

Κινητική αερίων 2 - Maxwell

- Στοιχεία Θεωρίας Πιθανοτήτων:
- **Πυκνότητα πιθανότητας** σε διακριτές και συνεχείς ποσότητες, συνθήκη κανονικοποίησης
- Διασπορά
- Κατανομή ως προς τις **ενέργειες**
- **Κατανομή Gibbs**
- Μαθηματικό βοήθημα: **διπλά, τριπλά ολοκληρώματα**, το dV σε καρτεσιανές, κυλινδρικές και σφαιρικές συντεταγμένες
- Κατανομή **Maxwell** (ταχυτήτων)
- Αριθμός μορίων **σε τοίχωμα**
- **Πειραματική επιβεβαίωση** κατανομής Maxwell
- Σχόλια επ' αυτής

1

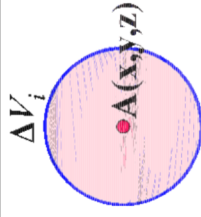
Εκτός από τις **ΔΙΑΚΡΙΤΕΣ** ποσότητες (π.χ. σωματίδια) στη Φυσική υπάρχουν και **άλλες** ποσότητες, οι τιμές των οποίων είναι **ΣΥΝΕΧΕΙΣ** (π.χ. ταχύτητα)

Για τις ποσότητες αυτές χρησιμοποιούμε την έννοια **ΠΥΚΝΟΤΗΤΑ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ**

Έστω τυχαίο σημείο στο χώρο, το $A(x,y,z)$ (όταν χρησιμοποιούμε τον όρο «χώρος», δεν πρέπει να ξεχνάμε ότι μιλάμε για ταχύτητες) και έστω ΔV_i **μικρός όγκος γύρω από το σημείο αυτό**. Τότε πυκνότητα πιθανότητας f είναι η ακόλουθη ποσότητα:

$$f(x,y,z) = \lim_{\Delta V_i \rightarrow 0} \frac{P(\Delta V_i)}{\Delta V_i} = \lim_{\Delta V_i \rightarrow 0} \frac{\Delta N}{N \Delta V_i}$$

$P(\Delta V_i)$ – η πιθανότητα να βρούμε το σωματίδιο στον όγκο ΔV_i

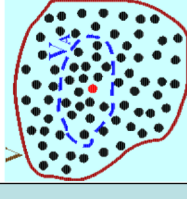


3

ΜΕΡΙΚΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΤΗΣ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΩΝ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ

Αν σε σύστημα που διατηρείται σε σταθερές συνθήκες κά- νουμε N παρατηρήσεις και από αυτές στις N_A παρατηρήθηκε το γεγονός A , τότε λέμε ότι η πιθανότητα να συμβεί αυτό το γεγονός δίνεται από τη σχέση:

$$P(A) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N_A}{N}$$



-Όγκος V απο- μονωμένος,
-Όγκος V_A (με νοητά όρια)
Εξετάζουμε τη θέση του ●

σε διαφορετικές χρονικές στιγ- μές **N φορές** και έστω **N_A φορές** το βρίσκουμε στο V_A :

Στην πράξη βρίσκουμε το N_A [το $P(A)$] όχι με παρατηρήσεις, αλλά με τη χρήση της λογικής (π.χ. ζάρι) ή της Φυσικής (π.χ. όγκος)

2

Τη σχέση για την πυκνότητα πιθανό- τητας μπορούμε να τη γράψουμε λίγο διαφορετικά

$$f(x,y,z) = \frac{P(dV)}{dV} \equiv \frac{dP}{dV}$$

Από εδώ εύκολα προκύπτει:

$$f(x,y,z)dV = P(dV) \equiv dP$$

Αν τώρα **ολοκληρώσουμε** ως προς τον όγκο για όλο τον διαθέσιμο «χώρο» στον οποίο μπορεί να βρίσκεται το σωματίδιο, είναι προφανές ότι η πιθανότητα θα είναι ίση με τη **ΜΟΝΑΔΑ**

