύο ορισμούς: «$a_n \to a$» και «(a_n) ακολουθία Cauchy».)

1.5 *Παράρτημα: συζήτηση για το αξίωμα της πληρότητας

Όλη μας η δουλειά ξεκινάει με την «παραδοχή» ότι το $\mathbb{R}$ είναι ένα διατεταγμένο σώμα που ικανοποιεί το αξίωμα της πληρότητας: κάθε μη κενό, άνω φραγμένο υποσύνολό του έχει ελάχιστο άνω φράγμα. Χρησιμοποιώντας την ύπαρξη supremum δείξαμε την Αρχιμήδεια ιδιότητα:

> $(*)$ Αν $a \in \mathbb{R}$ και $\varepsilon > 0$, υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε $n\varepsilon > a$.

Χρησιμοποιώντας και πάλι το αξίωμα της πληρότητας, δείξαμε ότι κάθε μονότονη και φραγμένη ακολουθία συγκλίνει. Σαν συνέπεια πήραμε το Θεώρημα Bolzano–Weierstrass: κάθε φραγμένη ακολουθία έχει συγκλίνουσα υπακολουθία. Αυτό με τη σειρά του μας επέτρεψε να δείξουμε την «ιδιότητα Cauchy» των πραγματικών αριθμών:

> $(**)$ Κάθε ακολουθία Cauchy πραγματικών αριθμών συγκλίνει σε πραγματικό αριθμό.

Σε αυτήν την παράγραφο θα δείξουμε ότι το αξίωμα της πληρότητας είναι λογική συνέπεια των $(*)$ και $(**)$. Αν δηλαδή δεχτούμε το $\mathbb{R}$ σαν ένα διατεταγμένο σώμα που έχει την Αρχιμήδεια ιδιότητα και την ιδιότητα Cauchy, τότε μπορούμε να αποδείξουμε το «αξίωμα της πληρότητας» σαν θεώρημα:

Θεώρημα 1.5.1. *Έστω $\mathbb{R}^*$ ένα διατεταγμένο σώμα που περιέχει το $\mathbb{Q}$ και έχει, επιπλέον, τις ακόλουθες ιδιότητες:*

1. *Αν $a \in \mathbb{R}^*$ και $\varepsilon \in \mathbb{R}^*$, $\varepsilon > 0$, τότε υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε $n\varepsilon > a$.*
2. *Κάθε ακολουθία Cauchy στοιχείων του $\mathbb{R}^*$ συγκλίνει σε στοιχείο του $\mathbb{R}^*$.*

Τότε, κάθε μη κενό και άνω φραγμένο $A \subset \mathbb{R}^*$ έχει ελάχιστο άνω φράγμα.

Απόδειξη. Έστω A μη κενό και άνω φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}^*$.

Ξεκινάμε με τυχόν στοιχείο $a_0 \in A$ (υπάρχει αφού $A \neq \emptyset$). Έστω b άνω φράγμα του A. Από την Συνθήκη 1, υπάρχει $k \in \mathbb{N}$ για τον οποίο $a_0 + k > b$. Δηλαδή, υπάρχει φυσικός k με την ιδιότητα

$$\text{για κάθε } a \in A, \; a < a_0 + k. \tag{1.5.1}$$

Από την αρχή του ελαχίστου έπεται ότι υπάρχει ελάχιστος τέτοιος φυσικός. Ας τον πούμε k_1. Τότε,

- Για κάθε $a \in A$ ισχύει $a < a_0 + k_1$.
- Υπάρχει $a_1 \in A$ ώστε $a_0 + (k_1 - 1) \leq a_1$.

Επαγωγικά θα βρούμε $a_0 \leq a_1 \leq \dots \leq a_n \leq \dots$ στο A και $k_n \in \mathbb{N}$ που ικανοποιούν τα εξής:

- Για κάθε $a \in A$ ισχύει $a < a_{n-1} + \frac{k_n}{2^{n-1}}$.
- $a_{n-1} + \frac{k_n - 1}{2^{n-1}} \leq a_n$.

Απόδειξη του επαγωγικού βήματος: Έχουμε $a_n \in A$ και από την Συνθήκη 1 υπάρχει ελάχιστος φυσικός k_{n+1} με την ιδιότητα: για κάθε $a \in A$,

$$a < a_n + \frac{k_{n+1}}{2^n}. \tag{1.5.2}$$

Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει a_{n+1} με

$$a_n + \frac{k_{n+1} - 1}{2^n} \leq a_{n+1}. \tag{1.5.3}$$

Ισχυρισμός 1: Η (a_n) είναι ακολουθία Cauchy.
Πράγματι, έχουμε

$$a_{n-1} + \frac{k_n - 1}{2^{n-1}} \leq a_n < a_{n-1} + \frac{k_n}{2^{n-1}}, \tag{1.5.4}$$

άρα

$$|a_n - a_{n-1}| < \frac{1}{2^{n-1}}. \tag{1.5.5}$$

Αν λοιπόν $n, m \in \mathbb{N}$ και $n < m$, τότε

$$\begin{aligned} |a_m - a_n| &\leq |a_m - a_{m-1}| + |a_{m-1} - a_{m-2}| + \cdots + |a_{n+1} - a_n| \\ &< \frac{1}{2^{m-1}} + \frac{1}{2^{m-2}} + \cdots + \frac{1}{2^n} < \frac{1}{2^{n-1}}. \end{aligned}$$

Αν τα n, m είναι αρκετά μεγάλα, αυτό γίνεται όσο θέλουμε μικρό. Πιο συγκεκριμένα, αν μας δώσουν $\varepsilon > 0$, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τ.ω $1/2^{n_0 - 1} < \varepsilon$, οπότε για κάθε $n, m \geq n_0$ έχουμε $|a_m - a_n| < \varepsilon$. □

Αφού το $\mathbb{R}^*$ έχει την ιδιότητα Cauchy, υπάρχει ο $a^* = \lim a_n$.

Ισχυρισμός 2: Ο a^* είναι το ελάχιστο άνω φράγμα του A.
(α) Ο a^* είναι άνω φράγμα του A: ας υποθέσουμε ότι υπάρχει $a \in A$ με $a > a^*$. Μπορούμε να βρούμε $\varepsilon > 0$ ώστε $a > a^* + \varepsilon$. Όμως,

$$a < a_{n-1} + \frac{k_n}{2^{n-1}} \leq a_n + \frac{1}{2^{n-1}} \tag{1.5.6}$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Άρα,

$$\begin{aligned} & a^* + \varepsilon < a_n + \frac{1}{2^{n-1}} \\ \Longrightarrow\quad & a^* + \varepsilon \leq \lim \left(a_n + \frac{1}{2^{n-1}} \right) \\ \Longrightarrow\quad & a^* + \varepsilon \leq a^*, \end{aligned}$$

το οποίο είναι άτοπο.

(β) Αν a^{**} είναι άνω φράγμα του A, τότε $a^{**} \geq a^*$: έχουμε $a^{**} \geq a_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, άρα

$$a^{**} \geq \lim a_n = a^*. \tag{1.5.7}$$

Από τα (α) και (β) είναι σαφές ότι $a^* = \sup A$. □

1.6 Ασκήσεις

Ομάδα Α΄. Ερωτήσεις κατανόησης

Εξετάστε αν οι παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς ή ψευδείς (αιτιολογήστε πλήρως την απάντηση σας).

1. $a_n \to +\infty$ αν και μόνο αν για κάθε $M > 0$ υπάρχουν άπειροι όροι της (a_n) που είναι μεγαλύτεροι από M.

2. Η (a_n) δεν είναι άνω φραγμένη αν και μόνο αν υπάρχει υπακολουθία (a_{k_n}) της (a_n) ώστε $a_{k_n} \to +\infty$.

3. Κάθε υπακολουθία μιας συγκλίνουσας ακολουθίας συγκλίνει.

4. Αν μια ακολουθία δεν έχει φθίνουσα υπακολουθία τότε έχει μια γνησίως αύξουσα υπακολουθία.

5. Αν η (a_n) είναι φραγμένη και $a_n \not\to a$ τότε υπάρχουν $b \neq a$ και υπακολουθία (a_{k_n}) της (a_n) ώστε $a_{k_n} \to b$.

6. Υπάρχει φραγμένη ακολουθία που δεν έχει συγκλίνουσα υπακολουθία.

7. Αν η (a_n) δεν είναι φραγμένη, τότε δεν έχει φραγμένη υπακολουθία.

8. Έστω (a_n) αύξουσα ακολουθία. Κάθε υπακολουθία της (a_n) είναι αύξουσα.

9. Αν η (a_n) είναι αύξουσα και για κάποια υπακολουθία (a_{k_n}) της (a_n) έχουμε $a_{k_n} \to a$, τότε $a_n \to a$.

10. Αν $a_n \to 0$ τότε υπάρχει υπακολουθία (a_{k_n}) της (a_n) ώστε $n^2 a_{k_n} \to 0$.

Ομάδα Β΄

11. Έστω (a_n) μια ακολουθία. Δείξτε ότι $a_n \to a$ αν και μόνο αν οι υπακολουθίες (a_{2k}) και (a_{2k-1}) συγκλίνουν στο a.

12. Έστω (a_n) μια ακολουθία. Υποθέτουμε ότι οι υπακολουθίες (a_{2k}), (a_{2k-1}) και (a_{3k}) συγκλίνουν. Δείξτε ότι:

(α) $\lim\limits_{k\to\infty} a_{2k} = \lim\limits_{k\to\infty} a_{2k-1} = \lim\limits_{k\to\infty} a_{3k}$.

(β) Η (a_n) συγκλίνει.

13. Έστω (a_n) μια ακολουθία. Υποθέτουμε ότι $a_{2n} \leq a_{2n+2} \leq a_{2n+1} \leq a_{2n-1}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και ότι $\lim\limits_{n\to\infty}(a_{2n-1} - a_{2n}) = 0$. Τότε η (a_n) συγκλίνει σε κάποιον πραγματικό αριθμό a που ικανοποιεί την $a_{2n} \leq a \leq a_{2n-1}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

14. Έστω (a_n) μια ακολουθία και έστω (x_k) ακολουθία οριακών σημείων της (a_n). Υποθέτουμε οτι $x_k \to x$. Δείξτε οτι ο x είναι οριακό σημείο της (a_n).

15. Δείξτε ότι η ακολουθία (a_n) δεν συγκλίνει στον πραγματικό αριθμό a, αν και μόνο αν υπάρχουν $\varepsilon > 0$ και υπακολουθία (a_{k_n}) της (a_n) ώστε $|a_{k_n} - a| \geq \varepsilon$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

16. Έστω (a_n) ακολουθία πραγματικών αριθμών και έστω $a \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι $a_n \to a$ αν και μόνο αν κάθε υπακολουθία της (a_n) έχει υπακολουθία που συγκλίνει στο a.

17. Ορίζουμε μια ακολουθία (a_n) με $a_1 > 0$ και

$$a_{n+1} = 1 + \frac{2}{1 + a_n}.$$

Δείξτε ότι οι υπακολουθίες (a_{2k}) και (a_{2k-1}) είναι μονότονες και φραγμένες. Βρείτε, αν υπάρχει, το $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

18. Βρείτε το ανώτερο και το κατώτερο όριο των ακολουθιών

$$\begin{aligned}
a_n &= (-1)^{n+1}\left(1 + \frac{1}{n}\right), \\
b_n &= \cos\left(\frac{\pi n}{3}\right) + \frac{1}{n+1}, \\
\gamma_n &= \frac{n^2((-1)^n + 1) + 2n + 1}{n+1}.
\end{aligned}$$

19. Έστω (a_n), (b_n) φραγμένες ακολουθίες. Δείξτε οτι

$$\begin{aligned}
\liminf a_n + \liminf b_n &\leq \liminf(a_n + b_n) \\
&\leq \limsup(a_n + b_n) \leq \limsup a_n + \limsup b_n.
\end{aligned}$$

20. Έστω $a_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$.
(α) Δείξτε οτι

$$\liminf \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \liminf \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

(β) Αν $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = x$, τότε $\sqrt[n]{a_n} \to x$.

21. Έστω (a_n) φραγμένη ακολουθία. Δείξτε οτι

$$\limsup(-a_n) = -\liminf a_n \quad \text{και} \quad \liminf(-a_n) = -\limsup a_n.$$

22. Έστω (a_n) φραγμένη ακολουθία. Αν

$$X = \{x \in \mathbb{R} : x \leq a_n \text{ για άπειρους } n \in \mathbb{N}\},$$

δείξτε ότι $\sup X = \limsup a_n$.

23. Χρησιμοποιώντας την ανισότητα

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} \geq \frac{1}{2},$$

δείξτε ότι η ακολουθία $a_n = 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$ δεν είναι ακολουθία Cauchy. Συμπεράνατε ότι $a_n \to +\infty$.

24. Έστω $0 < \mu < 1$ και ακολουθία (a_n) για την οποία ισχύει

$$|a_{n+1} - a_n| \leq \mu |a_n - a_{n-1}|, \quad n \geq 2.$$

Δείξτε ότι η (a_n) είναι ακολουθία Cauchy.

25. Ορίζουμε $a_1 = a$, $a_2 = b$ και $a_{n+1} = \frac{a_n + a_{n-1}}{2}$, $n \geq 2$. Εξετάστε αν η (a_n) είναι ακολουθία Cauchy.

Ομάδα Γ′

26. Έστω $m \in \mathbb{N}$. Βρείτε μια ακολουθία (a_n) η οποία να έχει ακριβώς m διαφορετικές υπακολουθίες.

27. Έστω (a_n) μια ακολουθία. Αν $\sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\} = 1$ και $a_n \neq 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, τότε υπάρχει γνησίως αύξουσα υπακολουθία (a_{k_n}) της (a_n) ώστε $a_{k_n} \to 1$.

28. Έστω (a_n) ακολουθία θετικών αριθμών. Θεωρούμε το σύνολο $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$. Αν $\inf A = 0$, δείξτε ότι η (a_n) έχει φθίνουσα υπακολουθία που συγκλίνει στο 0.

29. Ορίζουμε μια ακολουθία ως εξής:

$$a_0 = 0, \quad a_{2n+1} = \frac{1}{2} + a_{2n}, \quad a_{2n} = \frac{a_{2n-1}}{2}.$$

Βρείτε όλα τα οριακά σημεία της (a_n). [*Υπόδειξη:* Γράψτε τους δέκα πρώτους όρους της ακολουθίας.]

30. Έστω (x_n) ακολουθία με την ιδιότητα $x_{n+1} - x_n \to 0$. Αν $a < b$ είναι δύο οριακά σημεία της (x_n), δείξτε ότι κάθε $y \in [a, b]$ είναι οριακό σημείο της (x_n). [*Υπόδειξη:* Απαγωγή σε άτοπο.]

31. (α) Έστω A αριθμήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Δείξτε ότι υπάρχει ακολουθία (a_n) ώστε κάθε $x \in A$ να είναι οριακό σημείο της (a_n).

(β) Δείξτε ότι υπάρχει ακολουθία (x_n) ώστε κάθε $x \in \mathbb{R}$ να είναι οριακό σημείο της (x_n).

32. Έστω (a_n) μια ακολουθία. Ορίζουμε

$$b_n = \sup\{|a_{n+k} - a_n| : k \in \mathbb{N}\}.$$

Δείξτε ότι η (a_n) συγκλίνει αν και μόνο αν $b_n \to 0$.

33. Έστω $a, b > 0$. Ορίζουμε ακολουθία (a_n) με $a_1 = a$, $a_2 = b$ και

$$a_{n+2} = \frac{4a_{n+1} - a_n}{3}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Εξετάστε αν η (a_n) συγκλίνει και αν ναι, βρείτε το όριό της.

Κεφάλαιο 2

Σειρές πραγματικών αριθμών

2.1 Σύγκλιση σειράς

Ορισμός 2.1.1. Έστω (a_k) μια ακολουθία πραγματικών αριθμών. Θεωρούμε την ακολουθία

$$s_n = a_1 + \cdots + a_n. \tag{2.1.1}$$

Δηλαδή,

$$s_1 = a_1, \quad s_2 = a_1 + a_2, \quad s_3 = a_1 + a_2 + a_3, \quad \ldots \tag{2.1.2}$$

Το σύμβολο $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ είναι η *σειρά* με k-οστό όρο τον a_k. Το άθροισμα $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ είναι το n-*οστό μερικό άθροισμα* της σειράς $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ και η (s_n) είναι η *ακολουθία των μερικών αθροισμάτων* της σειράς $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$.

Αν η (s_n) συγκλίνει σε κάποιον πραγματικό αριθμό s, τότε γράφουμε

$$s = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots \quad \text{ή} \quad s = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \tag{2.1.3}$$

και λέμε ότι η σειρά *συγκλίνει* (στο s), το δε όριο $s = \lim\limits_{n\to\infty} s_n$ είναι το *άθροισμα* της σειράς.

Αν $s_n \to +\infty$ ή αν $s_n \to -\infty$, τότε γράφουμε $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k = +\infty$ ή $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k = -\infty$ και λέμε ότι *η σειρά* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *αποκλίνει στο* $+\infty$ *ή στο* $-\infty$ αντίστοιχα.

Αν η (s_n) δεν συγκλίνει σε πραγματικό αριθμό, τότε λέμε ότι *η σειρά* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *αποκλίνει*.

Παρατηρήσεις 2.1.2. (α) Πολλές φορές εξετάζουμε τη σύγκλιση σειρών της μορφής $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ ή $\sum\limits_{k=m}^{\infty} a_k$ όπου $m \geq 2$. Σε αυτήν την περίπτωση θέτουμε $s_{n+1} =$

$a_0 + a_1 + \cdots + a_n$ ή $s_{n-m+1} = a_m + a_{m+1} + \cdots + a_n$ (για $n \geq m$) αντίστοιχα, και εξετάζουμε τη σύγκλιση της ακολουθίας (s_n).

(β) Από τους ορισμούς που δώσαμε είναι φανερό ότι για να εξετάσουμε τη σύγκλιση ή απόκλιση μιας σειράς, απλώς εξετάζουμε τη σύγκλιση ή απόκλιση μιας ακολουθίας (της ακολουθίας (s_n) των μερικών αθροισμάτων της σειράς). Ο n-οστός όμως όρος της ακολουθίας (s_n) είναι ένα «άθροισμα με ολοένα αυξανόμενο μήκος», το οποίο αδυνατούμε (συνήθως) να γράψουμε σε κλειστή μορφή. Συνεπώς, η εύρεση του ορίου $s = \lim_{n\to\infty} s_n$ (όταν αυτό υπάρχει) είναι πολύ συχνά ανέφικτη. Σκοπός μας είναι λοιπόν να αναπτύξουμε κάποια κριτήρια τα οποία να μας επιτρέπουν (τουλάχιστον) να πούμε αν η (s_n) συγκλίνει σε πραγματικό αριθμό ή όχι.

Πριν προχωρήσουμε σε παραδείγματα, θα δούμε κάποιες απλές προτάσεις που θα χρησιμοποιούμε ελεύθερα στη συνέχεια.

Αν έχουμε δύο σειρές $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$, μπορούμε να σχηματίσουμε τον γραμμικό συνδυασμό τους $\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda a_k + \mu b_k)$, όπου $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Πρόταση 2.1.3. *Αν* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = s$ *και* $\sum_{k=1}^{\infty} b_k = t$, *τότε*

$$\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda a_k + \mu b_k) = \lambda s + \mu t = \lambda \sum_{k=1}^{\infty} a_k + \mu \sum_{k=1}^{\infty} b_k. \tag{2.1.4}$$

Απόδειξη. Αν $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$, $t_n = \sum_{k=1}^{n} b_k$ και $u_n = \sum_{k=1}^{n} (\lambda a_k + \mu b_k)$ είναι τα n-οστά μερικά αθροίσματα των σειρών, τότε $u_n = \lambda s_n + \mu t_n$. Αυτό προκύπτει εύκολα από τις ιδιότητες της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού, αφού έχουμε αθροίσματα με πεπερασμένους το πλήθος όρους. Όμως, $s_n \to s$ και $t_n \to t$, άρα $u_n \to \lambda s + \mu t$. Από τον ορισμό του αθροίσματος σειράς έπεται η (2.1.4). □

Πρόταση 2.1.4. (α) *Αν απαλείψουμε πεπερασμένο πλήθος «αρχικών» όρων μιας σειράς, δεν επηρεάζεται η σύγκλιση ή απόκλισή της.*

(β) *Αν αλλάξουμε πεπερασμένους το πλήθος όρους μιας σειράς, δεν επηρεάζεται η σύγκλιση ή απόκλιση της.*

Απόδειξη. (α) Θεωρούμε τη σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$. Με τη φράση «απαλείφουμε τους αρχικούς όρους $a_1, a_2, \ldots, a_{m-1}$» εννοούμε ότι θεωρούμε την καινούργια σειρά $\sum_{k=m}^{\infty} a_k$. Αν συμβολίσουμε με s_n και t_n τα n-οστά μερικά αθροίσματα των δύο σειρών αντιστοίχως, τότε για κάθε $n \geq m$ έχουμε

$$s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_{m-1} + a_m + \cdots + a_n = a_1 + \cdots + a_{m-1} + t_{n-m+1}. \tag{2.1.5}$$

Άρα η (s_n) συγκλίνει αν και μόνον αν η (t_{n-m+1}) συγκλίνει, δηλαδή αν και μόνον αν η (t_n) συγκλίνει. Επίσης, αν $s_n \to s$ και $t_n \to t$, τότε $s = a_1 + a_2 + \cdots + a_{m-1} + t$. Δηλαδή,

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + \cdots + a_{m-1} + \sum_{k=m}^{\infty} a_k. \tag{2.1.6}$$

(β) Θεωρούμε τη σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$. Αλλάζουμε πεπερασμένους το πλήθος όρους της (a_k). Θεωρούμε δηλαδή μια νέα σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ που όμως έχει την εξής ιδιότητα: υπάρχει $m \in \mathbb{N}$ ώστε $a_k = b_k$ για κάθε $k \geq m$. Αν απαλείψουμε τους πρώτους $m-1$ όρους των δύο σειρών, προκύπτει η ίδια σειρά $\sum_{k=m}^{\infty} a_k$. Τώρα, εφαρμόζουμε το (α). □

Πρόταση 2.1.5. (α) *Αν* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = s$, *τότε* $a_n \to 0$.

(β) *Αν η σειρά* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *συγκλίνει, τότε για κάθε* $\varepsilon > 0$ *υπάρχει* $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ *ώστε: για κάθε* $n \geq N$,

$$\left| \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \right| < \varepsilon. \tag{2.1.7}$$

Απόδειξη. (α) Αν $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$, τότε $s_n \to s$ και $s_{n-1} \to s$. Άρα,

$$a_n = s_n - s_{n-1} \to s - s = 0. \tag{2.1.8}$$

Στην πραγματικότητα, αυτό που κάνουμε εδώ είναι να θεωρήσουμε μια δεύτερη ακολουθία (t_n) η οποία ορίζεται ως εξής: δίνουμε αυθαίρετη τιμή στον t_1 – για παράδειγμα, $t_1 = 0$ – και για κάθε $n \geq 2$ θέτουμε $t_n = s_{n-1}$. Τότε, $t_n \to s$ (άσκηση) και για κάθε $n \geq 2$ έχουμε $a_n = s_n - t_n \to s - s = 0$ (εξηγήστε την πρώτη ισότητα).

Ένας άλλος τρόπος για να αποδείξουμε ότι $a_n \to 0$ είναι με τον ορισμό. Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού $s_n \to s$, υπάρχει $n_1 \in \mathbb{N}$ ώστε $|s_n - s| < \frac{\varepsilon}{2}$ για κάθε $n \geq n_1$. Θέτουμε $n_0 = n_1 + 1$. Τότε, για κάθε $n \geq n_0$ έχουμε $n \geq n_1$ και $n - 1 \geq n_1$. Συνεπώς, $|s - s_n| < \frac{\varepsilon}{2}$ και $|s - s_{n-1}| < \frac{\varepsilon}{2}$, απ' όπου έπεται ότι

$$|a_n| = |s_n - s_{n-1}| \leq |s_n - s| + |s - s_{n-1}| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

για κάθε $n \geq n_0$. Με βάση τον ορισμό, $a_n \to 0$.

(β) Αν $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = s$, τότε από την (2.1.6) έχουμε

$$\beta_n := \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k = s - s_n \to 0 \tag{2.1.9}$$

καθώς το $n \to \infty$. Από τον ορισμό του ορίου ακολουθίας, για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ ώστε: για κάθε $n \geq N$, $|\beta_n| < \varepsilon$. □

Σημείωση. Το μέρος (α) της Πρότασης 2.1.5 χρησιμοποιείται σαν *κριτήριο απόκλισης*: Αν η ακολουθία (a_k) δεν συγκλίνει στο 0 τότε η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ αναγκαστικά αποκλίνει.

Παραδείγματα

(α) Η *γεωμετρική σειρά* με λόγο $x \in \mathbb{R}$ είναι η σειρά

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k. \tag{2.1.10}$$

Δηλαδή $a_k = x^k$, $k = 0, 1, 2, \ldots$. Αν $x = 1$ τότε $s_n = n + 1$, ενώ αν $x \neq 1$ έχουμε

$$s_n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}. \tag{2.1.11}$$

Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

(i) Αν $|x| \geq 1$ τότε $|a_k| = |x|^k \geq 1$, δηλαδή $a_k \not\to 0$. Από την Πρόταση 2.1.5(α) βλέπουμε ότι η σειρά (2.1.10) αποκλίνει.

(ii) Αν $|x| < 1$ τότε $x^{n+1} \to 0$, οπότε η (2.1.11) δείχνει ότι $s_n \to \frac{1}{1-x}$. Δηλαδή,

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}. \tag{2.1.12}$$

(β) *Τηλεσκοπικές σειρές.* Υποθέτουμε ότι η ακολουθία (a_k) ικανοποιεί την

$$a_k = b_k - b_{k+1} \tag{2.1.13}$$

για κάθε $k \in \mathbb{N}$, όπου (b_k) μια άλλη ακολουθία. Τότε, η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει αν και μόνον αν η ακολουθία (b_k) συγκλίνει. Πράγματι, έχουμε

$$s_n = a_1 + \cdots + a_n = (b_1 - b_2) + (b_2 - b_3) + \cdots + (b_n - b_{n+1}) = b_1 - b_{n+1}, \tag{2.1.14}$$

οπότε $b_n \to b$ αν και μόνον αν $s_n \to b_1 - b$.

Σαν παράδειγμα θεωρούμε τη σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$. Τότε,

$$a_k = \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = b_k - b_{k+1}, \tag{2.1.15}$$

όπου $b_k = \frac{1}{k}$. Άρα,

$$\begin{aligned} s_n &= a_1 + \cdots + a_n \\ &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{n+1} \to 1. \end{aligned}$$

Δηλαδή,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = 1. \tag{2.1.16}$$

Θεώρημα 2.1.6 (κριτήριο Cauchy). *Η σειρά* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *συγκλίνει αν και μόνο αν ισχύει το εξής: για κάθε* $\varepsilon > 0$ *υπάρχει* $N = N(\epsilon) \in \mathbb{N}$ *ώστε: αν* $N \leq m < n$ *τότε*

$$\left| \sum_{k=m+1}^{n} a_k \right| = |a_{m+1} + \cdots + a_n| < \varepsilon. \tag{2.1.17}$$

Απόδειξη. Αν $s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ είναι το n-οστό μερικό άθροισμα της σειράς, η σειρά συγκλίνει αν και μόνον αν η (s_n) συγκλίνει. Δηλαδή, αν και μόνον αν η (s_n) είναι ακολουθία Cauchy. Αυτό όμως είναι (από τον ορισμό της ακολουθίας Cauchy) ισοδύναμο με το εξής: για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $N = N(\epsilon) \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $N \leq m < n$,

$$|a_{m+1} + \cdots + a_n| = |(a_1 + \cdots + a_n) - (a_1 + \cdots + a_m)| = |s_n - s_m| < \varepsilon. \tag{2.1.18}$$ □

Παράδειγμα: Η *αρμονική σειρά* $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$.

Έχουμε $a_k = \frac{1}{k}$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Παρατηρούμε ότι: αν $n > m$ τότε

$$a_{m+1} + \cdots + a_n = \frac{1}{m+1} + \frac{1}{m+2} + \cdots + \frac{1}{n} \geq \frac{n-m}{n}. \tag{2.1.19}$$

Εφαρμόζουμε το κριτήριο του Cauchy. Αν η αρμονική σειρά συγκλίνει, τότε, για $\varepsilon = \frac{1}{4}$, πρέπει να υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ ώστε: αν $N \leq m < n$ τότε

$$|a_{m+1} + \cdots + a_n| < \frac{1}{4}. \tag{2.1.20}$$

Επιλέγουμε $m = N$ και $n = 2N$. Τότε, συνδυάζοντας τις (2.1.19) και (2.1.20) παίρνουμε

$$\frac{1}{4} > a_{N+1} + \cdots + a_{2N} \geq \frac{2N - N}{2N} = \frac{1}{2}, \tag{2.1.21}$$

που είναι άτοπο. Άρα, η αρμονική σειρά αποκλίνει.

Σημείωση: Το παράδειγμα της αρμονικής σειράς δείχνει ότι το αντίστροφο της Πρότασης 2.1.5(α) δεν ισχύει. Αν $a_k \to 0$ δεν είναι απαραίτητα σωστό ότι η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει.

2.2 Σειρές με μη αρνητικούς όρους

Σε αυτή την παράγραφο συζητάμε τη σύγκλιση ή απόκλιση σειρών με μη αρνητικούς όρους. Η βασική παρατήρηση είναι ότι αν για την ακολουθία (a_k) έχουμε $a_k \geq 0$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$, τότε η ακολουθία (s_n) των μερικών αθροισμάτων είναι αύξουσα: πράγματι, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε

$$s_{n+1} - s_n = (a_1 + \cdots + a_n + a_{n+1}) - (a_1 + \cdots + a_n) = a_{n+1} \geq 0. \tag{2.2.1}$$

Θεώρημα 2.2.1. *Έστω* (a_k) *ακολουθία με* $a_k \geq 0$ *για κάθε* $k \in \mathbb{N}$*. Η σειρά* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *συγκλίνει αν και μόνον αν η ακολουθία* (s_n) *των μερικών αθροισμάτων είναι άνω φραγμένη. Αν η* (s_n) *δεν είναι άνω φραγμένη, τότε* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = +\infty$.

Απόδειξη. Η (s_n) είναι αύξουσα ακολουθία. Αν είναι άνω φραγμένη τότε συγκλίνει σε πραγματικό αριθμό, άρα η σειρά συγκλίνει. Αν η (s_n) δεν είναι άνω φραγμένη τότε, αφού είναι αύξουσα, έχουμε $s_n \to +\infty$. □

Σημείωση. Είδαμε ότι μια σειρά με μη αρνητικούς όρους συγκλίνει ή αποκλίνει στο $+\infty$. Επιστρέφοντας στο παράδειγμα της αρμονικής σειράς $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$, βλέπουμε ότι, αφού δεν συγκλίνει, αποκλίνει στο $+\infty$:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = +\infty. \tag{2.2.2}$$

Θα δώσουμε μια απευθείας απόδειξη για το γεγονός ότι η ακολουθία $s_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$ τείνει στο $+\infty$. Πιο συγκεκριμένα, θα δείξουμε με επαγωγή ότι

$$s_{2^n} \geq 1 + \frac{n}{2} \quad \text{για κάθε } n \in \mathbb{N}. \tag{$*$}$$

Για $n = 1$ η ανισότητα ισχύει ως ισότητα: $s_2 = 1 + \frac{1}{2}$. Υποθέτουμε ότι η $(*)$ ισχύει για κάποιον φυσικό n. Τότε,

$$s_{2^{n+1}} = s_{2^n} + \frac{1}{2^n + 1} + \frac{1}{2^n + 2} + \cdots + \frac{1}{2^{n+1}}.$$

Παρατηρήστε ότι ο $s_{2^{n+1}} - s_{2^n}$ είναι ένα άθροισμα 2^n το πλήθος αριθμών και ότι ο μικρότερος από αυτούς είναι ο $\frac{1}{2^{n+1}}$. Συνεπώς,

$$s_{2^{n+1}} \geq s_{2^n} + 2^n \cdot \frac{1}{2^{n+1}} = s_{2^n} + \frac{1}{2} \geq 1 + \frac{n}{2} + \frac{1}{2} = 1 + \frac{n+1}{2}.$$

Άρα, η $(*)$ ισχύει για τον φυσικό $n+1$. Έπεται ότι $s_{2^n} \to +\infty$. Αφού η (s_n) είναι αύξουσα και έχει υπακολουθία που τείνει στο $+\infty$, συμπεραίνουμε ότι $s_n \to +\infty$.

2.2α΄ Σειρές με φθίνοντες μη αρνητικούς όρους

Πολλές φορές συναντάμε σειρές $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ των οποίων οι όροι a_k *φθίνουν* προς το 0: $a_{k+1} \leq a_k$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$ και $a_k \to 0$. Ένα κριτήριο σύγκλισης που εφαρμόζεται συχνά σε τέτοιες περιπτώσεις είναι το *κριτήριο συμπύκνωσης*.

Πρόταση 2.2.2 (Κριτήριο συμπύκνωσης - Cauchy)**.** *Έστω (a_k) μια φθίνουσα ακολουθία με $a_k > 0$ και $a_k \to 0$. Η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει αν και μόνο αν η σειρά $\sum\limits_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k}$ συγκλίνει.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε πρώτα ότι η $\sum\limits_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k}$ συγκλίνει. Τότε, η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων

$$t_n = a_1 + 2a_2 + 4a_4 + \cdots + 2^n a_{2^n} \tag{2.2.3}$$

είναι άνω φραγμένη. Έστω M ένα άνω φράγμα της (t_n). Θα δείξουμε ότι ο M είναι άνω φράγμα για τα μερικά αθροίσματα της $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$. Έστω $s_m = a_1 + \cdots + a_m$. Ο αριθμός m βρίσκεται ανάμεσα σε δύο διαδοχικές δυνάμεις του 2: υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε $2^n \leq m < 2^{n+1}$. Τότε, χρησιμοποιώντας την υπόθεση ότι η (a_k) είναι φθίνουσα, έχουμε

$$\begin{aligned} s_m &= a_1 + (a_2+a_3) + (a_4+a_5+a_6+a_7) + \cdots + (a_{2^{n-1}} + \cdots + a_{2^n-1}) \\ &\quad +(a_{2^n} + \cdots + a_m) \\ &\leq a_1 + (a_2+a_3) + (a_4+a_5+a_6+a_7) + \cdots + (a_{2^{n-1}} + \cdots + a_{2^n-1}) \\ &\quad +(a_{2^n} + \cdots + a_m + \cdots + a_{2^{n+1}-1}) \\ &\leq a_1 + 2a_2 + 4a_4 + \cdots + 2^{n-1}a_{2^{n-1}} + 2^n a_{2^n} \\ &\leq M. \end{aligned}$$

Αφού η $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ έχει μη αρνητικούς όρους και η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων της είναι άνω φραγμένη, το Θεώρημα 2.2.1 δείχνει ότι η $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει.

Αντίστροφα: υποθέτουμε ότι η $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει, δηλαδή ότι η (s_m) είναι άνω φραγμένη: υπάρχει $M \in \mathbb{R}$ ώστε $s_m \leq M$ για κάθε $m \in \mathbb{N}$. Τότε, για το τυχόν μερικό άθροισμα (t_n) της σειράς $\sum\limits_{k=1}^{\infty} 2^k a_{2^k}$ έχουμε

$$\begin{aligned} t_n &= a_1 + 2a_2 + 4a_4 + \cdots + 2^n a_{2^n} \\ &\leq 2a_1 + 2a_2 + 2(a_3+a_4) + \cdots + 2(a_{2^{n-1}+1} + \cdots + a_{2^n}) \\ &= 2s_{2^n} \leq 2M. \end{aligned}$$

Αφού η (t_n) είναι άνω φραγμένη, το Θεώρημα 2.2.1 δείχνει ότι η $\sum\limits_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k}$ συγκλίνει. □

Παραδείγματα

(α) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}$, όπου $p > 0$. Έχουμε $a_k = \frac{1}{k^p}$. Αφού $p > 0$, η (a_k) φθίνει προς το 0. Θεωρούμε την

$$\sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k} = \sum_{k=0}^{\infty} 2^k \frac{1}{(2^k)^p} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)^k. \tag{2.2.4}$$

Η τελευταία σειρά είναι γεωμετρική σειρά με λόγο $x_p = \frac{1}{2^{p-1}}$ Είδαμε ότι συγκλίνει αν $x_p = \frac{1}{2^{p-1}} < 1$, δηλαδή αν $p > 1$ και αποκλίνει αν $x_p = \frac{1}{2^{p-1}} \geq 1$, δηλαδή αν $p \leq 1$.

Από το κριτήριο συμπύκνωσης, η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}$ συγκλίνει αν $p > 1$ και αποκλίνει στο $+\infty$ αν $0 < p \leq 1$.

(β) $\sum\limits_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(\log k)^p}$, όπου $p > 0$. Έχουμε $a_k = \frac{1}{k(\log k)^p}$. Αφού $p > 0$, η (a_k) φθίνει προς το 0. Θεωρούμε την

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2^k a_{2^k} = \sum_{k=1}^{\infty} 2^k \frac{1}{2^k(\log(2^k))^p} = \frac{1}{(\log 2)^p} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}. \tag{2.2.5}$$

Από το προηγούμενο παράδειγμα, αυτή συγκλίνει αν $p>1$ και αποκλίνει αν $p\leq 1$. Από το κριτήριο συμπύκνωσης, η σειρά $\sum\limits_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k(\log k)^p}$ συγκλίνει αν $p>1$ και αποκλίνει στο $+\infty$ αν $0<p\leq 1$.

2.2β΄ Ο αριθμός e

Έχουμε ορίσει τον αριθμό e ως το όριο της γνησίως αύξουσας και άνω φραγμένης ακολουθίας $\alpha_n := \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ καθώς το $n\to\infty$.

Πρόταση 2.2.3. *Ο αριθμός e ικανοποιεί την*

$$e=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}. \tag{2.2.6}$$

Απόδειξη. Θυμηθείτε ότι $0!=1$. Γράφουμε s_n για το n-οστό μερικό άθροισμα της σειράς στο δεξιό μέλος:

$$s_n=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}. \tag{2.2.7}$$

Από το διωνυμικό ανάπτυγμα, έχουμε

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n &= 1+\binom{n}{1}\frac{1}{n}+\binom{n}{2}\frac{1}{n^2}+\cdots+\binom{n}{n}\frac{1}{n^n}\\ &= 1+\frac{n}{1!}\frac{1}{n}+\frac{n(n-1)}{2!}\frac{1}{n^2}+\cdots+\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}\frac{1}{n^k}\\ &\quad+\cdots+\frac{n(n-1)\cdots 2\cdot 1}{n!}\frac{1}{n^n}\\ &= 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\cdots+\frac{1}{n!}\left[\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)\right]\\ &\leq 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!},\end{aligned}$$

δηλαδή,

$$\alpha_n\leq s_n. \tag{2.2.8}$$

Έστω $n\in\mathbb{N}$. Ο προηγούμενος υπολογισμός δείχνει ότι αν $k>n$ τότε

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{1}{k}\right)^k &= 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{k}\right)+\cdots+\frac{1}{n!}\left[\left(1-\frac{1}{k}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{k}\right)\right]\\ &\quad+\cdots+\frac{1}{k!}\left[\left(1-\frac{1}{k}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{k}\right)\right]\\ &\geq 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{k}\right)+\cdots+\frac{1}{n!}\left[\left(1-\frac{1}{k}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{k}\right)\right].\end{aligned}$$

Κρατώντας το n σταθερό και αφήνοντας το $k\to\infty$, βλέπουμε ότι

$$e=\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{k}\right)^k\geq 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}=s_n. \tag{2.2.9}$$

Αφού η αύξουσα ακολουθία (s_n) είναι άνω φραγμένη από τον e, έπεται ότι η (s_n) συγκλίνει και $\lim\limits_{n\to\infty} s_n \leq e$. Από την άλλη πλευρά, η (2.2.8) δείχνει ότι $e = \lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n \leq \lim\limits_{n\to\infty} s_n$. Άρα,

$$e = \lim_{n\to\infty} s_n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}, \tag{2.2.10}$$

όπως ισχυρίζεται η Πρόταση. □

Χρησιμοποιώντας αυτήν την αναπαράσταση του e, θα δείξουμε ότι είναι άρρητος αριθμός.

Πρόταση 2.2.4. *Ο e είναι άρρητος.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι ο e είναι ρητός. Τότε, υπάρχουν $m, n \in \mathbb{N}$ ώστε

$$e = \frac{m}{n} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}. \tag{2.2.11}$$

Δηλαδή,

$$\frac{m}{n} = \left(1 + \frac{1}{1!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right) + \left(\frac{1}{(n+1)!} + \cdots + \frac{1}{(n+s)!} + \cdots\right). \tag{2.2.12}$$

Πολλαπλασιάζοντας τα δύο μέλη της (2.2.12) με $n!$, μπορούμε να γράψουμε

$$\begin{aligned} 0 < A &= n!\left[\frac{m}{n} - \left(1 + \frac{1}{1!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right)\right] \\ &= \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \cdots + \frac{1}{(n+1)\cdots(n+s)} + \cdots . \end{aligned}$$

Παρατηρήστε ότι, από τον τρόπο ορισμού του, ο

$$A = n!\left[\frac{m}{n} - \left(1 + \frac{1}{1!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right)\right] \tag{2.2.13}$$

είναι φυσικός αριθμός. Όμως, για κάθε $s \in \mathbb{N}$ έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \cdots + \frac{1}{(n+1)\cdots(n+s)} &\leq \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^s} \\ &< \frac{2}{3} + \frac{1}{8}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} \\ &= \frac{2}{3} + \frac{1}{4} = \frac{11}{12}. \end{aligned}$$

Άρα,

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \cdots + \frac{1}{(n+1)\cdots(n+s)} + \cdots \leq \frac{11}{12}. \tag{2.2.14}$$

Έπεται ότι ο φυσικός αριθμός A ικανοποιεί την

$$0 < A \leq \frac{11}{12} \tag{2.2.15}$$

και έχουμε καταλήξει σε άτοπο. □

2.3 Γενικά κριτήρια

2.3α′ Απόλυτη σύγκλιση σειράς

Ορισμός 2.3.1. *Λέμε ότι η σειρά* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *συγκλίνει απολύτως αν η σειρά* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_k|$ *συγκλίνει. Λέμε ότι η σειρά* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *συγκλίνει υπό συνθήκη αν συγκλίνει αλλά δεν συγκλίνει απολύτως.*

Η επόμενη πρόταση δείχνει ότι η απόλυτη σύγκλιση είναι ισχυρότερη από την (απλή) σύγκλιση.

Πρόταση 2.3.2. *Αν η σειρά* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *συγκλίνει απολύτως, τότε η σειρά* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *συγκλίνει.*

Απόδειξη. Θα δείξουμε ότι ικανοποιείται το κριτήριο Cauchy (Θεώρημα 2.1.6). Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_k|$ συγκλίνει, υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ ώστε: για κάθε $N \leq m < n$,

$$\sum_{k=m+1}^{n} |a_k| < \varepsilon. \tag{2.3.1}$$

Τότε, για κάθε $N \leq m < n$ έχουμε

$$\left| \sum_{k=m+1}^{n} a_k \right| \leq \sum_{k=m+1}^{n} |a_k| < \varepsilon. \tag{2.3.2}$$

Άρα η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ ικανοποιεί το κριτήριο Cauchy. Από το Θεώρημα 2.1.6, συγκλίνει. □

Παραδείγματα

(α) Η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^2}$ συγκλίνει. Μπορούμε να ελέγξουμε ότι συγκλίνει απολύτως: έχουμε

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{k-1}}{k^2} \right| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \tag{2.3.3}$$

και η τελευταία σειρά συγκλίνει (είναι της μορφής $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}$ με $p = 2 > 1$).

