ΔΥΟ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ

Theorem 1:

Τρεις μεταβλητές x, y, z συσχετίζονται μεταξύ τους. Ισχύει

$$dz = \underbrace{\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_y}_{\equiv M} \cdot dx + \underbrace{\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_x}_{\equiv N} \cdot dy$$

$$\boxed{dz = M\,dx + N\,dy}$$

Παραγωγίζουμε τους συντελεστές M, N:

$$\left.\frac{\partial M}{\partial y}\right|_x = \frac{\partial^2 z}{\partial x \cdot \partial y} \quad \text{και} \quad \left.\frac{\partial N}{\partial x}\right|_y = \frac{\partial^2 z}{\partial y \cdot \partial x}$$

Τα δεξιά μέλη των δύο προηγούμενων εξισώσεως είναι ίσα, άρα

$$\boxed{\left.\frac{\partial M}{\partial y}\right|_x = \left.\frac{\partial N}{\partial x}\right|_y}$$

Μεταξύ άλλων, χρησιμεύει πολύ κατά την εξαγωγή των εξ. Maxwell της Θερμοδυναμικής

Theorem 2:

Εαν τα x,y,z συσχετίζονται μεταξύ τους, μπορούμε να γράψουμε μια συνάρτηση f ως συνάρτηση οποιουδήποτε ζεύγους από την τριάδα x,y,z

$$dx = \left.\frac{\partial x}{\partial f}\right|_y df + \left.\frac{\partial x}{\partial y}\right|_f dy$$

$$dy = \left.\frac{\partial y}{\partial f}\right|_z df + \left.\frac{\partial y}{\partial z}\right|_f dz$$

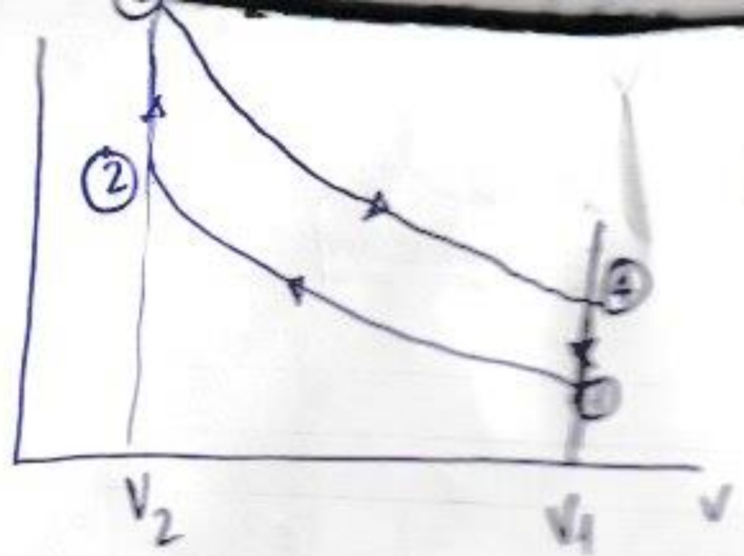
Αντικαθιστούμε την $dy = \dots$ στην προηγούμενη σχ

$$dx = \underbrace{\left[\ \dots\ \right]} df + \underbrace{\left[\ \dots\ \right]} dz$$

Όμως: $$dx = \underbrace{\left.\frac{\partial x}{\partial f}\right|_z} df + \underbrace{\left.\frac{\partial x}{\partial z}\right|_f} dz$$

Άρα $$\boxed{\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_f \cdot \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_f \cdot \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_f = 1}$$

Κύκλος Otto



①→② $T_1 V_1^{\gamma-1} = T_2 V_2^{\gamma-1}$ Αδιαβατική Συμπίεση
δηλ. $\delta Q = 0$

