

ΔΥΟ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ

Theorem 1:

Τρεις μεταβλητές x, y, z συσχετίζονται μεταξύ τους - Ισχύει

$$dz = \underbrace{\frac{\partial z}{\partial x} \Big|_y}_{\equiv M} \cdot dx + \underbrace{\frac{\partial z}{\partial y} \Big|_x}_{\equiv N} \cdot dy$$

$$dz = M dx + N dy$$

Παραγωγίζουμε τους συντελεστές M, N :

$$\frac{\partial M}{\partial y} \Big|_x = \frac{\partial^2 z}{\partial x \cdot \partial y} \quad \text{και} \quad \frac{\partial N}{\partial x} \Big|_y = \frac{\partial^2 z}{\partial y \cdot \partial x}$$

Τα δεξιά μέλη των δύο προηγούμενων εξισώσεων είναι ίσα, άρα

$$\frac{\partial M}{\partial y} \Big|_x = \frac{\partial N}{\partial x} \Big|_y$$

Μεταξύ άλλων, χρησιμεύει πολύ για την εξαγωγή των ε3. Maxwell της θερμοδυναμικής

Theorem 2:

Εάν τα x, y, z συνδέονται μεταξύ τους, μπορούμε να γράψουμε μια συνάρτηση f ως συνάρτηση οποιαδήποτε ζεύγους από των τριών x, y, z

$$dx = \left. \frac{\partial x}{\partial f} \right|_y df + \left. \frac{\partial x}{\partial y} \right|_f dy$$

$$dy = \left. \frac{\partial y}{\partial f} \right|_z df + \left. \frac{\partial y}{\partial z} \right|_f dz$$

Αντικαθιστούμε την $dy = \dots$ στην προηγούμενη ως

$$dx = \left[\dots \right] df + \left[\dots \right] dz$$

$$\text{Οπώς: } dx = \left. \frac{\partial x}{\partial f} \right|_z df + \left. \frac{\partial x}{\partial z} \right|_f dz$$

Απλ

$$\left(\frac{\partial x}{\partial y} \right)_f \cdot \left(\frac{\partial y}{\partial z} \right)_f \cdot \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)_f = 1$$

ESAROM

ESIS-SEEN MITXUWEL

• $\text{EON: } TdS = dU + pdV \rightarrow dU = TdS - pdV \rightarrow$

$df = A dx + B dy$
 $\Leftrightarrow \left. \frac{\partial A}{\partial y} \right|_x = \left. \frac{\partial B}{\partial x} \right|_y$

$\left. \frac{\partial T}{\partial V} \right|_S = \left. \frac{\partial(-p)}{\partial S} \right|_V \rightarrow$

• $H = U + pV \rightarrow dH = dU + Vdp + pdV = TdS + Vdp \rightarrow$

$dU = TdS - pdV$

$\left. \frac{\partial T}{\partial p} \right|_S = \left. \frac{\partial V}{\partial S} \right|_p$

$\left. \frac{\partial T}{\partial V} \right|_S = - \left. \frac{\partial p}{\partial S} \right|_V$

• $F = U - TS \rightarrow dF = dU - TdS - SdT = -pdV - SdT \rightarrow$

EON

$\left. \frac{\partial p}{\partial T} \right|_V = \left. \frac{\partial S}{\partial V} \right|_T$

• $G = U - TS + pV \rightarrow dG = dU + TdS - SdT + pdV + Vdp = Vdp - SdT \rightarrow$

EON

$\left. \frac{\partial V}{\partial T} \right|_p = \left. \frac{\partial S}{\partial p} \right|_T$