ΜΕΛΕΤΗ ΤΗΣ ΚΑΤΑΝΟΜΗΣ Μ.Β.

Βρήκαμε την κανονικοποιημένη πυκνότητα πιθαν

$$p_{MB}(v) = 4\pi\left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{3/2}\cdot v^2\cdot e^{-\frac{mv^2}{2k_BT}} \qquad \text{(MB1)}$$

- Είναι θετική
- Τουλάχιστον 1 μέγιστο
- $\int_0^{+\infty} p(v)\,dv = 1$
- Φυσικώς, υπάρχει άνω όριο στη μέγιστη ταχύτητα

Διευκολύνει μαθηματικά και εισάγει μικρό σφάλμα να θεωρήσω δεξί όριο το $+\infty$

v_{peak} : πιθανότερη ταχύτητα
(δηλ. αυτήν που έχει τα μεγαλύτερο ποσοστό $\Delta N/N$ των σωματίων

$\langle v \rangle$

$v_{rms} = \sqrt{\langle v^2 \rangle}$

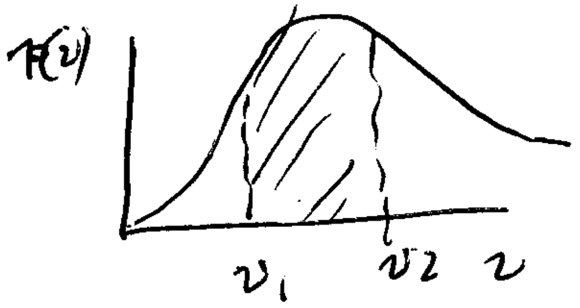
$$v_{peak} < \langle v \rangle < \sqrt{\langle v^2 \rangle}$$

Ενθετο Γενικευμένης Συνάρτησης Γ

$$\int_0^{+\infty} x^{\nu} e^{-(\rho x)^{\mu}} = \frac{1}{\mu \cdot \rho^{\nu+1}} \cdot \Gamma\left(\frac{\nu+1}{\mu}\right)$$

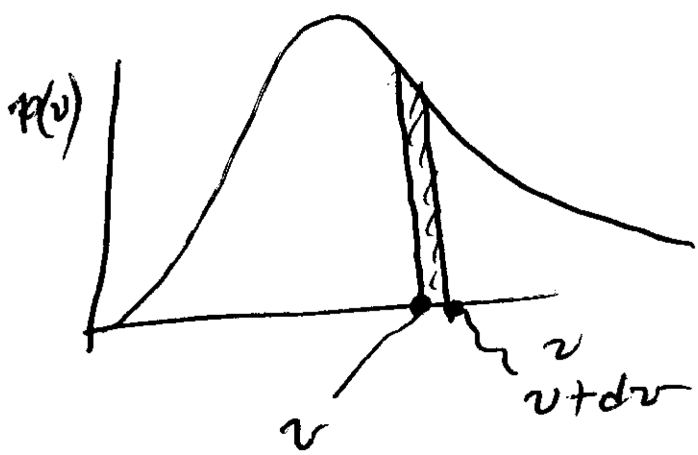
ΠΟΣΟΣΤΟ ΣΩΜΑΤΙΔΙΩΝ

- Ποσοστό σωματίων με $v_1 < v < v_2$:



$$\frac{\Delta N(v_1 < v < v_2)}{N} = \int_{v_1}^{v_2} p(v)\,dv$$

- Πιθανότητα ένα σωμάτιο έχει ταχύτητα από v έως $v+dv$



$$\frac{dN}{N} = f(v)\,dv$$

ΕΥΡΕΣΗ ΤΗΣ v_{peak}

Προσδιορίζεται από τη συνθήκη

$$\left.\frac{d\,p(v)}{dv}\right|_{v=v_{peak}} = 0 \qquad \text{(MB2)}$$

$$\frac{dp(v)}{dv} = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{3/2} \frac{d}{dv}\left\{ v^2 \cdot e^{-\frac{m}{2k_BT}v^2} \right\}$$

$$= 4\pi\left(\dots \right)^{3/2} \cdot \left\{ -\frac{m}{2k_BT} \cdot 2v e^{-\frac{m}{2k_BT}v^2} + e^{-\frac{m}{2k_BT}v^2} \cdot 2v \right\} \quad \text{MB3}$$

$$\text{MB1} + \text{MB2} \rightsquigarrow \quad v_{peak}^2 = \frac{2k_BT}{m}$$

ΕΥΡΕΣΗ ΤΗΣ $\langle v \rangle$ ΜΕ ΧΡΗΣΗ ΤΗΣ Γ

$$\langle v \rangle = \int_0^{\infty} v \cdot p(v)\, dv =$$

$$= 4\pi \left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{3/2} \cdot \frac{1}{2 \cdot \left(\sqrt{\frac{m}{2k_BT}}\right)^4} \Gamma\left(\frac{4}{2}\right)$$

$$= 2\pi \left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right) \frac{1}{\left(\frac{m}{2k_BT}\right)^2} =$$

Εφαρμογή 1

Η κατανομή MB για την συνιστώσα v_x είναι $p(v_x)dv_x = \left(\frac{2}{2\pi k_B T}\right)^{1/2} \cdot e^{-\frac{m}{2k_BT}v_x^2} dv_x$