(β) Η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ δεν συγκλίνει απολύτως, αφού

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{k-1}}{k} \right| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \tag{2.3.4}$$

(αρμονική σειρά). Μπορούμε όμως να δείξουμε ότι η σειρά συγκλίνει υπό συνθήκη. Θεωρούμε πρώτα το μερικό άθροισμα

$$\begin{aligned} s_{2m} &= \sum_{k=1}^{2m} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \\ &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2m-1} - \frac{1}{2m} \\ &= \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{3\cdot 4} + \frac{1}{5\cdot 6} + \cdots + \frac{1}{(2m-1)2m}. \end{aligned}$$

Έπεται ότι

$$s_{2m+2} = s_{2m} + \frac{1}{(2m+1)(2m+2)} > s_{2m}, \tag{2.3.5}$$

δηλαδή, η υπακολουθία (s_{2m}) είναι γνησίως αύξουσα. Παρατηρούμε επίσης ότι η (s_{2m}) είναι άνω φραγμένη, αφού

$$s_{2m} < \frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots + \frac{1}{(2m-1)^2}, \tag{2.3.6}$$

και το δεξιό μέλος της (2.3.6) φράσσεται από το $(2m-1)$-οστό μερικό άθροισμα της σειράς $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ η οποία συγκλίνει. Άρα η υπακολουθία (s_{2m}) συγκλίνει σε κάποιον πραγματικό αριθμό s. Τότε,

$$s_{2m-1} = s_{2m} + \frac{1}{2m} \to s + 0 = s. \tag{2.3.7}$$

Αφού οι υπακολουθίες (s_{2m}) και (s_{2m-1}) των άρτιων και των περιττών όρων της (s_m) συγκλίνουν στον s, συμπεραίνουμε ότι $s_n \to s$.

2.3β΄ Κριτήρια σύγκρισης

Θεώρημα 2.3.3 (κριτήριο σύγκρισης). *Θεωρούμε τις σειρές $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ και $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$, όπου $b_k > 0$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Υποθέτουμε ότι υπάρχει $M > 0$ ώστε*

$$|a_k| \leq M \cdot b_k \tag{2.3.8}$$

για κάθε $k \in \mathbb{N}$ και ότι η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ συγκλίνει. Τότε, η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει απολύτως.

Απόδειξη. Θέτουμε $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} |a_k|$ και $t_n = \sum\limits_{k=1}^{n} b_k$. Από την (2.3.8) έπεται ότι

$$s_n \leq M \cdot t_n \tag{2.3.9}$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αφού η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ συγκλίνει, η ακολουθία (t_n) είναι άνω φραγμένη. Από την (2.3.9) συμπεραίνουμε ότι και η (s_n) είναι άνω φραγμένη. Άρα, η $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_k|$ συγκλίνει. □

Θεώρημα 2.3.4 (οριακό κριτήριο σύγκρισης). *Θεωρούμε τις σειρές* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *και* $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$*, όπου* $b_k > 0$ *για κάθε* $k \in \mathbb{N}$*. Υποθέτουμε ότι*

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_k}{b_k} = \ell \in \mathbb{R} \tag{2.3.10}$$

και ότι η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ *συγκλίνει. Τότε, η σειρά* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *συγκλίνει απολύτως.*

Απόδειξη. Η ακολουθία $\left(\frac{a_k}{b_k}\right)$ συγκλίνει, άρα είναι φραγμένη. Δηλαδή, υπάρχει $M > 0$ ώστε

$$\left|\frac{a_k}{b_k}\right| \leq M \tag{2.3.11}$$

για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Τότε, ικανοποιείται η (2.3.8) και μπορούμε να εφαρμόσουμε το Θεώρημα 2.3.3. □

Θεώρημα 2.3.5 (ισοδύναμη συμπεριφορά). *Θεωρούμε τις σειρές* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *και* $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$*, όπου* $a_k, b_k > 0$ *για κάθε* $k \in \mathbb{N}$*. Υποθέτουμε ότι*

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_k}{b_k} = \ell > 0. \tag{2.3.10}$$

Τότε, η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ *συγκλίνει αν και μόνο αν η σειρά* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *συγκλίνει.*

Απόδειξη. Αν η $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ συγκλίνει, τότε η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει από το Θεώρημα 2.3.4.

Αντίστροφα, ας υποθέσουμε ότι η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει. Αφού $\frac{a_k}{b_k} \to \ell > 0$, έχουμε $\frac{b_k}{a_k} \to \frac{1}{\ell}$. Εναλλάσσοντας τους ρόλους των (a_k) και (b_k), βλέπουμε ότι η $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ συγκλίνει, χρησιμοποιώντας ξανά το Θεώρημα 2.3.4. □

Παραδείγματα

(α) Εξετάζουμε τη σύγκλιση της σειράς $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(kx)}{k^2}$, όπου $x \in \mathbb{R}$. Παρατηρούμε ότι

$$\left|\frac{\sin(kx)}{k^2}\right| \leq \frac{1}{k^2}. \tag{2.3.12}$$

Αφού η $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ συγκλίνει, συμπεραίνουμε (από το κριτήριο σύγκρισης) ότι η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(kx)}{k^2}$ συγκλίνει απολύτως.

(β) Εξετάζουμε τη σύγκλιση της σειράς $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+1}{k^4+k^2+3}$. Παρατηρούμε ότι αν $a_k = \frac{k+1}{k^4+k^2+3}$ και $b_k = \frac{1}{k^3}$, τότε

$$\frac{a_k}{b_k} = \frac{k^4+k^3}{k^4+k^2+3} \to 1. \tag{2.3.13}$$

Αφού η $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3}$ συγκλίνει, συμπεραίνουμε (από το οριακό κριτήριο σύγκρισης) ότι η $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{k+1}{k^4+k^2+3}$ συγκλίνει.

(γ) Τέλος, εξετάζουμε τη σύγκλιση της σειράς $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{k+1}{k^2+2}$. Όπως στο προηγούμενο παράδειγμα, αν θεωρήσουμε τις ακολουθίες $b_k = \frac{k+1}{k^2+2}$ και $a_k = \frac{1}{k}$, τότε

$$\frac{a_k}{b_k} = \frac{k^2+2}{k^2+k} \to 1 > 0. \tag{2.3.14}$$

Από το Θεώρημα 2.3.5 έπεται ότι η $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{k+1}{k^2+2}$ έχει την ίδια συμπεριφορά με την $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$, δηλαδή αποκλίνει.

2.3γ′ Κριτήριο λόγου και κριτήριο ρίζας

Θεώρημα 2.3.6 (Κριτήριο λόγου - D' Alembert). *Έστω $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ μια σειρά με μη μηδενικούς όρους.*

(α) *Αν $\lim\limits_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| < 1$, τότε η $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει απολύτως.*

(β) *Αν $\lim\limits_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| > 1$, τότε η $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ αποκλίνει.*

Απόδειξη. (α) Υποθέτουμε ότι $\lim\limits_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \ell < 1$. Έστω $x > 0$ με $\ell < x < 1$. Τότε, υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ ώστε: $|\frac{a_{k+1}}{a_k}| \leq x$ γιά κάθε $k \geq N$. Δηλαδή,

$$|a_{N+1}| \leq x|a_N|, \quad |a_{N+2}| \leq x|a_{N+1}| \leq x^2|a_N| \quad \text{κλπ.} \tag{2.3.15}$$

Επαγωγικά δείχνουμε ότι

$$|a_k| \leq x^{k-N}|a_N| = \frac{|a_N|}{x^N} \cdot x^k \tag{2.3.16}$$

γιά κάθε $k \geq N$.

Συγκρίνουμε τις σειρές $\sum\limits_{k=N}^{\infty} |a_k|$ και $\sum\limits_{k=N}^{\infty} x^k$. Από την (2.3.16) βλέπουμε ότι

$$|a_k| \leq M \cdot x^k \tag{2.3.17}$$

για κάθε $k \geq N$, όπου $M = \frac{|a_N|}{x^N}$. Η σειρά $\sum\limits_{k=N}^{\infty} x^k$ συγκλίνει, διότι προέρχεται από την γεωμετρική σειρά $\sum\limits_{k=0}^{\infty} x^k$ (με απαλοιφή των πρώτων όρων της) και $0 < x < 1$. Άρα, η $\sum\limits_{k=N}^{\infty} |a_k|$ συγκλίνει. Έπεται ότι η $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_k|$ συγκλίνει κι αυτή.

(β) Αφού $\lim\limits_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| > 1$, υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ ώστε $\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \geq 1$ για κάθε $k \geq N$. Δηλαδή,

$$|a_k| \geq |a_{k-1}| \geq \cdots \geq |a_N| > 0 \tag{2.3.18}$$

για κάθε $k \geq N$. Τότε, $a_k \not\to 0$ και, από την Πρόταση 2.1.5(α), η $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ αποκλίνει. □

Σημείωση. Αν $\lim\limits_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = 1$, πρέπει να εξετάσουμε αλλιώς τη σύγκλιση ή απόκλιση της $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$. Παρατηρήστε ότι η $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ αποκλίνει και $\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \frac{k}{k+1} \to 1$, ενώ η $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ συγκλίνει και $\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \frac{k^2}{(k+1)^2} \to 1$.

Παράδειγμα

Εξετάζουμε τη σύγκλιση της σειράς $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$. Έχουμε

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \frac{k!}{(k+1)!} = \frac{1}{k+1} \to 0 < 1. \tag{2.3.19}$$

Άρα, η σειρά συγκλίνει.

Παρατήρηση. Η απόδειξη του Θεωρήματος 2.3.6, χωρίς ουσιαστική μετατροπή, δίνει το εξής ισχυρότερο αποτέλεσμα: Έστω $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ μια σειρά με μη μηδενικούς όρους.

(α) Αν $\limsup\limits_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| < 1$, τότε η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει απολύτως. Πράγματι, αν θεωρήσουμε $x > 0$ με $\ell < x < 1$, τότε από τον χαρακτηρισμό του $\limsup$, υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ ώστε $\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \leq x$ για κάθε $k \geq N$. Συνεχίζουμε την απόδειξη όπως πριν.

(β) Αν $\liminf\limits_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| > 1$, τότε η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ αποκλίνει. Πράγματι, αν θεωρήσουμε $x > 0$ με $\ell > x > 1$, τότε από τον χαρακτηρισμό του $\liminf$, υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ ώστε $\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \geq x > 1$ για κάθε $k \geq N$. Συνεχίζουμε την απόδειξη όπως πριν.

Θεώρημα 2.3.7 (κριτήριο ρίζας - Cauchy). *Έστω $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ μια σειρά πραγματικών αριθμών.*
(α) *Αν $\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} < 1$, τότε η σειρά συγκλίνει απολύτως.*
(β) *Αν $\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} > 1$, τότε η σειρά αποκλίνει.*

Απόδειξη (α) Επιλέγουμε $x > 0$ με την ιδιότητα $\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} < x < 1$. Τότε, υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ ώστε $\sqrt[k]{|a_k|} \leq x$ για κάθε $k \geq N$. Ισοδύναμα,

$$|a_k| \leq x^k \tag{2.3.21}$$

για κάθε $k \geq n$. Συγκρίνουμε τις σειρές $\sum\limits_{k=N}^{\infty} |a_k|$ και $\sum\limits_{k=N}^{\infty} x^k$. Αφού $x < 1$, η δεύτερη σειρά συγκλίνει. Άρα η $\sum\limits_{k=N}^{\infty} |a_k|$ συγκλίνει. Έπεται ότι η $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει απολύτως.
(β) Αφού $\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} > 1$, υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ ώστε $\sqrt[k]{|a_k|} \geq 1$ για κάθε $k \geq N$. Δηλαδή, $|a_k| \geq 1$ τελικά. Άρα $a_k \not\to 0$ και η $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ αποκλίνει. □

Σημείωση. Αν $\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = 1$, πρέπει να εξετάσουμε αλλιώς τη σύγκλιση ή απόκλιση της $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$. Για τις $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ έχουμε $\sqrt[k]{|a_k|} \to 1$. Η πρώτη αποκλίνει ενώ η δεύτερη συγκλίνει.

Παραδείγματα

(α) Εξετάζουμε τη σύγκλιση της σειράς $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}$, όπου $x \in \mathbb{R}$. Έχουμε $\sqrt[k]{|a_k|} = \frac{|x|}{\sqrt[k]{k}} \to |x|$. Αν $|x| < 1$, τότε $\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = |x| < 1$ και η σειρά συγκλίνει απολύτως. Αν $|x| > 1$, τότε $\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = |x| > 1$ και η σειρά αποκλίνει. Αν $|x| = 1$, το κριτήριο ρίζας δεν δίνει συμπέρασμα. Για $x = 1$ παίρνουμε την αρμονική σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ η οποία αποκλίνει. Για $x = -1$ παίρνουμε την «εναλλάσσουσα σειρά» $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$ η οποία συγκλίνει. Άρα, η σειρά συγκλίνει αν και μόνο αν $-1 \leq x < 1$.

(β) Εξετάζουμε τη σύγκλιση της σειράς $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{x^{2k}}{k^2}$, όπου $x \in \mathbb{R}$. Έχουμε $\sqrt[k]{|a_k|} = \frac{x^2}{\sqrt[k]{k^2}} \to x^2$. Άρα, $\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = x^2$. Αν $|x| > 1$ η σειρά αποκλίνει. Αν $|x| < 1$ η σειρά συγκλίνει απολύτως. Αν $|x| = 1$ το κριτήριο ρίζας δεν δίνει συμπέρασμα. Στην περίπτωση $x = \pm 1$ η σειρά παίρνει τη μορφή $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$, δηλαδή συγκλίνει. Άρα, η σειρά συγκλίνει απολύτως όταν $|x| \leq 1$.

Παρατήρηση. Η απόδειξη του Θεωρήματος 2.3.7, χωρίς ουσιαστική μετατροπή, δίνει το εξής ισχυρότερο αποτέλεσμα: Έστω $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ μια σειρά με μη μηδενικούς όρους.

(α) Αν $\limsup\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} < 1$, τότε η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει απολύτως. Πράγματι, αν θεωρήσουμε $x > 0$ με $\ell < x < 1$, τότε από τον χαρακτηρισμό του $\limsup$, υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ ώστε $|a_k| \leq x^k$ για κάθε $k \geq N$. Συνεχίζουμε την απόδειξη όπως πριν.

(β) Αν $\limsup\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} > 1$, τότε η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ αποκλίνει. Πράγματι, αν θεωρήσουμε $x > 0$ με $\ell > x > 1$, τότε από τον χαρακτηρισμό του $\limsup$, υπάρχουν άπειροι δείκτες $k_1 < k_2 < \cdots < k_n < k_{n+1} < \cdots$ ώστε $|a_{k_n}| \geq x^{k_n} > 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Άρα, $a_n \not\to 0$ και εφαρμόζεται το κριτήριο απόκλισης.

2.3δ′ Το κριτήριο του Dirichlet

Το κριτήριο του Dirichlet εξασφαλίζει (μερικές φορές) τη σύγκλιση μιας σειράς η οποία δεν συγκλίνει απολύτως (συγκλίνει υπό συνθήκη).

Λήμμα 2.3.8 (άθροιση κατά μέρη - Abel)**.** *Έστω (a_k) και (b_k) δύο ακολουθίες. Ορίζουμε $s_n = a_1 + \cdots + a_n$, $s_0 = 0$. Για κάθε $1 \leq m < n$, ισχύει η ισότητα*

$$\sum_{k=m}^{n} a_k b_k = \sum_{k=m}^{n-1} s_k (b_k - b_{k+1}) + s_n b_n - s_{m-1} b_m. \tag{2.3.22}$$

Απόδειξη. Γράφουμε

$$\begin{aligned}\sum_{k=m}^{n} a_k b_k &= \sum_{k=m}^{n}(s_k - s_{k-1})b_k\\ &= \sum_{k=m}^{n} s_k b_k - \sum_{k=m}^{n} s_{k-1}b_k\\ &= \sum_{k=m}^{n} s_k b_k - \sum_{k=m-1}^{n-1} s_k b_{k+1}\\ &= \sum_{k=m}^{n-1} s_k(b_k - b_{k+1}) + s_n b_n - s_{m-1}b_m,\end{aligned}$$

που είναι το ζητούμενο. □

Θεώρημα 2.3.9 (κριτήριο Dirichlet). *Έστω (a_k) και (b_k) δύο ακολουθίες με τις εξής ιδιότητες:*

(α) *Η (b_k) έχει θετικούς όρους και φθίνει προς το 0.*

(β) *Η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων $s_n = a_1 + \cdots + a_n$ της (a_k) είναι φραγμένη: υπάρχει $M > 0$ ώστε*

(2.3.23) $$|s_n| \leq M$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Τότε, η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ συγκλίνει.

Απόδειξη. Θα χρησιμοποιήσουμε το κριτήριο του Cauchy. Έστω $\varepsilon > 0$. Χρησιμοποιώντας την υπόθεση (α), βρίσκουμε $N \in \mathbb{N}$ ώστε

(2.3.24) $$\frac{\varepsilon}{2M} > b_N \geq b_{N+1} \geq b_{N+2} \geq \cdots > 0.$$

Άν $N \leq m < n$, τότε

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=m}^{n} a_k b_k\right| &= \left|\sum_{k=m}^{n-1} s_k(b_k - b_{k+1}) + s_n b_n - s_{m-1}b_m\right|\\ &\leq \sum_{k=m}^{n-1} |s_k||b_k - b_{k+1}| + |s_n||b_n| + |s_{m-1}||b_m|\\ &\leq M\sum_{k=m}^{n-1}(b_k - b_{k+1}) + Mb_n + Mb_m\\ &= 2Mb_m < 2M\frac{\varepsilon}{2M}\\ &= \varepsilon.\end{aligned}$$

Από το κριτήριο του Cauchy, η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ συγκλίνει. □

Παράδειγμα (κριτήριο Leibniz)

Σειρές με εναλλασσόμενα πρόσημα $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}b_k$, *όπου η* $\{b_k\}$ *φθίνει προς το* 0.

Τα μερικά αθροίσματα της $((-1)^{k-1})$ είναι φραγμένα, αφού $s_n=0$ αν ο n είναι άρτιος και $s_n=1$ αν ο n είναι περιττός. Άρα, κάθε τέτοια σειρά συγκλίνει. Παράδειγμα, η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}$.

2.3ε′ *Δεκαδική παράσταση πραγματικών αριθμών

Σκοπός μας σε αυτήν την παράγραφο είναι να δείξουμε ότι κάθε πραγματικός αριθμός έχει δεκαδική παράσταση: είναι δηλαδή άθροισμα σειράς της μορφής

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a_k}{10^k}=a_0+\frac{a_1}{10}+\frac{a_2}{10^2}+\cdots, \tag{2.3.25}$$

όπου $a_0\in\mathbb{Z}$ και $a_k\in\{0,1,\dots,9\}$ για κάθε $k\geq 1$.

Παρατηρήστε ότι κάθε σειρά αυτής της μορφής συγκλίνει και ορίζει έναν πραγματικό αριθμό $x=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a_k}{10^k}$. Πράγματι, η γεωμετρική σειρά $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{10^k}$ συγκλίνει και επειδή $0\leq\frac{a_k}{10^k}\leq\frac{9}{10^k}$ για κάθε $k\geq 1$, η σειρά $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a_k}{10^k}$ συγκλίνει σύμφωνα με το κριτήριο σύγκρισης σειρών.

Λήμμα 2.3.10. *Αν* $N\geq 1$ *και* $a_k\in\{0,1,\dots,9\}$ *για κάθε* $k\geq N$, *τότε*

$$0\leq\sum_{k=N}^{\infty}\frac{a_k}{10^k}\leq\frac{1}{10^{N-1}}. \tag{2.3.26}$$

Η αριστερή ανισότητα ισχύει σαν ισότητα αν και μόνον αν $a_k=0$ *για κάθε* $k\geq N$, *ενώ η δεξιά ανισότητα ισχύει σαν ισότητα αν και μόνον αν* $a_k=9$ *για κάθε* $k\geq N$.

Απόδειξη. Έχουμε

$$\sum_{k=N}^{\infty}\frac{a_k}{10^k}\geq\sum_{k=N}^{\infty}\frac{0}{10^k}=0. \tag{2.3.27}$$

Αν $a_k=0$ για κάθε $k\geq N$, τότε $\sum_{k=N}^{\infty}\frac{a_k}{10^k}=0$. Αντίστροφα, αν $a_m\geq 1$ για κάποιον $m\geq N$, τότε

$$\begin{aligned}\sum_{k=N}^{\infty}\frac{a_k}{10^k} &= \frac{a_m}{10^m}+\sum_{\substack{k=N\\k\neq m}}^{\infty}\frac{a_k}{10^k}\\ &\geq \frac{1}{10^m}+\sum_{\substack{k=N\\k\neq m}}^{\infty}\frac{0}{10^k}\\ &= \frac{1}{10^m}>0.\end{aligned}$$

Από την άλλη πλευρά,

$$\sum_{k=N}^{\infty} \frac{a_k}{10^k} \le \sum_{k=N}^{\infty} \frac{9}{10^k} = \frac{9}{10^N}\left(1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \cdots\right) = \frac{1}{10^{N-1}}. \tag{2.3.28}$$

Αν $a_k = 9$ για κάθε $k \ge N$, τότε

$$\sum_{k=N}^{\infty} \frac{a_k}{10^k} = \sum_{k=N}^{\infty} \frac{9}{10^k} = \frac{1}{10^{N-1}}. \tag{2.3.29}$$

Αντίστροφα, αν $a_m \le 8$ για κάποιον $m \ge N$, τότε

$$\begin{aligned}
\sum_{k=N}^{\infty} \frac{a_k}{10^k} &= \frac{a_m}{10^m} + \sum_{\substack{k=N \\ k\neq m}}^{\infty} \frac{a_k}{10^k} \\
&\le \frac{8}{10^m} + \sum_{\substack{k=N \\ k\neq m}}^{\infty} \frac{9}{10^k} = \frac{9}{10^m} - \frac{1}{10^m} + \sum_{\substack{k=N \\ k\neq m}}^{\infty} \frac{9}{10^k} \\
&= -\frac{1}{10^m} + \sum_{k=N}^{\infty} \frac{9}{10^k} \\
&= -\frac{1}{10^m} + \frac{1}{10^{N-1}} \\
&< \frac{1}{10^{N-1}},
\end{aligned}$$

κι αυτό συμπληρώνει την απόδειξη του Λήμματος. □

Λήμμα 2.3.11. *Έστω n μη αρνητικός ακέραιος και έστω $N \ge 0$. Τότε υπάρχουν ακέραιοι $p_0, p_1, \dots p_n$ ώστε: $p_k \in \{0, 1, \dots, 9\}$ για $0 \le k \le N-1$, $p_N \ge 0$ και*

$$n = 10^N p_N + 10^{N-1} p_{N-1} + \cdots + 10 p_1 + p_0. \tag{2.3.30}$$

Απόδειξη. Διαιρώντας διαδοχικά με 10 παίρνουμε

$$\begin{aligned}
n &= 10q_1 + p_0, \quad \text{όπου} \quad 0 \le p_0 \le 9 \quad \text{και} \quad q_1 \ge 0 \\
q_1 &= 10q_2 + p_1, \quad \text{όπου} \quad 0 \le p_1 \le 9 \quad \text{και} \quad q_2 \ge 0 \\
q_2 &= 10q_3 + p_2, \quad \text{όπου} \quad 0 \le p_2 \le 9 \quad \text{και} \quad q_3 \ge 0 \\
&\ \vdots \\
q_{N-1} &= 10p_N + p_{N-1}, \quad \text{όπου} \quad 0 \le p_{N-1} \le 9 \quad \text{και} \quad q_N \ge 0.
\end{aligned}$$

Επαγωγικά, έχουμε:

$$\begin{aligned}
n &= 10q_1 + p_0 = 10^2 q_2 + 10p_1 + p_0 = 10^3 q_3 + 10^2 p_2 + 10p_1 + p_0 = \cdots \\
&= 10^N q_N + 10^{N-1} p_{N-1} + 10p_1 + p_0.
\end{aligned}$$

Θέτοντας $p_N = q_N$ έχουμε το ζητούμενο. □

Χρησιμοποιώντας τα Λήμματα 2.3.10 και 2.3.11 θα δείξουμε ότι κάθε πραγματικός αριθμός έχει δεκαδική παράσταση.

Θεώρημα 2.3.12. (α) *Κάθε πραγματικός αριθμός $x \geq 0$ γράφεται σαν άθροισμα «δεκαδικής σειράς»:*

$$x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{10^k} = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \cdots , \tag{2.3.31}$$

όπου $a_0 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ και $a_k \in \{0, 1, \ldots, 9\}$ για κάθε $k \geq 1$. Τότε, λέμε ότι ο x έχει τη δεκαδική παράσταση $x = a_0.a_1a_2a_3 \cdots$.

(β) *Οι αριθμοί της μορφής $x = \frac{m}{10^N}$ όπου $m \in \mathbb{N}$ και $N \geq 0$ έχουν ακριβώς δύο δεκαδικές παραστάσεις:*

$$x = a_0.a_1a_2 \cdots a_N 9999 \cdots = a_0.a_1a_2 \cdots a_{N-1}(a_N + 1)000 \cdots \tag{2.3.32}$$

Όλοι οι άλλοι μη αρνητικοί πραγματικοί αριθμοί έχουν μοναδική δεκαδική παράσταση.

Απόδειξη. (α) Έστω $x \geq 0$. Υπάρχει μη αρνητικός ακέραιος a_0, το ακέραιο μέρος του x, ώστε:

$$a_0 \leq x < a_0 + 1. \tag{2.3.33}$$

Χωρίζουμε το διάστημα $[a_0, a_0 + 1)$ σε 10 ίσα υποδιαστήματα μήκους $\frac{1}{10}$. Ο x ανήκει σε ένα από αυτά. Άρα, υπάρχει $a_1 \in \{0, 1, \ldots, 9\}$ ώστε

$$a_0 + \frac{a_1}{10} \leq x < a_0 + \frac{a_1 + 1}{10}. \tag{2.3.34}$$

Χωρίζουμε το νέο αυτό διάστημα (που έχει μήκος $\frac{1}{10}$) σε 10 ίσα υποδιαστήματα μήκους $\frac{1}{10^2}$. Ο x ανήκει σε ένα από αυτά, άρα υπάρχει $a_2 \in \{0, 1, \ldots, 9\}$ ώστε

$$a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} \leq x < a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2 + 1}{10^2}. \tag{2.3.35}$$

Συνεχίζοντας επαγωγικά, για κάθε $k \geq 1$ βρίσκουμε $a_k \in \{0, 1, \ldots, 9\}$ ώστε

$$a_0 + \frac{a_1}{10} + \cdots + \frac{a_k}{10^k} \leq x < a_0 + \frac{a_1}{10} + \cdots + \frac{a_k + 1}{10^k}. \tag{2.3.36}$$

Από την κατασκευή, τα μερικά αθροίσματα s_n της σειράς $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{10^k}$ η οποία δημιουργείται, ικανοποιούν την $s_n \leq x < s_n + \frac{1}{10^n}$. Άρα,

$$0 \leq x - s_n < \frac{1}{10^n}. \tag{2.3.37}$$

Έπεται ότι $s_n \to x$, δηλαδή

$$x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{10^k}. \tag{2.3.38}$$

(β) Ας υποθέσουμε ότι κάποιος $x \geq 0$ έχει τουλάχιστον δύο διαφορετικές δεκαδικές παραστάσεις. Δηλαδή,

$$x = a_0.a_1a_2 \cdots = b_0.b_1b_2 \cdots , \tag{2.3.39}$$

όπου $a_0, b_0 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $a_k, b_k \in \{0, 1, \ldots, 9\}$ για κάθε $k \geq 1$, και υπάρχει $m \geq 0$ με την ιδιότητα $a_m \neq b_m$.

Έστω $N \geq 0$ ο ελάχιστος m για τον οποίο $a_m \neq b_m$. Δηλαδή,

$$a_0 = b_0,\ a_1 = b_1,\ \ldots,\ a_{N-1} = b_{N-1},\ a_N \neq b_N. \tag{2.3.40}$$

Χωρίς περιορισμό της γενικότητας υποθέτουμε ότι $a_N < b_N$. Από την

$$\sum_{k=N}^{\infty} \frac{a_k}{10^k} = \sum_{k=N}^{\infty} \frac{b_k}{10^k} \tag{2.3.41}$$

και από το Λήμμα 2.3.10 έπεται ότι

$$\begin{aligned} \frac{1}{10^N} &\leq \frac{b_N - a_N}{10^N} \\ &= \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{a_k}{10^k} - \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{b_k}{10^k} \\ &\leq \frac{1}{10^N} - 0 \\ &= \frac{1}{10^N}. \end{aligned}$$

Άρα, όλες οι ανισότητες είναι ισότητες. Δηλαδή,

$$b_N - a_N = 1 \tag{2.3.42}$$

και

$$\sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{a_k}{10^k} = \frac{1}{10^N}, \qquad \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{b_k}{10^k} = 0. \tag{2.3.43}$$

Από το Λήμμα 2.3.10,

$$\begin{aligned} b_N &= a_N + 1, \\ a_k &= 9,\ \text{αν}\ k \geq N+1, \\ b_k &= 0,\ \text{αν}\ k \geq N+1. \end{aligned}$$

Άρα, αν ο x έχει περισσότερες από μία δεκαδικές παραστάσεις, τότε έχει ακριβώς δύο παραστάσεις, τις ακόλουθες:

$$x = a_0.a_1a_2\cdots a_N999\cdots = a_0.a_1a_2\cdots a_{N-1}(a_N+1)\ 00\cdots \tag{2.3.44}$$

Τότε, ο x ισούται με

$$\begin{aligned} x &= a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \cdots + \frac{a_{N-1}}{10^{N-1}} + \frac{a_N+1}{10^N} \\ &= \frac{10^N a_0 + 10^{N-1}a_1 + \cdots + 10a_{N-1} + a_N + 1}{10^N} \\ &= \frac{m}{10^N} \end{aligned}$$

για κάποιους $m \in \mathbb{N}$ και $N \geq 0$.

Αντίστροφα, έστω ότι $x = \frac{m}{10^N}$, όπου $m \in \mathbb{N}$ και $N \geq 0$. Από το Λήμμα 2.3.11 μπορούμε να γράψουμε

$$m = 10^N p_N + 10^{N-1} p_{N-1} + \cdots + 10 p_1 + p_0, \tag{2.3.45}$$

όπου $p_N \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ και $p_k \in \{0, 1, \dots, 9\}$ για $0 \leq k \leq N-1$. Αν p_m είναι ο πρώτος μη μηδενικός όρος της ακολουθίας $p_0, p_1, \dots, p_{N-1}, p_N$, τότε

$$\begin{aligned} x &= \frac{10^N p_N + \cdots + 10^m p_m}{10^N} \\ &= p_N + \frac{p_{N-1}}{10} + \cdots + \frac{p_m}{10^{N-m}} \\ &= p_N . p_{N-1} \cdots p_m 000 \cdots = p_N . p_{N-1} \cdots (p_m - 1)\, 99 \cdots . \end{aligned}$$

Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη του (β). □

2.4 Δυναμοσειρές

Ορισμός 2.4.1. Έστω (a_k) μια ακολουθία πραγματικών αριθμών. Η σειρά

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \tag{2.4.1}$$

λέγεται *δυναμοσειρά* με συντελεστές a_k.

Ο x είναι μια παράμετρος από το $\mathbb{R}$. Το πρόβλημα που θα συζητήσουμε εδώ είναι: για δοθείσα ακολουθία συντελεστών (a_k) να βρεθούν οι τιμές του x για τις οποίες η αντίστοιχη δυναμοσειρά συγκλίνει. Για κάθε τέτοιο x λέμε ότι *η δυναμοσειρά συγκλίνει στο* x.

Πρόταση 2.4.2. *Έστω* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ *μια δυναμοσειρά με συντελεστές* a_k.

(α) *Αν η δυναμοσειρά συγκλίνει στο* $y \neq 0$ *και αν* $|x| < |y|$, *τότε η δυναμοσειρά συγκλίνει απολύτως στο* x.

(β) *Αν η δυναμοσειρά αποκλίνει στο* y *και αν* $|x| > |y|$, *τότε η δυναμοσειρά αποκλίνει στο* x.

Απόδειξη. (α) Αφού η $\sum_{k=0}^{\infty} a_k y^k$ συγκλίνει, έχουμε $a_k y^k \to 0$. Άρα, υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ ώστε

$$|a_k y^k| \leq 1 \quad \text{για κάθε } k \geq N. \tag{2.4.2}$$

Έστω $x \in \mathbb{R}$ με $|x| < |y|$. Για κάθε $k \geq N$ έχουμε

$$|a_k x^k| = |a_k y^k| \cdot \left|\frac{x}{y}\right|^k \leq \left|\frac{x}{y}\right|^k . \tag{2.4.3}$$

Η γεωμετρική σειρά $\sum_{k=N}^{\infty} \left|\frac{x}{y}\right|^k$ συγκλίνει, διότι $\left|\frac{x}{y}\right| < 1$. Από το κριτήριο σύγκρισης έπεται το συμπέρασμα.

(β) Αν η δυναμοσειρά συνέκλινε στο x, από το (α) θα συνέκλινε απολύτως στο y, άτοπο. □

Έστω $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ μια δυναμοσειρά με συντελεστές a_k. Με βάση την Πρόταση 2.4.2 μπορούμε να δείξουμε ότι το σύνολο των σημείων στα οποία συγκλίνει η δυναμοσειρά είναι «ουσιαστικά» ένα διάστημα συμμετρικό ως προς το 0 (ή, ενδεχομένως, το $\{0\}$ ή το $\mathbb{R}$). Αυτό φαίνεται ως εξής: ορίζουμε

$$R := \sup\{|x| : \text{ η δυναμοσειρά συγκλίνει στο } x\}. \tag{2.4.4}$$

Το σύνολο στο δεξιό μέλος είναι μη κενό, αφού η δυναμοσειρά συγκλίνει στο 0. Η Πρόταση 2.4.2 δείχνει ότι αν $|x| < R$ τότε η δυναμοσειρά συγκλίνει απολύτως στο x. Πράγματι, από τον ορισμό του R υπάρχει y με $R \geq |y| > |x|$ ώστε η δυναμοσειρά να συγκλίνει στο y, οπότε εφαρμόζεται η Πρόταση 2.4.2(α) στο x. Από τον ορισμό του R είναι φανερό ότι αν $|x| > R$ τότε η δυναμοσειρά αποκλίνει στο x. Άρα, η δυναμοσειρά συγκλίνει σε κάθε $x \in (-R, R)$ και αποκλίνει σε κάθε x με $|x| > R$.

Το διάστημα $(-R, R)$ ονομάζεται *διάστημα σύγκλισης* της δυναμοσειράς. Η συζήτηση που κάναμε δείχνει ότι το *σύνολο σύγκλισης* της δυναμοσειράς, δηλαδή το σύνολο όλων των σημείων στα οποία συγκλίνει, προκύπτει από το $(-R, R)$ με την προσθήκη (ίσως) του R ή του $-R$ ή των $\pm R$. Στην περίπτωση που $R = +\infty$, η δυναμοσειρά συγκλίνει σε κάθε $x \in R$. Στην περίπτωση που $R = 0$, η δυναμοσειρά συγκλίνει μόνο στο σημείο $x = 0$.

Το πρόβλημα είναι λοιπόν τώρα το εξής: πώς μπορούμε να προσδιορίσουμε την *ακτίνα σύγκλισης* μιας δυναμοσειράς συναρτήσει των συντελεστών της. Μια απάντηση μας δίνει το κριτήριο της ρίζας για τη σύγκλιση σειρών.

Θεώρημα 2.4.3. *Έστω $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ μια δυναμοσειρά με συντελεστές a_k. Υποθέτουμε ότι υπάρχει το $\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = a$ και θέτουμε $R = \frac{1}{a}$ με τη σύμβαση ότι $\frac{1}{0} = +\infty$ και $\frac{1}{+\infty} = 0$.*
(α) Αν $x \in (-R, R)$ η δυναμοσειρά συγκλίνει απολύτως στο x.
(β) Αν $x \notin [-R, R]$ η δυναμοσειρά αποκλίνει στο x.

Απόδειξη. Εφαρμόζουμε το κριτήριο της ρίζας για τη σύγκλιση σειρών. Εξετάζουμε μόνο την περίπτωση $0 < a < +\infty$ (οι περιπτώσεις $a = 0$ και $a = +\infty$ αφήνονται σαν άσκηση).
(α) Αν $|x| < R$ τότε

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k x^k|} = |x| \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = |x|a = \frac{|x|}{R} < 1. \tag{2.4.5}$$

Από το κριτήριο της ρίζας, η $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ συγκλίνει απολύτως.

(β) Αν $|x| > R$ τότε

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k x^k|} = \frac{|x|}{R} > 1. \tag{2.4.6}$$

Από το κριτήριο της ρίζας, η $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ αποκλίνει. □

Παρατήρηση 2.4.4. Το Θεώρημα 2.4.3 δεν μας επιτρέπει να συμπεράνουμε αμέσως τις συμβαίνει στα «άκρα $\pm R$ του διαστήματος σύγκλισης». Όπως δείχνουν τα επόμενα παραδείγματα, μπορεί η δυναμοσειρά να συγκλίνει σε ένα, σε κανένα ή και στα δύο άκρα.

1. Για την $\sum\limits_{k=0}^{\infty} x^k$ ελέγχουμε ότι $R = 1$. Για $x = \pm 1$ έχουμε τις σειρές

$$\sum_{k=0}^{\infty} 1^k \quad \text{και} \quad \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k$$

οι οποίες αποκλίνουν.

2. Για την $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{(k+1)^2}$ ελέγχουμε ότι $R = 1$. Για $x = \pm 1$ έχουμε τις σειρές

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)^2} \quad \text{και} \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k+1)^2}$$

οι οποίες συγκλίνουν.

3. Για την $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k+1}$ ελέγχουμε ότι $R = 1$. Για $x = \pm 1$ έχουμε τις σειρές

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+1} \quad \text{και} \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1}.$$

Η πρώτη αποκλίνει, ενώ η δεύτερη συγκλίνει.

Αντίστοιχο αποτέλεσμα προκύπτει αν χρησιμοποιήσουμε το κριτήριο του λόγου στη θέση του κριτηρίου της ρίζας.

Θεώρημα 2.4.5. *Έστω $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ μια δυναμοσειρά με συντελεστές $a_k \neq 0$. Υποθέτουμε ότι υπάρχει το $\lim\limits_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = a$ και θέτουμε $R = \frac{1}{a}$.*
(α) *Αν $x \in (-R, R)$ η δυναμοσειρά συγκλίνει απολύτως στο x.*
(β) *Αν $x \notin [-R, R]$ η δυναμοσειρά αποκλίνει στο x.*

Απόδειξη. Εφαρμόστε το κριτήριο του λόγου για τη σύγκλιση σειρών. □

2.5 Ασκήσεις

Α΄ Ομάδα. Ερωτήσεις κατανόησης

Έστω (a_k) μια ακολουθία πραγματικών αριθμών. Εξετάστε αν οι παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς ή ψευδείς (αιτιολογήστε πλήρως την απάντηση σας).

1. Αν $a_k \to 0$ τότε η ακολουθία $s_n = a_1 + \cdots + a_n$ είναι φραγμένη.

2. Αν η ακολουθία $s_n = a_1 + \cdots + a_n$ είναι φραγμένη τότε η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει.

3. Αν $|a_k| \to 0$, τότε η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει απολύτως.

4. Αν η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ συγκλίνει, τότε η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει.

5. Αν $a_k > 0$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$ και αν $0 < \frac{a_{k+1}}{a_k} < 1$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$, τότε η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει.

6. Αν $a_k > 0$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$ και αν $\lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = 1$, τότε η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ αποκλίνει.

7. Αν $a_k > 0$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$ και αν $\frac{a_{k+1}}{a_k} \to +\infty$, τότε η η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ αποκλίνει.

8. Αν $a_k \to 0$, τότε η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k a_k$ συγκλίνει.

9. Αν $a_k > 0$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$ και αν η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει, τότε η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{a_k}$ συγκλίνει.

10. Αν η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει, τότε η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2$ συγκλίνει.

11. Αν η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει και αν (a_{k_n}) είναι μια υπακολουθία της (a_n), τότε η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_{k_n}$ συγκλίνει.

12. Αν $a_k > 0$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$ και αν η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει, τότε η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2$ συγκλίνει.

13. Η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2k)}{k!}$ συγκλίνει.

14. Η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} k(1+k^2)^p$ συγκλίνει αν και μόνο αν $p < -1$.

Β′ Ομάδα

15. Δείξτε ότι αν $\lim_{k\to\infty} b_k = b$ τότε $\sum_{k=1}^{\infty} (b_k - b_{k+1}) = b_1 - b$.

16. Δείξτε ότι

(α) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{1}{2}$ (β) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k+3^k}{6^k} = \frac{3}{2}$ (γ) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{\sqrt{k^2+k}} = 1$.

17. Υπολογίστε το άθροισμα της σειράς $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$.

18. Εξετάστε για ποιές τιμές του πραγματικού αριθμού x συγκλίνει η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1+x^k}$.

19. Εφαρμόστε τα κριτήρια λόγου **και** ρίζας στις ακόλουθες σειρές:

(α) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k^k x^k$ (β) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ (γ) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k^2}$ (δ) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} k^3 x^k$

(ε) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{k!} x^k$ (στ) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{2^k x^k}{k^2}$ (ζ) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{k^3}{3^k} x^k$ (η) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{k^{10} x^k}{k!}$.

Αν για κάποιες τιμές του $x \in \mathbb{R}$ κανένα από αυτά τα δύο κριτήρια δεν δίνει απάντηση, εξετάστε τη σύγκλιση ή απόκλιση της σειράς με άλλο τρόπο.

20. Εξετάστε αν συγκλίνουν ή αποκλίνουν οι σειρές

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \cdots$$

και

$$\frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{8} + \frac{1}{4} + \frac{1}{32} + \frac{1}{16} + \frac{1}{128} + \frac{1}{64} + \cdots .$$

21. Να βρεθεί ικανή και αναγκαία συνθήκη – για την ακολουθία (a_n) – ώστε να συγκλίνει η σειρά

$$a_1 - a_1 + a_2 - a_2 + a_3 - a_3 + \cdots .$$

22. Εξετάστε αν συγκλίνει ή αποκλίνει η σειρά $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_k$ στις παρακάτω περιπτώσεις:

(α) $a_k = \sqrt{k+1} - \sqrt{k}$ (β) $a_k = \sqrt{1+k^2} - k$

(γ) $a_k = \frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{k}$ (δ) $a_k = (\sqrt[k]{k} - 1)^k$.

23. Εξετάστε αν συγκλίνουν ή αποκλίνουν οι σειρές

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+\sqrt{k}}{2k^3-1}, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} (\sqrt[k]{k} - 1), \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos^2 k}{k^2}, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{k^k}.$$

24. Εξετάστε ως προς τη σύγκλιση τις παρακάτω σειρές. Όπου εμφανίζονται οι παράμετροι $p, q, x \in \mathbb{R}$ να βρεθούν οι τιμές τους για τις οποίες οι αντίστοιχες σειρές συγκλίνουν.

(α) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^{-k^2}$ (β) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} p^k k^p$ $(0 < p)$ (γ) $\sum\limits_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^p - k^q}$ $(0 < q < p)$

(δ) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{1+\frac{1}{k}}}$ (ε) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{p^k - q^k}$ $(0 < q < p)$ (στ) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{2+(-1)^k}{2^k}$

(ζ) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k^p \left(\frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}}\right)$ (η) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k^p \left(\sqrt{k+1} - 2\sqrt{k} + \sqrt{k-1}\right)$.

25. Έστω ότι $a_k \geq 0$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Δείξτε ότι η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{1+k^2 a_k}$ συγκλίνει.

