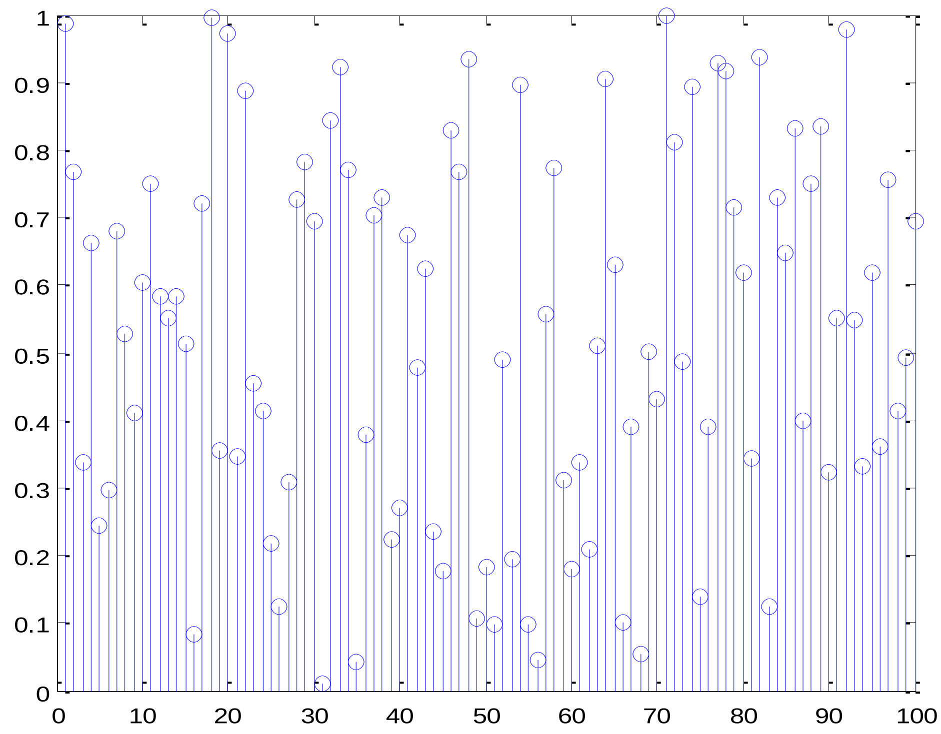
Βασική Θεωρία Πιθανοτήτων με χρήση Matlab

Κολοβού Αθανασία
http://users.uoa.gr/~akolovou/

Τυχαίοι Αριθμοί

- Με την εντολή rand(a,b) παίρνουμε έναν axb πίνακα με «ψευδοτυχαίους» αριθμούς στο διάστημα (0,1)