Από εδώ προκύπτει η πολύ σημαντική σχέση για την πυκνότητα πιθανότητας

$$\int_{V_{OA}} f(x,y,z) dV = 1$$

Διατήρηση Κανονικοποίησης

BI

Στην πραγματικότητα το ολοκλήρωμα είναι **τριπλό**, διότι $dV = dx dy dz$

4

ΜΕΣΗΤΙΜΗ

α) Διάκριτες ποσότητες

Μετράμε το ΙΔΙΟ μέγεθος N φορές και βρίσκουμε τις τιμές $x_1, x_2, \dots, x_N$. Τότε, η μέση τιμή του x είναι:

$$\langle x \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i$$

Ενώ η μέση τιμή του x^2 είναι:

$$\langle x^2 \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i^2$$

ΜΕΣΗΤΙΜΗ

α) Διάκριτες ποσότητες

Σε πολλές περιπτώσεις (συνήθως όταν έχουμε να κάνουμε με **ΤΕΡΑΣΤΙΟ** αριθμό μορίων) ο αριθμός των τιμών που παρατηρούμε είναι σχετικά μικρός. Τότε κάθε τιμή εμφανίζεται πολλές φορές.

Έστω λοιπόν ότι κάναμε N μετρήσεις. Οι δυνατές τιμές έστω ότι είναι N_0 ($N_0 < N$). Έστω λοιπόν ότι κάθε τιμή x_j εμφανίζεται N_j φορές.

Τότε για την μέση τιμή θα έχουμε:

$$\langle x \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N_0} N_j x_j = \sum_{j=1}^{N_0} \frac{N_j}{N} x_j$$

Αν υποθέσουμε ότι $N \rightarrow \infty$, τότε ο λόγος N_j / N θα είναι η πιθανότητα να βρούμε την τιμή x_j . Δηλαδή:

$$\langle x \rangle = \sum_{j=1}^{N_0} P_j x_j$$

ΜΕΣΗΤΙΜΗ

α) Διάκριτες ποσότητες ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

i	x_i
1	2
2	4
3	1
4	2
5	2
6	3
7	3
8	2

Βλέπουμε ότι εδώ έχουμε 8 μετρήσεις (N), αλλά 4 τιμές (N_0).

Τώρα λοιπόν φτιάχνουμε τον πίνακα:

x_j	N_j
1	1
2	4
3	2
4	1

Ας υπολογίσουμε τη μέση τιμή με τους 2 τρόπους

$$\langle x \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i$$

$$\langle x \rangle = \frac{1}{8} (2 + 4 + 1 + 2 + 2 + 3 + 3 + 2) = \frac{19}{8}$$

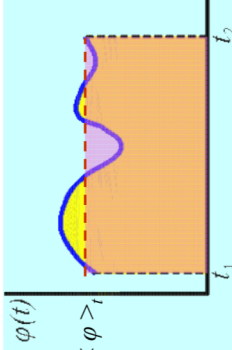
$$\langle x \rangle = \frac{1}{8} 1 + \frac{4}{8} 2 + \frac{2}{8} 3 + \frac{1}{8} 4 = \frac{19}{8}$$

$$\langle x \rangle = \sum_{j=1}^{N_0} P_j x_j$$

ΜΕΣΗΤΙΜΗ

β) Συνεχείς ποσότητες ΓΕΝΙΚΟΣ ΟΡΙΣΜΟΣ

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε μια συνάρτηση $\varphi(t)$ και θέλουμε να βρούμε τη μέση τιμή της στην περιοχή $t_1 \leq t \leq t_2$.



Για να το κάνουμε αυτό πρέπει να βρούμε το ύψος ενός ορθογωνίου παραλληλογράμιου, το εμβαδόν του οποίου είναι ίσο με το εμβαδόν μεταξύ της $\varphi(t)$ και του άξονα t .