26. Ορίζουμε μια ακολουθία (a_k) ως εξής: αν ο k είναι τετράγωνο φυσικού αριθμού θέτουμε $a_k = \frac{1}{k}$ και αν ο k δεν είναι τετράγωνο φυσικού αριθμού θέτουμε $a_k = \frac{1}{k^2}$. Εξετάστε αν συγκλίνει η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$.

27. Εξετάστε αν συγκλίνει ή αποκλίνει η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k^p}$, όπου $p \in \mathbb{R}$.

28. Έστω $\{a_k\}$ φθίνουσα ακολουθία που συγκλίνει στο 0. Ορίζουμε

$$s = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} a_k.$$

Δείξτε ότι $0 \leq (-1)^n (s - s_n) \leq a_{n+1}$.

29. Έστω (a_k) φθίνουσα ακολουθία θετικών αριθμών. Δείξτε ότι: αν η $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει τότε $k a_k \to 0$.

30. Έστω ότι $a_k > 0$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Αν η $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει, δείξτε ότι οι

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{1+a_k}, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k^2}{1+a_k^2}$$

συγκλίνουν επίσης.

31. Υποθέτουμε ότι $a_k \geq 0$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$ και ότι η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει. Δείξτε ότι η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \sqrt{a_k a_{k+1}}$ συγκλίνει. Δείξτε ότι, αν η $\{a_k\}$ είναι φθίνουσα, τότε ισχύει και το αντίστροφο.

32. Υποθέτουμε ότι $a_k \geq 0$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$ και ότι η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει. Δείξτε ότι η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{a_k}}{k}$ συγκλίνει.

33. Υποθέτουμε ότι $a_k \geq 0$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$ και ότι η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ αποκλίνει. Δείξτε ότι

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_k)} = 1.$$

Γ΄ Ομάδα

34. Έστω (a_k) φθίνουσα ακολουθία θετικών αριθμών με $a_k \to 0$. Δείξτε ότι: αν η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ αποκλίνει τότε

$$\sum_{k=1}^{\infty} \min\left\{a_k, \frac{1}{k}\right\} = +\infty.$$

35. Υποθέτουμε ότι $a_k > 0$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$ και ότι η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ αποκλίνει. Θέτουμε $s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$.

(α) Δείξτε ότι η $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{1+a_k}$ αποκλίνει.

(β) Δείξτε ότι: για $1 \leq m < n$,

$$\frac{a_{m+1}}{s_{m+1}} + \cdots + \frac{a_n}{s_n} \geq 1 - \frac{s_m}{s_n}$$

και συμπεράνατε ότι η $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{s_k}$ αποκλίνει.

(γ) Δείξτε ότι $\frac{a_n}{s_n^2} \leq \frac{1}{s_{n-1}} - \frac{1}{s_n}$ και συμπεράνατε ότι η $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{s_k^2}$ συγκλίνει.

36. Υποθέτουμε ότι $a_k > 0$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$ και ότι η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει. Θέτουμε $r_n = \sum_{k=n}^{\infty} a_k$.

(α) Δείξτε ότι: για $1 \leq m < n$,

$$\frac{a_m}{r_m} + \cdots + \frac{a_n}{r_n} \geq 1 - \frac{r_{n+1}}{r_m}$$

και συμπεράνατε ότι η $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{r_k}$ αποκλίνει.

(β) Δείξτε ότι $\frac{a_n}{\sqrt{r_n}} < 2\left(\sqrt{r_n} - \sqrt{r_{n+1}}\right)$ και συμπεράνατε ότι η $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{\sqrt{r_k}}$ συγκλίνει.

37. Έστω (a_k) ακολουθία πραγματικών αριθμών. Δείξτε ότι αν η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ αποκλίνει τότε και η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} k a_k$ αποκλίνει.

38. Έστω (a_k) ακολουθία θετικών πραγματικών αριθμών. Δείξτε ότι αν η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει, τότε και η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^{\frac{k}{k+1}}$ συγκλίνει.

39. Έστω (a_k) η ακολουθία που ορίζεται από τις

$$a_{2k-1} = \frac{1}{k} \quad \text{και} \quad a_{2k} = \frac{1}{2^k}.$$

Εξετάστε αν η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} a_k$ συγκλίνει.

40. Υποθέτουμε ότι $a_k \geq 0$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Ορίζουμε

$$b_k = \frac{1}{k} \sum_{m=k+1}^{2k} a_m.$$

Δείξτε ότι η $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει αν και μόνο αν η $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ συγκλίνει. [*Υπόδειξη:* Αν s_n και t_n είναι τα μερικά αθροίσματα των δύο σειρών, δοκιμάστε να συγκρίνετε τα s_{2n} και t_n.]

41. Έστω (a_k) ακολουθία θετικών πραγματικών αριθμών. Θεωρούμε την ακολουθία

$$b_k = \frac{a_1 + 2a_2 + \cdots + k a_k}{k(k+1)}.$$

Δείξτε ότι: αν η $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει, τότε η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ συγκλίνει και τα αθροίσματα των δύο σειρών είναι ίσα.

42. Έστω (a_k) ακολουθία θετικών αριθμών ώστε $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k = +\infty$ και $a_k \to 0$. Δείξτε ότι αν $0 \leq \alpha < \beta$ τότε υπάρχουν φυσικοί $m \leq n$ ώστε

$$\alpha < \sum_{k=m}^{n} a_k < \beta.$$

43. Δείξτε ότι αν $0 \leq \alpha < \beta$ τότε υπάρχουν φυσικοί $m \leq n$ ώστε

$$\alpha < \frac{1}{m} + \frac{1}{m+1} + \cdots + \frac{1}{n} < \beta.$$

Κεφάλαιο 3

Ομοιόμορφη συνέχεια

3.1 Ομοιόμορφη συνέχεια

Πριν δώσουμε τον ορισμό της ομοιόμορφης συνέχειας, θα εξετάσουμε πιο προσεκτικά δύο απλά παραδείγματα συνεχών συναρτήσεων.

(α) Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = x$, $x \in \mathbb{R}$. Γνωρίζουμε ότι η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, κάτι που εύκολα επιβεβαιώνουμε αυστηρά χρησιμοποιώντας τον ορισμό της συνέχειας:
Έστω $x_0 \in \mathbb{R}$ και έστω $\varepsilon > 0$. Ζητάμε $\delta > 0$ ώστε

$$|x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon, \quad \text{δηλαδή} \quad |x - x_0| < \varepsilon. \tag{3.1.1}$$

Η επιλογή του δ είναι προφανής: αρκεί να πάρουμε $\delta = \varepsilon$. Παρατηρήστε ότι το δ που βρήκαμε εξαρτάται μόνο από το ε που δόθηκε και όχι από το συγκεκριμένο σημείο x_0. Η συνάρτηση f μεταβάλλεται με τον «ίδιο ρυθμό» σε ολόκληρο το πεδίο ορισμού της: αν $x, y \in \mathbb{R}$ και $|x - y| < \varepsilon$, τότε $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

(β) Θεωρούμε τώρα τη συνάρτηση $g(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$. Είναι πάλι γνωστό ότι η g είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ (αφού $g = f \cdot f$). Αν θελήσουμε να το επιβεβαιώσουμε με τον εψιλοντικό ορισμό, θεωρούμε $x_0 \in \mathbb{R}$ και $\varepsilon > 0$, και ζητάμε $\delta > 0$ με την ιδιότητα

$$|x - x_0| < \delta \Longrightarrow |x^2 - x_0^2| < \varepsilon. \tag{3.1.2}$$

Ένας τρόπος για να επιλέξουμε κατάλληλο δ είναι ο εξής. Συμφωνούμε από την αρχή ότι θα πάρουμε $0 < \delta \leq 1$, οπότε

$$\begin{aligned} |x^2 - x_0^2| &= |x - x_0| \cdot |x + x_0| \leq (|x| + |x_0|) \cdot |x - x_0| \\ &\leq (2|x_0| + 1)|x - x_0|. \end{aligned}$$

Αν λοιπόν επιλέξουμε

$$\delta = \min\left\{1, \frac{\varepsilon}{2|x_0| + 1}\right\}, \tag{3.1.3}$$

τότε

$$|x - x_0| < \delta \Longrightarrow |x^2 - x_0^2| < (2|x_0| + 1)\delta \leq \varepsilon. \tag{3.1.4}$$

Άρα, η g είναι συνεχής στο x_0. Παρατηρήστε όμως ότι το δ που επιλέξαμε δεν εξαρτάται μόνο από το ε που μας δόθηκε, αλλά και από το σημείο x_0 στο οποίο ελέγχουμε την συνέχεια της g. Η επιλογή που κάναμε στην (3.1.3) δείχνει ότι όσο πιο μακριά βρίσκεται το x_0 από το 0, τόσο πιο μικρό πρέπει να επιλέξουμε το δ.

Θα μπορούσε βέβαια να πει κανείς ότι ίσως υπάρχει καλύτερος τρόπος επιλογής του δ, ακόμα και ανεξάρτητος από το σημείο x_0. Ας δούμε το ίδιο πρόβλημα με έναν δεύτερο τρόπο. Θεωρούμε $x_0 > 0$ και $\varepsilon > 0$. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\varepsilon < x_0^2$, αφού τα μικρά ε είναι αυτά που παρουσιάζουν ενδιαφέρον. Μπορούμε επίσης να κοιτάμε μόνο $x > 0$, αφού μας ενδιαφέρει τι γίνεται κοντά στο x_0 το οποίο έχει υποτεθεί θετικό. Η ανισότητα $|x^2 - x_0^2| < \varepsilon$ ικανοποιείται αν και μόνο αν $x_0^2 - \varepsilon < x^2 < x_0^2 + \varepsilon$, δηλαδή αν και μόνο αν

$$\sqrt{x_0^2 - \varepsilon} < x < \sqrt{x_0^2 + \varepsilon}. \tag{3.1.5}$$

Ισοδύναμα, αν

$$-\left(x_0 - \sqrt{x_0^2 - \varepsilon}\right) < x - x_0 < \sqrt{x_0^2 + \varepsilon} - x_0. \tag{3.1.6}$$

Αυτό συμβαίνει αν και μόνο αν

$$\begin{aligned}
|x - x_0| &< \min\left\{x_0 - \sqrt{x_0^2 - \varepsilon}, \sqrt{x_0^2 + \varepsilon} - x_0\right\} \\
&= \min\left\{\frac{\varepsilon}{\sqrt{x_0^2 - \varepsilon} + x_0}, \frac{\varepsilon}{\sqrt{x_0^2 + \varepsilon} + x_0}\right\} \\
&= \frac{\varepsilon}{\sqrt{x_0^2 + \varepsilon} + x_0}.
\end{aligned}$$

Υποθέσαμε ότι $x_0^2 > \varepsilon$. Άρα,

$$\frac{\varepsilon}{\sqrt{x_0^2 + \varepsilon} + x_0} < \frac{x_0^2}{\sqrt{x_0^2 + \varepsilon} + x_0} < \frac{x_0^2}{x_0} = x_0. \tag{3.1.7}$$

Αν λοιπόν $|x - x_0| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{x_0^2+\varepsilon}+x_0}$, τότε $|x - x_0| < x_0 \Rightarrow x > 0$ και ο προηγούμενος υπολογισμός δείχνει ότι $|x^2 - x_0^2| < \varepsilon$. Δηλαδή, αν $0 < \varepsilon < x_0^2$ τότε η καλύτερη επιλογή του δ στο σημείο x_0 είναι

$$\delta = \delta(\varepsilon, x_0) = \frac{\varepsilon}{\sqrt{x_0^2 + \varepsilon} + x_0}. \tag{3.1.8}$$

Δεν μπορούμε να εξασφαλίσουμε την (3.1.2) αν επιλέξουμε μεγαλύτερο δ.

Αν τα προηγούμενα δύο επιχειρήματα δεν είναι απολύτως πειστικά, δίνουμε κι ένα τρίτο.

Ισχυρισμός. Θεωρούμε την $g(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$. Έστω $\varepsilon > 0$. **Δεν** υπάρχει $\delta > 0$ με την ιδιότητα: αν $x, y \in \mathbb{R}$ και $|y - x| < \delta$ τότε $|g(y) - g(x)| < \varepsilon$.

Παρατηρήστε ότι ο ισχυρισμός είναι ισοδύναμος με το εξής: για δοθέν $\varepsilon > 0$ δεν υπάρχει κάποια *ομοιόμορφη επιλογή* του δ που να μας επιτρέπει να ελέγχουμε την (3.1.2) σε *κάθε* $x_0 \in \mathbb{R}$.

Απόδειξη του ισχυρισμού. Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει $\delta > 0$ ώστε: αν $x, y \in \mathbb{R}$ και $|y-x| < \delta$ τότε $|g(y)-g(x)| < \varepsilon$. Αφού για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε $\left|x + \frac{\delta}{2} - x\right| = \frac{\delta}{2} < \delta$, πρέπει, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ να ισχύει η

$$\left|\left(x + \frac{\delta}{2}\right)^2 - x^2\right| < \varepsilon. \tag{3.1.9}$$

Ειδικότερα, για κάθε $x > 0$ πρέπει να ισχύει η

$$\delta x < \delta x + \frac{\delta^2}{4} = \left|\left(x + \frac{\delta}{2}\right)^2 - x^2\right| < \varepsilon. \tag{3.1.10}$$

Όμως τότε, για κάθε $x > 0$ θα είχαμε

$$x < \frac{\varepsilon}{\delta}. \tag{3.1.11}$$

Αυτό είναι άτοπο: το $\mathbb{R}$ θα ήταν άνω φραγμένο. □

Τα παραδείγματα που δώσαμε δείχνουν μια «παράλειψή» μας στον ορισμό της συνέχειας. Ένας πιο προσεκτικός ορισμός θα ήταν ο εξής:

> Η $f : A \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $x_0 \in A$ αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta(\varepsilon, x_0) > 0$ ώστε: αν $x \in A$ και $|x - x_0| < \delta$, τότε $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Ο συμβολισμός $\delta(\varepsilon, x_0)$ θα έδειχνε ότι το δ εξαρτάται τόσο από το ε όσο και από το σημείο x_0. Οι συναρτήσεις (όπως η $f(x) = x$) που μας επιτρέπουν να επιλέγουμε το δ ανεξάρτητα από το x_0 λέγονται *ομοιόμορφα συνεχείς*:

Ορισμός 3.1.1. Έστω $f : A \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση. Λέμε ότι η f είναι **ομοιόμορφα συνεχής** στο A αν για κάθε $\varepsilon > 0$ μπορούμε να βρούμε $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ ώστε

$$\textit{αν} \quad x, y \in A \quad \textit{και} \quad |x - y| < \delta \quad \textit{τότε}\ |f(x) - f(y)| < \varepsilon. \tag{3.1.12}$$

Παραδείγματα

(α) Η $f(x) = x$ είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $\mathbb{R}$.

(β) Η $g(x) = x^2$ δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $\mathbb{R}$.

(γ) Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = x^2$ του (β), περιορισμένη όμως στο κλειστό διάστημα $[-M, M]$, όπου $M > 0$. Τότε, για κάθε $x, y \in [-M, M]$ έχουμε

$$|g(y) - g(x)| = |y^2 - x^2| = |x + y| \cdot |y - x| \leq 2M \cdot |y - x|. \tag{3.1.13}$$

Δίνεται $\varepsilon > 0$. Αν επιλέξουμε $\delta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{2M}$ τότε η (3.1.13) δείχνει ότι αν $x, y \in [-M, M]$ και $|x - y| < \delta$ έχουμε

$$|g(y) - g(x)| \leq 2M \cdot |y - x| < 2M\delta = \varepsilon. \tag{3.1.14}$$

Δηλαδή, η g είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[-M, M]$.

Το παράδειγμα (γ) οδηγεί στον εξής ορισμό.

Ορισμός 3.1.2. Έστω $f : A \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση. Λέμε ότι η f είναι *Lipschitz συνεχής* αν υπάρχει $M > 0$ ώστε: για κάθε $x, y \in A$

$$|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|. \tag{3.1.15}$$

Πρόταση 3.1.3. *Κάθε Lipschitz συνεχής συνάρτηση είναι ομοιόμορφα συνεχής.*

Απόδειξη. Έστω $f : A \to \mathbb{R}$ και $M > 0$ ώστε $|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|$ για κάθε $x, y \in A$. Αν μας δώσουν $\varepsilon > 0$, επιλέγουμε $\delta = \frac{\varepsilon}{M}$. Τότε, για κάθε $x, y \in A$ με $|x - y| < \delta$ έχουμε

$$|f(x) - f(y)| \leq M|x - y| < M\delta = \varepsilon. \tag{3.1.16}$$

Έπεται ότι η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο A. □

Η επόμενη Πρόταση μας δίνει ένα χρήσιμο κριτήριο για να εξασφαλίζουμε ότι μια συνάρτηση είναι Lipschitz συνεχής (άρα, ομοιόμορφα συνεχής).

Πρόταση 3.1.4. *Έστω I ένα διάστημα και έστω $f : I \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι η f' είναι φραγμένη: υπάρχει σταθερά $M > 0$ ώστε: $|f'(x)| \leq M$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του I. Τότε, η f είναι Lipschitz συνεχής με σταθερά M.*

Απόδειξη. Έστω $x < y$ στο I. Από το θεώρημα μέσης τιμής υπάρχει $\xi \in (x, y)$ ώστε

$$f(y) - f(x) = f'(\xi)(y - x). \tag{3.1.17}$$

Τότε,

$$|f(y) - f(x)| = |f'(\xi)| \cdot |y - x| \leq M|y - x|. \tag{3.1.18}$$

Σύμφωνα με τον Ορισμό 3.1.2, η f είναι Lipschitz συνεχής με σταθερά M. □

Από τη συζήτηση που προηγήθηκε του ορισμού της ομοιόμορφης συνέχειας, είναι λογικό να περιμένουμε ότι οι ομοιόμορφα συνεχείς συναρτήσεις είναι συνεχείς. Αυτό αποδεικνύεται με απλή σύγκριση των δύο ορισμών:

Πρόταση 3.1.5. *Αν η $f : A \to \mathbb{R}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής, τότε είναι συνεχής.*

Απόδειξη. Πράγματι: έστω $x_0 \in A$ και $\varepsilon > 0$. Από τον ορισμό της ομοιόμορφης συνέχειας, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε αν $x, y \in A$ και $|x - y| < \delta$ τότε $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

Επιλέγουμε αυτό το δ. Αν $x \in A$ και $|x - x_0| < \delta$, τότε $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ (πάρτε $y = x_0$). Αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, η f είναι συνεχής στο x_0. □

3.2 Χαρακτηρισμός της ομοιόμορφης συνέχειας μέσω ακολουθιών

Θυμηθείτε τον χαρακτηρισμό της συνέχειας μέσω ακολουθιών: αν $f : A \to \mathbb{R}$, τότε η f είναι συνεχής στο $x_0 \in A$ αν και μόνο αν για κάθε ακολουθία (x_n) με $x_n \in A$ και $x_n \to x_0$, ισχύει $f(x_n) \to f(x_0)$.

Ο αντίστοιχος χαρακτηρισμός της ομοιόμορφης συνέχειας έχει ως εξής:

Θεώρημα 3.2.1. *Έστω $f : A \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση. Η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο A αν και μόνο αν για κάθε ζευγάρι ακολουθιών (x_n), (y_n) στο A με $x_n - y_n \to 0$ ισχύει*

$$f(x_n) - f(y_n) \to 0. \tag{3.2.1}$$

Απόδειξη. Υποθέτουμε πρώτα ότι η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο A. Έστω (x_n), (y_n) δύο ακολουθίες στο A με $x_n - y_n \to 0$. Θα δείξουμε ότι $f(x_n) - f(y_n) \to 0$:

Έστω $\varepsilon > 0$. Από τον ορισμό της ομοιόμορφης συνέχειας, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε

$$\text{(3.2.2)} \qquad \text{αν } x, y \in A \text{ και } |x - y| < \delta \quad \text{τότε} \quad |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Αφού $x_n - y_n \to 0$, υπάρχει $n_0(\delta) \in \mathbb{N}$ ώστε: αν $n \geq n_0$ τότε $|x_n - y_n| < \delta$. Έστω $n \geq n_0$. Τότε, $|x_n - y_n| < \delta$ και $x_n, y_n \in A$, οπότε η (3.2.2) δίνει

$$\text{(3.2.3)} \qquad |f(x_n) - f(y_n)| < \varepsilon.$$

Αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, συμπεραίνουμε ότι $f(x_n) - f(y_n) \to 0$.

Αντίστροφα: ας υποθέσουμε ότι

$$\text{(3.2.4)} \qquad \text{αν } x_n, y_n \in A \text{ και } x_n - y_n \to 0 \quad \text{τότε} \quad f(x_n) - f(y_n) \to 0.$$

Θα δείξουμε ότι η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο A. Έστω ότι δεν είναι. Τότε, υπάρχει $\varepsilon > 0$ με την εξής ιδιότητα:

> Για κάθε $\delta > 0$ υπάρχουν $x_\delta, y_\delta \in A$ με $|x_\delta - y_\delta| < \delta$ αλλά $|f(x_\delta) - f(y_\delta)| \geq \varepsilon$.

Επιλέγοντας διαδοχικά $\delta = 1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$, βρίσκουμε ζευγάρια $x_n, y_n \in A$ ώστε

$$\text{(3.2.5)} \qquad |x_n - y_n| < \frac{1}{n} \quad \text{αλλά} \quad |f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon.$$

Θεωρούμε τις ακολουθίες (x_n), (y_n). Από την κατασκευή έχουμε $x_n - y_n \to 0$, αλλά από την $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ βλέπουμε ότι δεν μπορεί να ισχύει η $f(x_n) - f(y_n) \to 0$ (εξηγήστε γιατί). Αυτό είναι άτοπο, άρα η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο A. □

Παραδείγματα

(α) Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x}$ στο $(0, 1]$. Η f είναι συνεχής αλλά *δεν* είναι ομοιόμορφα συνεχής. Για να το δούμε, αρκεί να βρούμε δύο ακολουθίες (x_n), (y_n) στο $(0, 1]$ που να ικανοποιούν την $x_n - y_n \to 0$ αλλά να μην ικανοποιούν την $\frac{1}{x_n} - \frac{1}{y_n} \to 0$.

Παίρνουμε $x_n = \frac{1}{n}$ και $y_n = \frac{1}{2n}$. Τότε, $x_n, y_n \in (0, 1]$ και

$$\text{(3.2.6)} \qquad x_n - y_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n} = \frac{1}{2n} \to 0$$

αλλά

$$\text{(3.2.7)} \qquad f(x_n) - f(y_n) = \frac{1}{x_n} - \frac{1}{y_n} = n - 2n = -n \to -\infty.$$

(β) Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = x^2$ στο $\mathbb{R}$. Ορίζουμε $x_n = n + \frac{1}{n}$ και $y_n = n$. Τότε,

$$\text{(3.2.8)} \qquad x_n - y_n = \frac{1}{n} \to 0$$

αλλά

$$\text{(3.2.9)} \qquad g(x_n) - g(y_n) = \left(n + \frac{1}{n}\right)^2 - n^2 = 2 + \frac{1}{n^2} \to 2 \neq 0.$$

Άρα, η g δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $\mathbb{R}$.

(γ) Ορίζουμε $f(x) = \cos(x^2)$, $x \in \mathbb{R}$. Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και $|f(x)| \leq 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Δηλαδή, η f είναι επιπλέον φραγμένη. Όμως η f *δεν* είναι ομοιόμορφα συνεχής: για να το δείτε, θεωρήστε τις ακολουθίες

$$x_n = \sqrt{(n+1)\pi} \quad \text{και} \quad y_n = \sqrt{n\pi}. \tag{3.2.10}$$

Τότε,

$$x_n - y_n = \sqrt{(n+1)\pi} - \sqrt{n\pi} = \frac{(n+1)\pi - n\pi}{\sqrt{(n+1)\pi} + \sqrt{n\pi}} = \frac{\pi}{\sqrt{(n+1)\pi} + \sqrt{n\pi}} \to 0, \tag{3.2.11}$$

αλλά

$$|f(x_n) - f(y_n)| = |\cos((n+1)\pi) - \cos(n\pi)| = 2 \tag{3.2.12}$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Από το Θεώρημα 3.2.1 έπεται το συμπέρασμα. Υπάρχουν λοιπόν φραγμένες συνεχείς συναρτήσεις που δεν είναι ομοιόμορφα συνεχείς (σχεδιάστε τη γραφική παράσταση της $\cos(x^2)$ για να δείτε το λόγο: για μεγάλα x, η f ανεβαίνει από την τιμή -1 στην τιμή 1 και κατεβαίνει από την τιμή 1 στην τιμή -1 όλο και πιο γρήγορα - ο ρυθμός μεταβολής της γίνεται πολύ μεγάλος).

3.3 Συνεχείς συναρτήσεις σε κλειστά διαστήματα

Στην παράγραφο §3.1 είδαμε ότι η συνάρτηση $g(x) = x^2$ δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $I = \mathbb{R}$ αλλά είναι ομοιόμορφα συνεχής σε κάθε διάστημα της μορφής $I = [-M, M]$, $M > 0$ (οσοδήποτε μεγάλο κι αν είναι το M). Αυτό που ισχύει γενικά είναι ότι κάθε συνεχής συνάρτηση $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής:

Θεώρημα 3.3.1. *Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Τότε, η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[a,b]$.*

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε ότι η f δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής. Τότε, όπως στην απόδειξη του Θεωρήματος 3.2.1, μπορούμε να βρούμε $\varepsilon > 0$ και δύο ακολουθίες (x_n), (y_n) στο $[a,b]$ με $x_n - y_n \to 0$ και $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Αφού $a \leq x_n, y_n \leq b$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, οι (x_n) και (y_n) είναι φραγμένες ακολουθίες. Από το Θεώρημα Bolzano–Weierstrass, υπάρχει υπακολουθία (x_{k_n}) της (x_n) η οποία συγκλίνει σε κάποιο $x \in \mathbb{R}$. Αφού $a \leq x_{k_n} \leq b$ για κάθε n, συμπεραίνουμε ότι $a \leq x \leq b$. Δηλαδή,

$$x_{k_n} \to x \in [a,b]. \tag{3.3.1}$$

Παρατηρήστε ότι $x_{k_n} - y_{k_n} \to 0$, άρα

$$y_{k_n} = x_{k_n} - (x_{k_n} - y_{k_n}) \to x - 0 = x. \tag{3.3.2}$$

Από τη συνέχεια της f στο x έπεται ότι

$$f(x_{k_n}) \to f(x) \quad \text{και} \quad f(y_{k_n}) \to f(x). \tag{3.3.3}$$

Δηλαδή,

$$f(x_{k_n}) - f(y_{k_n}) \to x - x = 0. \tag{3.3.4}$$

Αυτό είναι άτοπο, αφού $|f(x_{k_n}) - f(y_{k_n})| \geq \varepsilon$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Άρα, η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[a, b]$. □

Παρατήρηση. Το γεγονός ότι η f ήταν ορισμένη στο **κλειστό διάστημα** $[a, b]$ χρησιμοποιήθηκε με δύο τρόπους. Πρώτον, μπορέσαμε να βρούμε συγκλίνουσες υπακολουθίες των (x_n), (y_n) (θεώρημα Bolzano–Weierstrass). Δεύτερον, μπορούσαμε να πούμε ότι το κοινό όριο x αυτών των υπακολουθιών εξακολουθεί να βρίσκεται στο πεδίο ορισμού $[a, b]$ της f. Χρησιμοποιήσαμε δηλαδή το εξής:

$$\text{αν } a \leq z_n \leq b \text{ και } z_n \to z, \text{ τότε } a \leq z \leq b. \tag{3.3.5}$$

Το επόμενο θεώρημα αποδεικνύει ότι οι ομοιόμορφα συνεχείς συναρτήσεις έχουν την εξής «καλή ιδιότητα»: απεικονίζουν ακολουθίες Cauchy σε ακολουθίες Cauchy. Αυτό δεν ισχύει για όλες τις συνεχείς συναρτήσεις: θεωρήστε την $f(x) = \frac{1}{x}$ στο $(0, 1]$. Η $x_n = \frac{1}{n}$ είναι ακολουθία Cauchy στο $(0, 1]$, όμως η $f(x_n) = n$ δεν είναι ακολουθία Cauchy.

Θεώρημα 3.3.2. *Έστω $f : A \to \mathbb{R}$ ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση και έστω (x_n) ακολουθία Cauchy στο A. Τότε, η $(f(x_n))$ είναι ακολουθία Cauchy.*

Απόδειξη. Έστω $\varepsilon > 0$. Υπάρχει $\delta > 0$ ώστε: αν $x, y \in A$ και $|x - y| < \delta$ τότε $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Η (x_n) είναι ακολουθία Cauchy, άρα υπάρχει $n_0(\delta)$ ώστε

$$\text{αν } m, n \geq n_0(\delta), \quad \text{τότε} \quad |x_n - x_m| < \delta. \tag{3.3.6}$$

Όμως τότε,

$$|f(x_n) - f(x_m)| < \varepsilon. \tag{3.3.7}$$

Βρήκαμε $n_0 \in \mathbb{N}$ με την ιδιότητα

$$\text{αν } m, n \geq n_0(\delta) \quad \text{τότε} \quad |f(x_n) - f(x_m)| < \varepsilon. \tag{3.3.8}$$

Αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, η $(f(x_n))$ είναι ακολουθία Cauchy. □

Είδαμε ότι κάθε συνεχής συνάρτηση f ορισμένη σε κλειστό διάστημα είναι ομοιόμορφα συνεχής. Θα εξετάσουμε το εξής ερώτημα: Έστω $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Πώς μπορούμε να ελέγξουμε αν η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο (a, b);

Θεώρημα 3.3.3. *Έστω $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο (a, b) αν και μόνο αν υπάρχουν τα $\lim_{x \to a^+} f(x)$ και $\lim_{x \to b^-} f(x)$.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε πρώτα ότι υπάρχουν τα $\lim_{x \to a^+} f(x)$ και $\lim_{x \to b^-} f(x)$. Ορίζουμε μια «επέκταση» g της f στο $[a, b]$, θέτοντας: $g(a) = \lim_{x \to a^+} f(x)$, $g(b) = \lim_{x \to b^-} f(x)$ και $g(x) = f(x)$ αν $x \in (a, b)$.

Η g είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[a, b]$ (εξηγήστε γιατί), άρα ομοιόμορφα συνεχής. Θα δείξουμε ότι η f είναι κι αυτή ομοιόμορφα συνεχής στο (a, b). Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού η g είναι ομοιόμορφα συνεχής, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε: αν $x, y \in [a, b]$ και $|x - y| < \delta$ τότε $|g(x) - g(y)| < \varepsilon$.

Θεωρούμε $x, y \in (a, b)$ με $|x - y| < \delta$. Τότε, από τον ορισμό της g έχουμε

$$|f(x) - f(y)| = |g(x) - g(y)| < \varepsilon. \tag{3.3.9}$$

Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο (a,b) και δείχνουμε ότι υπάρχει το $\lim_{x\to a^+} f(x)$ (η ύπαρξη του άλλου πλευρικού ορίου αποδεικνύεται με τον ίδιο τρόπο).

Θα δείξουμε ότι αν (x_n) είναι ακολουθία στο (a,b) με $x_n \to a$, τότε η $(f(x_n))$ συγκλίνει. Αυτό είναι άμεσο από το Θεώρημα 3.3.2: η (x_n) συγκλίνει, άρα η (x_n) είναι ακολουθία Cauchy, άρα η $(f(x_n))$ είναι ακολουθία Cauchy, άρα η $(f(x_n))$ συγκλίνει σε κάποιον πραγματικό αριθμό ℓ.

Επίσης, το όριο της $(f(x_n))$ είναι ανεξάρτητο από την επιλογή της (x_n): έστω (y_n) μια άλλη ακολουθία στο (a,b) με $y_n \to a$. Τότε, $x_n - y_n \to 0$. Από το Θεώρημα 3.2.1,

$$f(x_n) - f(y_n) \to 0. \tag{3.3.10}$$

Ξέρουμε ήδη ότι $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \ell$, άρα

$$f(y_n) = f(x_n) - (f(x_n) - f(y_n)) \to \ell + 0 = \ell. \tag{3.3.11}$$

Από την αρχή της μεταφοράς (για το όριο συνάρτησης) έπεται ότι $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \ell$. $\square$

Παραδείγματα

(α) Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x}$ στο $[0,1]$. Η f είναι συνεχής στο $[0,1]$, επομένως είναι ομοιόμορφα συνεχής. Όμως, η f δεν είναι Lipschitz συνεχής στο $[0,1]$.

Αν ήταν, θα υπήρχε $M > 0$ ώστε

$$|f(x) - f(y)| \leq M|x-y| \tag{3.3.12}$$

για κάθε $x, y \in [0,1]$. Ειδικότερα, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ θα είχαμε

$$\left| f\left(\frac{1}{n^2}\right) - f(0) \right| = \frac{1}{n} = n \cdot \left| \frac{1}{n^2} - 0 \right| \leq M \cdot \left| \frac{1}{n^2} - 0 \right|. \tag{3.3.13}$$

Δηλαδή, $n \leq M$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αυτό είναι άτοπο: το $\mathbb{N}$ θα ήταν άνω φραγμένο.

(β) Η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x}$ είναι Lipschitz συνεχής στο $[1,+\infty)$, άρα ομοιόμορφα συνεχής. Πράγματι, αν $x \geq 1$ τότε

$$|f'(x)| = \frac{1}{2\sqrt{x}} \leq \frac{1}{2}, \tag{3.3.14}$$

δηλαδή η f έχει φραγμένη παράγωγο στο $[1,+\infty)$. Από την Πρόταση 3.1.4 είναι Lipschitz συνεχής με σταθερά $1/2$.

(γ) Ας δούμε τώρα την ίδια συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x}$ στο $[0,+\infty)$. Η f δεν είναι Lipschitz συνεχής στο $[0,+\infty)$ ούτε μπορούμε να εφαρμόσουμε το Θεώρημα 3.3.1. Είδαμε όμως ότι η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[0,1]$ και ομοιόμορφα συνεχής στο $[1,+\infty)$. Αυτό φτάνει για να δείξουμε ότι είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[0,+\infty)$:

Έστω $\varepsilon > 0$. Υπάρχει $\delta_1 > 0$ ώστε: αν $x, y \in [0,1]$ και $|x-y| < \delta_1$ τότε $|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2}$ (από την ομοιόμορφη συνέχεια της f στο $[0,1]$).

Επίσης, υπάρχει $\delta_2 > 0$ ώστε: αν $x, y \in [1,+\infty)$ και $|x-y| < \delta_2$ τότε $|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2}$ (από την ομοιόμορφη συνέχεια της f στο $[1,+\infty)$).

Θέτουμε $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\} > 0$. Έστω $x < y \in [0,+\infty)$ με $|x-y| < \delta$. Διακρίνουμε τρείς περιπτώσεις:

(i) Αν $0 \leq x < y \leq 1$ και $|x-y| < \delta$, τότε $|x-y| < \delta_1$ άρα $|f(x)-f(y)| < \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$.

(ii) Αν $1 \leq x < y$ και $|x-y| < \delta$, τότε $|x-y| < \delta_2$ άρα $|f(x)-f(y)| < \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$.

(iii) Αν $x < 1 < y$ και $|x-y| < \delta$, παρατηρούμε ότι $|x-1| < \delta$ και $|1-y| < \delta$. Όμως, $x, 1 \in [0,1]$ και $1, y \in [1, +\infty)$. Μπορούμε λοιπόν να γράψουμε

$$|f(x)-f(y)| \leq |f(x)-f(1)| + |f(1)-f(y)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

3.4 Συστολές – θεώρημα σταθερού σημείου

Ορισμός 3.4.1. Μια συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ λέγεται *συστολή* αν υπάρχει $0 < M < 1$ ώστε: για κάθε $x, y \in A$

$$|f(x)-f(y)| \leq M|x-y|. \tag{3.4.1}$$

Προφανώς, κάθε συστολή είναι Lipschitz συνεχής.

Θεώρημα 3.4.2 (θεώρημα σταθερού σημείου)**.** *Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συστολή. Υπάρχει μοναδικό $y \in \mathbb{R}$ με την ιδιότητα*

$$f(y) = y. \tag{3.4.2}$$

Απόδειξη. Από την υπόθεση υπάρχει $0 < M < 1$ ώστε $|f(x)-f(y)| \leq M|x-y|$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$. Η f είναι Lipschitz συνεχής, άρα ομοιόμορφα συνεχής. Επιλέγουμε τυχόν $x_1 \in \mathbb{R}$. Ορίζουμε μια ακολουθία (x_n) μέσω της

$$x_{n+1} = f(x_n), \quad n \in \mathbb{N}. \tag{3.4.3}$$

Τότε,

$$|x_{n+1}-x_n| = |f(x_n)-f(x_{n-1})| \leq M|x_n - x_{n-1}| \tag{3.4.4}$$

για κάθε $n \geq 2$. Επαγωγικά αποδεικνύουμε ότι

$$|x_{n+1}-x_n| \leq M^{n-1}|x_2 - x_1| \tag{3.4.5}$$

για κάθε $n \geq 2$. Έπεται ότι αν $n > m$ στο $\mathbb{N}$, τότε

$$\begin{aligned} |x_n - x_m| &\leq |x_n - x_{n-1}| + \cdots + |x_{m+1} - x_m| \\ &\leq (M^{n-2} + \cdots + M^{m-1})|x_2 - x_1| \\ &= \frac{1-M^{n-m}}{1-M} M^{m-1}|x_2 - x_1| \\ &\leq \frac{M^{m-1}}{1-M}|x_2 - x_1|. \end{aligned}$$

Αφού $0 < M < 1$, έχουμε $M^m \to 0$. Άρα, για δοθέν $\varepsilon > 0$ μπορούμε να βρούμε $n_0(\varepsilon)$ ώστε: αν $n > m \geq n_0$ τότε $\frac{M^{m-1}}{1-M}|x_2 - x_1| < \varepsilon$, και συνεπώς, $|x_n - x_m| < \varepsilon$.

Επομένως, η (x_n) είναι ακολουθία Cauchy και αυτό σημαίνει ότι συγκλίνει: υπάρχει $y \in \mathbb{R}$ ώστε $x_n \to y$. Θα δείξουμε ότι $f(y) = y$: από την $x_n \to y$ και τη συνέχεια της f στο y βλέπουμε ότι $f(x_n) \to f(y)$. Όμως $x_{n+1} = f(x_n)$ και $x_{n+1} \to y$, άρα $f(x_n) \to y$. Από τη μοναδικότητα του ορίου ακολουθίας προκύπτει η $f(y) = y$.

Το y είναι το μοναδικό σταθερό σημείο της f. Έστω $z \neq y$ με $f(z) = z$. Τότε,

$$0 < |z-y| = |f(z)-f(y)| \leq M|z-y|, \tag{3.4.6}$$

δηλαδή $1 \leq M$, το οποίο είναι άτοπο. □

3.5 Ασκήσεις

Ομάδα Α΄

1. Δείξτε το θεώρημα μέγιστης και ελάχιστης τιμής για μια συνεχή συνάρτηση $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ χρησιμοποιώντας το θεώρημα Bolzano–Weierstrass:

(α) Δείξτε πρώτα ότι υπάρχει $M > 0$ ώστε $|f(x)| \leq M$ για κάθε $x \in [a,b]$, με απαγωγή σε άτοπο. Αν αυτό δεν ισχύει, μπορούμε να βρούμε $x_n \in [a,b]$ ώστε $|f(x_n)| > n$, $n = 1, 2, \ldots$. Η (x_n) έχει υπακολουθία (x_{k_n}) ώστε $x_{k_n} \to x_0 \in [a,b]$. Χρησιμοποιήστε την αρχή της μεταφοράς (η f είναι συνεχής στο x_0) για να καταλήξετε σε άτοπο.

(β) Από το (α) έχουμε $M := \sup\{f(x) : x \in [a,b]\} < \infty$. Τότε, μπορούμε να βρούμε $x_n \in [a,b]$ ώστε $f(x_n) \to M$ (εξηγήστε γιατί). Η (x_n) έχει υπακολουθία (x_{k_n}) ώστε $x_{k_n} \to x_0 \in [a,b]$. Χρησιμοποιήστε την αρχή της μεταφοράς (η f είναι συνεχής στο x_0) για να συμπεράνετε ότι $f(x_0) = M$. Αυτό αποδεικνύει ότι η f παίρνει μέγιστη τιμή (στο x_0).

(γ) Εργαζόμενοι όμοια, δείξτε ότι η f παίρνει ελάχιστη τιμή.

2. Έστω $X \subseteq R$. Λέμε ότι μια συνάρτηση $f : X \to \mathbb{R}$ ικανοποιεί συνθήκη Lipschitz αν υπάρχει $M \geq 0$ ώστε: για κάθε $x, y \in X$,

$$|f(x) - f(y)| \leq M \cdot |x - y|.$$

Δείξτε ότι αν η $f : X \to \mathbb{R}$ ικανοποιεί συνθήκη Lipschitz τότε είναι ομοιόμορφα συνεχής. Ισχύει το αντίστροφο;

3. Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής, παραγωγίσιμη στο (a,b). Δείξτε ότι η f ικανοποιεί συνθήκη Lipschitz αν και μόνο αν η f' είναι φραγμένη.

4. Έστω $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ και $f(x) = x^{1/n}$, $x \in [0,1]$. Δείξτε ότι η συνάρτηση f δεν ικανοποιεί συνθήκη Lipschitz. Είναι ομοιόμορφα συνεχής;

5. Εξετάστε αν οι παρακάτω συναρτήσεις ικανοποιούν συνθήκη Lipschitz:

(α) $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ με $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$ αν $x \neq 0$ και $f(0) = 0$.

(β) $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ με $g(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$ αν $x \neq 0$ και $g(0) = 0$.

6. Έστω $f : [a,b] \to [m,M]$ και $g : [m,M] \to \mathbb{R}$ ομοιόμορφα συνεχείς συναρτήσεις. Δείξτε ότι η $g \circ f$ είναι ομοιόμορφα συνεχής.

7. Έστω $f, g : I \to \mathbb{R}$ ομοιόμορφα συνεχείς συναρτήσεις. Δείξτε ότι

(α) η $f + g$ είναι ομοιόμορφα συνεχής στο I.

(β) η $f \cdot g$ δεν είναι αναγκαστικά ομοιόμορφα συνεχής στο I, αν όμως οι f, g υποτεθούν και φραγμένες τότε η $f \cdot g$ είναι ομοιόμορφα συνεχής στο I.

8. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με την εξής ιδιότητα: για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $M = M(\varepsilon) > 0$ ώστε αν $|x| \geq M$ τότε $|f(x)| < \varepsilon$. Δείξτε ότι η f είναι ομοιόμορφα συνεχής.

9. Έστω $a \in \mathbb{R}$ και $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με την εξής ιδιότητα: υπάρχει το $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ και είναι πραγματικός αριθμός. Δείξτε ότι η f είναι ομοιόμορφα συνεχής.

10. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση. Δείξτε ότι υπάρχουν $A, B > 0$ ώστε $|f(x)| \leq A|x| + B$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

11. Έστω $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$. Χρησιμοποιώντας την προηγούμενη Άσκηση δείξτε ότι η συνάρτηση $f(x) = x^n$, $x \in \mathbb{R}$ δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής.

12. (α) Έστω $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι υπάρχει $a > 0$ ώστε η f να είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[a, +\infty)$. Δείξτε ότι η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[0, +\infty)$.
(β) Δείξτε ότι η $f(x) = \sqrt{x}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[0, +\infty)$.

13. Έστω $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση. Δείξτε ότι υπάρχει συνεχής συνάρτηση $\hat{f} : [a, b] \to \mathbb{R}$ ώστε $\hat{f}(x) = f(x)$ για κάθε $x \in (a, b)$.

14. Εξετάστε αν οι παρακάτω συναρτήσεις είναι ομοιόμορφα συνεχείς.

(i) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = 3x + 1$.

(ii) $f : [2, +\infty) \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \frac{1}{x}$.

(iii) $f : (0, \pi] \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \frac{1}{x} \sin^2 x$.

(iv) $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \sin \frac{1}{x}$.