Απόδειξη

- Η κατανομή σε σφαιρικές συντεταγμένες είναι: $$p(v)dv = 4\pi\left(\frac{m}{2\pi k_BT}\right)^{3/2} v^2 e^{-\frac{m}{2k_BT}v^2} dv$$
- Την γράφουμε σε καρτεσιανές συντεταγμένες

$$4\pi v^2 dv = dv_x\, dv_y\, dv_z \quad \text{και} \quad v^2 = v_x^2+v_y^2+v_z^2$$

- $$p(v)dv = \left(\frac{m}{2\pi k_BT}\right)^{3/2} e^{-\frac{m}{2k_BT}(v_x^2+v_y^2+v_z^2)} dv_x\, dv_y\, dv_z$$

$$= \underbrace{\left(\dots\right)^{1/2} e^{-\frac{m}{2k_BT}v_x^2} dv_x}_{p(v_x)dv_x} \cdot \underbrace{\left(\dots\right)^{1/2} e^{-\frac{m}{2k_BT}v_y^2} dv_y}_{p(v_y)dv_y} \cdot \underbrace{\left(\dots\right)^{1/2} e^{-\frac{m}{2k_BT}v_z^2} dv_z}_{p(v_z)dv_z}$$

$$\Longrightarrow p(v_x)dv_x = \left(\frac{m}{2\pi k_BT}\right)^{1/2} e^{-\frac{m}{2k_BT}v_x^2} dv_x$$

Σχόλιο

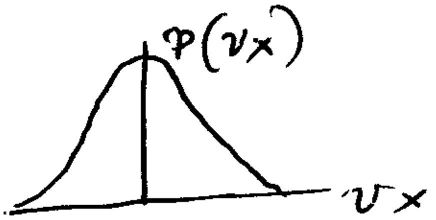
Αποτελεί λύση της άσκησης 7

Εφαρμογή 2

Η μέση τιμή της ταχύτητας στον x- άξονα είναι μηδέν

Απόδειξη

Στην εφαρμογή 1 βρήκαμε την $\varphi(\upsilon_x)$



$\Longrightarrow$ Από τη συμμετρία της $\langle \upsilon_x \rangle = 0$

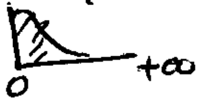
Εναλλακτικά:

$$\langle \upsilon_x \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \upsilon_x \varphi(\upsilon_x)\, d\upsilon_x = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{1/2} \upsilon_x\, e^{-\frac{m}{2 k_B T}\upsilon_x^2}\, d\upsilon_x$$

Περιττή   Άρτια

Το γινόμενο είναι περιττή

→ ολοκλήρωμα περιττής με συμμετρικά όρια ολοκλήρωσης $= 0$

Δηλ. το αλγεβρικό άθροισμα των εμβαδών  και  είναι μηδέν

Εφαρμογή 3

Υπολογισμός της μέσης τιμής της ταχύτητας των μορίων προς τη θετική κατεύθυνση του άξονα -x (δηλαδή του $\langle \vec{v}_x \rangle$)

(το $\rightarrow$ δηλώνει κίνηση προς δεξιά – δεν είναι διάνυσμα)

Υπόδειξη: Κίνηση προς τα δεξιά, σημαίν[ει] ολοκλήρωση από 0 έως $+\infty$

Λύση:

$$\langle \vec{v}_x \rangle = \int_0^{+\infty} v_x\, p(v_x)\, dv_x \underset{\text{βλ. Εφαρμογή 1}}{=} \left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{1/2} \int_0^{+\infty} v_x\, e^{-\frac{m}{2k_BT} v_x^2}\, dv_x$$

$$= \left(\ldots\right)^{1/2} \cdot \frac{1}{2\left(\sqrt{\frac{m}{2k_BT}}\right)^2} \cdot \Gamma(1) =$$

$$= \left(\ldots\right)^{1/2} \cdot \frac{1}{2\left(\frac{m}{2k_BT}\right)} = \left(\ldots\right)^{1/2} \cdot \left(\frac{m}{k_BT}\right)^{-1} = \sqrt{\frac{k_BT}{2\pi m}}$$

Άρα: $\langle \vec{v}_x \rangle = \sqrt{\frac{k_BT}{2\pi m}}$

Εφ

Εφαρμογή 4

$$\langle v_x^2 \rangle = \frac{k_B T}{m}$$

Απόδειξη.

$$\langle v_x^2 \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} v_x^2 \, p(v_x)\, dv_x = \left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{1/2} \cdot 2 \, \frac{1}{2\left(\frac{m}{2k_B T}\right)^{3/2}} \, \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) =$$

βλ. Εφαρμογή 1

$$= \left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{1/2} \cdot \left(\frac{m}{2k_B T}\right)^{-3/2} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \frac{kT}{m}$$

Άρα $\langle v_x^2 \rangle = \langle v_y^2 \rangle = \langle v_z^2 \rangle = \frac{k_B T}{m}$

Παρατηρούμε ότι:

$$\langle v_x^2 \rangle + \langle v_y^2 \rangle + \langle v_z^2 \rangle = \frac{3k_B T}{m} \Rightarrow$$

$$\langle v^2 \rangle = \frac{3k_B T}{m}$$