②→③ Ισόχωρη θέρμανση και αύξηση πίεσης

③→④ αδιαβατική εκτόνωση (δηλ. $\delta Q = 0$)

$$T_1 V_2^{\gamma-1} = T_4 V_1^{\gamma-1}$$

④→① Ισόχωρη μείωση T και P

< τις ισόχωρες (άρα έχει νόημα C_V)

② → ③

$$|Q_H| = \int_{T_2}^{T_3} C_V\, dT = C_V\,(T_3 - T_2)$$

επειδή $W=0$
$\delta Q = dU = C_V dT$

④ → ① $|Q_L| = \ldots = C_V(T_4 - T_1)$

$$n = \frac{|Q_L|}{|Q_H|} = 1 - \frac{T_4 - T_1}{T_3 - T_2} \quad (\star)$$

Αδιαβατικές

$$\begin{cases} T_4 V_1^{\gamma-1} = T_3 V_2^{\gamma-1} \\ T_1 V_1^{\gamma-1} = T_2 V_2^{\gamma-1} \end{cases}$$ αφαιρώ κατά μέλη →

$\rightarrow (T_4 - T_1)\, V_1^{\gamma-1} = (T_3 - T_2) V_2^{\gamma-1} \xrightarrow{\text{χιαστί}}$

$\rightarrow \dfrac{T_4 - T_1}{T_3 - T_2} = \left(\dfrac{V_2}{V_1}\right)^{\gamma-1} \quad (\#)$

$(\star)$ λόγω $(\#)$ $\rightarrow n = 1 - \dfrac{1}{\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1}}$ $\Rightarrow n = 1 - \dfrac{T_1}{T_3}$

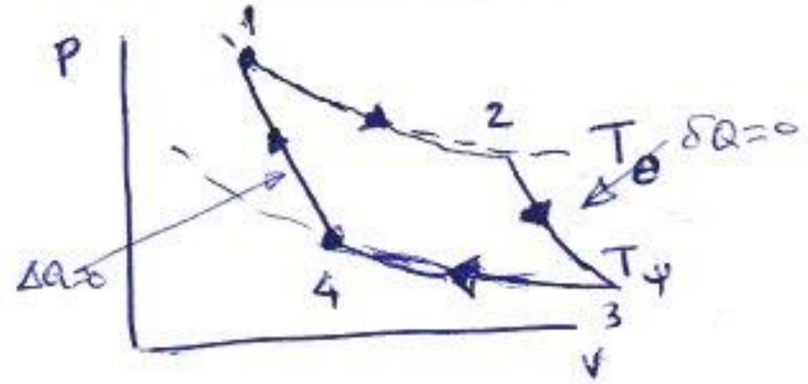
Όμως $\left(\dfrac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1} = \left(\dfrac{V_1}{V_3}\right)^{\gamma-1} = \dfrac{T_3}{T_1}$

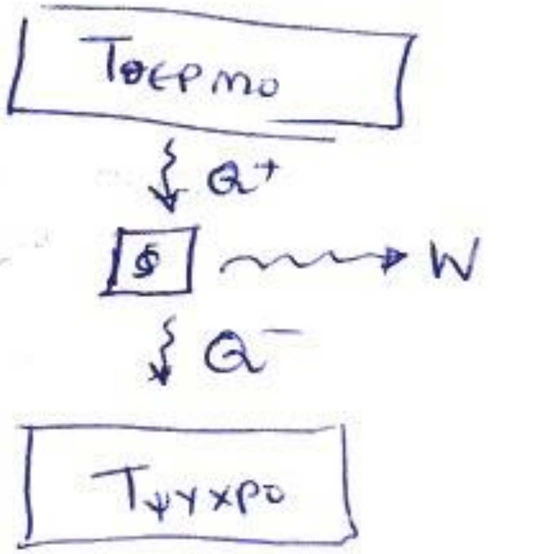
αλλάζω όπως βολεύει

$n = 1 - \dfrac{T_{ελαχ}}{T_{μεγιστ}}$

$PV^{\gamma} = σταθ = T V^{\gamma-1}$

ΚΥΚΛΟΣ CARNOT





Εξ ορισμού Αδιαβατική ($\delta Q=0$)
και ($PV^\gamma =$ σταθ

και $C_{αδιαβ}=0$

- Θερμότητα που προσλαμβάνει η "μηχανή" κατά τη διεργασία ①→② (Ισόθερμη).