(v) $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ με $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$.

(vi) $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \frac{\sin x}{x}$.

(vii) $f : (1, \infty) \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \frac{\cos(x^3)}{x}$.

(viii) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \frac{1}{x^2+4}$.

(ix) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \frac{x}{1+|x|}$.

(x) $f : [-2, 0] \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$.

(xi) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = x \sin x$.

(xii) $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \frac{\cos(x^2)}{x+1}$.

Ομάδα Β΄. Ερωτήσεις κατανόησης

Εξετάστε αν οι παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς ή ψευδείς (αιτιολογήστε πλήρως την απάντησή σας).

15. Η συνάρτηση $f(x) = x^2 + \frac{1}{x}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $(0, 1)$.

16. Η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x-1}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $(0, 1)$.

17. Αν η συνάρτηση f δεν είναι φραγμένη στο $(0, 1)$, τότε η f δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $(0, 1)$.

18. Αν η (x_n) είναι ακολουθία Cauchy και η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $\mathbb{R}$, τότε η $(f(x_n))$ είναι ακολουθία Cauchy.

19. Αν η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $(0,1)$, τότε το $\lim\limits_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{n}\right)$ υπάρχει.

20. Θεωρούμε τις $f(x) = x$ και $g(x) = \sin x$. Οι f και g είναι ομοιόμορφα συνεχείς στο $\mathbb{R}$, όμως η fg δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $\mathbb{R}$.

21. Η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = x$ αν $x > 0$ και $f(x) = 2x$ αν $x \leq 0$, είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $\mathbb{R}$.

22. Κάθε φραγμένη και συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής.

Ομάδα Γ′

23. Δείξτε ότι η συνάρτηση $f : (0,1) \cup (1,2) \to \mathbb{R}$ με $f(x) = 0$ αν $x \in (0,1)$ και $f(x) = 1$ αν $x \in (1,2)$ είναι συνεχής αλλά δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής.

24. Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση και έστω $\varepsilon > 0$. Δείξτε ότι μπορούμε να χωρίσουμε το $[a,b]$ σε πεπερασμένα το πλήθος διαδοχικά υποδιαστήματα του ιδίου μήκους έτσι ώστε: αν τα x, y ανήκουν στο ίδιο υποδιάστημα, τότε $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

25. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής, φραγμένη και μονότονη συνάρτηση. Δείξτε ότι η f είναι ομοιόμορφα συνεχής.

26. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής και περιοδική συνάρτηση. Δηλαδή, υπάρχει $T > 0$ ώστε $f(x+T) = f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι η f είναι ομοιόμορφα συνεχής.

27. Έστω $X \subset \mathbb{R}$ φραγμένο σύνολο και $f : X \to \mathbb{R}$ ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση. Δείξτε ότι η f είναι φραγμένη: υπάρχει $M > 0$ ώστε $|f(x)| \leq M$ για κάθε $x \in X$.

28. Έστω A μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Ορίζουμε $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με

$$f(x) = \inf\{|x - a| : a \in A\}$$

($f(x)$ είναι η «απόσταση» του x από το A). Δείξτε ότι

(α) $|f(x) - f(y)| \leq |x - y|$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$.

(β) η f είναι ομοιόμορφα συνεχής.

Κεφάλαιο 4

Ολοκλήρωμα Riemann

4.1 Ο ορισμός του Darboux

Σε αυτήν την παράγραφο δίνουμε τον ορισμό του ολοκληρώματος Riemann για **φραγμένες** συναρτήσεις που ορίζονται σε ένα κλειστό διάστημα. Για μια φραγμένη συνάρτηση $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ με μη αρνητικές τιμές, θα θέλαμε το ολοκλήρωμα να δίνει το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται ανάμεσα στο γράφημα της συνάρτησης, τον οριζόντιο άξονα $y = 0$ και τις κατακόρυφες ευθείες $x = a$ και $x = b$.

Ορισμός 4.1.1. (α) Έστω $[a,b]$ ένα κλειστό διάστημα. **Διαμέριση** του $[a,b]$ θα λέμε κάθε πεπερασμένο υποσύνολο

$$P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\} \tag{4.1.1}$$

του $[a,b]$ με $x_0 = a$ και $x_n = b$. Θα υποθέτουμε πάντα ότι τα $x_k \in P$ είναι διατεταγμένα ως εξής:

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_k < x_{k+1} < \cdots < x_n = b. \tag{4.1.2}$$

Θα γράφουμε

$$P = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\} \tag{4.1.3}$$

για να τονίσουμε αυτήν ακριβώς τη διάταξη. Παρατηρήστε ότι από τον ορισμό, κάθε διαμέριση P του $[a,b]$ περιέχει τουλάχιστον δύο σημεία: το a και το b (τα άκρα του $[a,b]$).

(β) Κάθε διαμέριση $P = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ χωρίζει το $[a,b]$ σε n υποδιαστήματα $[x_k, x_{k+1}]$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$. Ονομάζουμε **πλάτος** της διαμέρισης P το μεγαλύτερο από τα μήκη αυτών των υποδιαστημάτων. Δηλαδή, το πλάτος της διαμέρισης ισούται με

$$\|P\| := \max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, \ldots, x_n - x_{n-1}\}. \tag{4.1.4}$$

Παρατηρήστε ότι δεν απαιτούμε να ισαπέχουν τα x_k (τα n υποδιαστήματα δεν έχουν απαραίτητα το ίδιο μήκος).

(γ) Η διαμέριση P_1 λέγεται **εκλέπτυνση** της P αν $P \subseteq P_1$, δηλαδή αν η P_1 προκύπτει από την P με την προσθήκη κάποιων (πεπερασμένων το πλήθος) σημείων. Σε αυτήν την περίπτωση λέμε επίσης ότι η P_1 είναι *λεπτότερη* από την P.

(δ) Έστω P_1, P_2 δύο διαμερίσεις του $[a,b]$. Η **κοινή εκλέπτυνση** των P_1, P_2 είναι η διαμέριση $P = P_1 \cup P_2$. Εύκολα βλέπουμε ότι η P είναι διαμέριση του $[a,b]$ και ότι αν P' είναι μια διαμέριση λεπτότερη τόσο από την P_1 όσο και από την P_2 τότε $P' \supseteq P$ (δηλαδή, η $P = P_1 \cup P_2$ είναι η μικρότερη δυνατή διαμέριση του $[a,b]$ που εκλεπτύνει ταυτόχρονα την P_1 και την P_2).

Θεωρούμε τώρα μια **φραγμένη** συνάρτηση $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ και μια διαμέριση $P = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ του $[a,b]$. Η P διαμερίζει το $[a,b]$ στα υποδιαστήματα $[x_0, x_1]$, $[x_1, x_2], \ldots, [x_k, x_{k+1}], \ldots, [x_{n-1}, x_n]$. Για κάθε $k = 0, 1, \ldots, n-1$ ορίζουμε τους πραγματικούς αριθμούς

$$m_k(f,P) = m_k = \inf\{f(x) : x_k \leq x \leq x_{k+1}\} \tag{4.1.5}$$

και

$$M_k(f,P) = M_k = \sup\{f(x) : x_k \leq x \leq x_{k+1}\}. \tag{4.1.6}$$

Όλοι αυτοί οι αριθμοί ορίζονται καλά: η f είναι φραγμένη στο $[a,b]$, άρα είναι φραγμένη σε κάθε υποδιάστημα $[x_k, x_{k+1}]$. Για κάθε k, το σύνολο $\{f(x) : x_k \leq x \leq x_{k+1}\}$ είναι μη κενό και φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$, άρα έχει supremum και infimum.

Για κάθε διαμέριση P του $[a,b]$ ορίζουμε τώρα το άνω και το κάτω άθροισμα της f ως προς την P με τον εξής τρόπο:

$$U(f,P) = \sum_{k=0}^{n-1} M_k(x_{k+1} - x_k) \tag{4.1.7}$$

είναι το **άνω άθροισμα της f ως προς P**, και

$$L(f,P) = \sum_{k=0}^{n-1} m_k(x_{k+1} - x_k) \tag{4.1.8}$$

είναι το **κάτω άθροισμα της f ως προς P**.

Από τις (4.1.7) και (4.1.8) βλέπουμε ότι για κάθε διαμέριση P ισχύει

$$L(f,P) \leq U(f,P) \tag{4.1.9}$$

αφού $m_k \leq M_k$ και $x_{k+1} - x_k > 0$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$. Σε σχέση με το «εμβαδόν» που προσπαθούμε να ορίσουμε, πρέπει να σκεφτόμαστε το κάτω άθροισμα $L(f,P)$ σαν μια *προσέγγιση από κάτω* και το άνω άθροισμα $U(f,P)$ σαν μια *προσέγγιση από πάνω*.

Θα δείξουμε ότι ισχύει μια πολύ πιο ισχυρή ανισότητα από την (4.1.9):

Πρόταση 4.1.2. *Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ φραγμένη συνάρτηση και έστω P_1, P_2 δύο διαμερίσεις του $[a,b]$. Τότε,*

$$L(f,P_1) \leq U(f,P_2). \tag{4.1.10}$$

Παρατηρήστε ότι η (4.1.9) είναι ειδική περίπτωση της (4.1.10): αρκεί να πάρουμε $P = P_1 = P_2$ στην Πρόταση 4.1.2.

Η απόδειξη της Πρότασης 4.1.2 θα βασιστεί στο εξής Λήμμα.

Λήμμα 4.1.3. *Έστω* $P = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_k < x_{k+1} < \cdots < x_n = b\}$ *και* $x_k < y < x_{k+1}$ *για κάποιο* $k = 0, 1, \ldots, n-1$. *Αν* $P_1 = P \cup \{y\} = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_k < y < x_{k+1} < \cdots < x_n = b\}$*, τότε*

$$L(f, P) \leq L(f, P_1) \leq U(f, P_1) \leq U(f, P). \tag{4.1.11}$$

Δηλαδή, με την προσθήκη ενός σημείου y στην διαμέριση P, το άνω άθροισμα της f «μικραίνει» ενώ το κάτω άθροισμα της f «μεγαλώνει».

Απόδειξη του Λήμματος 4.1.3. Θέτουμε

$$m_k^{(1)} = \inf\{f(x) : x_k \leq x \leq y\} \tag{4.1.12}$$

και

$$m_k^{(2)} = \inf\{f(x) : y \leq x \leq x_{k+1}\}. \tag{4.1.13}$$

Τότε, $m_k \leq m_k^{(1)}$ και $m_k \leq m_k^{(2)}$ (άσκηση: αν $A \subseteq B$ τότε $\inf B \leq \inf A$). Γράφουμε

$$\begin{aligned} L(f, P_1) &= [m_0(x_1 - x_0) + \cdots + m_k^{(1)}(y - x_k) + m_k^{(2)}(x_{k+1} - y) + \cdots \\ &\quad + m_{n-1}(x_n - x_{n-1})] \\ &\geq [m_0(x_1 - x_0) + \cdots + m_k(y - x_k) + m_k(x_{k+1} - y) + \cdots \\ &\quad + m_{n-1}(x_n - x_{n-1})] \\ &= [m_0(x_1 - x_0) + \cdots + m_k(x_{k+1} - x_k) + \cdots + m_{n-1}(x_n - x_{n-1})] \\ &= L(f, P). \end{aligned}$$

Όμοια δείχνουμε ότι $U(f, P_1) \leq U(f, P)$. □

Απόδειξη της Πρότασης 4.1.2. Για να αποδείξουμε την (4.1.10) θεωρούμε την κοινή εκλέπτυνση $P = P_1 \cup P_2$ των P_1 και P_2. Η P προκύπτει από την P_1 με διαδοχική προσθήκη πεπερασμένων το πλήθος σημείων. Αν εφαρμόσουμε το Λήμμα 4.1.3 πεπερασμένες το πλήθος φορές, παίρνουμε $L(f, P_1) \leq L(f, P)$.

Όμοια βλέπουμε ότι $U(f, P) \leq U(f, P_2)$. Από την άλλη πλευρά, $L(f, P) \leq U(f, P)$. Συνδυάζοντας τα παραπάνω, έχουμε

$$L(f, P_1) \leq L(f, P) \leq U(f, P) \leq U(f, P_2). \tag{4.1.14}$$ □

Θεωρούμε τώρα τα υποσύνολα του $\mathbb{R}$

$$A(f) = \left\{ L(f, P) : P \text{ διαμέριση του } [a, b] \right\} \tag{4.1.15}$$

και

$$B(f) = \left\{ U(f, Q) : Q \text{ διαμέριση του } [a, b] \right\}. \tag{4.1.16}$$

Από την Πρόταση 4.1.2 έχουμε: για κάθε $a \in A(f)$ και κάθε $b \in B(f)$ ισχύει $a \leq b$ (εξηγήστε γιατί). Άρα, $\sup A(f) \leq \inf B(f)$ (άσκηση). Αν λοιπόν ορίσουμε σαν **κάτω ολοκλήρωμα** της f στο $[a, b]$ το

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx = \sup \left\{ L(f, P) : P \text{ διαμέριση του } [a, b] \right\} \tag{4.1.17}$$

και σαν **άνω ολοκλήρωμα** της f στο $[a,b]$ το

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx = \inf \left\{ U(f,Q) : Q \text{ διαμέριση του } [a,b] \right\}, \tag{4.1.18}$$

έχουμε

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx \leq \overline{\int_a^b} f(x)dx. \tag{4.1.19}$$

Ορισμός 4.1.4. Μια φραγμένη συνάρτηση $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ λέγεται **Riemann ολοκληρώσιμη** αν

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx = I = \overline{\int_a^b} f(x)dx. \tag{4.1.20}$$

Ο αριθμός I (η κοινή τιμή του κάτω και του άνω ολοκληρώματος της f στο $[a,b]$) λέγεται **ολοκλήρωμα Riemann** της f στο $[a,b]$ και συμβολίζεται με

$$\int_a^b f(x)dx \qquad \text{ή} \qquad \int_a^b f. \tag{4.1.21}$$

4.2 Το κριτήριο ολοκληρωσιμότητας του Riemann

Ο ορισμός του ολοκληρώματος που δώσαμε στην προηγούμενη παράγραφο είναι δύσχρηστος: δεν είναι εύκολο να τον χρησιμοποιήσει κανείς για να δει αν μια φραγμένη συνάρτηση είναι ολοκληρώσιμη ή όχι. Συνήθως, χρησιμοποιούμε το ακόλουθο κριτήριο ολοκληρωσιμότητας.

Θεώρημα 4.2.1 (κριτήριο του Riemann). *Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ φραγμένη συνάρτηση. Η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη αν και μόνο αν για κάθε $\varepsilon > 0$ μπορούμε να βρούμε διαμέριση P_ε του $[a,b]$ ώστε*

$$U(f,P_\varepsilon) - L(f,P_\varepsilon) < \varepsilon. \tag{4.2.1}$$

Απόδειξη. Υποθέτουμε πρώτα ότι η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη. Δηλαδή,

$$\int_a^b f(x)dx = \underline{\int_a^b} f(x)dx = \overline{\int_a^b} f(x)dx. \tag{4.2.2}$$

Έστω $\varepsilon > 0$. Από τον ορισμό του κάτω ολοκληρώματος ως supremum του $A(f)$ και από τον ε-χαρακτηρισμό του supremum, υπάρχει διαμέριση $P_1 = P_1(\varepsilon)$ του $[a,b]$ ώστε

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx < L(f,P_1) + \frac{\varepsilon}{2}. \tag{4.2.3}$$

Ομοίως, από τον ορισμό του άνω ολοκληρώματος, υπάρχει διαμέριση $P_2 = P_2(\varepsilon)$ του $[a,b]$ ώστε

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx > U(f,P_2) - \frac{\varepsilon}{2}. \tag{4.2.4}$$

Θεωρούμε την κοινή εκλέπτυνση $P_\varepsilon = P_1 \cup P_2$. Τότε, από την Πρόταση 4.1.2 έχουμε

$$\begin{aligned} U(f,P_\varepsilon) - \frac{\varepsilon}{2} &\leq U(f,P_2) - \frac{\varepsilon}{2} \\ &< \overline{\int_a^b} f(x)dx = \underline{\int_a^b} f(x)dx \\ &< L(f,P_1) + \frac{\varepsilon}{2} \leq L(f,P_\varepsilon) + \frac{\varepsilon}{2}, \end{aligned}$$

απ' όπου έπεται ότι

$$0 \leq U(f,P_\varepsilon) - L(f,P_\varepsilon) < \varepsilon. \tag{4.2.5}$$

Αντίστροφα: υποθέτουμε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει διαμέριση P_ε του $[a,b]$ ώστε

$$U(f,P_\varepsilon) < L(f,P_\varepsilon) + \varepsilon. \tag{4.2.6}$$

Τότε, για κάθε $\varepsilon > 0$ έχουμε

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx \leq U(f,P_\varepsilon) < L(f,P_\varepsilon) + \varepsilon \leq \underline{\int_a^b} f(x)dx + \varepsilon.$$

Επειδή το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, έπεται ότι

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx \leq \underline{\int_a^b} f(x)dx, \tag{4.2.7}$$

και αφού η αντίστροφη ανισότητα ισχύει πάντα, η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη. □

Το κριτήριο του Riemann διατυπώνεται ισοδύναμα ως εξής (εξηγήστε γιατί).

Θεώρημα 4.2.2 (κριτήριο του Riemann). *Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ φραγμένη συνάρτηση. Η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη αν και μόνο αν υπάρχει ακολουθία $\{P_n : n \in \mathbb{N}\}$ διαμερίσεων του $[a,b]$ ώστε*

$$\lim_{n\to\infty} \big(U(f,P_n) - L(f,P_n)\big) = 0. \tag{4.2.8}$$

Παραδείγματα. Θα χρησιμοποιήσουμε το κριτήριο του Riemann για να εξετάσουμε αν οι παρακάτω συναρτήσεις είναι Riemann ολοκληρώσιμες:
(α) Η συνάρτηση $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ με $f(x) = x^2$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ θεωρούμε τη διαμέριση P_n του $[0,1]$ σε n ίσα υποδιαστήματα μήκους $1/n$:

$$P_n = \left\{ 0 < \frac{1}{n} < \frac{2}{n} < \cdots < \frac{n-1}{n} < \frac{n}{n} = 1 \right\}. \tag{4.2.9}$$

Η συνάρτηση $f(x) = x^2$ είναι αύξουσα στο $[0,1]$, επομένως

$$\begin{aligned} L(f,P_n) &= f(0)\frac{1}{n} + f\left(\frac{1}{n}\right)\frac{1}{n} + \cdots + f\left(\frac{n-1}{n}\right)\frac{1}{n} \\ &= \frac{1}{n}\left(0 + \frac{1^2}{n^2} + \frac{2^2}{n^2} + \cdots + \frac{(n-1)^2}{n^2}\right) \\ &= \frac{1^2 + 2^2 + \cdots + (n-1)^2}{n^3} = \frac{(n-1)n(2n-1)}{6n^3} \\ &= \frac{2n^2 - 3n + 1}{6n^2} = \frac{1}{3} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2} \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} U(f,P_n) &= f\left(\frac{1}{n}\right)\frac{1}{n} + f\left(\frac{2}{n}\right)\frac{1}{n} + \cdots + f\left(\frac{n}{n}\right)\frac{1}{n} \\ &= \frac{1}{n}\left(\frac{1^2}{n^2} + \frac{2^2}{n^2} + \cdots + \frac{n^2}{n^2}\right) \\ &= \frac{1^2+2^2+\cdots+n^2}{n^3} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3} \\ &= \frac{2n^2+3n+1}{6n^2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2}. \end{aligned}$$

Έπεται ότι

$$U(f,P_n) - L(f,P_n) = \frac{1}{n} \to 0. \tag{4.2.10}$$

Από το Θεώρημα 4.2.2 συμπεραίνουμε ότι η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη. Μπορούμε μάλιστα να βρούμε την τιμή του ολοκληρώματος. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2} &= L(f,P_n) \\ &\leq \underline{\int_0^1} x^2 dx = \int_0^1 x^2 dx = \overline{\int_0^1} x^2 dx \\ &\leq U(f,P_n) \\ &= \frac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2}. \end{aligned}$$

Αφού

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2} \to \frac{1}{3} \quad \text{και} \quad \frac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2} \to \frac{1}{3}, \tag{4.2.11}$$

έπεται ότι

$$\frac{1}{3} \leq \int_0^1 x^2 dx \leq \frac{1}{3}. \tag{4.2.12}$$

Δηλαδή,

$$\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}. \tag{4.2.13}$$

(β) Η συνάρτηση $u : [0,1] \to \mathbb{R}$ με $u(x) = \sqrt{x}$. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε την ακολουθία διαμερίσεων του προηγούμενου παραδείγματος για να δείξετε ότι ικανοποιείται το κριτήριο του Riemann.

Στο ίδιο συμπέρασμα καταλήγουμε αν χρησιμοποιήσουμε μια διαφορετική ακολουθία διαμερίσεων. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ θεωρούμε τη διαμέριση

$$P_n = \left\{0 < \frac{1}{n^2} < \frac{2^2}{n^2} < \cdots < \frac{(n-1)^2}{n^2} < \frac{n^2}{n^2} = 1\right\}. \tag{4.2.14}$$

Η u είναι αύξουσα στο $[0,1]$, επομένως

$$L(u,P_n) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{n}\left(\frac{(k+1)^2}{n^2} - \frac{k^2}{n^2}\right) \tag{4.2.15}$$

και

$$U(u,P_n)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{k+1}{n}\left(\frac{(k+1)^2}{n^2}-\frac{k^2}{n^2}\right). \tag{4.2.16}$$

Έπεται ότι

$$\begin{aligned} U(u,P_n)-L(u,P_n) &= \sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{k+1}{n}-\frac{k}{n}\right)\left(\frac{(k+1)^2}{n^2}-\frac{k^2}{n^2}\right)\\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{(k+1)^2}{n^2}-\frac{k^2}{n^2}\right)\\ &= \frac{1}{n}\to 0. \end{aligned}$$

Από το Θεώρημα 4.2.2 συμπεραίνουμε ότι η u είναι Riemann ολοκληρώσιμη. Αφήνουμε σαν άσκηση να δείξετε ότι

$$\lim_{n\to\infty}L(u,P_n)=\lim_{n\to\infty}U(u,P_n)=\frac{2}{3}. \tag{4.2.17}$$

Η συγκεκριμένη επιλογή διαμερίσεων που κάναμε έχει το πλεονέκτημα ότι μπορείτε εύκολα να γράψετε τα $L(u,P_n)$ και $U(u,P_n)$ σε κλειστή μορφή. Από την (4.2.17) έπεται ότι

$$\int_0^1\sqrt{x}\,dx=\frac{2}{3}. \tag{4.2.18}$$

(γ) Η συνάρτηση του Dirichlet $g:[0,1]\to\mathbb{R}$ με

$$g(x)=\begin{cases}1 & \text{αν } x \text{ ρητός}\\ 0 & \text{αν } x \text{ άρρητος}\end{cases}$$

δεν είναι Riemann ολοκληρώσιμη. Έστω $P=\{0=x_0<x_1<\cdots<x_k<x_{k+1}<\cdots<x_n=1\}$ τυχούσα διαμέριση του $[0,1]$. Υπολογίζουμε το κάτω και το άνω άθροισμα της g ως προς την P. Για κάθε $k=0,1,\dots,n-1$ υπάρχουν ρητός q_k και άρρητος α_k στο (x_k,x_{k+1}). Αφού $g(q_k)=1$, $g(\alpha_k)=0$ και $0\leq g(x)\leq 1$ στο $[x_k,x_{k+1}]$, συμπεραίνουμε ότι $m_k=0$ και $M_k=1$. Συνεπώς,

$$L(g,P)=\sum_{k=0}^{n-1}m_k(x_{k+1}-x_k)=\sum_{k=0}^{n-1}0\cdot(x_{k+1}-x_k)=0 \tag{4.2.19}$$

και

$$U(g,P)=\sum_{k=0}^{n-1}M_k(x_{k+1}-x_k)=\sum_{k=0}^{n-1}1\cdot(x_{k+1}-x_k)=1. \tag{4.2.20}$$

Αφού η P ήταν τυχούσα διαμέριση του $[0,1]$, παίρνουμε

$$\underline{\int_0^1} g(x)dx=0 \qquad \text{και} \qquad \overline{\int_0^1} g(x)dx=1. \tag{4.2.21}$$

Άρα, η g δεν είναι Riemann ολοκληρώσιμη.

(δ) Η συνάρτηση $h : [0,1] \to \mathbb{R}$ με

$$h(x) = \begin{cases} x & \text{αν } x \text{ ρητός} \\ 0 & \text{αν } x \text{ άρρητος} \end{cases}$$

δεν είναι Riemann ολοκληρώσιμη. Έστω $P = \{0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_k < x_{k+1} < \cdots < x_n = 1\}$ τυχούσα διαμέριση του $[0,1]$. Για κάθε $k = 0, 1, \ldots, n-1$ υπάρχει άρρητος α_k στο (x_k, x_{k+1}). Αφού $h(\alpha_k) = 0$ και $0 \leq h(x) \leq 1$ στο $[x_k, x_{k+1}]$, συμπεραίνουμε ότι $m_k = 0$. Συνεπώς,

$$L(h,P) = 0. \tag{4.2.22}$$

Επίσης, υπάρχει ρητός $q_k > (x_k + x_{k+1})/2$ στο (x_k, x_{k+1}), άρα $M_k \geq h(q_k) > (x_k + x_{k+1})/2$. Έπεται ότι

$$\begin{aligned} U(h,P) &> \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x_k + x_{k+1}}{2}(x_{k+1} - x_k) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}(x_{k+1}^2 - x_k^2) \\ &= \frac{x_n^2 - x_0^2}{2} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Αφού

$$U(h,P) - L(h,P) > \frac{1}{2} \tag{4.2.23}$$

για κάθε διαμέριση P του $[0,1]$, το κριτήριο του Riemann δεν ικανοποιείται (πάρτε $\varepsilon = 1/3$). Άρα, η h δεν είναι Riemann ολοκληρώσιμη.

(ε) Η συνάρτηση $w : [0,1] \to \mathbb{R}$ με

$$w(x) = \begin{cases} 0 & \text{αν } x \notin \mathbb{Q} \text{ ή } x = 0 \\ \frac{1}{q} & \text{αν } x = \frac{p}{q},\ p, q \in \mathbb{N},\ \text{ΜΚΔ}(p,q) = 1 \end{cases}$$

είναι Riemann ολοκληρώσιμη. Εύκολα ελέγχουμε ότι $L(w,P) = 0$ για κάθε διαμέριση P του $[0,1]$.

Έστω $\varepsilon > 0$. Παρατηρούμε ότι το σύνολο $A = \{x \in [0,1] : w(x) \geq \varepsilon\}$ είναι πεπερασμένο. [Πράγματι, αν $w(x) \geq \varepsilon$ τότε $x = p/q$ και $w(x) = 1/q \geq \varepsilon$ δηλαδή $q \leq 1/\varepsilon$. Οι ρητοί του $[0,1]$ που γράφονται σαν ανάγωγα κλάσματα με παρονομαστή το πολύ ίσο με $[1/\varepsilon]$ είναι πεπερασμένοι το πλήθος (ένα άνω φράγμα για το πλήθος τους είναι ο αριθμός $1 + 2 + \cdots + [1/\varepsilon]$ – εξηγήστε γιατί)].

Έστω $z_1 < z_2 < \cdots < z_N$ μία αρίθμηση των στοιχείων του A. Μπορούμε να βρούμε ξένα υποδιαστήματα $[a_i, b_i]$ του $[0,1]$ που έχουν μήκη $b_i - a_i < \varepsilon/N$ και ικανοποιούν τα εξής: $a_1 > 0$, $a_i < z_i < b_i$ αν $i < N$ και $a_N < z_N \leq b_N$ (παρατηρήστε ότι αν $\varepsilon \leq 1$ τότε $z_N = 1$ οπότε πρέπει να επιλέξουμε $b_N = 1$). Αν θεωρήσουμε τη διαμέριση

$$P_\varepsilon = \{0 < a_1 < b_1 < a_2 < b_2 < \cdots < a_N < b_N \leq 1\}, \tag{4.2.24}$$

έχουμε

$$\begin{aligned} U(w,P_\varepsilon) &\le \varepsilon\cdot(a_1-0)+1\cdot(b_1-a_1)+\varepsilon\cdot(a_2-b_1)+\cdots+1\cdot(b_{N-1}-a_{N-1})\\ &\quad +\varepsilon\cdot(a_N-b_{N-1})+1\cdot(b_N-a_N)+\varepsilon\cdot(1-b_N)\\ &\le \varepsilon\cdot\Big(a_1+(a_2-b_1)+\cdots+(a_N-b_{N-1})+(1-b_N)\Big)\\ &\quad +\sum_{i=1}^{N}(b_i-a_i)\\ &< 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Για το τυχόν $\varepsilon>0$ βρήκαμε διαμέριση P_ε του $[0,1]$ με την ιδιότητα

$$U(w,P_\varepsilon)-L(w,P_\varepsilon)<2\varepsilon. \tag{4.2.25}$$

Από το Θεώρημα 4.2.1, η w είναι Riemann ολοκληρώσιμη.

4.3 Δύο κλάσεις Riemann ολοκληρώσιμων συναρτήσεων

Χρησιμοποιώντας το κριτήριο του Riemann (Θεώρημα 4.2.1) θα δείξουμε ότι οι μονότονες και οι συνεχείς συναρτήσεις $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ είναι Riemann ολοκληρώσιμες.

Θεώρημα 4.3.1. *Κάθε μονότονη συνάρτηση $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ είναι Riemann ολοκληρώσιμη.*

Απόδειξη. Χωρίς περιορισμό της γενικότητας υποθέτουμε ότι η f είναι αύξουσα. Η f είναι προφανώς φραγμένη: για κάθε $x\in[a,b]$ έχουμε

$$f(a)\le f(x)\le f(b). \tag{4.3.1}$$

Άρα, έχει νόημα να εξετάσουμε την ύπαρξη ολοκληρώματος για την f.

Έστω $\varepsilon>0$. Θα βρούμε $n\in\mathbb{N}$ αρκετά μεγάλο ώστε για τη διαμέριση

$$P_n=\left\{a,a+\frac{b-a}{n},a+\frac{2(b-a)}{n},\dots,a+\frac{n(b-a)}{n}=b\right\} \tag{4.3.2}$$

του $[a,b]$ σε n ίσα υποδιαστήματα να ισχύει

$$U(f,P_n)-L(f,P_n)<\varepsilon. \tag{4.3.3}$$

Θέτουμε

$$x_k=a+\frac{k(b-a)}{n},\qquad k=0,1,\dots,n. \tag{4.3.4}$$

Τότε, αφού η f είναι αύξουσα έχουμε

$$\begin{aligned} U(f,P_n) &= \sum_{k=0}^{n-1}M_k(x_{k+1}-x_k)=\sum_{k=0}^{n-1}f(x_{k+1})\frac{b-a}{n}\\ &= \frac{b-a}{n}\cdot\left(f(x_1)+\cdots+f(x_n)\right), \end{aligned}$$

ενώ

$$\begin{aligned} L(f,P_n) &= \sum_{k=0}^{n-1} m_k(x_{k+1}-x_k) = \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)\frac{b-a}{n} \\ &= \frac{b-a}{n}\cdot\left(f(x_0)+\cdots+f(x_{n-1})\right). \end{aligned}$$

Άρα,

$$U(f,P_n)-L(f,P_n) = \frac{[f(x_n)-f(x_0)](b-a)}{n} = \frac{[f(b)-f(a)](b-a)}{n}, \tag{4.3.5}$$

το οποίο γίνεται μικρότερο από το $\varepsilon > 0$ που μας δόθηκε, αρκεί το n να είναι αρκετά μεγάλο. Από το Θεώρημα 4.2.1, η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη. □

Θεώρημα 4.3.2. *Κάθε συνεχής συνάρτηση $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ είναι Riemann ολοκληρώσιμη.*

Απόδειξη. Έστω $\varepsilon > 0$. Η f είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[a,b]$, άρα είναι ομοιόμορφα συνεχής. Μπορούμε λοιπόν να βρούμε $\delta > 0$ με την εξής ιδιότητα:

Αν $x,y\in[a,b]$ και $|x-y|<\delta$, τότε $|f(x)-f(y)|<\frac{\varepsilon}{b-a}$.

Μπορούμε επίσης να βρούμε $n\in\mathbb{N}$ ώστε

$$\frac{b-a}{n} < \delta. \tag{4.3.6}$$

Χωρίζουμε το $[a,b]$ σε n υποδιαστήματα του ιδίου μήκους $\frac{b-a}{n}$. Θεωρούμε δηλαδή τη διαμέριση

$$P_n = \left\{a, a+\frac{b-a}{n}, a+\frac{2(b-a)}{n}, \dots, a+\frac{n(b-a)}{n} = b\right\}. \tag{4.3.7}$$

Ορίζουμε

$$x_k = a + \frac{k(b-a)}{n}, \qquad k=0,1,\dots,n. \tag{4.3.8}$$

Έστω $k=0,1,\dots,n-1$. Η f είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[x_k,x_{k+1}]$, άρα παίρνει μέγιστη και ελάχιστη τιμή σε αυτό. Υπάρχουν δηλαδή $y_k', y_k''\in[x_k,x_{k+1}]$ ώστε

$$M_k = f(y_k') \qquad \text{και} \qquad m_k = f(y_k''). \tag{4.3.9}$$

Επιπλέον, το μήκος του $[x_k,x_{k+1}]$ είναι ίσο με $\frac{b-a}{n}<\delta$, άρα

$$|y_k' - y_k''| < \delta. \tag{4.3.10}$$

Από την επιλογή του δ παίρνουμε

$$M_k - m_k = f(y_k') - f(y_k'') = |f(y_k') - f(y_k'')| < \frac{\varepsilon}{b-a}. \tag{4.3.11}$$

Έπεται ότι

$$\begin{aligned} U(f,P_n)-L(f,P_n) &= \sum_{k=0}^{n-1}(M_k-m_k)(x_{k+1}-x_k) \\ &< \sum_{k=0}^{n-1}\frac{\varepsilon}{b-a}(x_{k+1}-x_k) \\ &= \frac{\varepsilon}{b-a}(b-a)=\varepsilon. \end{aligned}$$

Από το Θεώρημα 4.2.1, η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη. □

4.4 Ιδιότητες του ολοκληρώματος Riemann

Σε αυτήν την παράγραφο αποδεικνύουμε αυστηρά μερικές από τις πιο βασικές ιδιότητες του ολοκληρώματος Riemann. Οι αποδείξεις των υπολοίπων είναι μια καλή άσκηση που θα σας βοηθήσει να εξοικειωθείτε με τις διαμερίσεις, τα άνω και κάτω αθροίσματα κλπ.

Θεώρημα 4.4.1. *Αν $f(x)=c$ για κάθε $x\in[a,b]$, τότε*

$$\int_a^b f(x)dx = c(b-a). \tag{4.4.1}$$

Απόδειξη: Έστω $P=\{a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b\}$ μια διαμέριση του $[a,b]$. Για κάθε $k=0,1,\dots,n-1$ έχουμε $m_k=M_k=c$. Άρα,

$$L(f,P)=U(f,P)=\sum_{k=0}^{n-1}c(x_{k+1}-x_k)=c(b-a). \tag{4.4.2}$$

Έπεται ότι

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx = c(b-a) = \overline{\int_a^b} f(x)dx. \tag{4.4.3}$$

Άρα,

$$\int_a^b f(x)dx = c(b-a). \tag{4.4.4}$$

□

Θεώρημα 4.4.2. *Έστω $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ ολοκληρώσιμες συναρτήσεις. Τότε, η $f+g$ είναι ολοκληρώσιμη και*

$$\int_a^b [f(x)+g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx. \tag{4.4.5}$$

Απόδειξη. Έστω $P=\{a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b\}$ διαμέριση του $[a,b]$. Για κάθε $k=0,1,\dots,n-1$ ορίζουμε

$$\begin{aligned} m_k &= \inf\{(f+g)(x): x_k\le x\le x_{k+1}\} \\ M_k &= \sup\{(f+g)(x): x_k\le x\le x_{k+1}\} \\ m_k' &= \inf\{f(x): x_k\le x\le x_{k+1}\} \\ M_k' &= \sup\{f(x): x_k\le x\le x_{k+1}\} \\ m_k'' &= \inf\{g(x): x_k\le x\le x_{k+1}\} \\ M_k'' &= \sup\{g(x): x_k\le x\le x_{k+1}\}. \end{aligned}$$

Για κάθε $x \in [x_k, x_{k+1}]$ έχουμε $m_k' + m_k'' \leq f(x) + g(x)$. Άρα,

$$m_k' + m_k'' \leq m_k. \tag{4.4.6}$$

Ομοίως, για κάθε $x \in [x_k, x_{k+1}]$ έχουμε $M_k' + M_k'' \geq f(x) + g(x)$. Άρα,

$$M_k' + M_k'' \geq M_k. \tag{4.4.7}$$

Έπεται ότι

$$L(f,P) + L(g,P) \leq L(f+g,P) \leq U(f+g,P) \leq U(f,P) + U(g,P). \tag{4.4.8}$$

Έστω $\varepsilon > 0$. Υπάρχουν διαμερίσεις P_1, P_2 του $[a,b]$ ώστε

$$U(f,P_1) - \frac{\varepsilon}{2} < \int_a^b f(x)dx < L(f,P_1) + \frac{\varepsilon}{2} \tag{4.4.9}$$

και

$$U(g,P_2) - \frac{\varepsilon}{2} < \int_a^b g(x)dx < L(g,P_2) + \frac{\varepsilon}{2}. \tag{4.4.10}$$

Αν θεωρήσουμε την κοινή τους εκλέπτυνση $P = P_1 \cup P_2$ έχουμε

$$\begin{aligned} U(f,P) + U(g,P) - \varepsilon &\leq U(f,P_1) + U(g,P_2) - \varepsilon \\ &< \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx \\ &< L(f,P_1) + L(g,P_2) + \varepsilon \\ &\leq L(f,P) + L(g,P) + \varepsilon. \end{aligned}$$

Συνδυάζοντας με την (4.4.8) βλέπουμε ότι

$$\begin{aligned} \overline{\int_a^b}(f+g)(x)dx - \varepsilon &\leq U(f+g,P) - \varepsilon \leq \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx \\ &\leq L(f+g,P) + \varepsilon \leq \underline{\int_a^b}(f+g)(x)dx + \varepsilon. \end{aligned}$$

Αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν,

$$\overline{\int_a^b}(f+g)(x)dx \leq \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx \leq \underline{\int_a^b}(f+g)(x)dx. \tag{4.4.11}$$

Όμως,

$$\underline{\int_a^b}(f+g)(x)dx \leq \overline{\int_a^b}(f+g)(x)dx. \tag{4.4.12}$$

Άρα,

$$\overline{\int_a^b}(f+g)(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx = \underline{\int_a^b}(f+g)(x)dx. \tag{4.4.13}$$

Έπεται το Θεώρημα. □

Θεώρημα 4.4.3. *Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη και έστω $t \in \mathbb{R}$. Τότε, η tf είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ και*

$$\int_a^b (tf)(x)dx = t\int_a^b f(x)dx. \tag{4.4.14}$$

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε πρώτα ότι $t > 0$. Έστω $P = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ διαμέριση του $[a,b]$. Αν για $k = 0, 1, \ldots, n-1$ ορίσουμε

$$m_k = \inf\{(tf)(x) : x_k \leq x \leq x_{k+1}\},\ M_k = \sup\{(tf)(x) : x_k \leq x \leq x_{k+1}\} \tag{4.4.15}$$

και

$$m_k' = \inf\{f(x) : x_k \leq x \leq x_{k+1}\},\ M_k' = \sup\{f(x) : x_k \leq x \leq x_{k+1}\}, \tag{4.4.16}$$

είναι φανερό ότι

$$m_k = tm_k' \ \text{ και } \ M_k = tM_k'. \tag{4.4.17}$$

Άρα,

$$L(tf,P) = tL(f,P) \ \text{ και } \ U(tf,P) = tU(f,P). \tag{4.4.18}$$

Έπεται ότι

$$\underline{\int_a^b}(tf)(x)dx = t\underline{\int_a^b} f(x)dx \ \text{ και } \ \overline{\int_a^b}(tf)(x)dx = t\overline{\int_a^b} f(x)dx. \tag{4.4.19}$$

Αφού η f είναι ολοκληρώσιμη, έχουμε

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx = \overline{\int_a^b} f(x)dx. \tag{4.4.20}$$

Έπεται ότι η tf είναι Riemann ολοκληρώσιμη, και

$$\int_a^b (tf)(x)dx = t\int_a^b f(x)dx. \tag{4.4.21}$$

Αν $t < 0$, η μόνη αλλαγή στο προηγούμενο επιχείρημα είναι ότι τώρα $m_k = tM_k'$ και $M_k = tm_k'$. Συμπληρώστε την απόδειξη μόνοι σας.

Τέλος, αν $t = 0$ έχουμε $tf \equiv 0$. Άρα,

$$\int_a^b tf = 0 = 0 \cdot \int_a^b f. \tag{4.4.22}$$ □

Από τα Θεωρήματα 4.4.2 και 4.4.3 προκύπτει άμεσα η «γραμμικότητα του ολοκληρώματος».

Θεώρημα 4.4.4 (γραμμικότητα του ολοκληρώματος)**.** *Αν $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι δύο ολοκληρώσιμες συναρτήσεις και $t, s \in \mathbb{R}$, τότε η $tf + sg$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ και*

$$\int_a^b (tf+sg)(x)dx = t\int_a^b f(x)dx + s\int_a^b g(x)dx. \tag{4.4.23}$$ □

Θεώρημα 4.4.5. *Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ φραγμένη συνάρτηση και έστω $c \in (a,b)$. Η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ αν και μόνο αν είναι ολοκληρώσιμη στα $[a,c]$ και $[c,b]$. Τότε, ισχύει*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx. \tag{4.4.24}$$

Απόδειξη. Υποθέτουμε πρώτα ότι η f είναι ολοκληρώσιμη στα $[a,c]$ και $[c,b]$. Έστω $\varepsilon > 0$. Υπάρχουν διαμερίσεις P_1 του $[a,c]$ και P_2 του $[c,b]$ ώστε

$$L(f,P_1) \leq \int_a^c f(x)dx \leq U(f,P_1) \ \text{ και } \ U(f,P_1) - L(f,P_1) < \frac{\varepsilon}{2} \tag{4.4.25}$$

και

$$L(f,P_2) \leq \int_c^b f(x)dx \leq U(f,P_2) \ \text{ και } \ U(f,P_2) - L(f,P_2) < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{4.4.26}$$

Το σύνολο $P_\varepsilon = P_1 \cup P_2$ είναι διαμέριση του $[a,b]$ και ισχύουν οι

$$L(f,P_\varepsilon) = L(f,P_1) + L(f,P_2) \text{ και } U(f,P_\varepsilon) = U(f,P_1) + U(f,P_2). \tag{4.4.27}$$

Από τις παραπάνω σχέσεις παίρνουμε

$$\begin{aligned} U(f,P_\varepsilon) - L(f,P_\varepsilon) &= (U(f,P_1) - L(f,P_1)) + (U(f,P_2) - L(f,P_2)) \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ (κριτήριο του Riemann). Επιπλέον, για την P_ε έχουμε

$$L(f,P_\varepsilon) \leq \int_a^b f(x)dx \leq U(f,P_\varepsilon) \tag{4.4.28}$$

και, από τις (4.4.25), (4.4.26) και (4.4.27),

$$L(f,P_\varepsilon) \leq \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \leq U(f,P_\varepsilon). \tag{4.4.29}$$

Επομένως,

$$\left| \int_a^b f(x)dx - \left(\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \right) \right| \leq U(f,P_\varepsilon) - L(f,P_\varepsilon) < \varepsilon, \tag{4.4.30}$$

και αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν,

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx. \tag{4.4.31}$$

Αντίστροφα: υποθέτουμε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ και θεωρούμε $\varepsilon > 0$. Υπάρχει διαμέριση P του $[a,b]$ ώστε

$$U(f,P) - L(f,P) < \varepsilon. \tag{4.4.32}$$

Αν $c \notin P$ θέτουμε $P' = P \cup \{c\}$, οπότε πάλι έχουμε

$$U(f,P') - L(f,P') \leq U(f,P) - L(f,P) < \varepsilon. \tag{4.4.33}$$

Μπορούμε λοιπόν να υποθέσουμε ότι $c \in P$. Ορίζουμε $P_1 = P \cap [a,c]$ και $P_2 = P \cap [c,b]$. Οι P_1, P_2 είναι διαμερίσεις των $[a,c]$ και $[c,b]$ αντίστοιχα, και

$$L(f,P) = L(f,P_1) + L(f,P_2)\ ,\ U(f,P) = U(f,P_1) + U(f,P_2). \tag{4.4.34}$$

Αφού

$$(U(f,P_1) - L(f,P_1)) + (U(f,P_2) - L(f,P_2)) = U(f,P) - L(f,P) < \varepsilon, \tag{4.4.35}$$

έπεται ότι

$$U(f,P_1) - L(f,P_1) < \varepsilon \ \text{ και } U(f,P_2) - L(f,P_2) < \varepsilon. \tag{4.4.36}$$

Αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, το κριτήριο του Riemann δείχνει ότι η f είναι ολοκληρώσιμη στα $[a,c]$ και $[c,b]$. Τώρα, από το πρώτο μέρος της απόδειξης παίρνουμε την ισότητα

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx. \quad \square \tag{4.4.37}$$

Θεώρημα 4.4.6. *Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι $m \leq f(x) \leq M$ για κάθε $x \in [a,b]$. Τότε,*

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a). \tag{4.4.38}$$

Σημείωση. Ο αριθμός

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \tag{4.4.39}$$

είναι η **μέση τιμή** της f στο $[a,b]$.