ΕΠΟΜΕΝΩΣ

$$\langle \varphi \rangle_t = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} \varphi(t) dt$$

ΜΕΣΗΤΗ

β) Συνεχείς ποσότητες ΧΡΗΣΗ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ

Χρησιμοποιούμε τον τύπο που αποδείξαμε πριν

$$\langle x \rangle = \sum_{j=1}^{N_0} P_j x_j$$

Παίρνουμε υπόψη μας ότι τώρα έχουμε συνεχείς ποσότητες

Αυτό σημαίνει: 1. Αντικαθιστούμε το άθροισμα με ολοκλήρωμα

2. Αντικαθιστούμε το P με dP

Αν θυμηθούμε τον ορισμό της πυκνότητας πιθανότητας, που μας έδωσε (για τη μεταβλητή t):

$$dP = f(t) dt$$

$$\langle x \rangle = \int_{t_1}^{t_2} \varphi(t) f(t) dt$$

ΒΡΙΣΚΟΥΜΕ

?

ΔΙΑΚΗΛΗ ΚΙΝΗΣΗ

1. Σωματίδιο κινείται πάνω στον θετικό ημιάξονα των x και ξέρουμε ότι η πιθανότητα να βρίσκεται αυτό το σωματίδιο στο διάστημα από x έως $x+dx$ είναι ανάλογη του $e^{-\lambda x}$. Υπολογίστε το $\langle x \rangle$ και το $\langle x^2 \rangle$.

Σύμφωνα με τα δεδομένα της άσκησης θα πρέπει να ισχύει

$$dP \sim e^{-\lambda x} dx$$

Για αντικατάστησουμε το σύμβολο της αναλογίας με το σύμβολο της ισότητας θα πρέπει να βάλουμε και κάποια σταθερά:

$$dP = A e^{-\lambda x} dx$$

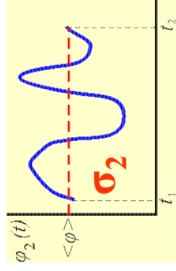
Είναι από εδώ σαφές πως η συνάρτηση $f(x) = A e^{-\lambda x}$ είναι ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΠΥΚΝΟΤΗΤΑΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ

ΔΙΑΣΠΟΡΑ (Γενικός ορισμός)

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε 2 συναρτήσεις $\varphi_1(t)$ και $\varphi_2(t)$, που στην περιοχή $t_1 \leq t \leq t_2$, έχουν την ίδια μέση τιμή $\langle \varphi \rangle$.



Είναι προφανές πως οι 2 συναρτήσεις είναι ΕΝΤΕΛΩΣ διαφορετικές



Για να εκτιμήσουμε τη διαφορά τους χρησιμοποιούμε την έννοια ΔΙΑΣΠΟΡΑ που εκφράζεται με την τυπική απόκλιση

$$\sigma^2 = \langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle = \langle x^2 - 2x \langle x \rangle + \langle x \rangle^2 \rangle = \langle x^2 \rangle - 2\langle x \rangle \langle x \rangle + \langle x \rangle^2 = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2$$

Η διασπορά χαρακτηρίζει το πόσο «παίρνει» το μέγεθος γύρω από τη μέση τιμή

Για τα σχήματά μας

$$\sigma_1 < \sigma_2$$

κανονική

Βεβαίως τη σταθερά A ΔΕΝ ΤΗΝ ΕΠΕΡΟΥΜΕ και πρέπει να την υπολογίσουμε

Χρησιμοποιούμε τη συνθήκη κανονικοποίησης:

$$\int_0^\infty f(x) dx = A \int_0^\infty e^{-\lambda x} dx = 1$$

$$A \left[-\frac{e^{-\lambda x}}{\lambda} \right]_0^\infty = 1 \Rightarrow A \frac{1}{\lambda} = 1 \Rightarrow A = \lambda$$

Δηλαδή η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας θα έχει τη μορφή:

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$$

➡ Η άσκηση συνεχίζεται