$$Q^+ = \int_{1}^{2} \delta Q = \underbrace{\int_{1}^{2} dU}_{\text{μηδέν}} + \int_{1}^{2} p\,dV = 0 + \int_{1}^{2} \frac{nRT_1}{V}\,dV = RT_1 \ln\frac{V_2}{V_1}$$

T_θ

μηδέν
διότι

$U = \frac{3}{2} nRT$

$\Delta U(\text{ισόθερμη}) = 0$

Τψυχρή

- Θερμότητα που αποδίδεται κατά την ισόθερμη

③→④ $$Q^- = \int_{3}^{4} dQ = \;\ldots\ldots\; = nRT_2 \ln\boxed{\frac{V_4}{V_3}}$$

- Οι ②→③ και ④→① είναι αδιαβατικές

δηλ $\delta Q=$ και $$\left.\begin{cases} T_\theta V_2^{\gamma-1} = T_2 V_3^{\gamma-1} \\ T_\theta V_1^{\gamma-1} = T_\psi V_1^{\gamma} \end{cases}\right\} \Rightarrow \boxed{\frac{V_2}{V_1} = \frac{V_3}{V_4}}$$

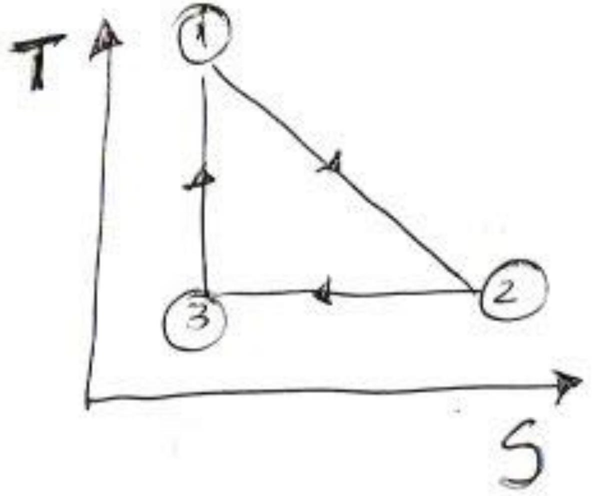
$$\Rightarrow \boxed{\ln(V_2/V_1) = -\ln(V_4/V_3)}$$

Για έναν κύκλο ($\Delta U=0$)

$$\eta_{CARNOT} = \frac{W}{Q_+} = \frac{Q_+ - Q_-}{Q_+} = 1 - \frac{Q^-}{Q^+} = \ldots = 1 - \frac{T_2}{T_1}$$

ΤΕΛΟΣ

Άσκηση   Υπολογισμός $\eta = 1 - \frac{}{|Q^{+}|}$



ΔΙΕΡΓΑΣΙΑ	ΔQ	ΑΙΤΙΟΛΟΓΗΣΗ
1 → 2	>0	αυξάνει S
2 → 3	<0	μειώνεται ...
3 → 1	0	

- Προσφέρουμε ενέργεια στη μηχανή, δηλ. $\Delta Q > 0 \Leftrightarrow \Delta S > 0$

<u>αρχ</u> κατά την 1 → 2

$$|Q^{+}| = \boxed{\cancel{T_2(S_2 - S_1)} + \cancel{\tfrac{1}{2}(S_2 - S_1)(T_1 - T_2)}}$$

$$= \frac{T_1 + T_2}{2}(S_2 - S_1)$$

- $|Q^{-}| =$ κατά την 2 → 3 $= T_2(S_2 - S_1)$

κλπ.