Απόδειξη. Αρκεί να διαπιστώσετε ότι για κάθε διαμέριση P του $[a,b]$ ισχύει

$$m(b-a) \leq L(f,P) \leq U(f,P) \leq M(b-a) \tag{4.4.40}$$

(το οποίο είναι πολύ εύκολο). $\square$

Πόρισμα 4.4.7. (α) *Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [a,b]$. Τότε,*

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0. \tag{4.4.41}$$

(β) *Έστω $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμες συναρτήσεις. Υποθέτουμε ότι $f(x) \geq g(x)$ για κάθε $x \in [a,b]$. Τότε,*

$$\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx. \tag{4.4.42}$$

Απόδειξη. (α) Εφαρμόζουμε το Θεώρημα 4.4.6: μπορούμε να πάρουμε $m = 0$.

(β) Η $f - g$ είναι ολοκληρώσιμη συνάρτηση και $(f-g)(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [a,b]$. Εφαρμόζουμε το (α) για την $f - g$ και χρησιμοποιούμε τη γραμμικότητα του ολοκληρώματος. $\square$

Θεώρημα 4.4.8. *Έστω $f : [a,b] \to [m,M]$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση και έστω $\phi : [m,M] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Τότε, η $\phi \circ f : [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμη.*

Απόδειξη. Έστω $\varepsilon > 0$. Θα βρούμε διαμέριση P του $[a,b]$ με την ιδιότητα $U(\phi \circ f, P) - L(\phi \circ f, P) < \varepsilon$. Το ζητούμενο έπεται από το κριτήριο του Riemann.

Η ϕ είναι συνεχής στο $[m,M]$, άρα είναι φραγμένη: υπάρχει $A > 0$ ώστε $|\phi(\xi)| \leq A$ για κάθε $\xi \in [m,M]$. Επίσης, η ϕ είναι ομοιόμορφα συνεχής: αν θέσουμε $\varepsilon_1 = \varepsilon/(2A + b - a) > 0$, υπάρχει $0 < \delta < \varepsilon_1$ ώστε, για κάθε $\xi, \eta \in [m,M]$ με $|\xi - \eta| < \delta$ ισχύει $|\phi(\xi) - \phi(\eta)| < \varepsilon_1$.

Εφαρμόζοντας το κριτήριο του Riemann για την ολοκληρώσιμη συνάρτηση f, βρίσκουμε διαμεριση $P = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_k < x_{k+1} < \cdots < x_n = b\}$ ώστε

$$U(f,P) - L(f,P) = \sum_{k=0}^{n-1} (M_k(f) - m_k(f))(x_{k+1} - x_k) < \delta^2. \tag{4.4.43}$$

Ορίζουμε

$$\begin{aligned} I &= \{0 \leq k \leq n-1 : M_k(f) - m_k(f) < \delta\} \\ J &= \{0 \leq k \leq n-1 : M_k(f) - m_k(f) \geq \delta\}. \end{aligned}$$

Παρατηρούμε τα εξής:

(i) Αν $k \in I$, τότε για κάθε $x, x' \in [x_k, x_{k+1}]$ έχουμε $|f(x) - f(x')| \leq M_k(f) - m_k(f) < \delta$. Παίρνοντας $\xi = f(x)$ και $\eta = f(x')$, έχουμε $\xi, \eta \in [m,M]$ και $|\xi - \eta| < \delta$. Άρα,

$$|(\phi \circ f)(x) - (\phi \circ f)(x')| = |\phi(\xi) - \phi(\eta)| < \varepsilon_1.$$

Αφού τα x, x' ήταν τυχόντα στο $[x_k, x_{k+1}]$, συμπεραίνουμε ότι $M_k(\phi \circ f) - m_k(\phi \circ f) \leq \varepsilon_1$ (εξηγήστε γιατί). Έπεται ότι

$$\sum_{k \in I} (M_k(\phi \circ f) - m_k(\phi \circ f))(x_{k+1} - x_k) \leq \varepsilon \sum_{k \in I} (x_{k+1} - x_k) \leq (b-a)\varepsilon_1. \tag{4.4.44}$$

(ii) Για το J έχουμε, από την (4.4.43),

$$\delta \sum_{k \in J} (x_{k+1} - x_k) \leq \sum_{k \in J} (M_k(f) - m_k(f))(x_{k+1} - x_k) < \delta^2, \tag{4.4.45}$$

άρα

$$\sum_{k \in J} (x_{k+1} - x_k) < \delta < \varepsilon_1. \tag{4.4.46}$$

Επίσης,

$$|(\phi \circ f)(x) - (\phi \circ f)(x')| \leq |(\phi \circ f)(x)| + |(\phi \circ f)(x')| \leq 2A \tag{4.4.47}$$

για κάθε $x, x' \in [x_k, x_{k+1}]$, άρα $M_k(\phi \circ f) - m_k(\phi \circ f) \leq 2A$ για κάθε $k \in J$. Έπεται ότι

$$\sum_{k \in J} (M_k(\phi \circ f) - m_k(\phi \circ f))(x_{k+1} - x_k) \leq 2A \sum_{k \in J} (x_{k+1} - x_k) < 2A\varepsilon_1. \tag{4.4.48}$$

Από τις (4.4.44) και (4.4.48) συμπεραίνουμε ότι

$$\begin{aligned} U(\phi \circ f, P) - L(\phi \circ f, P) &= \sum_{k=0}^{n-1} (M_k(\phi \circ f) - m_k(\phi \circ f))(x_{k+1} - x_k) \\ &= \sum_{k \in I} (M_k(\phi \circ f) - m_k(\phi \circ f))(x_{k+1} - x_k) \\ &\quad + \sum_{k \in J} (M_k(\phi \circ f) - m_k(\phi \circ f))(x_{k+1} - x_k) \\ &< (b-a)\varepsilon_1 + 2A\varepsilon_1 = \varepsilon. \end{aligned}$$

Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη. □

Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 4.4.8 μπορούμε να ελέγξουμε εύκολα την ολοκληρωσιμότητα διαφόρων συναρτήσεων που προκύπτουν από την σύνθεση μιας ολοκληρώσιμης συνάρτησης f με κατάλληλες συνεχείς συναρτήσεις.

Θεώρημα 4.4.9. *Έστω $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμες συναρτήσεις. Τότε,*

(α) *η $|f|$ είναι ολοκληρώσιμη και*

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|dx. \tag{4.4.49}$$

(β) *η f^2 είναι ολοκληρώσιμη.*

(γ) *η fg είναι ολοκληρώσιμη.*

Απόδειξη. Τα (α) και (β) είναι άμεσες συνέπειες του Θεωρήματος 4.4.8. Για το (γ) γράψτε

$$fg = \frac{(f+g)^2 - (f-g)^2}{4} \tag{4.4.50}$$

και χρησιμοποιήστε το (β) σε συνδυασμό με το γεγονός ότι οι $f+g$, $f-g$ είναι ολοκληρώσιμες. □

Μια σύμβαση. Ως τώρα ορίσαμε το $\int_a^b f(x)dx$ μόνο στην περίπτωση $a < b$ (δουλεύαμε στο κλειστό διάστημα $[a, b]$). Για πρακτικούς λόγους επεκτείνουμε τον ορισμό και στην περίπτωση $a \geq b$ ως εξής:

(α) αν $a = b$, θέτουμε $\int_a^a f = 0$ (για κάθε f).

(β) αν $a > b$ και η $f : [b, a] \to \mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμη, ορίζουμε

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx. \tag{4.4.51}$$

4.5 Ο ορισμός του Riemann*

Ο ορισμός που δώσαμε για την ολοκληρωσιμότητα μιας φραγμένης συνάρτησης $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ οφείλεται στον Darboux. Ο πρώτος αυστηρός ορισμός της ολοκληρωσιμότητας δόθηκε από τον Riemann και είναι ο εξής:

Ορισμός 4.5.1. Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ φραγμένη συνάρτηση. Λέμε ότι η f είναι **ολοκληρώσιμη** στο $[a,b]$ αν υπάρχει ένας πραγματικός αριθμός $I(f)$ με την εξής ιδιότητα:

> Για κάθε $\varepsilon > 0$ μπορούμε να βρούμε $\delta > 0$ ώστε: αν $P = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ είναι διαμέριση του $[a,b]$ με πλάτος $\|P\| < \delta$ και αν $\xi_k \in [x_k, x_{k+1}]$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$ είναι τυχούσα επιλογή σημείων από τα υποδιαστήματα που ορίζει η P, τότε
>
> $$\left| \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)(x_{k+1} - x_k) - I(f) \right| < \varepsilon.$$

Σε αυτή την περίπτωση λέμε ότι ο $I(f)$ είναι το (R)-ολοκλήρωμα της f στο $[a,b]$.

Συμβολισμός. Συνήθως γράφουμε Ξ για την επιλογή σημείων $\{\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_{n-1}\}$ και $\sum(f, P, \Xi)$ για το άθροισμα

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)(x_{k+1} - x_k). \tag{4.5.1}$$

Παρατηρήστε ότι τώρα το Ξ «υπεισέρχεται» στο συμβολισμό $\sum(f, P, \Xi)$ αφού για την ίδια διαμέριση P μπορούμε να έχουμε πολλές διαφορετικές επιλογές $\Xi = \{\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_{n-1}\}$ με $\xi_k \in [x_k, x_{k+1}]$.

Η βασική ιδέα πίσω από τον ορισμό είναι ότι

$$\int_a^b f(x)dx = \lim \sum(f, P, \Xi) \tag{4.5.2}$$

όταν το πλάτος της P τείνει στο μηδέν και τα ξ_k επιλέγονται αυθαίρετα στα υποδιαστήματα που ορίζει η P. Επειδή δεν έχουμε συναντήσει τέτοιου είδους «όρια» ως τώρα, καταφεύγουμε στον «εψιλοντικό ορισμό».

Σκοπός αυτής της παραγράφου είναι η απόδειξη της ισοδυναμίας των δύο ορισμών ολοκληρωσιμότητας:

Θεώρημα 4.5.2. *Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ φραγμένη συνάρτηση. Η f είναι ολοκληρώσιμη κατά Darboux αν και μόνο αν είναι ολοκληρώσιμη κατά Riemann.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε πρώτα ότι η f είναι ολοκληρώσιμη κατά Riemann. Γράφουμε $I(f)$ για το ολοκλήρωμα της f με τον ορισμό του Riemann.

Έστω $\varepsilon > 0$. Μπορούμε να βρούμε μια διαμέριση $P = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ (με αρκετά μικρό πλάτος) ώστε για κάθε επιλογή σημείων $\Xi = \{\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_{n-1}\}$ με $\xi_k \in [x_k, x_{k+1}]$ να ισχύει

$$\left| \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)(x_{k+1} - x_k) - I(f) \right| < \frac{\varepsilon}{4}. \tag{4.5.3}$$

Για κάθε $k = 0, 1, \ldots, n-1$ μπορούμε να βρούμε $\xi_k', \xi_k'' \in [x_k, x_{k+1}]$ ώστε

$$m_k > f(\xi_k') - \frac{\varepsilon}{4(b-a)} \quad \text{και} \quad M_k < f(\xi_k'') + \frac{\varepsilon}{4(b-a)}. \tag{4.5.4}$$

Άρα,

$$L(f,P) > \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k')(x_{k+1} - x_k) - \frac{\varepsilon}{4} > I(f) - \frac{\varepsilon}{2} \tag{4.5.5}$$

και

$$U(f,P) < \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k'')(x_{k+1} - x_k) + \frac{\varepsilon}{4} < I(f) + \frac{\varepsilon}{2}. \tag{4.5.6}$$

Έπεται ότι

$$U(f,P) - L(f,P) < \varepsilon, \tag{4.5.7}$$

δηλαδή η f είναι ολοκληρώσιμη κατά Darboux. Επίσης,

$$I(f) - \frac{\varepsilon}{2} < \underline{\int_a^b} f(x)dx \leq \overline{\int_a^b} f(x)dx < I(f) + \frac{\varepsilon}{2}, \tag{4.5.8}$$

και αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν,

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx = \overline{\int_a^b} f(x)dx = I(f). \tag{4.5.9}$$

Δηλαδή,

$$\int_a^b f(x)dx = I(f). \tag{4.5.10}$$

Αντίστροφα: υποθέτουμε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη με τον ορισμό του Darboux. Έστω $\varepsilon > 0$. Υπάρχει διαμέριση $P = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ του $[a,b]$ ώστε

$$U(f,P) - L(f,P) < \frac{\varepsilon}{4}. \tag{4.5.11}$$

Η f είναι φραγμένη, δηλαδή υπάρχει $M > 0$ ώστε $|f(x)| \leq M$ για κάθε $x \in [a,b]$. Επιλέγουμε

$$\delta = \frac{\varepsilon}{6nM} > 0. \tag{4.5.12}$$

Έστω P' διαμέριση του $[a,b]$ με πλάτος $\|P\| < \delta$, **η οποία είναι και εκλέπτυνση της** P. Τότε, για κάθε επιλογή Ξ σημείων από τα υποδιαστήματα που ορίζει η P' έχουμε

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)dx - \frac{\varepsilon}{4} &< L(f,P) \leq L(f,P') \leq \sum(f,P',\Xi) \\
&\leq U(f,P') \leq U(f,P) < \int_a^b f(x)dx + \frac{\varepsilon}{4}.
\end{aligned}$$

Δηλαδή,

$$\left|\sum(f,P',\Xi) - \int_a^b f(x)dx\right| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{4.5.13}$$

Ζητάμε να δείξουμε το ίδιο πράγμα για **τυχούσα** διαμέριση P_1 με πλάτος μικρότερο από δ (η δυσκολία είναι ότι μια τέτοια διαμέριση δεν έχει κανένα λόγο να είναι εκλέπτυνση της P).

Έστω $P_1 = \{a = y_0 < y_1 < \cdots < y_m = b\}$ μια τέτοια διαμέριση του $[a,b]$. Θα «προσθέσουμε» στην P_1 ένα-ένα όλα τα σημεία x_k της P τα οποία δεν ανήκουν στην P_1 (αυτά είναι το πολύ $n-1$).

Ας πούμε ότι ένα τέτοιο x_k βρίσκεται ανάμεσα στα διαδοχικά σημεία $y_l < y_{l+1}$ της P_1. Θεωρούμε την $P_2 = P_1 \cup \{x_k\}$ και τυχούσα επιλογή $\Xi^{(1)} = \{\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_{m-1}\}$ με $\xi_l \in [y_l, y_{l+1}]$, $l = 0, 1, \ldots, m-1$. Επιλέγουμε δύο σημεία $\xi_l' \in [y_l, x_k]$ και $\xi_l'' \in [x_k, y_{l+1}]$ και θεωρούμε την επιλογή σημείων $\Xi^{(2)} = \{\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_{l-1}, \xi_l', \xi_l'', \ldots, \xi_{m-1}\}$ που αντιστοιχεί στην P_2. Έχουμε

$$\begin{aligned}
\left|\sum(f,P_1,\Xi^{(1)}) - \sum(f,P_2,\Xi^{(2)})\right| &= |f(\xi_l)(y_{l+1}-y_l) - f(\xi_l')(x_k - y_l) \\
&\quad - f(\xi_l'')(y_{l+1} - x_k)| \\
&\leq 3M \max_l |y_{l+1} - y_l| < 3M\delta \\
&= \frac{\varepsilon}{2n}.
\end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας τη δοσμένη $(P_1, \Xi^{(1)})$ με όλο και λεπτότερες διαμερίσεις $(P_k, \Xi^{(k)})$ που προκύπτουν με την προσθήκη σημείων της P, μετά από n το πολύ βήματα φτάνουμε σε μια διαμέριση P_0 και μια επιλογή σημείων $\Xi^{(0)}$ με τις εξής ιδιότητες:

(α) η P_0 είναι κοινή εκλέπτυνση των P και P_1, και έχει πλάτος μικρότερο από δ.

(β) αφού η P_0 είναι εκλέπτυνση της P, όπως στην (4.5.13) έχουμε

$$\left|\sum(f,P_0,\Xi^{(0)}) - \int_a^b f(x)dx\right| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{4.5.14}$$

(γ) αφού κάναμε το πολύ n βήματα για να φτάσουμε στην P_0 και αφού σε κάθε βήμα τα αθροίσματα απείχαν το πολύ $\frac{\varepsilon}{2n}$, έχουμε

$$\left|\sum(f,P_1,\Xi^{(1)}) - \sum(f,P_0,\Xi^{(0)})\right| < n\frac{\varepsilon}{2n} = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Δηλαδή, για την τυχούσα διαμέριση P_1 πλάτους $< \delta$ και για την τυχούσα επιλογή $\Xi^{(1)}$ σημείων από τα υποδιαστήματα της P_1, έχουμε

$$\begin{aligned}
\left|\sum(f,P_1,\Xi^{(1)}) - \int_a^b f(x)dx\right| &< \left|\sum(f,P_1,\Xi^{(1)}) - \sum(f,P_0,\Xi^{(0)})\right| \\
&\quad + \left|\sum(f,P_0,\Xi^{(0)}) - \int_a^b f(x)dx\right| \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Έπεται ότι η f είναι ολοκληρώσιμη με τον ορισμό του Riemann, καθώς και ότι οι $I(f)$ και $\int_a^b f(x)dx$ είναι ίσοι. □

4.6 Ασκήσεις

Ομάδα Α′. Ερωτήσεις κατανόησης

Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Εξετάστε αν οι παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς ή ψευδείς (αιτιολογήστε πλήρως την απάντησή σας).

1. Αν η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη, τότε η f είναι φραγμένη.

2. Αν η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη, τότε παίρνει μέγιστη τιμή.

3. Αν η f είναι φραγμένη, τότε είναι Riemann ολοκληρώσιμη.

4. Αν η $|f|$ είναι Riemann ολοκληρώσιμη, τότε η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη.

5. Αν η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη, τότε υπάρχει $c \in [a, b]$ ώστε $f(c)(b-a) = \int_a^b f(x)\,dx$.

6. Αν η f είναι φραγμένη και αν $L(f, P) = U(f, P)$ για κάθε διαμέριση P του $[a, b]$, τότε η f είναι σταθερή.

7. Αν η f είναι φραγμένη και αν υπάρχει διαμέριση P ώστε $L(f, P) = U(f, P)$, τότε η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη.

8. Αν η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη και αν $f(x) = 0$ για κάθε $x \in [a, b] \cap \mathbb{Q}$, τότε

$$\int_a^b f(x)dx = 0.$$

Ομάδα Β′

9. Έστω $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ φραγμένη συνάρτηση με την ιδιότητα: για κάθε $0 < b \leq 1$ η f είναι ολοκληρώσιμη στο διάστημα $[b, 1]$. Δείξτε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[0, 1]$.

10. Αποδείξτε ότι η συνάρτηση $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \sin\frac{1}{x}$ αν $x \neq 0$ και $f(0) = 2$ είναι ολοκληρώσιμη.

11. Έστω $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ φραγμένη συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι η g είναι συνεχής παντού, εκτός από ένα σημείο $x_0 \in (a, b)$. Δείξτε ότι η g είναι ολοκληρώσιμη.

12. Χρησιμοποιώντας το κριτήριο του Riemann αποδείξτε ότι οι παρακάτω συναρτήσεις είναι ολοκληρώσιμες:
(α) $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ με $f(x) = x$.
(β) $f : [0, \pi/2] \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \sin x$.

13. Εξετάστε αν οι παρακάτω συναρτήσεις είναι ολοκληρώσιμες στο $[0, 2]$ και υπολογίστε το ολοκλήρωμα τους (αν υπάρχει):
(α) $f(x) = x + [x]$.

(β) $f(x) = 1$ αν $x = \frac{1}{k}$ για κάποιον $k \in \mathbb{N}$, και $f(x) = 0$ αλλιώς.

14. Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [a, b]$. Δείξτε ότι

$$\int_a^b f(x)dx = 0$$

αν και μόνο αν $f(x) = 0$ για κάθε $x \in [a, b]$.

15. Έστω $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχείς συναρτήσεις ώστε

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)dx.$$

Δείξτε ότι υπάρχει $x_0 \in [a, b]$ ώστε $f(x_0) = g(x_0)$.

16. Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με την ιδιότητα: για κάθε συνεχή συνάρτηση $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ ισχύει

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = 0.$$

Δείξτε ότι $f(x) = 0$ για κάθε $x \in [a, b]$.

17. Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με την ιδιότητα: για κάθε συνεχή συνάρτηση $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ που ικανοποιεί την $g(a) = g(b) = 0$, ισχύει

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = 0.$$

Δείξτε ότι $f(x) = 0$ για κάθε $x \in [a, b]$.

18. Έστω $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμες συναρτήσεις. Δείξτε την ανισότητα Cauchy–Schwarz:

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)dx \right)^2 \leq \left(\int_a^b f^2(x)dx \right) \cdot \left(\int_a^b g^2(x)dx \right).$$

19. Έστω $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι

$$\left(\int_0^1 f(x)dx \right)^2 \leq \int_0^1 f^2(x)dx.$$

Ισχύει το ίδιο αν αντικαταστήσουμε το $[0, 1]$ με τυχόν διάστημα $[a, b]$;

20. Έστω $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Δείξτε ότι

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} \int_0^x f(t)dt = f(0).$$

21. Έστω $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι η ακολουθία

$$a_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

συγκλίνει στο $\int_0^1 f(x)dx$. [*Υπόδειξη:* Χρησιμοποιήστε τον ορισμό του Riemann.]

22. Δείξτε ότι

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{1}+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n}}{n\sqrt{n}} = \frac{2}{3}.$$

23. Έστω $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Ορίζουμε μια ακολουθία (a_n) θέτοντας $a_n = \int_0^1 f(x^n)dx$. Δείξτε ότι $a_n \to f(0)$.

24. Δείξτε ότι η ακολουθία $\gamma_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \int_1^n \frac{1}{x}dx$ συγκλίνει.

25. Έστω $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ Lipschitz συνεχής συνάρτηση ώστε

$$|f(x) - f(y)| \leq M|x-y|$$

για κάθε $x, y \in [0,1]$. Δείξτε ότι

$$\left| \int_0^1 f(x)dx - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \right| \leq \frac{M}{2n}$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Ομάδα Γ′

26. Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ γνησίως αύξουσα και συνεχής συνάρτηση. Δείξτε ότι

$$\int_a^b f(x)dx = bf(b) - af(a) - \int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}(x)dx.$$

27. Έστω $f : [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ γνησίως αύξουσα, συνεχής και επί συνάρτηση με $f(0) = 0$. Δείξτε ότι για κάθε $a, b > 0$

$$ab \leq \int_0^a f(x)dx + \int_0^b f^{-1}(x)dx$$

με ισότητα αν και μόνο αν $f(a) = b$.

28. Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με την εξής ιδιότητα: υπάρχει $M > 0$ ώστε

$$|f(x)| \leq M \int_a^x |f(t)|dt$$

για κάθε $x \in [a,b]$. Δείξτε ότι $f(x) = 0$ για κάθε $x \in [a,b]$.

29. Έστω $a \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι δεν υπάρχει θετική συνεχής συνάρτηση $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ ώστε

$$\int_0^1 f(x)dx = 1, \quad \int_0^1 xf(x)dx = a \quad \text{και} \quad \int_0^1 x^2 f(x)dx = a^2.$$

30. Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής, μη αρνητική συνάρτηση. Θέτουμε $M = \max\{f(x) : x \in [a,b]\}$. Δείξτε οτι η ακολουθία

$$\gamma_n = \left(\int_a^b [f(x)]^n dx \right)^{1/n}$$

συγκλίνει, και $\lim_{n\to\infty} \gamma_n = M$.

31. Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Σκοπός αυτής της άσκησης είναι να δείξουμε ότι η f έχει πολλά σημεία συνέχειας.

(α) Υπάρχει διαμέριση P του $[a,b]$ ώστε $U(f,P) - L(f,P) < b-a$ (εξηγήστε γιατί). Δείξτε ότι υπάρχουν $a_1 < b_1$ στο $[a,b]$ ώστε $b_1 - a_1 < 1$ και

$$\sup\{f(x) : a_1 \leq x \leq b_1\} - \inf\{f(x) : a_1 \leq x \leq b_1\} < 1.$$

(β) Επαγωγικά ορίστε κιβωτισμένα διαστήματα $[a_n, b_n] \subseteq (a_{n-1}, b_{n-1})$ με μήκος μικρότερο από $1/n$ ώστε

$$\sup\{f(x) : a_n \leq x \leq b_n\} - \inf\{f(x) : a_n \leq x \leq b_n\} < \frac{1}{n}.$$

(γ) Η τομή αυτών των κιβωτισμένων διαστημάτων περιέχει ακριβώς ένα σημείο. Δείξτε ότι η f είναι συνεχής σε αυτό.

(δ) Τώρα δείξτε ότι η f έχει άπειρα σημεία συνέχειας στο $[a,b]$ (δεν χρειάζεται περισσότερη δουλειά!).

32. Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη (όχι αναγκαστικά συνεχής) συνάρτηση με $f(x) > 0$ για κάθε $x \in [a,b]$. Δείξτε ότι

$$\int_a^b f(x)dx > 0.$$

Ομάδα Δ΄. Συμπληρώματα της Θεωρίας

Αποδείξτε τις παρακάτω προτάσεις.

33. Έστω $f, g, h : [a,b] \to \mathbb{R}$ τρείς συναρτήσεις που ικανοποιούν την $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ για κάθε $x \in [a,b]$. Υποθέτουμε ότι οι f, h είναι ολοκληρώσιμες και

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b h(x)dx = I.$$

Δείξτε ότι η g είναι ολοκληρώσιμη και

$$\int_a^b g(x)dx = I.$$

34. Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι η $|f|$ είναι ολοκληρώσιμη. Ομοίως, ότι η f^2 είναι ολοκληρώσιμη.

35. Έστω $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμες συναρτήσεις. Δείξτε ότι η $f \cdot g$ είναι ολοκληρώσιμη.

36. Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη. Δείξτε ότι

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|dx.$$

37. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνάρτηση ολοκληρώσιμη σε κάθε κλειστό διάστημα της μορφής $[a,b]$. Δείξτε ότι:
(α) $\int_0^a f(x)dx = \int_0^a f(a-x)dx$.
(β) $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(a+b-x)dx$.
(γ) $\int_a^b f(x)dx = \int_{a+c}^{b+c} f(x-c)dx$.
(δ) $\int_{ca}^{cb} f(t)dt = c\int_a^b f(ct)dt$.
(ε) $\int_{-a}^a f(x)dx = 0$ αν η f είναι περιττή.
(στ) $\int_{-a}^a f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$ αν η f είναι άρτια.

38. Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ φραγμένη συνάρτηση.
(α) Δείξτε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη αν και μόνο αν για κάθε $\varepsilon > 0$ μπορούμε να βρούμε κλιμακωτές συναρτήσεις $g_\varepsilon, h_\varepsilon : [a,b] \to \mathbb{R}$ με $g_\varepsilon \leq f \leq h_\varepsilon$ και

$$\int_a^b h_\varepsilon(x)dx - \int_a^b g_\varepsilon(x)dx < \varepsilon.$$

(β) Δείξτε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη αν και μόνο αν για κάθε $\varepsilon > 0$ μπορούμε να βρούμε συνεχείς συναρτήσεις $g_\varepsilon, h_\varepsilon : [a,b] \to \mathbb{R}$ με $g_\varepsilon \leq f \leq h_\varepsilon$ και

$$\int_a^b h_\varepsilon(x)dx - \int_a^b g_\varepsilon(x)dx < \varepsilon.$$

Κεφάλαιο 5

Το θεμελιώδες θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού

Σε αυτό το Κεφάλαιο θα λέμε ότι μια συνάρτηση $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι *παραγωγίσιμη στο* $[a,b]$ αν η παράγωγος $f'(x)$ υπάρχει για κάθε $x \in (a,b)$ και, επιπλέον, υπάρχουν οι πλευρικές παράγωγοι

$$f'_+(a) = \lim_{x\to a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \quad \text{και} \quad f'_-(b) = \lim_{x\to b^-} \frac{f(x)-f(b)}{x-b}.$$

Συμφωνούμε να γράφουμε $f'(a) = f'_+(a)$ και $f'(b) = f'_-(b)$.

5.1 Το θεώρημα μέσης του Ολοκληρωτικού Λογισμού

Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ μια Riemann ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Στο προηγούμενο Κεφάλαιο ορίσαμε τη *μέση τιμή*

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \tag{5.1.1}$$

της f στο $[a,b]$. Αν η f υποτεθεί συνεχής, τότε υπάρχει $\xi \in [a,b]$ με την ιδιότητα

$$f(\xi) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx. \tag{5.1.2}$$

Ο ισχυρισμός αυτός είναι άμεση συνέπεια του εξής γενικότερου θεωρήματος.

Θεώρημα 5.1.1 (θεώρημα μέσης τιμής του ολοκληρωτικού λογισμού)**.** *Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση και έστω $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση με μη αρνητικές τιμές. Υπάρχει $\xi \in [a,b]$ ώστε*

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi)\int_a^b g(x)dx. \tag{5.1.3}$$

Απόδειξη. Οι f και g είναι ολοκληρώσιμες, άρα η $f \cdot g$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$. Η f είναι συνεχής στο $[a,b]$, άρα παίρνει ελάχιστη και μέγιστη τιμή. Έστω

$$m = \min\{f(x) : a \leq x \leq b\} \quad \text{και} \quad M = \max\{f(x) : a \leq x \leq b\}. \tag{5.1.4}$$

Αφού η g παίρνει μη αρνητικές τιμές, έχουμε

$$mg(x) \leq f(x)g(x) \leq Mg(x) \tag{5.1.5}$$

για κάθε $x \in [a,b]$. Συνεπώς,

$$m\int_a^b g(x)dx \leq \int_a^b f(x)g(x)dx \leq M\int_a^b g(x)dx. \tag{5.1.6}$$

Αφού $g \geq 0$ στο $[a,b]$, έχουμε $\int_a^b g(x)dx \geq 0$. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις: αν $\int_a^b g(x)dx = 0$, τότε από την (5.1.6) βλέπουμε ότι $\int_a^b f(x)g(x)dx = 0$. Άρα, η (5.1.3) ισχύει *για κάθε* $\xi \in [a,b]$.

Υποθέτουμε λοιπόν ότι $\int_a^b g(x)dx > 0$. Τότε, από την (5.1.6) συμπεραίνουμε ότι

$$m \leq \frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx} \leq M. \tag{5.1.7}$$

Αφού η f είναι συνεχής, το Θεώρημα Ενδιάμεσης Τιμής δείχνει ότι υπάρχει $\xi \in [a,b]$ ώστε

$$f(\xi) = \frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx}. \tag{5.1.8}$$

Έπεται το συμπέρασμα. □

Πόρισμα 5.1.2. *Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Υπάρχει $\xi \in [a,b]$ ώστε*

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a). \tag{5.1.9}$$

Απόδειξη. Άμεση συνέπεια του Θεωρήματος 5.1.1, αν θεωρήσουμε την $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ με $g(x) = 1$ για κάθε $x \in [a,b]$. □

Στην επόμενη παράγραφο θα δείξουμε (ξανά) το Πόρισμα 5.1.2, αυτή τη φορά σαν άμεση συνέπεια του πρώτου θεμελιώδους θεωρήματος του Απειροστικού Λογισμού.

5.2 Τα θεμελιώδη θεωρήματα του Απειροστικού Λογισμού

Ορισμός 5.2.1 (αόριστο ολοκλήρωμα)**.** Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Είδαμε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,x]$ για κάθε $x \in [a,b]$. Το *αόριστο ολοκλήρωμα της f* είναι η συνάρτηση $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ που ορίζεται από την

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt. \tag{5.2.1}$$

Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι κάθε Riemann ολοκληρώσιμη συνάρτηση είναι φραγμένη, θα δείξουμε ότι το αόριστο ολοκλήρωμα μιας ολοκληρώσιμης συνάρτησης είναι πάντοτε συνεχής συνάρτηση.

Θεώρημα 5.2.2. *Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Το αόριστο ολοκλήρωμα F της f είναι συνεχής συνάρτηση στο $[a,b]$.*

Απόδειξη. Αφού η f είναι ολοκληρώσιμη, είναι εξ ορισμού φραγμένη. Δηλαδή, υπάρχει $M > 0$ ώστε $|f(x)| \leq M$ για κάθε $x \in [a,b]$.

Έστω $x < y$ στο $[a,b]$. Τότε,

$$\begin{aligned} |F(x) - F(y)| &= \left| \int_a^y f(t)dt - \int_a^x f(t)dt \right| = \left| \int_x^y f(t)dt \right| \\ &\leq \int_x^y |f(t)|dt \leq M|x-y|. \end{aligned}$$

Άρα, η F είναι Lipschitz συνεχής (με σταθερά M). □

Μπορούμε να δείξουμε κάτι ισχυρότερο: στα σημεία συνέχειας της f, η F είναι παραγωγίσιμη.

Θεώρημα 5.2.3. *Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Αν η f είναι συνεχής στο $x_0 \in [a,b]$, τότε η F είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και*

$$F'(x_0) = f(x_0). \tag{5.2.2}$$

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι $a < x_0 < b$ (οι δύο περιπτώσεις $x_0 = a$ ή $x_0 = b$ ελέγχονται όμοια, με τη σύμβαση που κάναμε στην αρχή του Κεφαλαίου). Θέτουμε $\delta_1 = \min\{x_0 - a, b - x_0\}$. Αν $|h| < \delta_1$, τότε

$$\begin{aligned} \frac{F(x_0+h) - F(x)}{h} - f(x_0) &= \frac{1}{h}\left(\int_a^{x_0+h} f(t)dt - \int_a^{x_0} f(t)dt \right) - f(x_0) \\ &= \frac{1}{h}\left(\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)dt - \int_{x_0}^{x_0+h} f(x_0)dt \right) \\ &= \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} [f(t) - f(x_0)]dt. \end{aligned}$$

Έστω $\varepsilon > 0$. Η f είναι συνεχής στο x_0, άρα υπάρχει $0 < \delta < \delta_1$ ώστε αν $|x - x_0| < \delta$ τότε $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Έστω $0 < |h| < \delta$.

(α) Αν $0 < h < \delta$, τότε

$$\begin{aligned} \left| \frac{F(x_0+h) - F(x)}{h} - f(x_0) \right| &= \left| \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} [f(t) - f(x_0)]dt \right| \\ &\leq \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} |f(t) - f(x_0)|dt \\ &\leq \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} \varepsilon dt = \frac{1}{h}\cdot h\varepsilon = \varepsilon. \end{aligned}$$

(β) Αν $-\delta < h < 0$, τότε

$$\begin{aligned} \left|\frac{F(x_0+h)-F(x)}{h} - f(x_0)\right| &= \left|\frac{1}{|h|}\int_{x_0+h}^{x_0}[f(t)-f(x_0)]dt\right| \\ &\leq \frac{1}{|h|}\int_{x_0+h}^{x_0}|f(t)-f(x_0)|dt \\ &\leq \frac{1}{|h|}\int_{x_0+h}^{x_0}\varepsilon dt = \frac{1}{|h|}\cdot(-h)\varepsilon = \varepsilon. \end{aligned}$$

Έπεται ότι

$$\lim_{h\to 0}\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h} = f(x_0),$$

δηλαδή $F'(x_0) = f(x_0)$. □

Άμεση συνέπεια είναι το *πρώτο θεμελιώδες θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού.*

Θεώρημα 5.2.4 (πρώτο θεμελιώδες θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού)**.** *Αν η $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής, τότε το αόριστο ολοκλήρωμα F της f είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση και*

(5.2.3)
$$F'(x) = f(x)$$

για κάθε $x \in [a,b]$. □

Πόρισμα 5.2.5. *Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Υπάρχει $\xi \in [a,b]$ ώστε*

(5.2.4)
$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a).$$

Απόδειξη. Εφαρμόζουμε το θεώρημα μέσης τιμής του διαφορικού λογισμού για τη συνάρτηση $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ στο $[a,b]$. □

Ας υποθέσουμε τώρα ότι $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι μια συνεχής συνάρτηση. Μια παραγωγίσιμη συνάρτηση $G : [a,b] \to \mathbb{R}$ λέγεται **παράγουσα** της f (ή **αντιπαράγωγος** της f) αν $G'(x) = f(x)$ για κάθε $x \in [a,b]$. Σύμφωνα με το Θεώρημα 5.2.4, η συνάρτηση

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

είναι παράγουσα της f. Αν G είναι μια άλλη παράγουσα της f, τότε $G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0$ για κάθε $x \in [a,b]$, άρα η $G - F$ είναι σταθερή στο $[a,b]$ (απλή συνέπεια του θεωρήματος μέσης τιμής). Δηλαδή, υπάρχει $c \in \mathbb{R}$ ώστε

(5.2.5)
$$G(x) - F(x) = c$$

για κάθε $x \in [a,b]$. Αφού $F(a) = 0$, παίρνουμε $c = G(a)$. Δηλαδή,

(5.2.6)
$$\int_a^x f(t)dt = G(x) - G(a)$$

ή αλλιώς

(5.2.7)
$$G(x) = G(a) + \int_a^x f(t)dt$$

για κάθε $x \in [a,b]$. Έχουμε λοιπόν δείξει το εξής:

Θεώρημα 5.2.6. *Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση και έστω $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ το αόριστο ολοκλήρωμα της f. Αν $G : [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι μια παράγουσα της f, τότε*

$$G(x) = F(x) + G(a) = \int_a^x f(t)dt + G(a) \tag{5.2.8}$$

για κάθε $x \in [a,b]$. Ειδικότερα,

$$\int_a^b f(x)dx = G(b) - G(a). \qquad \square$$

Σημείωση: Δεν είναι σωστό ότι για κάθε παραγωγίσιμη συνάρτηση $G : [a,b] \to \mathbb{R}$ ισχύει η ισότητα

$$G(b) - G(a) = \int_a^b G'(x)dx. \tag{5.2.9}$$

Για παράδειγμα, αν θεωρήσουμε τη συνάρτηση $G : [0,1] \to \mathbb{R}$ με $G(0) = 0$ και $G(x) = x^2 \sin \frac{1}{x^2}$ αν $0 < x \leq 1$, τότε η G είναι παραγωγίσιμη στο $[0,1]$ αλλά η G' δεν είναι φραγμένη συνάρτηση (ελέγξτε το) οπότε δεν μπορούμε να μιλάμε για το ολοκλήρωμα $\int_a^b G'$.

Αν όμως η $G : [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη και η G' είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$, τότε η (5.2.9) ισχύει. Αυτό είναι το *δεύτερο θεμελιώδες θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού.*

Θεώρημα 5.2.7 (δεύτερο θεμελιώδες θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού)**.** *Έστω $G : [a,b] \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση. Αν η G' είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ τότε*

$$\int_a^b G'(x)dx = G(b) - G(a). \tag{5.2.10}$$

Απόδειξη. Έστω $P = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ μια διαμέριση του $[a,b]$. Εφαρμόζοντας το Θεώρημα Μέσης Τιμής στο $[x_k, x_{k+1}]$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$, βρίσκουμε $\xi_k \in (x_k, x_{k+1})$ με την ιδιότητα

$$G(x_{k+1}) - G(x_k) = G'(\xi_k)(x_{k+1} - x_k). \tag{5.2.11}$$

Αν, για κάθε $0 \leq k \leq n-1$, ορίσουμε

$$m_k = \inf\{G'(x) : x_k \leq x \leq x_{k+1}\} \quad \text{και} \quad M_k = \sup\{G'(x) : x_k \leq x \leq x_{k+1}\}, \tag{5.2.12}$$

τότε

$$m_k \leq G'(\xi_k) \leq M_k, \tag{5.2.13}$$

άρα

$$L(G', P) \leq \sum_{k=0}^{n-1} G'(\xi_k)(x_{k+1} - x_k) \leq U(G', P). \tag{5.2.14}$$

Δηλαδή,

$$L(G', P) \leq \sum_{k=0}^{n-1}(G(x_{k+1}) - G(x_k)) = G(b) - G(a) \leq U(G', P). \tag{5.2.15}$$

Αφού η P ήταν τυχούσα και η G' είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$, παίρνοντας supremum ως προς P στην αριστερή ανισότητα και infimum ως προς P στην δεξιά ανισότητα της (5.2.15), συμπεραίνουμε ότι

$$\int_a^b G'(x)dx \leq G(b) - G(a) \leq \int_a^b G'(x)dx, \tag{5.2.16}$$

που είναι το ζητούμενο. □

5.3 Μέθοδοι ολοκλήρωσης

Τα θεωρήματα αυτής της παραγράφου «περιγράφουν» δύο χρήσιμες μεθόδους ολοκλήρωσης: την ολοκλήρωση κατά μέρη και την ολοκλήρωση με αντικατάσταση.

Συμβολισμός. Αν $F : [a, b] \to \mathbb{R}$, τότε συμφωνούμε να γράφουμε

$$[F(x)]_a^b = F(x)\Big|_a^b := F(b) - F(a). \tag{5.3.1}$$

Θεώρημα 5.3.1 (ολοκλήρωση κατά μέρη)**.** *Έστω $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμες συναρτήσεις. Αν οι f' και g' είναι ολοκληρώσιμες, τότε*

$$\int_a^x fg' = (fg)(x) - (fg)(a) - \int_a^x f'g. \tag{5.3.2}$$

Ειδικότερα,

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx. \tag{5.3.3}$$

Απόδειξη. Η $f \cdot g$ είναι παραγωγίσιμη και

$$(f \cdot g)'(x) = f(x)g'(x) + f'(x)g(x) \tag{5.3.4}$$

στο $[a, b]$. Από την υπόθεση, οι συναρτήσεις fg', $f'g$ είναι ολοκληρώσιμες, άρα και η $(f \cdot g)'$ είναι ολοκληρώσιμη. Από το δεύτερο θεμελιώδες θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού, για κάθε $x \in [a, b]$ έχουμε

$$\int_a^x fg' + \int_a^x f'g = \int_a^x (fg)' = (fg)(x) - (fg)(a). \tag{5.3.5}$$

Ο δεύτερος ισχυρισμός προκύπτει αν θέσουμε $x = b$. □

Μια εφαρμογή είναι το «δεύτερο θεώρημα μέσης τιμής του ολοκληρωτικού λογισμού».

Πόρισμα 5.3.2. *Έστω $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$. Υποθέτουμε ότι η f είναι συνεχής στο $[a, b]$ και η g είναι μονότονη και συνεχώς παραγωγίσιμη στο $[a, b]$. Τότε, υπάρχει $\xi \in [a, b]$ ώστε*

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = g(a)\int_a^\xi f(x)dx + g(b)\int_\xi^b f(x)dx. \tag{5.3.6}$$

Απόδειξη. Θεωρούμε το αόριστο ολοκλήρωμα $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ της f στο $[a,b]$. Τότε, το ζητούμενο παίρνει την εξής μορφή: υπάρχει $\xi \in [a,b]$ ώστε

$$\int_a^b F'(x)g(x)dx = g(a)F(\xi) + g(b)(F(b) - F(\xi)). \tag{5.3.7}$$

Η g είναι συνεχώς παραγωγίσιμη, άρα μπορούμε να εφαρμόσουμε ολοκλήρωση κατά μέρη στο αριστερό μέλος. Έχουμε

$$\begin{aligned} \int_a^b F'(x)g(x)dx &= F(b)g(b) - F(a)g(a) - \int_a^b F(x)g'(x)dx \\ &= F(b)g(b) - \int_a^b F(x)g'(x)dx, \end{aligned} \tag{5.3.8}$$

αφού $F(a) = 0$. Εφαρμόζουμε το θεώρημα μέσης τιμής του Ολοκληρωτικού Λογισμού: η g είναι μονότονη, άρα η g' διατηρεί πρόσημο στο $[a,b]$. Η F είναι συνεχής και η g' ολοκληρώσιμη, άρα υπάρχει $\xi \in [a,b]$ ώστε

$$\int_a^b F(x)g'(x)dx = F(\xi)\int_a^b g'(x)dx = F(\xi)(g(b) - g(a)). \tag{5.3.9}$$

Αντικαθιστώντας στην (5.3.8) παίρνουμε

$$\int_a^b F'(x)g(x) = F(b)g(b) - F(\xi)(g(b) - g(a)) = g(a)F(\xi) + g(b)(F(b) - F(\xi)), \tag{5.3.10}$$

δηλαδή την (5.3.7). □

Θεώρημα 5.3.3 (πρώτο θεώρημα αντικατάστασης)**.** *Έστω $\phi : [a,b] \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι η ϕ' είναι ολοκληρώσιμη. Αν $I = \phi([a,b])$ και $f : I \to \mathbb{R}$ είναι μια συνεχής συνάρτηση, τότε*

$$\int_a^b f(\phi(t))\phi'(t)\,dt = \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(s)\,ds. \tag{5.3.11}$$

Απόδειξη. Η ϕ είναι συνεχής, άρα το $I = \phi([a,b])$ είναι κλειστό διάστημα. Η f είναι συνεχής στο I, άρα είναι ολοκληρώσιμη στο I. Ορίζουμε $F : I \to \mathbb{R}$ με

$$F(x) = \int_{\phi(a)}^x f(s)\,ds \tag{5.3.12}$$

(παρατηρήστε ότι το $\phi(a)$ δεν είναι απαραίτητα άκρο του I, δηλαδή η F δεν είναι απαραίτητα το αόριστο ολοκλήρωμα της f στο I). Αφού η f είναι συνεχής στο I, το πρώτο θεμελιώδες θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού δείχνει ότι η F είναι παραγωγίσιμη στο I και $F' = f$. Έπεται ότι

$$\int_a^b f(\phi(t))\phi'(t)\,dt = \int_a^b F'(\phi(t))\phi'(t)\,dt. \tag{5.3.13}$$

Παρατηρούμε ότι

$$(F' \circ \phi) \cdot \phi' = (F \circ \phi)'. \tag{5.3.14}$$

Η $(F' \circ \phi) \cdot \phi'$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$, άρα η $(F \circ \phi)'$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$. Από το δεύτερο θεμελιώδες θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού παίρνουμε

$$\int_a^b (f \circ \phi) \cdot \phi' = \int_a^b (F' \circ \phi) \cdot \phi' = \int_a^b (F \circ \phi)' = (F \circ \phi)(b) - (F \circ \phi)(a). \tag{5.3.15}$$

Αφού

$$(F \circ \phi)(b) - (F \circ \phi)(a) = \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f - \int_{\phi(a)}^{\phi(a)} f = \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f, \tag{5.3.16}$$

παίρνουμε την (5.3.11). □

Θεώρημα 5.3.4 (δεύτερο θεώρημα αντικατάστασης)**.** *Έστω $\psi : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση, με $\psi'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in [a, b]$. Αν $I = \psi([a, b])$ και $f : I \to \mathbb{R}$ είναι μια συνεχής συνάρτηση, τότε*

$$\int_a^b f(\psi(t))\, dt = \int_{\psi(a)}^{\psi(b)} f(s)(\psi^{-1})'(s)\, ds. \tag{5.3.17}$$

Απόδειξη. Η ψ' είναι συνεχής και δεν μηδενίζεται στο $[a, b]$, άρα είναι παντού θετική ή παντού αρνητική στο $[a, b]$. Συνεπώς, η ψ είναι γνησίως μονότονη στο $[a, b]$. Αν, χωρίς περιορισμό της γενικότητας, υποθέσουμε ότι η ψ είναι γνησίως αύξουσα τότε ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση $\psi^{-1} : I \to \mathbb{R}$ της ψ στο $I = \psi([a, b]) = [\psi(a), \psi(b)]$. Εφαρμόζουμε το πρώτο θεώρημα αντικατάστασης για την $f \cdot (\psi^{-1})'$ (παρατηρήστε ότι η $(\psi^{-1})'$ είναι συνεχής στο I). Έχουμε

$$\begin{aligned} \int_{\psi(a)}^{\psi(b)} f \cdot (\psi^{-1})' &= \int_a^b [(f \cdot (\psi^{-1})') \circ \psi]\psi' \\ &= \int_a^b (f \circ \psi) \cdot [(\psi^{-1})' \circ \psi]\psi' \\ &= \int_a^b (f \circ \psi) \cdot (\psi^{-1} \circ \psi)' \\ &= \int_a^b f \circ \psi. \end{aligned}$$

Αυτό αποδεικνύει την (5.3.17). □

5.4 Γενικευμένα ολοκληρώματα

Σε αυτήν την παράγραφο επεκτείνουμε τον ορισμό του ολοκληρώματος για συναρτήσεις που δεν είναι φραγμένες ή είναι ορισμένες σε διαστήματα που δεν είναι κλειστά και φραγμένα. Θα αρκεστούμε σε κάποιες βασικές και χρήσιμες περιπτώσεις.

1. Υποθέτουμε ότι $b \in \mathbb{R}$ ή $b = +\infty$ και $f : [a, b) \to \mathbb{R}$ είναι μια συνάρτηση που είναι ολοκληρώσιμη κατά Riemann σε κάθε διάστημα της μορφής $[a, x]$, όπου $a < x < b$. Αν υπάρχει το

$$\lim_{x \to b^-} \int_a^x f(t)\, dt \tag{5.4.1}$$

και είναι πραγματικός αριθμός, τότε λέμε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b)$ και ορίζουμε

$$\int_a^b f(t)\,dt = \lim_{x\to b^-}\int_a^x f(t)\,dt.$$

Αν το «όριο» στην (5.4.1) είναι $\pm\infty$ τότε λέμε ότι το $\int_a^b f(t)\,dt$ αποκλίνει στο $\pm\infty$. Εντελώς ανάλογα ορίζεται το γενικευμένο ολοκλήρωμα μιας συνάρτησης $f:(a,b]\to\mathbb{R}$ (όπου $a\in\mathbb{R}$ ή $a=-\infty$) που είναι ολοκληρώσιμη στο $[x,b]$ για κάθε $a<x<b$, να είναι το

$$\int_a^b f(t)\,dt = \lim_{x\to a^+}\int_x^b f(t)\,dt,$$

αν το τελευταίο όριο υπάρχει.

Παραδείγματα

(α) Θεωρούμε τη συνάρτηση $f:[1,\infty)\to\mathbb{R}$ με $f(x)=\frac{1}{x^2}$. Για κάθε $x>1$ έχουμε

$$\int_1^x \frac{1}{t^2}\,dt = -\frac{1}{t}\,\Big|_1^x = 1-\frac{1}{x}.$$

Συνεπώς,

$$\int_1^\infty f(t)\,dt = \lim_{x\to\infty}\int_1^x f(t)\,dt = \lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right) = 1.$$

(β) Θεωρούμε τη συνάρτηση $f:[1,\infty)\to\mathbb{R}$ με $f(x)=\frac{1}{x}$. Για κάθε $x>1$ έχουμε

$$\int_1^x \frac{1}{t}\,dt = \ln t\,\Big|_1^x = \ln x - \ln 1 = \ln x.$$

Συνεπώς,

$$\int_1^\infty f(t)\,dt = \lim_{x\to\infty}\int_1^x f(t)\,dt = \lim_{x\to\infty}\ln x = +\infty.$$

(γ) Θεωρούμε τη συνάρτηση $f:(0,1]\to\mathbb{R}$ με $f(x)=\ln x$. Παρατηρήστε ότι η f δεν είναι φραγμένη: $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln x = -\infty$. Για κάθε $x\in(0,1)$ έχουμε

$$\int_x^1 \ln t\,dt = t\ln t - t\,\Big|_x^1 = -1 - x\ln x + x.$$

Συνεπώς,

$$\int_0^1 f(t)\,dt = \lim_{x\to 0^+}\int_x^1 f(t)\,dt = \lim_{x\to 0^+}(-1-x\ln x+x) = -1.$$

(δ) Θεωρούμε τη συνάρτηση $f:[0,1)\to\mathbb{R}$ με $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x}}$. Παρατηρήστε ότι η f δεν είναι φραγμένη: $\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{1}{\sqrt{1-x}}=+\infty$. Για κάθε $x\in(0,1)$ έχουμε

$$\int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-t}}\,dt = -2\sqrt{1-t}\,\Big|_0^x = 2-2\sqrt{1-x}.$$

Συνεπώς,

$$\int_0^1 f(t)\,dt = \lim_{x\to 1^-}\int_0^x f(t)\,dt = \lim_{x\to 1^-}(2-2\sqrt{1-x}) = 2.$$

(ε) Θεωρούμε τη συνάρτηση $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ με $f(x)=\sin x$. Για κάθε $x>0$ έχουμε

$$\int_0^x \sin t\,dt = -\cos t\,|_0^x = \cos x - 1.$$

Αφού το όριο $\lim\limits_{x\to\infty}(\cos x-1)$ δεν υπάρχει, το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_0^\infty \sin t\,dt$ δεν παίρνει κάποια τιμή.

2. Υποθέτουμε ότι $b\in\mathbb{R}$ ή $b=+\infty$ και $a\in\mathbb{R}$ ή $a=-\infty$. Έστω $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ μια συνάρτηση που είναι ολοκληρώσιμη κατά Riemann σε κάθε κλειστό διάστημα $[x,y]$, όπου $a<x<y<b$. Θεωρούμε τυχόν $c\in(a,b)$ και εξετάζουμε αν υπάρχουν τα γενικευμένα ολοκληρώματα

$$\int_a^c f(t)\,dt \quad \text{και} \quad \int_c^b f(t)\,dt.$$

Αν υπάρχουν και τα δύο, τότε λέμε ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_a^b f(t)\,dt$ υπάρχει και είναι ίσο με

$$\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^c f(t)\,dt + \int_c^b f(t)\,dt.$$

Παρατηρήστε ότι, σε αυτήν την περίπτωση, η τιμή του αθροίσματος στο δεξιό μέλος δεν εξαρτάται από την επιλογή του c στο (a,b) (εξηγήστε γιατί). Συνεπώς, το γενικευμένο ολοκλήρωμα ορίζεται καλά με αυτόν τον τρόπο. Αν κάποιο από τα δύο γενικευμένα ολοκληρώματα $\int_a^c f(t)\,dt$ και $\int_c^b f(t)\,dt$ δεν έχει τιμή, τότε λέμε ότι το $\int_a^b f(t)\,dt$ δεν ορίζεται (δεν έχει τιμή). Στις περιπτώσεις που κάποιο από τα δύο ή και τα δύο γενικευμένα ολοκληρώματα αποκλίνουν στο $\pm\infty$ ισχύουν τα συνήθη για τις μορφές $a\pm\infty$.

Παραδείγματα

(α) Θεωρούμε τη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x)=\frac{x}{x^2+1}$. Έχουμε

$$\int_0^\infty f(t)\,dt = \lim_{x\to\infty}\int_0^x \frac{t}{t^2+1}\,dt = \lim_{x\to\infty}\frac{\ln(x^2+1)}{2} = +\infty.$$

Όμοια,

$$\int_{-\infty}^0 f(t)\,dt = -\infty.$$

Συνεπώς, το $\int_{-\infty}^\infty f(t)\,dt$ δεν ορίζεται: έχουμε απροσδιόριστη μορφή $(+\infty)+(-\infty)$.

(β) Θεωρούμε τη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x)=\frac{1}{x^2+1}$. Έχουμε

$$\int_0^\infty f(t)\,dt = \lim_{x\to\infty}\int_0^x \frac{1}{t^2+1}\,dt = \lim_{x\to\infty}\arctan x = \pi/2.$$

Όμοια,

$$\int_{-\infty}^0 f(t)\,dt = \pi/2.$$

Συνεπώς,

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{t^2+1}\,dt = \int_{-\infty}^0 \frac{1}{t^2+1}\,dt + \int_0^\infty \frac{1}{t^2+1}\,dt = \frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2} = \pi.$$

5.4α′ Το κριτήριο του ολοκληρώματος

Έστω $f : [a, \infty) \to \mathbb{R}^+$ μη αρνητική συνάρτηση, η οποία είναι ολοκληρώσιμη σε κάθε διάστημα $[a, x]$, όπου $x > a$. Σε αυτήν την περίπτωση, η συνάρτηση

$$F(x) := \int_a^x f(t)\, dt$$

είναι αύξουσα στο $(a, +\infty)$. Συνεπώς, το

$$\int_a^\infty f(t)\, dt = \lim_{x\to\infty} \int_a^x f(t)\, dt$$

υπάρχει αν και μόνο αν η F είναι άνω φραγμένη. Διαφορετικά, $\int_a^\infty f(t)\, dt = +\infty$.

Αντίστοιχο αποτέλεσμα είχαμε δεί για την σύγκλιση σειρών $\sum_{k=1}^\infty a_k$ με μη-αρνητικούς όρους. Μια τέτοια σειρά συγκλίνει αν και μόνο αν η ακολουθία (s_n) των μερικών αθροισμάτων της είναι άνω φραγμένη. Διαφορετικά, αποκλίνει στο $+\infty$.

Το επόμενο θεώρημα δίνει ένα κριτήριο σύγκλισης για σειρές που γράφονται στη μορφή $\sum_{k=1}^\infty f(k)$, όπου $f : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ είναι μια φθίνουσα μη-αρνητική συνάρτηση.

Θεώρημα 5.4.1. *Έστω $f : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ φθίνουσα συνάρτηση με μη αρνητικές τιμές. Θεωρούμε την ακολουθία (a_k) με $a_k = f(k)$, $k = 1, 2, \ldots$. Τότε, η σειρά μη αρνητικών όρων $\sum_{k=1}^\infty a_k$ συγκλίνει αν και μόνο αν το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_1^\infty f(t)\, dt$ υπάρχει.*

Απόδειξη. Από το γεγονός ότι η f είναι φθίνουσα προκύπτει άμεσα ότι η f είναι ολοκληρώσιμη σε κάθε διάστημα $[k, k + 1]$ και

$$a_{k+1} = f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(t)\, dt \leq f(k) = a_k$$

για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Αν υποθέσουμε ότι η σειρά $\sum_{k=1}^\infty a_k$ συγκλίνει, τότε για κάθε $x > 1$ έχουμε

$$\int_1^x f(t)\, dt \leq \int_1^{[x]+1} f(t)\, dt = \sum_{k=1}^{[x]} \int_k^{k+1} f(t)\, dt \leq \sum_{k=1}^{[x]} a_k \leq \sum_{k=1}^{\infty} a_k.$$

Έπεται ότι το

$$\int_1^\infty f(t)\, dt = \lim_{x\to\infty} \int_1^x f(t)\, dt$$

υπάρχει. Αντίστροφα, αν το $\int_1^\infty f(t)\, dt$ υπάρχει, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε

$$\begin{aligned} s_n &= f(1) + f(2) + \cdots + f(n) \leq f(1) + \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} f(t)\, dt \\ &= f(1) + \int_1^n f(t)\, dt \leq f(1) + \int_1^\infty f(t)\, dt. \end{aligned}$$

Αφού η ακολουθία (s_n) των μερικών αθροισμάτων της $\sum_{k=1}^\infty a_k$ είναι άνω φραγμένη, η σειρά συγκλίνει. □.

Παραδείγματα

(α) Η σειρά $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k \ln k}$ αποκλίνει διότι

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{t \ln t}\, dt = \lim_{x\to\infty} \int_2^x \frac{1}{t\ln t}\, dt = \lim_{x\to\infty} \int_{\ln 2}^{\ln x} \frac{dy}{y} = \lim_{x\to\infty} (\ln(\ln x) - \ln(\ln 2)) = +\infty.$$

(β) Η σειρά $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(\ln k)^2}$ συγκλίνει διότι

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{t(\ln t)^2}\, dt = \lim_{x\to\infty} \int_2^x \frac{1}{t(\ln t)^2}\, dt = \lim_{x\to\infty} \int_{\ln 2}^{\ln x} \frac{dy}{y^2} = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln x}\right) = \frac{1}{\ln 2}.$$

5.5 Ασκήσεις

Ομάδα Α΄

1. Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι υπάρχει $s \in [a,b]$ ώστε

$$\int_a^s f(t)dt = \int_s^b f(t)dt.$$

Μπορούμε πάντα να επιλέγουμε ένα τέτοιο s στο ανοικτό διάστημα (a,b);

2. Έστω $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη και θετική συνάρτηση ώστε $\int_0^1 f(x)dx = 1$. Δείξτε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει διαμέριση $\{0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = 1\}$ ώστε $\int_{t_k}^{t_{k+1}} f(x)dx = \frac{1}{n}$ για κάθε $k = 0, 1, \dots, n-1$.

3. Έστω $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Δείξτε ότι υπάρχει $s \in [0,1]$ ώστε

$$\int_0^1 f(x)x^2 dx = \frac{f(s)}{3}.$$

4. Υποθέτουμε ότι η $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής και ότι

$$\int_0^x f(t)dt = \int_x^1 f(t)dt$$

για κάθε $x \in [0,1]$. Δείξτε ότι $f(x) = 0$ για κάθε $x \in [0,1]$.

5. Έστω $f, h : [0,+\infty) \to [0,+\infty)$. Υποθέτουμε ότι η h είναι συνεχής και η f είναι παραγωγίσιμη. Ορίζουμε

$$F(x) = \int_0^{f(x)} h(t)dt.$$

Δείξτε ότι $F'(x) = h(f(x)) \cdot f'(x)$.

6. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής και έστω $\delta > 0$. Ορίζουμε

$$g(x) = \int_{x-\delta}^{x+\delta} f(t)dt.$$

Δείξτε ότι η g είναι παραγωγίσιμη και βρείτε την g'.

7. Έστω $g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμες συναρτήσεις. Ορίζουμε

$$G(x) = \int_{h(x)}^{g(x)} t^2 dt.$$

Δείξτε ότι η G είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και βρείτε την G'.

8. Έστω $f : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Ορίζουμε

$$F(x) = \int_1^x f\left(\frac{x}{t}\right) dt.$$

Βρείτε την F'.

9. Έστω $f : [0, a] \to \mathbb{R}$ συνεχής. Δείξτε ότι, για κάθε $x \in [0, a]$,

$$\int_0^x f(u)(x-u)du = \int_0^x \left(\int_0^u f(t)dt \right) du.$$

10. Έστω $a, b \in \mathbb{R}$ με $a < b$ και $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση. Αν $\mathcal{P} = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ είναι διαμέριση του $[a, b]$, δείξτε ότι

$$\sum_{k=0}^{n-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)| \leq \int_a^b |f'(x)| \, dx.$$

11. Έστω $f : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ γνησίως αύξουσα, συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση με $f(0) = 0$. Δείξτε ότι, για κάθε $x > 0$,

$$\int_0^x f(t)\, dt + \int_0^{f(x)} f^{-1}(t)\, dt = xf(x).$$

Ομάδα Β′

12. Έστω $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση με $f(0) = 0$. Δείξτε ότι για κάθε $x \in [0, 1]$ ισχύει

$$|f(x)| \leq \left(\int_0^1 |f'(t)|^2 dt \right)^{1/2}.$$

13. Έστω $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με $f(x) \neq 0$ για κάθε $x > 0$, η οποία ικανοποιεί την

$$f(x)^2 = 2 \int_0^x f(t)dt$$

για κάθε $x \geq 0$. Δείξτε ότι $f(x) = x$ για κάθε $x \geq 0$.

14. Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f(x) \cos(nx)dx = 0 \quad \text{και} \quad \lim_{n\to\infty} \int_a^b f(x) \sin(nx)dx = 0.$$

15. Εξετάστε ως προς τη σύγκλιση τις ακολουθίες

$$a_n = \int_0^{\pi} \sin(nx)dx \quad \text{και} \quad b_n = \int_0^{\pi} |\sin(nx)|dx.$$

16. Έστω $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι υπάρχουν συνεχείς, αύξουσες και θετικές συναρτήσεις $g, h : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ ώστε $f = g - h$.

Κεφάλαιο 6

Τεχνικές ολοκλήρωσης

Σε αυτό το Κεφάλαιο περιγράφουμε, χωρίς ιδιαίτερη αυστηρότητα, τις βασικές μεθόδους υπολογισμού ολοκληρωμάτων. Δίνεται μια συνάρτηση f και θέλουμε να βρούμε μια αντιπαράγωγο της f, δηλαδή μια συνάρτηση F με την ιδιότητα $F' = f$. Τότε,

$$\int f(x)dx = F(x) + c.$$

6.1 Ολοκλήρωση με αντικατάσταση

6.1α′ Πίνακας στοιχειωδών ολοκληρωμάτων

Κάθε τύπος παραγώγισης $F'(x) = f(x)$ μας δίνει έναν τύπο ολοκλήρωσης: η F είναι αντιπαράγωγος της f. Μπορούμε έτσι να δημιουργήσουμε έναν πίνακα βασικών ολοκληρωμάτων, αντιστρέφοντας τους τύπους παραγώγισης των πιο βασικών συναρτήσεων:

$$\begin{aligned}
\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1}, \qquad a \neq -1, &\qquad \int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + c \\
\int e^x dx = e^x + c, &\qquad \int \sin x\,dx = -\cos x + c \\
\int \cos x\,dx = \sin x + c, &\qquad \int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \tan x + c \\
\int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx = -\cot x + c, &\qquad \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin x + c \\
\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan x + c. &
\end{aligned}$$

6.1β′ Υπολογισμός του $\int f(\phi(x))\phi'(x)\,dx$

Η αντικατάσταση $u = \phi(x)$, $du = \phi'(x)\,dx$ μας δίνει

$$\int f(\phi(x))\phi'(x)\,dx = \int f(u)\,du, \qquad u = \phi(x).$$

Αν το ολοκλήρωμα δεξιά υπολογίζεται ευκολότερα, θέτοντας όπου u την $\phi(x)$ υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα αριστερά.

Παραδείγματα

(α) Για τον υπολογισμό του

$$\int \frac{\arctan x}{1+x^2}\,dx$$

θέτουμε $u = \arctan x$. Τότε, $du = \frac{dx}{1+x^2}$ και αναγόμαστε στο

$$\int u\,du = \frac{u^2}{2} + c.$$

Έπεται ότι

$$\int \frac{\arctan x}{1+x^2}\,dx = \frac{(\arctan x)^2}{2} + c.$$

(β) Για τον υπολογισμό του

$$\int \tan x\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx$$

θέτουμε $u = \cos x$. Τότε, $du = -\sin x\,dx$ και αναγόμαστε στο

$$-\int \frac{1}{u}\,du = -\ln|u| + c.$$

Έπεται ότι

$$\int \tan x\,dx = -\ln|\cos x| + c.$$

(γ) Για τον υπολογισμό του

$$\int \frac{\cos(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\,dx$$

θέτουμε $u = \sqrt{x}$. Τότε, $du = \frac{dx}{2\sqrt{x}}$ και αναγόμαστε στο

$$\int 2\cos u\,du = 2\sin u + c.$$

Έπεται ότι

$$\int \frac{\cos(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\,dx = 2\sin(\sqrt{x}) + c.$$

6.1γ΄ Τριγωνομετρικά ολοκληρώματα

Ολοκληρώματα που περιέχουν δυνάμεις ή γινόμενα τριγωνομετρικών συναρτήσεων μπορούν να αναχθούν σε απλούστερα αν χρησιμοποιήσουμε τις βασικές τριγωνομετρικές ταυτότητες:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1, \qquad 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$1 + \cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}, \qquad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$$

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}, \qquad \sin 2x = 2\sin x\,\cos x$$

$$\sin ax \sin bx = \frac{\cos(a-b)x - \cos(a+b)x}{2}, \qquad \sin ax \cos bx = \frac{\sin(a+b)x + \sin(a-b)x}{2}$$

$$\cos ax \cos bx = \frac{\cos(a+b)x + \cos(a-b)x}{2}.$$

Παραδείγματα

(α) Για τον υπολογισμό του

$$\int \cos^2 x\, dx$$

χρησιμοποιούμε την $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$: έχουμε

$$\int \cos^2 x\, dx = \int \frac{1+\cos 2x}{2}\, dx = \frac{1}{2}\int dx + \frac{1}{2}\int \cos 2x\, dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} + c.$$

Με τον ίδιο τρόπο μπορούμε να υπολογίσουμε το $\int \cos^4 x\, dx$, χρησιμοποιώντας την

$$\cos^4 x = \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} + \frac{\cos 2x}{2} + \frac{\cos^2 2x}{4} = \frac{1}{4} + \frac{\cos 2x}{2} + \frac{1+\cos 4x}{8}.$$

(β) Για τον υπολογισμό του

$$\int \sin^5 x\, dx = \int \sin^4 x\, \sin x\, dx = \int (1-\cos^2 x)^2 \sin x\, dx$$

είναι προτιμότερη η αντικατάσταση $u = \cos x$. Τότε, $du = -\sin x\, dx$ και αναγόμαστε στο

$$-\int (1-u^2)^2\, du = -u + \frac{2u^3}{3} - \frac{u^5}{5} + c.$$

Έπεται ότι

$$\int \sin^5 x\, dx = -\cos x + \frac{2\cos^3 x}{3} - \frac{\cos^5 x}{5} + c.$$

Την ίδια μέθοδο μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε για οποιοδήποτε ολοκλήρωμα της μορφής

$$\int \cos^m x \sin^n x\, dx$$

αν ένας από τους εκθέτες m, n είναι περιττός και ο άλλος άρτιος. Για παράδειγμα, αν $m = 3$ και $n = 4$, γράφουμε

$$\int \cos^3 x \sin^4 x\, dx = \int (1-\sin^2 x)\sin^4 x \cos x\, dx$$

και, με την αντικατάσταση $u = \sin x$, αναγόμαστε στο απλό ολοκλήρωμα

$$\int (1-u^2)u^4 du.$$

(γ) Δύο χρήσιμα ολοκληρώματα είναι τα

$$\int \tan^2 x\, dx \ \text{ και } \int \cot^2 x\, dx.$$

Για το πρώτο γράφουμε

$$\int \tan^2 x\, dx = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right) dx = \int [(\tan x)' - 1]\, dx = \tan x - x + c,$$

και, όμοια, για το δεύτερο γράφουμε

$$\int \cot^2 x\, dx = \int \left(\frac{1}{\sin^2 x} - 1\right) dx = \int [(-\cot x)' - 1]\, dx = -\cot x - x + c.$$

6.1δ′ Υπολογισμός του $\int f(x)\,dx$ με την αντικατάσταση $x=\phi(t)$

Η αντικατάσταση $x=\phi(t)$, $dx=\phi'(t)\,dt$ – όπου ϕ αντιστρέψιμη συνάρτηση – μας δίνει
$$\int f(x)\,dx=\int f(\phi(t))\phi'(t)\,dt.$$
Αν το ολοκλήρωμα δεξιά υπολογίζεται ευκολότερα, θέτοντας όπου t την $\phi^{-1}(x)$ υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα αριστερά.

Παραδείγματα: τριγωνομετρικές αντικαταστάσεις

(α) Σε ολοκληρώματα που περιέχουν την $\sqrt{a^2-x^2}$ θέτουμε $x=a\sin t$. Τότε,
$$\sqrt{a^2-x^2}=a\cos t \;\text{ και }\; dx=a\cos t\,dt.$$
Για παράδειγμα, για τον υπολογισμό του
$$\int\frac{dx}{x^2\sqrt{9-x^2}},$$
αν θέσουμε $x=3\sin t$, τότε $dx=3\cos t\,dt$ και $\sqrt{9-x^2}=3\cos t$, και αναγόμαστε στο
$$\int\frac{3\cos t\,dt}{9\sin^2 t(3\cos t)}=\frac{1}{9}\int\frac{dt}{\sin^2 t}=-\frac{1}{9}\cot t+c.$$
Τότε, από την
$$\cot t=\frac{\cos t}{\sin t}=\frac{\sqrt{1-\sin^2 t}}{\sin t}=\frac{\sqrt{9-x^2}}{x},$$
παίρνουμε
$$\int\frac{dx}{x^2\sqrt{9-x^2}}=-\frac{\sqrt{9-x^2}}{9x}+c.$$

(β) Σε ολοκληρώματα που περιέχουν την $\sqrt{x^2-a^2}$ θέτουμε $x=a/\cos t$. Τότε,
$$\sqrt{x^2-a^2}=a\tan t \;\text{ και }\; dx=\frac{a\sin t}{\cos^2 t}\,dt.$$
Για παράδειγμα, για τον υπολογισμό του
$$\int\frac{\sqrt{x^2-4}}{x}\,dx,$$
αν θέσουμε $x=\frac{2}{\cos t}$, τότε $dx=\frac{2\sin t}{\cos^2 t}\,dt=\frac{2\tan t}{\cos t}\,dt$ και $\sqrt{x^2-4}=2\tan t$, και αναγόμαστε στο
$$\int\frac{2\tan t}{2/\cos t}\frac{2\tan t}{\cos t}\,dt=2\int\tan^2 t\,dt=2\tan t-2t+c.$$
Αφού $t=\arctan\frac{\sqrt{x^2-4}}{2}$, παίρνουμε
$$\int\frac{\sqrt{x^2-4}}{x}\,dx=\sqrt{x^2-4}-2\arctan\frac{\sqrt{x^2-4}}{2}+c.$$

(γ) Σε ολοκληρώματα που περιέχουν την $\sqrt{x^2+a^2}$ θέτουμε $x = a\tan t$. Τότε,

$$\sqrt{x^2+a^2} = \frac{a}{\cos t} \quad \text{και} \quad dx = \frac{a}{\cos^2 t}\, dt.$$

Για παράδειγμα, για τον υπολογισμό του

$$\int \frac{\sqrt{x^2+1}}{x^4}\, dx,$$

αν θέσουμε $x = \tan t$, τότε $dx = \frac{1}{\cos^2 t}\, dt$ και $\sqrt{x^2+1} = \frac{1}{\cos t}$, και αναγόμαστε στο

$$\int \frac{1}{\cos t}\frac{1}{\tan^4 t}\frac{1}{\cos^2 t}\, dt = \int \frac{\cos t}{\sin^4 t}\, dt = -\frac{2}{3\sin^3 t} + c.$$

Αφού $t = \arctan x$, βλέπουμε ότι $\sin t = \tan t \cos t = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ και τελικά παίρνουμε

$$\int \frac{\sqrt{x^2+1}}{x^4}\, dx = -\frac{(x^2+1)^{3/2}}{3x^3} + c.$$

6.2 Ολοκλήρωση κατά μέρη

Ο τύπος της ολοκλήρωσης κατά μέρη είναι:

$$\int f(x)g'(x)\, dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\, dx,$$

και προκύπτει άμεσα από την $(fg)' = fg' + f'g$, αν ολοκληρώσουμε τα δύο μέλη της. Συχνά, είναι ευκολότερο να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα στο δεξιό μέλος.

Παραδείγματα

(α) Για τον υπολογισμό του $\int x\log x\, dx$ γράφουμε

$$\int x\log x\, dx = \frac{1}{2}\int (x^2)'\log x\, dx = \frac{x^2\log x}{2} - \frac{1}{2}\int x\, dx = \frac{x^2\log x}{2} - \frac{x^2}{4} + c.$$

(β) Για τον υπολογισμό του $\int x\cos x\, dx$ γράφουμε

$$\int x\cos x\, dx = \int x(\sin x)'\, dx = x\sin x - \int \sin x\, dx = x\sin x + \cos x + c.$$

(γ) Για τον υπολογισμό του $\int e^x \sin x\, dx$ γράφουμε

$$\begin{aligned} I = \int e^x \sin x\, dx &= \int (e^x)'\sin x\, dx = e^x\sin x - \int e^x\cos x\, dx \\ &= e^x\sin x - \int (e^x)'\cos x\, dx = e^x\sin x - e^x\cos x + \int e^x(\cos x)' dx \\ &= e^x(\sin x - \cos x) - \int e^x\sin x\, dx = e^x(\sin x - \cos x) - I. \end{aligned}$$

Έπεται ότι

$$\int e^x\sin x\, dx = \frac{e^x(\sin x - \cos x)}{2} + c.$$

(δ) Για τον υπολογισμό του $\int x\sin^2 x\, dx$ χρησιμοποιώντας την ταυτότητα $\sin^2 x = \frac{1-\cos(2x)}{2}$ γράφουμε

$$\int x\sin^2 x\, dx = \int \frac{x}{2}\, dx - \int x\frac{\cos(2x)}{2}\, dx.$$

Για το δεύτερο ολοκλήρωμα, χρησιμοποιούμε την αντικατάσταση $u = 2x$ και ολοκλήρωση κατά μέρη όπως στο (β).

(ε) Για τον υπολογισμό του $\int \log(x+\sqrt{x})\, dx$ γράφουμε

$$\int \log(x+\sqrt{x})\, dx = \int (x)' \log(x+\sqrt{x})\, dx = x\log(x+\sqrt{x}) - \int \frac{x}{x+\sqrt{x}}\left(1+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right) dx.$$

Κατόπιν, εφαρμόζουμε την αντικατάσταση $u = \sqrt{x}$.

6.3 Ολοκλήρωση ρητών συναρτήσεων

Σε αυτή την παράγραφο περιγράφουμε μια μέθοδο με την οποία μπορεί κανείς να υπολογίσει το αόριστο ολοκλήρωμα οποιασδήποτε ρητής συνάρτησης

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0}. \tag{6.3.1}$$

Η πρώτη παρατήρηση είναι ότι μπορούμε πάντα να υποθέτουμε ότι $n < m$. Αν ο βαθμός n του αριθμητή $p(x)$ είναι μεγαλύτερος ή ίσος από τον βαθμό m του παρονομαστή $q(x)$, τότε διαιρούμε το $p(x)$ με το $q(x)$: υπάρχουν πολυώνυμα $\pi(x)$ και $\upsilon(x)$ ώστε ο βαθμός του $\upsilon(x)$ να είναι μικρότερος από m και

$$p(x) = \pi(x)q(x) + \upsilon(x). \tag{6.3.2}$$

Τότε,

$$f(x) = \frac{\pi(x)q(x) + \upsilon(x)}{q(x)} = \pi(x) + \frac{\upsilon(x)}{q(x)}. \tag{6.3.3}$$

Συνεπώς, για τον υπολογισμό του $\int f(x)\, dx$ μπορούμε τώρα να υπολογίσουμε χωριστά το $\int \pi(x)\, dx$ (απλό ολοκλήρωμα πολυωνυμικής συνάρτησης) και το $\int \frac{\upsilon(x)}{q(x)}\, dx$ (ρητή συνάρτηση με την πρόσθετη ιδιότητα ότι $\deg(\upsilon) < \deg(q)$).

Υποθέτουμε λοιπόν στη συνέχεια ότι $f = p/q$ και $\deg(p) < \deg(q)$. Μπορούμε επίσης να υποθέσουμε ότι $a_n = b_m = 1$. Χρησιμοποιούμε τώρα το γεγονός ότι κάθε πολυώνυμο αναλύεται σε γινόμενο πρωτοβάθμιων και δευτεροβάθμιων όρων. Το $q(x) = x^m + \cdots + b_1 x + b_0$ γράφεται στη μορφή

$$q(x) = (x-\alpha_1)^{r_1}\cdots(x-\alpha_k)^{r_k}(x^2+\beta_1 x+\gamma_1)^{s_1}\cdots(x^2+\beta_l x+\gamma_l)^{s_l}. \tag{6.3.4}$$

Οι $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ είναι οι πραγματικές ρίζες του $q(x)$ (και r_j είναι η πολλαπλότητα της ρίζας α_j) ενώ οι όροι $x^2 + \beta_i x + \gamma_i$ είναι τα γινόμενα $(x - z_i)(x - \overline{z_i})$ όπου z_i οι μιγαδικές ρίζες του $q(x)$ (και s_i είναι η πολλαπλότητα της ρίζας z_i). Παρατηρήστε ότι κάθε όρος της μορφής $x^2 + \beta_i x + \gamma_i$ έχει αρνητική διακρίνουσα. Επίσης, οι $k, s \geq 0$ και $r_1 + \cdots + r_k + 2s_1 + \cdots + 2s_l = m$ (ο βαθμός του $q(x)$).

Γράφουμε την $f(x)$ στη μορφή

$$f(x)=\frac{x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0}{(x-\alpha_1)^{r_1}\cdots(x-\alpha_k)^{r_k}(x^2+\beta_1x+\gamma_1)^{s_1}\cdots(x^2+\beta_lx+\gamma_l)^{s_l}},\tag{6.3.5}$$

και την «αναλύουμε σε απλά κλάσματα»: υπάρχουν συντελεστές A_{jt}, B_{it},Γ_{it} ώστε

$$\begin{aligned}f(x) &= \frac{A_{11}}{x-\alpha_1}+\frac{A_{12}}{(x-\alpha_1)^2}+\cdots+\frac{A_{1r_1}}{(x-\alpha_1)^{r_1}}\\ &+\cdots\\ &+\frac{A_{k1}}{x-\alpha_k}+\frac{A_{k2}}{(x-\alpha_k)^2}+\cdots+\frac{A_{kr_1}}{(x-\alpha_k)^{r_k}}\\ &+\frac{B_{11}x+\Gamma_{11}}{x^2+\beta_1x+\gamma_1}+\frac{B_{12}x+\Gamma_{12}}{(x^2+\beta_1x+\gamma_1)^2}+\cdots+\frac{B_{1s_1}x+\Gamma_{1s_1}}{(x^2+\beta_1x+\gamma_1)^{s_1}}\\ &+\cdots\\ &+\frac{B_{l1}x+\Gamma_{l1}}{x^2+\beta_lx+\gamma_l}+\frac{B_{l2}x+\Gamma_{l2}}{(x^2+\beta_lx+\gamma_l)^2}+\cdots+\frac{B_{ls_1}x+\Gamma_{ls_l}}{(x^2+\beta_lx+\gamma_l)^{s_l}}.\end{aligned}$$

Η εύρεση των συντελεστών γίνεται ως εξής: πολλαπλασιάζουμε τα δύο μέλη της ισότητας με το $q(x)$ (παρατηρήστε ότι ισούται με το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο των παρονομαστών του δεξιού μέλους). Προκύπτει τότε μια ισότητα πολυωνύμων. Εξισώνοντας τους συντελεστές τους, παίρνουμε ένα σύστημα m εξισώσεων με m αγνώστους: τους $A_{j1},\dots,A_{jr_j}$, $B_{i1},\dots,B_{is_i}$, $\Gamma_{i1},\dots,\Gamma_{is_i}$, $j=1,\dots,k$, $i=1,\dots,l$.

Μετά από αυτό το βήμα, χρησιμοποιώντας την γραμμικότητα του ολοκληρώματος, αναγόμαστε στον υπολογισμό ολοκληρωμάτων των εξής δύο μορφών:

(α) Ολοκληρώματα της μορφής $\int\frac{1}{(x-\alpha)^k}dx$. Αυτά υπολογίζονται άμεσα: αν $k\geq 2$ τότε

$$\int\frac{1}{(x-\alpha)^k}\,dx=-\frac{1}{(k-1)(x-\alpha)^{k-1}}+c,\tag{6.3.6}$$

και αν $k=1$ τότε

$$\int\frac{1}{x-\alpha}\,dx=\ln|x-\alpha|+c.\tag{6.3.7}$$

(β) Ολοκληρώματα της μορφής $\int\frac{Bx+\Gamma}{(x^2+bx+\gamma)^k}dx$, όπου το $x^2+bx+\gamma$ έχει αρνητική διακρίνουσα. Γράφοντας $Bx+\Gamma=\frac{B}{2}(2x+b)+\left(\Gamma-\frac{Bb}{2}\right)$, αναγόμαστε στα ολοκληρώματα

$$\int\frac{2x+b}{(x^2+bx+\gamma)^k}dx\ \ \text{και}\ \ \int\frac{1}{(x^2+bx+\gamma)^k}\,dx.\tag{6.3.8}$$

Το πρώτο υπολογίζεται με την αντικατάσταση $y=x^2+bx+\gamma$ (εξηγήστε γιατί). Για το δεύτερο, γράφουμε πρώτα $x^2+bx+\gamma=\left(x+\frac{b}{2}\right)^2+\frac{4\gamma-b^2}{4}$ και με την αντικατάσταση $x+\frac{b}{2}=\frac{\sqrt{4\gamma-b^2}}{2}y$ αναγόμαστε (εξηγήστε γιατί) στον υπολογισμό ολοκληρωμάτων της μορφής

$$I_k=\int\frac{1}{(y^2+1)^k}\,dy.\tag{6.3.9}$$

Ο υπολογισμός του I_k βασίζεται στην αναδρομική σχέση

$$I_{k+1} = \frac{1}{2k}\frac{y}{(y^2+1)^k} + \frac{2k-1}{2k} I_k. \tag{6.3.10}$$

Για την απόδειξη της (6.3.10) χρησιμοποιούμε ολοκλήρωση κατά μέρη. Γράφουμε

$$\begin{aligned}
I_k = \int \frac{dx}{(y^2+1)^k} &= \int (y)' \frac{1}{(y^2+1)^k}\,dy = \frac{y}{(y^2+1)^k} + 2k\int \frac{y^2}{(y^2+1)^{k+1}}\,dy \\
&= \frac{y}{(y^2+1)^k} + 2k\int \frac{y^2+1-1}{(y^2+1)^{k+1}}\,dy \\
&= \frac{y}{(y^2+1)^k} + 2k\int \frac{1}{(y^2+1)^k}\,dy - 2k\int \frac{1}{(y^2+1)^{k+1}}\,dy \\
&= \frac{y}{(y^2+1)^k} + 2kI_k - 2kI_{k+1}.
\end{aligned}$$

Έπεται το ζητούμενο. Γνωρίζουμε ότι

$$I_1 = \int \frac{1}{y^2+1}\,dy = \arctan y + c, \tag{6.3.11}$$

άρα, χρησιμοποιώντας την (6.3.10), μπορούμε διαδοχικά να βρούμε τα $I_2, I_3, \ldots$.

Παραδείγματα

(α) Για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος

$$\int \frac{3x^2+6}{x^3+x^2-2x}\,dx = \int \frac{3x^2+6}{x(x-1)(x+2)}\,dx,$$

ζητάμε $a, b, c \in \mathbb{R}$ ώστε

$$\frac{3x^2+6}{x(x-1)(x+2)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{x+2}.$$

Γράφουμε

$$\begin{aligned}
\frac{3x^2+6}{x(x-1)(x+2)} &= \frac{a(x-1)(x+2)+bx(x+2)+cx(x-1)}{x(x-1)(x+2)} \\
&= \frac{(a+b+c)x^2+(a+2b-c)x-2a}{x(x-1)(x+2)},
\end{aligned}$$

και λύνουμε το σύστημα

$$a+b+c=3, \qquad a+2b-c=0, \qquad -2a=6.$$

Η λύση είναι: $a=-3$, $b=3$ και $c=3$. Συνεπώς,

$$\begin{aligned}
\int \frac{3x^2+6}{x(x-1)(x+2)}\,dx &= -3\int \frac{dx}{x} + 3\int \frac{dx}{x-1} + 3\int \frac{dx}{x+2} \\
&= -3\ln|x| + 3\ln|x-1| + 3\ln|x+2| + c.
\end{aligned}$$

(β) Για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος

$$\int \frac{5x^2+12x+1}{x^3+3x^2-4}\,dx = \int \frac{5x^2+12x+1}{(x-1)(x+2)^2}\,dx,$$

ζητάμε $a, b, c \in \mathbb{R}$ ώστε

$$\frac{5x^2+12x+1}{(x-1)(x+2)^2} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+2} + \frac{c}{(x+2)^2}.$$

Γράφουμε

$$\begin{aligned}\frac{5x^2+12x+1}{(x-1)(x+2)^2} &= \frac{a(x+2)^2+b(x-1)(x+2)+c(x-1)}{(x-1)(x+2)^2}\\ &= \frac{(a+b)x^2+(4a+b+c)x+(4a-2b-c)}{(x-1)(x+2)^2},\end{aligned}$$

και λύνουμε το σύστημα

$$a+b=5, \qquad 4a+b+c=12, \qquad 4a-2b-c=1.$$

Η λύση είναι: $a=2$, $b=3$ και $c=1$. Συνεπώς,

$$\begin{aligned}\int \frac{5x^2+12x+1}{(x-1)(x+2)^2}\,dx &= 2\int \frac{dx}{x-1} + 3\int \frac{dx}{x+2} + \int \frac{dx}{(x+2)^2}\\ &= 2\ln|x-1| + 3\ln|x+2| - \frac{1}{x+2} + c.\end{aligned}$$

(γ) Για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος

$$\int \frac{x+1}{x^5-x^4+2x^3-2x^2+x-1}\,dx = \int \frac{x+1}{(x-1)(x^2+1)^2}\,dx,$$

ζητάμε $a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$ ώστε

$$\frac{x+1}{(x-1)(x^2+1)^2} = \frac{a}{x-1} + \frac{bx+c}{x^2+1} + \frac{dx+e}{(x^2+1)^2}.$$

Καταλήγουμε στην

$$x+1 = a(x^2+1)^2 + (bx+c)(x-1)(x^2+1) + (dx+e)(x-1)$$

και λύνουμε το σύστημα

$$a+b=0, \quad -b+c=0, \quad 2a+b-c+d=0, \quad -b+c-d+e=1, \quad a-c-e=1.$$

Η λύση είναι: $a=1/2$, $b=-1/2$, $c=-1/2$, $d=-1$ και $e=0$. Συνεπώς,

$$\begin{aligned}&\int \frac{x+1}{x^5-x^4+2x^3-2x^2+x-1}\,dx\\ &= \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{2}\int \frac{x+1}{x^2+1}\,dx - \int \frac{x}{(x^2+1)^2}\,dx\\ &= \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{4}\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2+1} - \frac{1}{2}\int \frac{(x^2+1)'}{(x^2+1)^2}\,dx\\ &= \frac{1}{2}\ln|x-1| - \frac{1}{4}\ln|x^2+1| - \frac{1}{2}\arctan x + \frac{1}{2}\frac{1}{x^2+1} + c.\end{aligned}$$

6.4 Κάποιες χρήσιμες αντικαταστάσεις

6.4α΄ Ρητές συναρτήσεις των $\cos x$ και $\sin x$

Για τον υπολογισμό ολοκληρωμάτων της μορφής

$$\int R(\cos x, \sin x)\, dx$$

όπου $R(u, v)$ είναι πηλίκο πολυωνύμων με μεταβλητές u και v, συχνά χρησιμοποιούμε την αντικατάσταση

$$u = \tan\frac{x}{2}.$$

Παρατηρήστε ότι

$$\cos x = \frac{\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2}} = \frac{1 - \tan^2\frac{x}{2}}{1 + \tan^2\frac{x}{2}} = \frac{1 - u^2}{1 + u^2}$$

και

$$\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = 2\tan\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2} = \frac{2\tan\frac{x}{2}}{1 + \tan^2\frac{x}{2}} = \frac{2u}{1 + u^2}.$$

Επίσης, $\frac{du}{dx} = \frac{1}{2\cos^2\frac{x}{2}} = \frac{1+\tan^2\frac{x}{2}}{2}$, δηλαδή

$$dx = \frac{2du}{1 + u^2}.$$

Έτσι, αναγόμαστε στο ολοκλήρωμα

$$\int R\left(\frac{1 - u^2}{1 + u^2}, \frac{2u}{1 + u^2}\right)\frac{2}{1 + u^2}\, du.$$

Δεδομένου ότι η συνάρτηση $F(u) = R\left(\frac{1-u^2}{1+u^2}, \frac{2u}{1+u^2}\right)\frac{2}{1+u^2}$ είναι ρητή συνάρτηση του u, το τελευταίο ολοκλήρωμα υπολογίζεται με τη μέθοδο που περιγράψαμε στην Παράγραφο 6.3.

Παραδείγματα.

(α) Για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος

$$\int \frac{1 + \sin x}{1 - \cos x}\, dx$$

θέτουμε $u = \tan\frac{x}{2}$. Αφού $dx = \frac{2}{1+u^2}du$, $\cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2}$ και $\sin x = \frac{2u}{1+u^2}$, αναγόμαστε στο ολοκλήρωμα

$$\int \frac{(1 + u)^2}{u^2(1 + u^2)}\, du,$$

το οποίο υπολογίζεται με ανάλυση σε απλά κλάσματα.

(α) Για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος

$$\int \frac{x}{1 + \sin x}\, dx$$

θέτουμε $u = \tan \frac{x}{2}$. Αφού $dx = \frac{2}{1+u^2} du$ και $\sin x = \frac{2u}{1+u^2}$, αναγόμαστε στο ολοκλήρωμα

$$\begin{aligned}\int 2\arctan u \frac{1}{1+\frac{2u}{1+u^2}} \frac{2}{1+u^2}\, du &= 4\int \arctan u \frac{1}{(1+u)^2}\, du \\ &= 4\int \arctan u \left(-\frac{1}{1+u}\right)' du \\ &= -4\frac{\arctan u}{1+u} + 4\int \frac{1}{(1+u^2)(1+u)}\, du.\end{aligned}$$

Το τελευταίο ολοκλήρωμα υπολογίζεται με ανάλυση σε απλά κλάσματα.

6.4β΄ Ολοκληρώματα αλγεβρικών συναρτήσεων ειδικής μορφής

Περιγράφουμε εδώ κάποιες αντικαταστάσεις που χρησιμοποιούνται για τον υπολογισμό ολοκληρωμάτων της μορφής

$$\int R(x, \sqrt{1-x^2})\, dx, \qquad \int R(x, \sqrt{x^2-1})\, dx, \qquad \int R(x, \sqrt{x^2+1})\, dx,$$

όπου $R(u,v)$ είναι πηλίκο πολυωνύμων με μεταβλητές u και v.

(α) Για το ολοκλήρωμα $\int R(x, \sqrt{1-x^2})\, dx$, κάνουμε πρώτα την αλλαγή μεταβλητής $x = \sin t$. Αφού $\sqrt{1-x^2} = \cos t$ και $dx = \cos t\, dt$, αναγόμαστε στο ολοκλήρωμα

$$\int R(\sin t, \cos t) \cos t\, dt,$$

το οποίο υπολογίζεται με την αντικατάσταση της προηγούμενης υποπαραγράφου (ρητή συνάρτηση των $\cos t$ και $\sin t$).

(β) Για το ολοκλήρωμα $\int R(x, \sqrt{x^2-1})\, dx$, μια ιδέα είναι να χρησιμοποιήσουμε την αλλαγή μεταβλητής $x = \frac{1}{\cos t}$. Τότε, $\sqrt{x^2-1} = \frac{\sin t}{\cos t}$ και $dx = \frac{\sin t}{\cos^2 t}\, dt$. Αναγόμαστε έτσι στο ολοκλήρωμα

$$\int R\left(\frac{1}{\sin t}, \frac{\sin t}{\cos t}\right) \frac{\sin t}{\cos^2 t}\, dt = \int R_1(\cos t, \sin t)\, dt$$

για κάποια ρητή συνάρτηση $R_1(u,v)$, το οποίο υπολογίζεται με την αντικατάσταση της προηγούμενης υποπαραγράφου (ρητή συνάρτηση των $\cos t$ και $\sin t$).

Είναι όμως προτιμότερο να χρησιμοποιήσουμε την εξής αλλαγή μεταβλητής:

$$u = x + \sqrt{x^2-1}.$$

Τότε,

$$x = \frac{u^2+1}{2u}, \qquad \sqrt{x^2-1} = \frac{u^2-1}{2u}, \qquad dx = \frac{u^2-1}{2u^2}\, du.$$

Αναγόμαστε έτσι στο ρητό ολοκλήρωμα

$$\int R\left(\frac{u^2+1}{2u}, \frac{u^2-1}{2u}\right) \frac{u^2-1}{2u^2}\, du$$

το οποίο υπολογίζεται με ανάλυση σε απλά κλάσματα.

(β) Για το ολοκλήρωμα $\int R(x, \sqrt{x^2+1})\,dx$, μια ιδέα είναι να χρησιμοποιήσουμε την αλλαγή μεταβλητής $x = -\cot t$. Τότε, $\sqrt{x^2-1} = \frac{1}{\sin t}$ και $dx = \frac{1}{\sin^2 t}\,dt$. Αναγόμαστε έτσι στο ολοκλήρωμα

$$\int R\left(-\frac{\cos t}{\sin t}, \frac{1}{\sin t}\right)\frac{1}{\sin^2 t}\,dt = \int R_1(\cos t, \sin t)\,dt$$

για κάποια ρητή συνάρτηση $R_1(u,v)$, το οποίο υπολογίζεται με την αντικατάσταση της προηγούμενης υποπαραγράφου (ρητή συνάρτηση των $\cos t$ και $\sin t$).

Είναι όμως προτιμότερο να χρησιμοποιήσουμε την εξής αλλαγή μεταβλητής:

$$u = x + \sqrt{x^2+1}.$$

Τότε,

$$x = \frac{u^2-1}{2u}, \qquad \sqrt{x^2-1} = \frac{u^2+1}{2u}, \qquad dx = \frac{u^2+1}{2u^2}\,du.$$

Αναγόμαστε έτσι στο ρητό ολοκλήρωμα

$$\int R\left(\frac{u^2-1}{2u}, \frac{u^2+1}{2u}\right)\frac{u^2+1}{2u^2}\,du$$

το οποίο υπολογίζεται με ανάλυση σε απλά κλάσματα.

Παραδείγματα

(α) Για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος

$$\int \sqrt{x^2-1}\,dx$$

θέτουμε $x^2-1 = (x-u)^2$. Ισοδύναμα, $x = \frac{u^2+1}{2u}$. Τότε, $dx = \frac{u^2-1}{2u^2}\,du$ και $x - u = \frac{1-u^2}{2u}$, οπότε αναγόμαστε στον υπολογισμό του

$$\int \frac{-(u^2-1)^2}{4u^3}\,du.$$

(β) Για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος

$$\int \frac{1}{x\sqrt{x^2+1}}\,dx$$

θέτουμε $u = x + \sqrt{x^2+1}$. Τότε,

$$x = \frac{u^2-1}{2u}, \qquad \sqrt{x^2-1} = \frac{u^2+1}{2u}, \qquad dx = \frac{u^2+1}{2u^2}\,du.$$

Αναγόμαστε έτσι στο ολοκλήρωμα

$$\int \frac{2}{u^2-1}\,du$$

το οποίο υπολογίζεται με ανάλυση σε απλά κλάσματα.

6.5 Ασκήσεις

Ομάδα Α΄

1. Υπολογίστε τα ακόλουθα ολοκληρώματα:

$$\int \frac{2x}{x^2+2x+2}dx\ , \qquad \int \frac{2x^2+x+1}{(x+3)(x-1)^2}dx\ , \qquad \int \frac{3x^2+3x+1}{x^3+2x^2+2x+1}dx.$$

2. Υπολογίστε τα ακόλουθα ολοκληρώματα:

$$\int \frac{dx}{x^4+1}\ , \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}\ , \qquad \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}\ , \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}}\ .$$

3. Υπολογίστε τα ακόλουθα ολοκληρώματα:

$$\int \cos^3 x\, dx\ , \quad \int \cos^2 x \sin^3 x\, dx\ , \quad \int \tan^2 x\, dx\ , \quad \int \frac{dx}{\cos^4 x}\ , \quad \int \sqrt{\tan x}\, dx\ .$$

4. Χρησιμοποιώντας ολοκλήρωση κατά μέρη, δείξτε ότι: για κάθε $n \in \mathbb{N}$,

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^{n+1}} = \frac{1}{2n}\frac{x}{(x^2+1)^n} + \frac{2n-1}{2n}\int \frac{dx}{(x^2+1)^n}\ .$$

5. Υπολογίστε τα ακόλουθα ολοκληρώματα:

$$\int \frac{x^2}{(x^2-4)(x^2-1)}\, dx\ , \qquad \int \frac{1}{(1+x)(1+x^2)}\, dx\ , \qquad \int x\log x\, dx$$

$$\int x\cos x\, dx\ , \qquad \int e^x \sin x\, dx\ , \qquad \int x\sin^2 x\, dx$$

$$\int \log(x+\sqrt{x})\, dx\ , \qquad \int \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}\, dx\ , \qquad \int \frac{x+4}{(x^2+1)(x-1)}\, dx$$

$$\int \frac{x}{1+\sin x}\, dx\ , \qquad \int \frac{\cos^3 x}{\sin^2 x}\, dx\ , \qquad \int \frac{dx}{(x^2+2x+2)^2}\ .$$

6. Υπολογίστε τα ολοκληρώματα

$$\int \sin(\log x)\, dx\ , \qquad \int \frac{1}{x\sqrt{x}}\log(1-x)\, dx.$$

7. Υπολογίστε τα ολοκληρώματα

$$\int \frac{x\arctan x}{(1+x^2)^2}\, dx\ , \qquad \int \frac{xe^x}{(1+x)^2}\, dx.$$

8. Υπολογίστε τα ολοκληρώματα

$$\int \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx\ , \qquad \int \frac{\log(\tan x)}{\cos^2 x}\,dx.$$

9. Υπολογίστε τα ολοκληρώματα

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\cos^2 x}dx \quad , \quad \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan^3 x}{\cos^3 x}dx$$

$$\int_0^5 x\log\left(\sqrt{1+x^2}\right)\,dx \quad , \quad \int_0^{\frac{\pi}{4}} x\tan^2 x\,dx.$$

10. Υπολογίστε τα ακόλουθα εμβαδά:

(α) Του χωρίου που βρίσκεται στο πρώτο τεταρτημόριο και φράσσεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x)=\sqrt{x}$, $g(x)=x-2$ και από τον x-άξονα.

(β) Του χωρίου που φράσσεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x)=\cos x$ και $g(x)=\sin x$ στο διάστημα $[\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{4}]$.

Ομάδα Β′

11. Υπολογίστε τα ολοκληρώματα

$$\int \frac{1+\sin x}{1-\cos x}\,dx\ , \quad \int \frac{1}{\sin x}\,dx\ , \quad \int \frac{x}{(1+x^2)^2}\,dx\ , \quad \int \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

$$\int \frac{1}{(1+x^2)^2}\,dx\ , \quad \int x\arctan x\,dx\ , \quad \int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx\ , \quad \int \sqrt{x^2-1}\,dx.$$

12. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$\int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx.$$

13. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sin x+\cos x}\,dx.$$

14. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \log(1+\tan x)\,dx.$$

15. Δείξτε ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα

$$\int_0^{\infty} x^p\,dx$$

δεν είναι πεπερασμένο για κανένα $p \in \mathbb{R}$.

16. Υπολογίστε τα ακόλουθα γενικευμένα ολοκληρώματα:

$$\int_0^\infty xe^{-x^2} dx\ , \quad \int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}\ , \quad \int_0^1 \log x\, dx\ .$$

17. Δείξτε ότι, για κάθε $n \in \mathbb{N}$,

$$\int_0^\infty e^{-x} x^n dx = n!$$

18. Βρείτε τα όρια

$$\lim_{x\to+\infty} x^3 e^{-x^6} \int_0^{x^3} e^{t^2} dt\ , \qquad \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^4} \int_0^{x^2} e^t \sin t\, dt.$$

Κεφάλαιο 7

Θεώρημα Taylor

7.1 Θεώρημα Taylor

Ορισμός 7.1.1. Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ και έστω $x_0 \in [a,b]$. Υποθέτουμε ότι η f είναι n φορές παραγωγίσιμη στο x_0. Το **πολυώνυμο Taylor τάξης** n **της** f **στο** x_0 είναι το πολυώνυμο $T_{n,f,x_0} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ που ορίζεται ως εξής:

$$T_{n,f,x_0}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k, \tag{7.1.1}$$

δηλαδή,
(7.1.2)

$$T_{n,f,x_0}(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n.$$

Το **υπόλοιπο Taylor τάξης** n **της** f **στο** x_0 είναι η συνάρτηση $R_{n,f,x_0} : [a,b] \to \mathbb{R}$ που ορίζεται ως εξής:

$$R_{n,f,x_0}(x) = f(x) - T_{n,f,x_0}(x). \tag{7.1.3}$$

Όταν $x_0 = 0$, συνηθίζουμε να ονομάζουμε τα $T_{n,f,0}$ και $R_{n,f,0}$ πολυώνυμο MacLaurin και υπόλοιπο MacLaurin της f αντίστοιχα.

Παρατήρηση 7.1.2. Παραγωγίζοντας το T_{n,f,x_0} βλέπουμε ότι:

$$\begin{aligned}
T_{n,f,x_0}(x) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k, \quad \text{άρα} \quad T_{n,f,x_0}(x_0) = f(x_0),\\
T'_{n,f,x_0}(x) &= \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{(k-1)!}(x-x_0)^{k-1}, \quad \text{άρα} \quad T'_{n,f,x_0}(x_0) = f'(x_0),\\
T''_{n,f,x_0}(x) &= \sum_{k=2}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{(k-2)!}(x-x_0)^{k-2}, \quad \text{άρα} \quad T''_{n,f,x_0}(x_0) = f''(x_0),\\
& \qquad\qquad\qquad\qquad \cdots \qquad\qquad \cdots\\
T^{(n)}_{n,f,x_0}(x) &= \sum_{k=n}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{(k-n)!}(x-x_0)^{k-n}, \quad \text{άρα} \quad T^{(n)}_{n,f,x_0}(x_0) = f^{(n)}(x_0).
\end{aligned}$$

Δηλαδή, το πολυώνυμο Taylor τάξης n της f στο x_0 ικανοποιεί τις

$$T_{n,f,x_0}^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0), \qquad k = 0, 1, \ldots, n \tag{7.1.3}$$

και είναι το μοναδικό πολυώνυμο βαθμού το πολύ ίσου με n που έχει αυτή την ιδιότητα (εξηγήστε γιατί).

Παρατήρηση 7.1.3. Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ και έστω $x_0 \in [a, b]$. Υποθέτουμε ότι η f είναι $n - 1$ φορές παραγωγίσιμη στο $[a, b]$ και n φορές παραγωγίσιμη στο x_0. Παρατηρήστε ότι

$$T'_{n,f,x_0}(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{(k-1)!}(x - x_0)^{k-1} \tag{7.1.4}$$

και

$$T_{n-1,f',x_0}(x) = \sum_{s=0}^{n-1} \frac{f^{(s+1)}(x_0)}{s!}(x - x_0)^{s}. \tag{7.1.5}$$

Θέτοντας $k = s + 1$ στην (7.1.5) συμπεραίνουμε ότι

$$T'_{n,f,x_0} = T_{n-1,f',x_0}. \tag{7.1.6}$$

Έπεται ότι

$$R'_{n,f,x_0} = R_{n-1,f',x_0}. \tag{7.1.7}$$

Πρόταση 7.1.4. *Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ και έστω $x_0 \in [a, b]$. Υποθέτουμε ότι η f είναι $n - 1$ φορές παραγωγίσιμη στο $[a, b]$ και n φορές παραγωγίσιμη στο x_0. Τότε,*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{R_{n,f,x_0}(x)}{(x - x_0)^n} = 0. \tag{7.1.8}$$

Απόδειξη. Με επαγωγή ως προς n. Για $n = 1$ έχουμε

$$R_{1,f,x_0}(x) = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0),$$

άρα

$$\frac{R_{1,f,x_0}(x)}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) \to 0 \tag{7.1.9}$$

όταν $x \to x_0$, από τον ορισμό της παραγώγου στο σημείο x_0.

Υποθέτουμε ότι η πρόταση ισχύει για $n = m$ και για κάθε συνάρτηση που ικανοποιεί τις υποθέσεις. Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, m φορές παραγωγίσιμη στο $[a, b]$ και $m + 1$ φορές παραγωγίσιμη στο x_0. Τότε,

$$\lim_{x \to x_0} R_{m+1,f,x_0}(x) = \lim_{x \to x_0} (x - x_0)^{m+1} = 0 \tag{7.1.10}$$

και

$$\lim_{x \to x_0} \frac{R'_{m+1,f,x_0}(x)}{\left[(x - x_0)^{m+1}\right]'} = \lim_{x \to x_0} \frac{R_{m,f',x_0}(x)}{(m+1)(x - x_0)^m} = 0 \tag{7.1.11}$$

από την επαγωγική υπόθεση για την f'. Εφαρμόζοντας τον κανόνα l'Hospital ολοκληρώνουμε το επαγωγικό βήμα. □

Λήμμα 7.1.5. *Έστω p πολυώνυμο βαθμού το πολύ ίσου με n το οποίο ικανοποιεί την*

$$\lim_{x\to x_0} \frac{p(x)}{(x-x_0)^n} = 0. \tag{7.1.12}$$

Τότε, $p \equiv 0$.

Απόδειξη. Με επαγωγή ως προς n. Για το επαγωγικό βήμα παρατηρούμε πρώτα ότι

$$p(x_0) = \lim_{x\to x_0} p(x) = \lim_{x\to x_0} \frac{p(x)}{(x-x_0)^n}(x-x_0)^n = 0, \tag{7.1.13}$$

Συνεπώς, $p(x_0) = 0$. Άρα,

$$p(x) = (x-x_0)p_1(x), \tag{7.1.14}$$

όπου p_1 πολυώνυμο βαθμού το πολύ ίσου με $n-1$ το οποίο ικανοποιεί την

$$\lim_{x\to x_0} \frac{p_1(x)}{(x-x_0)^{n-1}} = \lim_{x\to x_0} \frac{p(x)}{(x-x_0)^n} = 0. \tag{7.1.15}$$

Αν υποθέσουμε ότι η Πρόταση ισχύει για τον $n-1$, τότε $p_1 \equiv 0$ άρα $p \equiv 0$. $\square$.

Η Πρόταση 7.1.4 και το Λήμμα 7.1.5 αποδεικνύουν τον εξής χαρακτηρισμό του πολυωνύμου Taylor T_{n,f,x_0}:

Θεώρημα 7.1.6. *Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ και έστω $x_0 \in [a,b]$. Υποθέτουμε ότι η f είναι $n-1$ φορές παραγωγίσιμη στο $[a,b]$ και n φορές παραγωγίσιμη στο x_0. Τότε, το πολυώνυμο Taylor τάξης n της f στο x_0 είναι το μοναδικό πολυώνυμο T βαθμού το πολύ ίσου με n το οποίο ικανοποιεί την*

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-T(x)}{(x-x_0)^n} = 0. \tag{7.1.16}$$

Απόδειξη. Η Πρόταση 7.1.4 δείχνει ότι το T_{n,f,x_0} ικανοποιεί την (7.1.16). Για τη μοναδικότητα αρκεί να παρατηρήσετε ότι αν δύο πολυώνυμα T_1, T_2 βαθμού το πολύ ίσου με n ικανοποιούν την (7.1.16), τότε το πολυώνυμο $p := T_1 - T_2$ ικανοποιεί την (7.1.12). Από το Λήμμα 7.1.5 συμπεραίνουμε ότι $T_1 \equiv T_2$. $\square$

Παρατήρηση 7.1.7. Το Θεώρημα 7.1.6 μας δίνει έναν έμμεσο τρόπο για να βρίσκουμε το πολυώνυμο Taylor τάξης n μιας συνάρτησης f σε κάποιο σημείο x_0. Αρκεί να βρούμε ένα πολυώνυμο βαθμού το πολύ ίσου με n το οποίο ικανοποιεί την (7.1.16).

(i) Η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{1-x}$ είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμη στο $(-1,1)$ και έχουμε δει ότι

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots \quad \text{για κάθε } |x| < 1.$$

Θα δείξουμε ότι, για κάθε n,

$$T_{n,f,0}(x) = T_n(x) := 1 + x + \cdots + x^n.$$

Παρατηρούμε ότι

$$f(x) - T_n(x) = \frac{1}{1-x} - \frac{1-x^{n+1}}{1-x} = \frac{x^{n+1}}{1-x}.$$

Άρα,

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-T_n(x)}{x^n}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{1-x}=0,$$

και το ζητούμενο προκύπτει από το Θεώρημα 7.1.6.

(ii) Η συνάρτηση $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$ είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και έχουμε δει ότι

$$\frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4+\cdots+(-1)^n x^{2n}+\cdots \text{ για κάθε } |x|<1.$$

Θα δείξουμε ότι, για κάθε n,

$$T_{2n,f,0}(x)=T_{2n+1,f,0}(x)=T_{2n}(x):=1-x^2+x^4-\cdots+(-1)^n x^{2n}.$$

Παρατηρούμε ότι

$$f(x)-T_n(x)=\frac{1}{1+x^2}-\frac{1-(-1)^{n+1}x^{2n+2}}{1+x^2}=\frac{(-1)^{n+1}x^{2n+2}}{1+x^2}.$$

Άρα,

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-T_{2n}(x)}{x^{2n+1}}=\lim_{x\to 0}\frac{(-1)^{n+1}x}{1+x^2}=0,$$

και (προφανώς)

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-T_{2n}(x)}{x^{2n}}=\lim_{x\to 0}\frac{(-1)^{n+1}x^2}{1+x^2}=0,$$

οπότε το ζητούμενο προκύπτει από το Θεώρημα 7.1.6.

Το Θεώρημα Taylor δίνει εύχρηστες εκφράσεις για το υπόλοιπο Taylor R_{n,f,x_0} τάξης n μιας συνάρτησης f σε κάποιο σημείο x_0.

Θεώρημα 7.1.8 (Θεώρημα Taylor). *Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ μια συνάρτηση $n+1$ φορές παραγωγίσιμη στο $[a,b]$ και έστω $x_0\in[a,b]$. Τότε, για κάθε $x\in[a,b]$,*

(i) **Μορφή Cauchy του υπολοίπου Taylor:** *Υπάρχει ξ μεταξύ των x_0 και x ώστε*

$$R_{n,f,x_0}(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n(x-x_0). \tag{7.1.17}$$

(ii) **Μορφή Lagrange του υπολοίπου Taylor:** *Υπάρχει ξ μεταξύ των x_0 και x ώστε*

$$R_{n,f,x_0}(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}. \tag{7.1.18}$$

(iii) **Ολοκληρωτική μορφή του υπολοίπου Taylor:** *Αν η $f^{(n+1)}$ είναι ολοκληρώσιμη συνάρτηση, τότε*

$$R_{n,f,x_0}(x)=\frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)(x-t)^n\,dt. \tag{7.1.19}$$

Απόδειξη. Σταθεροποιούμε το $x \in [a,b]$ και ορίζουμε $\phi : [a,b] \to \mathbb{R}$ με

$$\phi(t) = R_{n,f,t}(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(t)}{k!}(x-t)^k. \tag{7.1.20}$$

Παραγωγίζοντας ως προς t βλέπουμε ότι

$$\begin{aligned} \phi'(t) &= -f'(t) - \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{f^{(k+1)}(t)}{k!}(x-t)^k - \frac{f^{(k)}(t)}{(k-1)!}(x-t)^{k-1} \right) \\ &= -\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n, \end{aligned}$$

αφού το μεσαίο άθροισμα είναι τηλεσκοπικό. Παρατηρήστε επίσης ότι

$$\phi(x_0) = R_{n,f,x_0}(x) \text{ και } \phi(x) = R_{n,f,x}(x) = 0. \tag{7.1.21}$$

(i) Για την μορφή Cauchy του υπολοίπου εφαρμόζουμε το Θεώρημα Μέσης Τιμής για την ϕ στο διάστημα με άκρα x και x_0: Υπάρχει ξ μεταξύ των x_0 και x ώστε

$$R_{n,f,x_0}(x) = \phi(x_0) - \phi(x) = \phi'(\xi)(x_0 - x).$$

Από την

$$\phi'(\xi) = -\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n$$

έπεται ότι

$$R_{n,f,x_0}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n(x-x_0).$$

(ii) Για την μορφή Lagrange του υπολοίπου εφαρμόζουμε το Θεώρημα Μέσης Τιμής του Cauchy για την ϕ και για την $g(t) = (x-t)^{n+1}$ στο διάστημα με άκρα x και x_0: Υπάρχει ξ μεταξύ των x_0 και x ώστε

$$\frac{R_{n,f,x_0}(x)}{(x-x_0)^{n+1}} = \frac{\phi(x_0) - \phi(x)}{g(x_0) - g(x)} = \frac{\phi'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Έπεται ότι

$$R_{n,f,x_0}(x) = \frac{-\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n}{-(n+1)(x-\xi)^n}(x-x_0)^{n+1} = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.$$

(iii) Για την ολοκληρωτική μορφή του υπολοίπου παρατηρούμε ότι (από την υπόθεσή μας) η ϕ' είναι ολοκληρώσιμη στο διάστημα με άκρα x και x_0, οπότε εφαρμόζεται το δεύτερο θεμελιώδες θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού:

$$\begin{aligned} R_{n,f,x_0}(x) &= \phi(x_0) - \phi(x) = \int_x^{x_0} \phi'(t)\,dt \\ &= -\int_x^{x_0} \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n\,dt \\ &= \int_{x_0}^{x} \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n\,dt. \end{aligned}$$

Έτσι, έχουμε τις τρεις μορφές για το υπόλοιπο $R_{n,f,x_0}(x)$. □

Στην επόμενη Παράγραφο θα χρησιμοποιήσουμε το Θεώρημα Taylor για να βρουμε το ανάπτυγμα σε δυναμοσειρά των βασικών υπερβατικών συναρτήσεων.

7.2 Δυναμοσειρές και αναπτύγματα Taylor

7.2α′ Η εκθετική συνάρτηση $f(x) = e^x$

Παρατηρούμε ότι $f^{(k)}(x) = e^x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $k = 0, 1, 2, \ldots$. Ειδικότερα, $f^{(k)}(0) = 1$ για κάθε $k \geq 0$. Συνεπώς,

$$T_n(x) := T_{n,f,0}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}. \tag{7.2.1}$$

Έστω $x \neq 0$. Χρησιμοποιώντας την μορφή Lagrange του υπολοίπου παίρνουμε

$$R_n(x) := R_{n,f,0}(x) = \frac{e^\xi}{(n+1)!} x^{n+1} \tag{7.2.2}$$

για κάποιο ξ μεταξύ των 0 και x. Για να εκτιμήσουμε το υπόλοιπο διακρίνουμε δύο περιπτώσεις.

- Αν $x > 0$ τότε
$$|R_n(x)| = \frac{e^\xi}{(n+1)!} x^{n+1} \leq \frac{e^x x^{n+1}}{(n+1)!}.$$
- Αν $x < 0$, τότε $\xi < 0$ και $e^\xi < 1$, άρα
$$|R_n(x)| = \frac{e^\xi}{(n+1)!} |x|^{n+1} \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Σε κάθε περίπτωση,

$$|R_n(x)| \leq \frac{e^{|x|} |x|^{n+1}}{(n+1)!}. \tag{7.2.3}$$

Έστω $x \neq 0$. Εφαρμόζοντας το κριτήριο του λόγου για την ακολουθία $a_n := \frac{e^{|x|}|x|^{n+1}}{(n+1)!}$ βλέπουμε ότι

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{|x|}{n+2} \to 0,$$

άρα

$$\lim_{n\to\infty} |R_n(x)| = 0.$$

Συνεπώς,

$$e^x = \lim_{n\to\infty} T_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \tag{7.2.4}$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

7.2β′ Η συνάρτηση $f(x) = \cos x$

Παρατηρούμε ότι $f^{(2k)}(x) = (-1)^k \cos x$ και $f^{(2k+1)}(x) = (-1)^k \sin x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $k = 0, 1, 2, \ldots$. Ειδικότερα, $f^{(2k)}(0) = (-1)^k$ και $f^{(2k+1)}(0) = 0$. Συνεπώς,

$$T_{2n}(x) := T_{2n,f,0}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}. \tag{7.2.5}$$

Έστω $x \neq 0$. Χρησιμοποιώντας την μορφή Lagrange του υπολοίπου παίρνουμε

$$R_{2n}(x) := R_{2n,f,0}(x) = \frac{f^{(2n+1)}(\xi)}{(2n+1)!}x^{2n+1} \tag{7.2.6}$$

για κάποιο ξ μεταξύ των 0 και x. Για να εκτιμήσουμε το υπόλοιπο παρατηρούμε ότι $|f^{(2n+1)}(\xi)| \leq 1$ (είναι κάποιο ημίτονο ή συνημίτονο), άρα

$$|R_{2n}(x)| \leq \frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!}. \tag{7.2.7}$$

Εφαρμόζοντας το κριτήριο του λόγου για την ακολουθία $a_n := \frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!}$ βλέπουμε ότι

$$\lim_{n\to\infty} |R_{2n}(x)| = 0.$$

Συνεπώς,

$$\cos x = \lim_{n\to\infty} T_{2n}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} \tag{7.2.8}$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

7.2γ′ Η συνάρτηση $f(x) = \sin x$

Παρατηρούμε ότι $f^{(2k)}(x) = (-1)^k \sin x$ και $f^{(2k+1)}(x) = (-1)^k \cos x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $k = 0, 1, 2, \ldots$. Ειδικότερα, $f^{(2k)}(0) = 0$ και $f^{(2k+1)}(0) = (-1)^k$. Συνεπώς,

$$T_{2n+1}(x) := T_{2n+1,f,0}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}. \tag{7.2.9}$$

Έστω $x \neq 0$. Χρησιμοποιώντας την μορφή Lagrange του υπολοίπου παίρνουμε

$$R_{2n+1}(x) := R_{2n+1,f,0}(x) = \frac{f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!}x^{2n+2} \tag{7.2.10}$$

για κάποιο ξ μεταξύ των 0 και x. Για να εκτιμήσουμε το υπόλοιπο παρατηρούμε ότι $|f^{(2n+2)}(\xi)| \leq 1$ (είναι κάποιο ημίτονο ή συνημίτονο), άρα

$$|R_{2n+1}(x)| \leq \frac{|x|^{2n+2}}{(2n+2)!}. \tag{7.2.11}$$

Εφαρμόζοντας το κριτήριο του λόγου για την ακολουθία $a_n := \frac{|x|^{2n+2}}{(2n+2)!}$ βλέπουμε ότι

$$\lim_{n\to\infty} |R_{2n+1}(x)| = 0.$$

Συνεπώς,

$$\sin x = \lim_{n\to\infty} T_{2n+1}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} \tag{7.2.12}$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

7.2δ΄ Η συνάρτηση $f(x) = \ln(1+x)$, $x \in (-1,1]$

Παρατηρούμε ότι $f^{(k)}(x) = \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{(1+x)^k}$ για κάθε $x > -1$ και $k = 1,2,\ldots$. Ειδικότερα, $f(0) = 0$ και $f^{(k)}(0) = (-1)^{k-1}(k-1)!$ για κάθε $k \geq 1$. Συνεπώς,

$$T_n(x) := T_{n,f,0}(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}x^k}{k} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}. \tag{7.2.13}$$

Έστω $x > -1$. Χρησιμοποιώντας την ολοκληρωτική μορφή του υπολοίπου παίρνουμε

$$R_n(x) := R_{n,f,0}(x) = (-1)^n \int_0^x \frac{(x-t)^n}{(1+t)^{n+1}}\, dt. \tag{7.2.14}$$

Θέτουμε $u = \frac{x-t}{1+t}$. Τότε, το u μεταβάλλεται από x ως 0 και $\frac{dt}{1+t} = \frac{-du}{1+u}$ (ελέγξτε το). Συνεπώς,

$$R_n(x) = \int_x^0 \frac{-u^n}{1+u}\, du. \tag{7.2.15}$$

Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

- Αν $-1 < x < 0$ τότε
$$|R_n(x)| \leq \int_x^0 \frac{|u|^n}{1+u}\, du \leq \frac{1}{1+x} \int_0^{|x|} u^n\, du = \frac{1}{1+x}\frac{|x|^{n+1}}{n+1}.$$
- Αν $0 < x \leq 1$ τότε
$$|R_n(x)| = \int_0^x \frac{u^n}{1+u}\, du \leq \int_0^x u^n\, du = \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)}.$$

Σε κάθε περίπτωση,
$$\lim_{n\to\infty} |R_n(x)| = 0.$$

Συνεπώς,

$$\ln(1+x) = \lim_{n\to\infty} T_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}x^k}{k} \tag{7.2.16}$$

για κάθε $x \in (-1,1]$ (**σειρά Mercator**).

Ειδικότερα, για $x = 1$ παίρνουμε τον **τύπο του Leibniz**

$$\ln 2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} + \cdots. \tag{7.2.17}$$

Δεύτερος τρόπος: Από τη σχέση

$$\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 + \cdots + (-1)^{n-1}t^{n-1} + (-1)^n \frac{t^n}{1+t} \quad (t \neq -1) \tag{7.2.18}$$

έχουμε, για κάθε $x > -1$,

$$\ln(1+x) = \int_0^x \frac{1}{1+t}dt = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + (-1)^n \int_0^x \frac{t^n}{1+t}dt. \tag{7.2.19}$$

Αν ονομάσουμε $F_n(x)$ τη διαφορά

$$\ln(1+x) - \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}\right) \tag{7.2.20}$$

έχουμε

$$F_n(x) = (-1)^n \int_0^x \frac{t^n}{1+t}dt\,. \tag{7.2.21}$$

Εκτιμώντας το ολοκλήρωμα όπως πριν, βλέπουμε ότι

$$|F_n(x)| \leq \max\left\{1, \frac{1}{x+1}\right\}\frac{|x|^{n+1}}{n+1} \tag{7.2.22}$$

για κάθε $-1 < x \leq 1$. Συνεπώς, $\lim_{n\to\infty} F_n(x) = 0$. Έπεται ότι

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} \tag{7.2.23}$$

για $x \in (-1,1]$. Παρατηρήστε επίσης ότι $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{F_n(x)}{x^n} = 0$, το οποίο αποδεικνύει ότι $F_n(x) = R_{n,f,0}(x)$.

Όταν $|x| > 1$ η σειρά αποκλίνει (αφού η ακολουθία $\left(\frac{x^n}{n}\right)$ δεν τείνει στο 0) και για $x = -1$ επίσης αποκλίνει (αρμονική σειρά).

7.2ε′ Η διωνυμική συνάρτηση $f(x) = (1+x)^a$, $x > -1$

Η f ορίζεται από την $f(x) = \exp(a\ln(1+x))$. Αν $a > 0$, το όριο $\lim_{x\to -1} f(x)$ υπάρχει και είναι ίσο με 0, διότι $\ln(1+x) = y \to -\infty$ και $\exp(ay) \to 0$. Σε αυτήν την περίπτωση μπορούμε να επεκτείνουμε το πεδίο ορισμού της f στο $[-1,\infty)$ θέτοντας $f(-1) = 0$. Παραγωγίζοντας βλέπουμε ότι

$$\begin{aligned} f^{(k)}(x) &= a(a-1)\cdots(a-k+1)(1+x)^{a-k} \\ f^{(k)}(0) &= a(a-1)\cdots(a-k+1). \end{aligned}$$

Συνεπώς,

$$T_n(x) := T_{n,f,0}(x) = \sum_{k=0}^{n}\binom{a}{k}x^k \tag{7.2.24}$$

όπου

$$\binom{a}{k} = \frac{a(a-1)\cdots(a-k+1)}{k!}. \tag{7.2.25}$$

Παρατηρήστε ότι αν $a \in \mathbb{N}$ τότε $\binom{a}{k} = 0$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$ με $k > a$, οπότε

$$(1+x)^a = \sum_{k=0}^{a}\binom{a}{k}x^k. \tag{7.2.26}$$

Υποθέτουμε λοιπόν ότι $a \notin \mathbb{N}$. Θα δείξουμε ότι, όταν $|x| < 1$, τότε $T_{n,f,0}(x) \to f(x)$. Χρησιμοποιούμε τη μορφή Cauchy του υπολοίπου: υπάρχει ξ ανάμεσα στο 0 και στο x ώστε

$$\begin{aligned} R_n(x) &= \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n x = \frac{a(a-1)\dots(a-n)}{n!}(1+\xi)^{a-(n+1)}(x-\xi)^n x \\ &= \frac{a(a-1)\dots(a-n)}{n!}\left(\frac{x-\xi}{1+\xi}\right)^n (1+\xi)^{a-1}x \end{aligned}$$

Για να δείξουμε ότι $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ όταν $|x| < 1$, παρατηρούμε πρώτα ότι

$$\left|\frac{x-\xi}{1+\xi}\right| \leq |x| \quad \text{όταν } \ |x| < 1. \tag{7.2.27}$$

Πράγματι, αν $0 \leq \xi \leq x$ έχουμε

$$\left|\frac{x-\xi}{1+\xi}\right| = \frac{x-\xi}{1+\xi} \leq \frac{x}{1+\xi} \leq x = |x|. \tag{7.2.28}$$

Αν $-1 < x \leq \xi \leq 0$ θεωρούμε την συνάρτηση $g_x : [x,0] \to \mathbb{R}$ με

$$g_x(\xi) = \frac{x-\xi}{1+\xi} = \frac{x+1}{\xi+1} - 1 \tag{7.2.29}$$

η οποία είναι φθίνουσα (αφού $x+1>0$) άρα έχει μέγιστη τιμή την $g_x(x) = 0$ και ελάχιστη την $g_x(0) = x$ οπότε για κάθε $t \in [x,0]$ έχουμε $g_x(\xi) \leq 0$ άρα

$$\left|\frac{x-\xi}{1+\xi}\right| = -g_x(\xi) \leq -g_x(0) = -x = |x|. \tag{7.2.30}$$

Έπεται ότι

$$\begin{aligned} |R_n(x)| &= \left|\frac{a(a-1)\dots(a-n)}{n!}\left(\frac{x-\xi}{1+\xi}\right)^n (1+\xi)^{a-1}x\right| \\ &\leq \left|\frac{a(a-1)\dots(a-n)}{n!}x^n\right| \left|(1+\xi)^{a-1}x\right| \\ &\leq \left|\frac{a(a-1)\dots(a-n)}{n!}x^n\right| M(x) \end{aligned}$$

όπου $M(x) = |x|\max(1,(1+x)^{a-1})$ (άσκηση), άρα αρκεί να δείξουμε ότι

$$y_n \equiv \left|\frac{a(a-1)\dots(a-n)}{n!}x^n\right| \to 0$$

καθώς $n \to \infty$. Έχουμε

$$\frac{y_{n+1}}{y_n} = \left|\frac{a(a-1)\dots(a-n)(a-(n+1))}{a(a-1)\dots(a-n)}\,\frac{n!}{(n+1)!}\,\frac{x^{n+1}}{x^n}\right| = \left|\frac{a-n+1}{n+1}x\right|.$$

Για κάθε $n \geq a-1$ έχουμε $|a-(n+1)| = n+1-a$, άρα

$$\frac{y_{n+1}}{y_n} = \left|\frac{a-(n+1)}{n+1}x\right| = \frac{n+1-a}{n+1}|x| \to |x| < 1 \tag{7.2.31}$$

όταν $n \to \infty$, άρα $y_n \to 0$. Δείξαμε ότι αν $|x| < 1$ τότε $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$. Άρα,

$$(1+x)^a = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{a}{k} x^k \tag{7.2.32}$$

για $-1 < x < 1$.

Για $|x| > 1$ η σειρά αποκλίνει (κριτήριο λόγου). Για $|x| = 1$ η συμπεριφορά εξαρτάται από την τιμή του a. Για παράδειγμα, όταν $a = -1$, η σειρά αποκλίνει και στα δύο άκρα (γεωμετρική σειρά με λόγο x). Αποδεικνύεται ότι όταν $a = -1/2$ η σειρά συγκλίνει για $x = 1$ και αποκλίνει για $x = -1$, και όταν $a = 1/2$ (και γενικότερα όταν $a > 0$), η σειρά συγκλίνει και στα δύο άκρα.

7.2ϛ′ Η συνάρτηση $f(x) = \arctan x$, $|x| \leq 1$

Ξεκινάμε από την

$$\arctan x = \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt.$$

Αντί να παραγωγίσουμε n φορές την arctan στο 0, είναι ευκολότερο να ολοκληρώσουμε την

$$\frac{1}{1+t^2} = 1 - t^2 + t^4 - t^6 + \cdots + (-1)^n t^{2n} + \frac{(-1)^{n+1}t^{2n+2}}{1+t^2} \tag{7.2.33}$$

οπότε

$$\int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt = x - \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + (-1)^{n+1} \int_0^x \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\,dt. \tag{7.2.34}$$

Αν ορίσουμε

$$p_n(x) = x - \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \tag{7.2.35}$$

έχουμε

$$|f(x) - p_n(x)| = \left| \int_0^x \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\,dt \right| \leq \int_0^{|x|} t^{2n+2}\,dt \leq \frac{|x|^{2n+3}}{2n+3} \tag{7.2.36}$$

οπότε, όταν $|x| \leq 1$, βλέπουμε ότι $\lim_{n\to\infty} p_n(x) = f(x)$, δηλαδή

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots \tag{7.2.37}$$

για $x \in [-1, 1]$.

7.3 Συναρτήσεις παραστάσιμες σε δυναμοσειρά

Στην Παράγραφο 2.4 συζητήσαμε για πρώτη φορά τις δυναμοσειρές. Είδαμε ότι αν $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ είναι μια δυναμοσειρά με συντελεστές a_k, τότε το σύνολο των σημείων στα οποία συγκλίνει η δυναμοσειρά είναι «ουσιαστικά» ένα διάστημα συμμετρικό ως προς το 0 (ή, ενδεχομένως, το $\{0\}$ ή το $\mathbb{R}$). Αν ορίσουμε

$$R := \sup\{|x| : \text{ η δυναμοσειρά συγκλίνει στο } x\},$$

τότε η δυναμοσειρά συγκλίνει απολύτως σε κάθε $x \in (-R, R)$ και αποκλίνει σε κάθε x με $|x| > R$. Το διάστημα $(-R, R)$ ονομάζεται *διάστημα σύγκλισης* της δυναμοσειράς. Το *σύνολο σύγκλισης* της δυναμοσειράς, δηλαδή το σύνολο όλων των σημείων στα οποία συγκλίνει, προκύπτει από το $(-R, R)$ με την προσθήκη (ίσως) του R ή του $-R$ ή των $\pm R$. Στην περίπτωση που $R = +\infty$, η δυναμοσειρά συγκλίνει σε κάθε $x \in R$. Στην περίπτωση που $R = 0$, η δυναμοσειρά συγκλίνει μόνο στο σημείο $x = 0$.

Η επόμενη Πρόταση δίνει έναν «τύπο» για την ακτίνα σύγκλισης.

Πρόταση 7.3.1. *Έστω $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ μια δυναμοσειρά με συντελεστές a_k. Η ακτίνα σύγκλισής της δίνεται από την*

$$R = \frac{1}{\limsup |a_k|^{1/k}}.$$

Απόδειξη. Δείχνουμε πρώτα ότι αν $|x| \limsup\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} < 1$, τότε η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k x^k$ συγκλίνει απολύτως. Πράγματι, αν θεωρήσουμε $s > 0$ με $|x| \limsup \sqrt[k]{|a_k|} < s < 1$, τότε από τον χαρακτηρισμό του $\limsup$, υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ ώστε $|a_k x^k| \leq s^k$ για κάθε $k \geq N$, και το συμπέρασμα έπεται από το κριτήριο σύγκρισης.

Στη συνέχεια δείχνουμε ότι αν $|x| \limsup\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} > 1$, τότε η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ αποκλίνει. Πράγματι, αν θεωρήσουμε $s > 0$ με $|x| \limsup \sqrt[k]{|a_k|} > s > 1$, τότε από τον χαρακτηρισμό του $\limsup$, υπάρχουν άπειροι δείκτες $k_1 < k_2 < \cdots < k_n < k_{n+1} < \cdots$ ώστε $|a_{k_n} x^{k_n}| \geq s^{k_n} > 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Άρα, $a_k x^k \not\to 0$ και εφαρμόζεται το κριτήριο απόκλισης.

Συνδυάζοντας τα παραπάνω βλέπουμε ότι το διάστημα σύγκλισης της δυναμοσειράς είναι – αναγκαστικά – το $(-R, R)$, όπου $R = \frac{1}{\limsup |a_k|^{1/k}}$. □

Ορισμός 7.3.2. *Λέμε ότι μια συνάρτηση $f : (-R, R) \to \mathbb{R}$ είναι παραστάσιμη σε δυναμοσειρά με κέντρο το 0 αν υπάρχει ακολουθία $(a_k)_{k=0}^{\infty}$ πραγματικών αριθμών ώστε*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

για κάθε $x \in (-R, R)$.

Το θεώρημα που ακολουθεί δείχνει ότι αν μια συνάρτηση είναι παραστάσιμη σε δυναμοσειρά στο $(-R, R)$, τότε είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμη και οι παράγωγοί της υπολογίζονται με παραγώγιση των όρων της δυναμοσειράς. Ανάλογα, υπολογίζεται το ολοκλήρωμά της σε κάθε υποδιάστημα του $(-R, R)$.

Θεώρημα 7.3.3 (θεώρημα παραγώγισης δυναμοσειρών)**.** *Έστω $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ μια δυναμοσειρά που συγκλίνει στο $(-R, R)$ για κάποιον $R > 0$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f : (-R, R) \to \mathbb{R}$ με*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k.$$

Τότε, η f είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμη: για κάθε $k \geq 0$ και για κάθε $|x| < R$ ισχύει

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)a_n x^{n-k}.$$

Επίσης,

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

και, για κάθε $|x| < R$, η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[0, x]$ και

$$\int_0^x f(t)\, dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}.$$

Απόδειξη. Δείχνουμε πρώτα ότι, για κάθε $x \in (-R, R)$,

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}. \tag{1}$$

Αφού $|x| < R$, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $|x| + \delta < R$. Έπεται (εξηγήστε γιατί) ότι

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|(|x| + \delta)^n < +\infty.$$

Έστω $0 < |t| < \delta$. Παρατηρήστε ότι

$$\begin{aligned} |(x+t)^n - x^n - nx^{n-1}t| &= \left| \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} t^k \right| = t^2 \left| \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} t^{k-2} \right| \\ &\leq \frac{t^2}{\delta^2} \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} |x|^{n-k} t^{k-2} \delta^2 \leq \frac{t^2}{\delta^2} \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} |x|^{n-k} \delta^k \\ &\leq \frac{t^2}{\delta^2} (|x| + \delta)^n. \end{aligned}$$

Συνεπώς,

$$\begin{aligned} \left| \frac{f(x+t) - f(x)}{t} - \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \right| &= \left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{(x+t)^n - x^n - nx^{n-1}t}{t} \right| \\ &\leq \frac{|t|}{\delta^2} \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| (|x| + \delta)^n. \end{aligned}$$

Παίρνοντας το όριο καθώς το $t \to 0$, βλέπουμε ότι

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(x+t) - f(x)}{t} = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1},$$

το οποίο αποδεικνύει την (1).

Χρησιμοποιώντας την Πρόταση 7.3.1 βλέπουμε ότι η δυναμοσειρά $\sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1}$ έχει την ίδια ακτίνα σύγκλισης με την $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ (εξηγήστε γιατί). Εφαρμόζοντας λοιπόν τον ίδιο συλλογισμό για την f' στη θέση της f, βλέπουμε ότι

$$f^{(2)}(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2}.$$

Συνεχίζοντας με τον ίδιο τρόπο, αποδεικνύουμε ότι η f είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμη και ότι για κάθε $k \geq 0$ και για κάθε $|x| < R$ ισχύει

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)a_n x^{n-k}. \tag{2}$$

Θέτοντας $x = 0$ στην (2) βλέπουμε ότι

$$f^{(k)}(0) = k!a_k$$

για κάθε $k \geq 0$ (παρατηρήστε ότι: αν θέσουμε $x = 0$ στο δεξιό μέλος της (2), τότε όλοι οι όροι του αθροίσματος μηδενίζονται, εκτός από εκείνον που αντιστοιχεί στην τιμή $n = k$ και ισούται με $k(k-1)\cdots 2 \cdot 1 \cdot a_k x^0 = k!a_k$).

Για τον τελευταίο ισχυρισμό, παρατηρούμε ότι η δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ έχει την ίδια ακτίνα σύγκλισης με την $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ (εξηγήστε γιατί) και παραγωγίζοντας όρο προς όρο την

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$$

στο $(-R, R)$ παίρνουμε

$$F'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = f(x).$$

Από το θεμελιώδες θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού έπεται ότι

$$\int_0^x f(t)\,dt = F(x) - F(0) = F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$$

για κάθε $x \in (-R, R)$. □

Πόρισμα 7.3.4 (θεώρημα μοναδικότητας)**.** *Έστω (a_k), (b_k) ακολουθίες πραγματικών αριθμών με την εξής ιδιότητα: υπάρχει $R > 0$ ώστε*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k$$

για κάθε $x \in (-R, R)$. Τότε,

$$a_k = b_k \quad \text{για κάθε } k = 0, 1, 2, \ldots.$$

Απόδειξη. Από το Θεώρημα 7.3.3, για τη συνάρτηση $f : (-R, R) \to \mathbb{R}$ με

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k$$

έχουμε

$$f^{(k)}(0) = k!a_k = k!b_k$$

για κάθε $k \geq 0$. Συνεπώς, $a_k = b_k$ για κάθε $k \geq 0$. □

7.4 Ασκήσεις

Πρώτη Ομάδα

1. Έστω $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ πολυώνυμο βαθμού n και έστω $a \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι υπάρχουν $b_0, b_1, \cdots, b_n \in \mathbb{R}$ ώστε

$$p(x) = b_0 + b_1(x-a) + \cdots + b_n(x-a)^n \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Δείξτε ότι

$$b_k = \frac{p^{(k)}(a)}{k!}, \qquad k = 0, 1, \ldots, n.$$

2. Γράψτε καθένα από τα παρακάτω πολυώνυμα στη μορφή $b_0 + b_1(x-3) + \cdots + b_n(x-3)^n$:

$$p_1(x) = x^2 - 4x - 9, \quad p_2(x) = x^4 - 12x^3 + 44x^2 + 2x + 1, \qquad p_3(x) = x^5.$$

3. Για κάθε μία από τις παρακάτω συναρτήσεις, να βρεθεί το πολυώνυμο Taylor $T_{n,f,a}$ που υποδεικνύεται.

$$\begin{aligned}
(T_{3,f,0}) &\quad : \quad f(x) = \exp(\sin x).\\
(T_{2n+1,f,0}) &\quad : \quad f(x) = (1+x^2)^{-1}.\\
(T_{n,f,0}) &\quad : \quad f(x) = (1+x)^{-1}.\\
(T_{4,f,0}) &\quad : \quad f(x) = x^5 + x^3 + x.\\
(T_{6,f,0}) &\quad : \quad f(x) = x^5 + x^3 + x.\\
(T_{5,f,1}) &\quad : \quad f(x) = x^5 + x^3 + x.
\end{aligned}$$

4. Έστω $n \geq 1$ και $f, g : (a,b) \to \mathbb{R}$ συναρτήσεις n φορές παραγωγίσιμες στο $x_0 \in (a,b)$ ώστε $f(x_0) = f'(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$, $g(x_0) = g'(x_0) = \cdots = g^{(n-1)}(x_0) = 0$ και $g^{(n)}(x_0) \neq 0$. Δείξτε ότι

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f^{(n)}(x_0)}{g^{(n)}(x_0)}.$$

5. Έστω $n \geq 2$ και $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ συνάρτηση n φορές παραγωγίσιμη στο $x_0 \in (a,b)$ ώστε $f(x_0) = f'(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$ και $f^{(n)}(x_0) \neq 0$. Δείξτε ότι:

(α) Αν ο n είναι άρτιος και $f^{(n)}(x_0) > 0$, τότε η f έχει τοπικό ελάχιστο στο x_0.

(β) Αν ο n είναι άρτιος και $f^{(n)}(x_0) < 0$, τότε η f έχει τοπικό μέγιστο στο x_0.

(γ) Αν ο n είναι περιττός, τότε η f δεν έχει τοπικό μέγιστο ούτε τοπικό ελάχιστο στο x_0, αλλά το x_0 είναι σημείο καμπής για την f.

6. Αν $f(x) = \ln x$, $x > 0$, βρείτε την πλησιέστερη ευθεία και την πλησιέστερη παραβολή στο γράφημα της f στο σημείο $(e, 1)$.

7. Βρείτε το πολυώνυμο Taylor $T_{n,f,0}$ για τη συνάρτηση

$$f(x) = \int_0^x e^{-t^2}\, dt, \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

8. Βρείτε το πολυώνυμο Taylor $T_{n,f,0}$ για τη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ που ορίζεται ως εξής: $f(0) = 0$ και

$$f(x) = e^{-1/x^2}, \qquad x \neq 0.$$

9. Χρησιμοποιώντας το ανάπτυγμα Taylor της συνάρτησης $\arctan x$ $(-1 \leq x \leq 1)$ υπολογίστε το άθροισμα

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{3^n(2n+1)}.$$

10. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ άπειρες φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι $f''' = f$ και $f(0) = 1$, $f'(0) = f''(0) = 0$.

(α) Έστω $R > 0$. Δείξτε ότι υπάρχει $M = M(R) > 0$ ώστε: για κάθε $x \in [-R, R]$ και για κάθε $k = 0, 1, 2, \ldots$,

$$|f^{(k)}(x)| \leq M.$$

(β) Βρείτε το πολυώνυμο Taylor $T_{3n,f,0}$ και, χρησιμοποιώντας το (α) και οποιονδήποτε τύπο υπολοίπου, δείξτε ότι

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{3k}}{(3k)!}$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

11. Βρείτε προσεγγιστική τιμή, με σφάλμα μικρότερο του 10^{-6}, για καθέναν από τους αριθμούς

$$\sin 1, \quad \sin 2, \quad \sin \frac{1}{2}, \quad e, \quad e^2.$$

12. (α) Δείξτε ότι

$$\frac{\pi}{4} = \arctan \frac{1}{2} + \arctan \frac{1}{3}$$

και

$$\frac{\pi}{4} = 4 \arctan \frac{1}{5} - \arctan \frac{1}{239}.$$

(β) Δείξτε ότι $\pi = 3.14159\cdots$ (με άλλα λόγια, βρείτε προσεγγιστική τιμή για τον αριθμό π με σφάλμα μικρότερο του 10^{-6}).

Κεφάλαιο 8

Κυρτές και κοίλες συναρτήσεις

8.1 Ορισμός

Σε αυτό το κεφάλαιο, με I συμβολίζουμε ένα (κλειστό, ανοικτό ή ημιανοικτό, πεπερασμένο ή άπειρο) διάστημα στο $\mathbb{R}$.

Έστω $a, b \in \mathbb{R}$ με $a < b$. Στο επόμενο Λήμμα περιγράφουμε τα σημεία του ευθύγραμμου τμήματος $[a, b]$.

Λήμμα 8.1.1. *Αν $a < b$ στο $\mathbb{R}$ τότε*

$$[a, b] = \{(1-t)a + tb : 0 \leq t \leq 1\}. \tag{8.1.1}$$

Ειδικότερα, για κάθε $x \in [a, b]$ έχουμε

$$x = \frac{b-x}{b-a}a + \frac{x-a}{b-a}b. \tag{8.1.2}$$

Απόδειξη. Εύκολα ελέγχουμε ότι, για κάθε $t \in [0, 1]$ ισχύει

$$a \leq (1-t)a + tb = a + t(b-a) \leq b, \tag{8.1.3}$$

δηλαδή

$$\{(1-t)a + tb : 0 \leq t \leq 1\} \subseteq [a, b]. \tag{8.1.4}$$

Αντίστροφα, κάθε $x \in [a, b]$ γράφεται στη μορφή

$$x = \frac{b-x}{b-a}a + \frac{x-a}{b-a}b. \tag{8.1.5}$$

Παρατηρώντας ότι $t := (x-a)/(b-a) \in [0, 1]$ και $1 - t = (b-x)/(b-a)$, βλέπουμε ότι

$$[a, b] \subseteq \{(1-t)a + tb : 0 \leq t \leq 1\}. \tag{8.1.6}$$

Τα σημεία $(1-t)a + tb$ του $[a, b]$ λέγονται *κυρτοί συνδυασμοί* των a και b. $\square$

Ορισμός 8.1.2. Έστω $f : I \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση.

(α) Η f λέγεται *κυρτή* αν

$$f((1-t)a+tb) \leq (1-t)f(a)+tf(b) \tag{8.1.7}$$

για κάθε $a, b \in I$ και για κάθε $t \in \mathbb{R}$ με $0 < t < 1$ (παρατηρήστε ότι, αφού το I είναι διάστημα, το Λήμμα 8.1.1 δείχνει ότι το σημείο $(1-t)a+tb \in [a,b] \subseteq I$, δηλαδή η f ορίζεται καλά σε αυτό). Η γεωμετρική σημασία του ορισμού είναι η εξής: η χορδή που έχει σαν άκρα τα σημεία $(a, f(a))$ και $(b, f(b))$ δεν είναι πουθενά κάτω από το γράφημα της f.

(β) Η f λέγεται *γνησίως κυρτή* αν είναι κυρτή και έχουμε γνήσια ανισότητα στην (8.1.7) για κάθε $a < b$ στο I και για κάθε $0 < t < 1$.

(γ) Η $f : I \to \mathbb{R}$ λέγεται *κοίλη* (αντίστοιχα, γνησίως κοίλη) αν η $-f$ είναι κυρτή (αντίστοιχα, γνησίως κυρτή).

Παρατήρηση 8.1.3. Ισοδύναμοι τρόποι με τους οποίους μπορεί να περιγραφεί η κυρτότητα της $f : I \to \mathbb{R}$ είναι οι εξής:

(α) Αν $a, b, x \in I$ και $a < x < b$, τότε

$$f(x) \leq \frac{b-x}{b-a}f(a) + \frac{x-a}{b-a}f(b). \tag{8.1.8}$$

Παρατηρήστε ότι το δεξιό μέλος αυτής της ανισότητας ισούται με

$$f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a). \tag{8.1.9}$$

(β) Αν $a, b \in I$ και αν $t, s > 0$ με $t+s=1$, τότε

$$f(ta+sb) \leq tf(a)+sf(b). \tag{8.1.10}$$

8.2 Κυρτές συναρτήσεις ορισμένες σε ανοικτό διάστημα

Σε αυτή την Παράγραφο μελετάμε ως προς τη συνέχεια και την παραγωγισιμότητα μια κυρτή συνάρτηση που ορίζεται σε ανοικτό διάστημα. Όλα τα αποτελέσματα που θα αποδείξουμε είναι συνέπειες του ακόλουθου «λήμματος των τριών χορδών»:

Πρόταση 8.2.1 (το λήμμα των τριών χορδών). *Έστω $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ κυρτή συνάρτηση. Αν $y < x < z$ στο (a,b), τότε*

$$\frac{f(x)-f(y)}{x-y} \leq \frac{f(z)-f(y)}{z-y} \leq \frac{f(z)-f(x)}{z-x}. \tag{8.2.1}$$

Απόδειξη. Αφού η f είναι κυρτή, έχουμε

$$f(x) \leq \frac{z-x}{z-y}f(y) + \frac{x-y}{z-y}f(z). \tag{8.2.2}$$

Από αυτή την ανισότητα βλέπουμε ότι

$$f(x)-f(y) \leq \frac{y-x}{z-y}f(y) + \frac{x-y}{z-y}f(z) = \frac{x-y}{z-y}[f(z)-f(y)], \tag{8.2.3}$$

το οποίο αποδεικνύει την αριστερή ανισότητα στην (8.2.1). Ξεκινώντας πάλι από την (8.2.2), γράφουμε

$$f(x) - f(z) \leq \frac{z-x}{z-y} f(y) + \frac{x-z}{z-y} f(z) = -\frac{z-x}{z-y}[f(z) - f(y)], \tag{8.2.4}$$

απ' όπου προκύπτει η δεξιά ανισότητα στην (8.2.1). □

Θα χρησιμοποιήσουμε επίσης την εξής απλή συνέπεια του λήμματος των τριών χορδών.

Λήμμα 8.2.2. *Έστω $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ κυρτή συνάρτηση. Αν $y < x < z < w$ στο (a,b), τότε*

$$\frac{f(x) - f(y)}{x - y} \leq \frac{f(w) - f(z)}{w - z}. \tag{8.2.5}$$

Απόδειξη. Εφαρμόζοντας την Πρόταση 8.2.1 για τα σημεία $y < x < z$, παίρνουμε

$$\frac{f(x) - f(y)}{x - y} \leq \frac{f(z) - f(x)}{z - x}. \tag{8.2.6}$$

Εφαρμόζοντας πάλι την Πρόταση 8.2.1 για τα σημεία $x < z < w$, παίρνουμε

$$\frac{f(z) - f(x)}{z - x} \leq \frac{f(w) - f(z)}{w - z}. \tag{8.2.7}$$

Έπεται το συμπέρασμα. □

Θεώρημα 8.2.3. *Έστω $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ κυρτή συνάρτηση. Αν $x \in (a,b)$, τότε υπάρχουν οι πλευρικές παράγωγοι*

$$f'_-(x) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad \textit{και} \quad f'_+(x) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}. \tag{8.2.8}$$

Απόδειξη. Θα δείξουμε ότι υπάρχει η δεξιά πλευρική παράγωγος $f'_+(x)$ (με τον ίδιο τρόπο δουλεύουμε για την αριστερή πλευρική παράγωγο $f'_-(x)$). Θεωρούμε τη συνάρτηση $g_x : (x,b) \to \mathbb{R}$ που ορίζεται από την

$$g_x(z) := \frac{f(z) - f(x)}{z - x}. \tag{8.2.9}$$

Η g_x είναι αύξουσα: αν $x < z_1 < z_2 < b$, το λήμμα των τριών χορδών δείχνει ότι

$$g_x(z_1) = \frac{f(z_1) - f(x)}{z_1 - x} \leq \frac{f(z_2) - f(x)}{z_2 - x} = g_x(z_2). \tag{8.2.10}$$

Επίσης, αν θεωρήσουμε τυχόν $y \in (a,x)$, το λήμμα των τριών χορδών (για τα $y < x < z$) δείχνει ότι

$$\frac{f(x) - f(y)}{x - y} \leq \frac{f(z) - f(x)}{z - x} = g_x(z) \tag{8.2.11}$$

για κάθε $z \in (x,b)$, δηλαδή η g_x είναι κάτω φραγμένη. Άρα, υπάρχει το

$$\lim_{z \to x^+} g_x(z) = \lim_{z \to x^+} \frac{f(z) - f(x)}{z - x} = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}. \tag{8.2.12}$$

Δηλαδή, υπάρχει η δεξιά πλευρική παράγωγος $f'_+(x)$. □

Θεώρημα 8.2.4. *Έστω $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ κυρτή συνάρτηση. Οι πλευρικές παράγωγοι f'_-, f'_+ είναι αύξουσες στο (a,b) και $f'_- \leq f'_+$ στο (a,b).*

Απόδειξη. Έστω $x<y$ στο (a,b). Για αρκετά μικρό θετικό h έχουμε $x\pm h, y\pm h \in (a,b)$ και $x+h<y-h$. Από την Πρόταση 8.2.1 και από το Λήμμα 8.2.2 βλέπουμε ότι

(8.2.13)
$$\frac{f(x)-f(x-h)}{h} \leq \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \leq \frac{f(y)-f(y-h)}{h} \leq \frac{f(y+h)-f(y)}{h}.$$

Παίρνοντας όρια καθώς $h\to 0^+$, συμπεραίνουμε ότι

$$f'_-(x) \leq f'_+(x) \leq f'_-(y) \leq f'_+(y). \tag{8.2.14}$$

Οι ανισότητες $f'_-(x)\leq f'_-(y)$ και $f'_+(x)\leq f'_+(y)$ δείχνουν ότι οι f'_-, f'_+ είναι αύξουσες στο (a,b). Η αριστερή ανισότητα στην (8.2.14) δείχνει ότι $f'_-\leq f'_+$ στο (a,b). □

Η ύπαρξη των πλευρικών παραγώγων εξασφαλίζει ότι κάθε κυρτή συνάρτηση $f:I\to\mathbb{R}$ είναι συνεχής στο εσωτερικό του I:

Θεώρημα 8.2.5. *Κάθε κυρτή συνάρτηση $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ είναι συνεχής.*

Απόδειξη. Έστω $x\in(a,b)$. Τότε, για μικρά $h>0$ έχουμε $x+h, x-h\in(a,b)$ και

$$f(x+h) = f(x) + \frac{f(x+h)-f(x)}{h}\cdot h \to f(x) + f'_+(x)\cdot 0 = f(x) \tag{8.2.15}$$

όταν $h\to 0^+$, ενώ, τελείως ανάλογα,

$$f(x-h) = f(x) + \frac{f(x-h)-f(x)}{-h}\cdot(-h) \to f(x) + f'_-(x)\cdot 0 = f(x) \tag{8.2.16}$$

όταν $h\to 0^+$. Άρα, η f είναι συνεχής στο x. □

8.3 Παραγωγίσιμες κυρτές συναρτήσεις

Στον Απειροστικό Λογισμό Ι δόθηκε ένας διαφορετικός ορισμός της κυρτότητας για μια παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:(a,b)\to\mathbb{R}$. Για κάθε $x\in(a,b)$, θεωρήσαμε την εφαπτομένη

$$u = f(x) + f'(x)(u-x) \tag{8.3.1}$$

του γραφήματος της f στο $(x,f(x))$ και είπαμε ότι η f είναι *κυρτή* στο (a,b) αν για κάθε $x\in(a,b)$ και για κάθε $y\in(a,b)$ έχουμε

$$f(y) \geq f(x) + f'(x)(y-x). \tag{8.3.2}$$

Δηλαδή, αν το γράφημα $\{(y,f(y)) : a<y<b\}$ βρίσκεται πάνω από κάθε εφαπτομένη.

Το επόμενο θεώρημα δείχνει ότι, αν περιοριστούμε στην κλάση των παραγωγίσιμων συναρτήσεων, οι «δύο ορισμοί» συμφωνούν.

Θεώρημα 8.3.1. *Έστω $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση. Τα εξής είναι ισοδύναμα:*

(α) *Η f είναι κυρτή.*

(β) *Η f' είναι αύξουσα.*

(γ) *Για κάθε $x,y\in(a,b)$ ισχύει η*

$$f(y) \geq f(x) + f'(x)(y-x). \tag{8.3.3}$$

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι η f είναι κυρτή. Αφού η f είναι παραγωγίσιμη, έχουμε $f' = f'_- = f'_+$ στο (a,b). Από το Θεώρημα 8.2.4 οι f'_-, f'_+ είναι αύξουσες, άρα η f' είναι αύξουσα.

Υποθέτουμε τώρα ότι η f' είναι αύξουσα. Έστω $x, y \in (a,b)$. Αν $x < y$, εφαρμόζοντας το θεώρημα μέσης τιμής στο $[x,y]$, βρίσκουμε $\xi \in (x,y)$ ώστε $f(y) = f(x) + f'(\xi)(y-x)$. Αφού $\xi > x$ και η f' είναι αύξουσα, έχουμε $f'(\xi) \geq f'(x)$. Αφού $y - x > 0$, έπεται ότι

$$f(y) = f(x) + f'(\xi)(y-x) \geq f(x) + f'(x)(y-x). \tag{8.3.4}$$

Αν $x > y$, εφαρμόζοντας το θεώρημα μέσης τιμής στο $[y,x]$, βρίσκουμε $\xi \in (y,x)$ ώστε $f(y) = f(x) + f'(\xi)(y-x)$. Αφού $\xi < x$ και η f' είναι αύξουσα, έχουμε $f'(\xi) \leq f'(x)$. Αφού $y - x < 0$, έπεται πάλι ότι

$$f(y) = f(x) + f'(\xi)(y-x) \geq f(x) + f'(x)(y-x). \tag{8.3.5}$$

Τέλος, υποθέτουμε ότι η (8.3.3) ισχύει για κάθε $x, y \in (a,b)$ και θα δείξουμε ότι η f είναι κυρτή. Έστω $x < y$ στο (a,b) και έστω $0 < t < 1$. Θέτουμε $z = (1-t)x + ty$. Εφαρμόζοντας την υπόθεση για τα ζευγάρια x, z και y, z, παίρνουμε

$$f(x) \geq f(z) + f'(z)(x-z) \quad \text{και} \quad f(y) \geq f(z) + f'(z)(y-z). \tag{8.3.6}$$

Άρα,

$$\begin{aligned}(1-t)f(x) + tf(y) &\geq (1-t)f(z) + tf(z) + f'(z)[(1-t)(x-z) + t(y-z)]\\ &= f(z) + f'(z)[(1-t)x + ty - z]\\ &= f(z).\end{aligned}$$

Δηλαδή, $(1-t)f(x) + tf(y) \geq f((1-t)x + ty)$. □

Στην περίπτωση που η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο (a,b), η ισοδυναμία των (α) και (β) στο Θεώρημα 8.3.1 δίνει έναν απλό χαρακτηρισμό της κυρτότητας μέσω της δεύτερης παραγώγου.

Θεώρημα 8.3.2. *Έστω $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση. Η f είναι κυρτή αν και μόνο αν $f''(x) \geq 0$ για κάθε $x \in (a,b)$.*

Απόδειξη. Η f' είναι αύξουσα αν και μόνο αν $f'' \geq 0$ στο (a,b). Όμως, στο Θεώρημα 8.3.1 είδαμε ότι η f' είναι αύξουσα αν και μόνο αν η f είναι κυρτή. □

8.4 Ανισότητα του Jensen

Η *ανισότητα του Jensen* αποδεικνύεται με επαγωγή και «γενικεύει» την ανισότητα του ορισμού της κυρτής συνάρτησης.

Πρόταση 8.4.1 (ανισότητα του Jensen)**.** *Έστω $f : I \to \mathbb{R}$ κυρτή συνάρτηση. Αν $x_1, \ldots, x_m \in I$ και $t_1, \ldots, t_m \geq 0$ με $t_1 + \cdots + t_m = 1$, τότε $\sum_{i=1}^m t_i x_i \in I$ και*

$$f(t_1x_1 + \cdots + t_mx_m) \leq t_1 f(x_1) + \cdots + t_m f(x_m). \tag{8.4.1}$$

Απόδειξη. Έστω $a = \min\{x_1, \dots, x_m\}$ και $b = \max\{x_1, \dots, x_m\}$. Αφού το I είναι διάστημα και $a, b \in I$, συμπεραίνουμε ότι $\{x_1, \dots, x_m\} \subseteq [a, b] \subseteq I$. Αφού $t_i \geq 0$ και $t_1 + \cdots + t_m = 1$, έχουμε

$$a = (t_1 + \cdots + t_m)a \leq t_1x_1 + \cdots + t_mx_m \leq (t_1 + \cdots + t_m)b = b, \tag{8.4.2}$$

δηλαδή, $t_1x_1 + \cdots + t_mx_m \in I$.

Θα δείξουμε την (8.4.1) με επαγωγή ως προς m. Για $m = 1$ δεν έχουμε τίποτα να δείξουμε, ενώ για $m = 2$ η (8.4.1) ικανοποιείται από τον ορισμό της κυρτής συνάρτησης.

Για το επαγωγικό βήμα υποθέτουμε ότι $m \geq 2$, $x_1, \dots, x_m, x_{m+1} \in I$ και $t_1, \dots, t_m, t_{m+1} \geq 0$ με $t_1 + \cdots + t_m + t_{m+1} = 1$. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι κάποιος $t_i < 1$ (αλλιώς, η ανισότητα ισχύει τετριμμένα). Χωρίς περιορισμό της γενικότητας υποθέτουμε ότι $t_{m+1} < 1$. Θέτουμε $t = t_1 + \cdots + t_m = 1 - t_{m+1} > 0$. Αφού $x_1, \dots, x_m \in I$ και $\frac{t_1}{t} + \cdots + \frac{t_m}{t} = 1$, η επαγωγική υπόθεση μας δίνει

$$x = \frac{t_1}{t}x_1 + \cdots + \frac{t_m}{t}x_m \in I \tag{8.4.3}$$

και

$$tf(x) = tf\left(\frac{t_1}{t}x_1 + \cdots + \frac{t_m}{t}x_m\right) \leq t_1f(x_1) + \cdots + t_mf(x_m). \tag{8.4.4}$$

Εφαρμόζοντας τώρα τον ορισμό της κυρτής συνάρτησης, παίρνουμε

$$f(tx + t_{m+1}x_{m+1}) \leq tf(x) + t_{m+1}f(x_{m+1}). \tag{8.4.5}$$

Συνδυάζοντας τις δύο προηγούμενες ανισότητες, έχουμε

$$\begin{aligned} f(t_1x_1 + \cdots + t_mx_m + t_{m+1}x_{m+1}) &= f(tx + t_{m+1}x_{m+1}) \\ &\leq t_1f(x_1) + \cdots + t_mf(x_m) \\ &\quad +t_{m+1}f(x_{m+1}). \qquad \square \end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας την ανισότητα του Jensen θα δείξουμε κάποιες κλασικές ανισότητες. Η πρώτη από αυτές γενικεύει την ανισότητα αριθμητικού-γεωμετρικού μέσου.

Ανισότητα αριθμητικού-γεωμετρικού μέσου. *Έστω $x_1, \dots, x_n$ και $r_1, \dots, r_n$ θετικοί πραγματικοί αριθμοί με $r_1 + \cdots + r_n = 1$. Τότε,*

$$\prod_{i=1}^{n} x_i^{r_i} \leq \sum_{i=1}^{n} r_ix_i. \tag{8.4.6}$$

Απόδειξη. Η συνάρτηση $x \mapsto \ln x$ είναι κοίλη στο $(0, +\infty)$. Αφού $r_i > 0$ και $r_1 + \cdots + r_n = 1$, η ανισότητα του Jensen (για την κυρτή συνάρτηση $-\ln$) δείχνει ότι

$$r_1 \ln x_1 + \cdots + r_n \ln x_n \leq \ln(r_1x_1 + \cdots + r_nx_n). \tag{8.4.7}$$

Δηλαδή,

$$\ln(x_1^{r_1} \cdots x_n^{r_n}) \leq \ln(r_1x_1 + \cdots + r_nx_n). \tag{8.4.8}$$

Το ζητούμενο προκύπτει άμεσα από το γεγονός ότι η εκθετική συνάρτηση $x \mapsto e^x$ είναι αύξουσα. $\square$

Ειδικές περιπτώσεις της προηγούμενης ανισότητας είναι οι εξής:
(α) Η κλασική ανισότητα αριθμητικού-γεωμετρικού μέσου

$$(x_1 \cdots x_n)^{1/n} \leq \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} \tag{8.4.9}$$

όπου $x_1, \ldots, x_n > 0$, η οποία προκύπτει από την (8.4.6) αν πάρουμε $r_1 = \cdots = r_n = \frac{1}{n}$.
(β) Η **ανισότητα του Young**: *Αν $x, y > 0$ και $t, s > 0$ με $t + s = 1$, τότε*

$$x^t y^s \leq tx + sy. \tag{8.4.10}$$

Η (8.4.10) εμφανίζεται πολύ συχνά στην εξής μορφή: *αν $x, y > 0$ και $p, q > 1$ με $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, τότε*

$$xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q} \tag{8.4.11}$$

Πράγματι, αρκεί να πάρουμε τους x^p, y^q στη θέση των x, y και τους $\frac{1}{p}, \frac{1}{q}$ στη θέση των t, s. Οι p και q λέγονται *συζυγείς εκθέτες*. Χρησιμοποιώντας αυτή την ανισότητα μπορούμε να δείξουμε την κλασική **ανισότητα του Hölder**: *Έστω p, q συζυγείς εκθέτες. Αν $a_1, \ldots, a_n$ και $b_1, \ldots, b_n$ είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί, τότε*

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^p\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^n b_i^q\right)^{1/q}. \tag{8.4.12}$$

Απόδειξη. Θέτουμε $A = \left(\sum_{i=1}^n a_i^p\right)^{1/p}$, $B = \left(\sum_{i=1}^n b_i^q\right)^{1/q}$ και $x_i = a_i/A$, $y_i = b_i/B$. Τότε, η ζητούμενη ανισότητα (8.4.12) παίρνει τη μορφή

$$\sum_{i=1}^n x_i y_i \leq 1. \tag{8.4.13}$$

Από την (8.4.11) έχουμε

$$\sum_{i=1}^n x_i y_i \leq \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i^p}{p} + \frac{y_i^q}{q}\right) = \frac{1}{p}\sum_{i=1}^n x_i^p + \frac{1}{q}\sum_{i=1}^n y_i^q. \tag{8.4.14}$$

Παρατηρούμε ότι

$$\sum_{i=1}^n x_i^p = \frac{1}{A^p}\sum_{i=1}^n a_i^p = 1 \quad \text{και} \quad \sum_{i=1}^n y_i^q = \frac{1}{B^q}\sum_{i=1}^n b_i^q = 1. \tag{8.4.15}$$

Άρα,

$$\sum_{i=1}^n x_i y_i \leq \frac{1}{p} \cdot 1 + \frac{1}{q} \cdot 1 = 1. \tag{8.4.16}$$

Έπεται η (8.4.12). □.

Επιλέγοντας $p = q = 2$ παίρνουμε την **ανισότητα Cauchy–Schwarz**: *αν $a_1, \ldots, a_n$ και $b_1, \ldots, b_n$ είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί, τότε*

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^n b_i^2\right)^{1/2}. \tag{8.4.17}$$

8.5 Ασκήσεις

Ομάδα Α΄

1. Έστω $f, f_n : I \to \mathbb{R}$. Υποθέτουμε ότι κάθε f_n είναι κυρτή συνάρτηση και ότι $f_n(x) \to f(x)$ για κάθε $x \in I$. Δείξτε ότι η f είναι κυρτή.

2. Έστω $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ ακολουθία κυρτών συναρτήσεων $f_n : I \to \mathbb{R}$. Ορίζουμε $f : I \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \sup\{f_n(x) : n \in \mathbb{N}\}$. Αν η f είναι πεπερασμένη παντού στο I, τότε η f είναι κυρτή.

3. Έστω $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ κυρτές συναρτήσεις. Υποθέτουμε ακόμα ότι η g είναι αύξουσα. Δείξτε ότι η $g \circ f$ είναι κυρτή.

4. Έστω $f : I \to \mathbb{R}$ κυρτή συνάρτηση. Δείξτε ότι

$$f(x_1 + \delta) - f(x_1) \leq f(x_2 + \delta) - f(x_2)$$

για κάθε $x_1 < x_2 \in I$ και $\delta > 0$ για το οποίο $x_1 + \delta, x_2 + \delta \in I$.

5. Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ κυρτή συνάρτηση. Δείξτε με ένα παράδειγμα ότι η f δεν είναι αναγκαστικά συνάρτηση Lipschitz σε ολόκληρο το $[a, b]$, ακόμα και αν υποθέσουμε ότι η f είναι φραγμένη. Επίσης, δείξτε ότι η f δεν είναι αναγκαστικά συνεχής στο $[a, b]$.

6. Έστω $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ κυρτή συνάρτηση και $\xi \in (a, b)$. Δείξτε ότι:

(α) αν η f έχει ολικό μέγιστο στο ξ τότε η f είναι σταθερή.

(β) αν η f έχει ολικό ελάχιστο στο ξ τότε η f είναι φθίνουσα στο (a, ξ) και αύξουσα στο (ξ, b).

(γ) αν η f έχει τοπικό ελάχιστο στο ξ τότε έχει ολικό ελάχιστο στο ξ.

(δ) αν η f είναι γνησίως κυρτή, τότε έχει το πολύ ένα σημείο ολικού ελαχίστου.

7. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ κυρτή συνάρτηση. Αν η f είναι άνω φραγμένη, τότε είναι σταθερή.

8. Δείξτε ότι κάθε κυρτή συνάρτηση ορισμένη σε φραγμένο διάστημα είναι κάτω φραγμένη.

9. Έστω $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ κοίλη, αύξουσα, άνω φραγμένη και παραγωγίσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι

$$\lim_{x \to +\infty} x f'(x) = 0.$$

Ομάδα Β΄

10. Δείξτε ότι αν η $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ είναι κυρτή και $x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_m > 0$, τότε

$$(x_1 + \cdots + x_m) f\left(\frac{y_1 + \cdots + y_m}{x_1 + \cdots + x_m}\right) \leq \sum_{i=1}^{m} x_i f\left(\frac{y_i}{x_i}\right).$$

Δείξτε ότι η $f(x) = (1+x^p)^{1/p}$ είναι κυρτή στο $(0, +\infty)$ όταν $p \geq 1$, και συμπεράνατε ότι

$$((x_1 + \cdots + x_m)^p + (y_1 + \cdots + y_m)^p)^{1/p} \leq \sum_{i=1}^{m} (x_i^p + y_i^p)^{1/p}.$$

11. Δείξτε ότι η συνάρτηση $-\sin x$ είναι κυρτή στο $[0, \pi]$. Χρησιμοποιώντας το δείξτε ότι η μέγιστη περίμετρος n-γώνου που εγγράφεται στο μοναδιαίο κύκλο είναι $2n \sin(\pi/n)$.

12. Έστω $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ θετικοί αριθμοί. Δείξτε ότι

$$(1+\alpha_1)(1+\alpha_2)\cdots(1+\alpha_n) \geq \left(1 + (\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n)^{1/n}\right)^n.$$

[*Υπόδειξη:* Παρατηρήστε ότι η $x \mapsto \ln(1+e^x)$ είναι κυρτή.]

Ομάδα Γ′

13. Έστω $f : I \to \mathbb{R}$ θετική κοίλη συνάρτηση. Δείξτε ότι η $1/f$ είναι κυρτή.

14. Έστω $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ κυρτή συνάρτηση. Δείξτε ότι για κάθε $k \geq 1$,

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos kx dx \geq 0.$$

15. Έστω $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Δείξτε ότι η f είναι κυρτή αν και μόνο αν

$$f(x) \leq \frac{1}{2h} \int_{-h}^{h} f(x+t) dt$$

για κάθε διάστημα $[x-h, x+h] \subset (a, b)$.

16. Έστω $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ κυρτή συνάρτηση και $c \in (a, b)$. Δείξτε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο c αν και μόνο αν

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(c+h) + f(c-h) - 2f(c)}{h} = 0.$$

17. Έστω $f : [0, +\infty)$ κυρτή, μη αρνητική συνάρτηση με $f(0) = 0$. Ορίζουμε $F : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ με $F(0) = 0$ και

$$F(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt.$$

Δείξτε ότι η F είναι κυρτή.