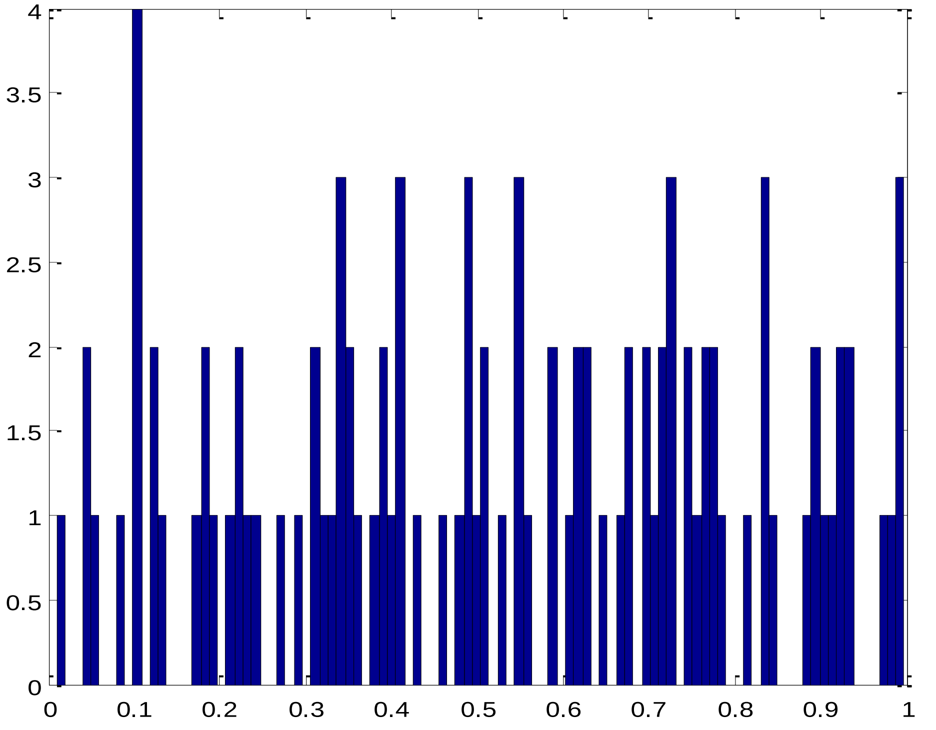
```
x=rand(100,1);
stem(x);
```



Histograms

- Μπορούμε να δούμε την κατανομή των τιμών αυτών με την εντολή hist

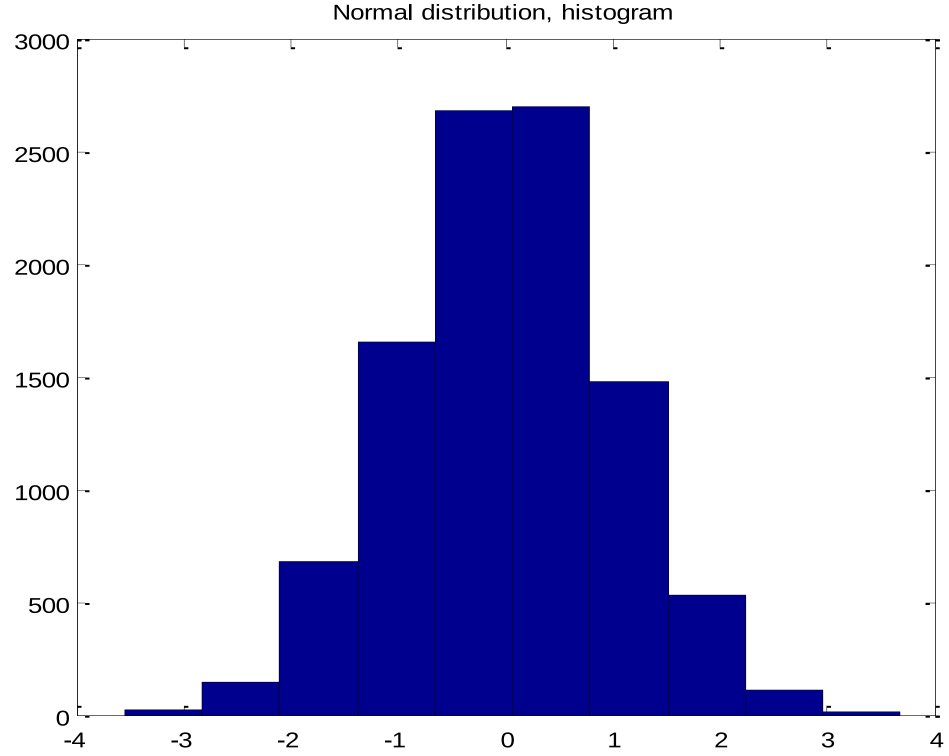
```
hist(x,100)
```



Τυχαίοι Αριθμοί

- Με την εντολή randn(a,b) παίρνουμε έναν axb πίνακα με «ψευδοτυχαίους» αριθμούς οι οποίοι ακολουθούν την κανονική κατανομή

```
x=randn(1,10000);
hist(x)
```



Πείραμα 1ο – Ρίψη νομίσματος

- Έστω ότι έχουμε ένα νόμισμα με πλευρές Κ= κεφαλή (Heads) και Γ= γράμματα (Tails)

- Θεωρούμε ότι η πιθανότητα να εμφανιστεί Κ ή Γ είναι ίδια (P(K)=P(Γ)=0.5)

- Θέλουμε να υπολογίσουμε την πιθανότητα να εμφανιστεί 3 φορές Κ σε 4 ρίψεις του νομίσματος

- Θα ρίξουμε επομένως το νόμισμα 4 φορές και θα καταγράψουμε πόσες φορές πήραμε Κ . Έστω $x_1 = 2$

- Επαναλαμβάνουμε το πείραμα 4 φορές με $x_2 = 1$

- Αν κάνουμε το πείραμα 1000 φορές θα καταγράψουμε την ακολουθία { $x_1, x_2, \ldots x_{1000}$ }

Πείραμα 1ο – Ρίψη νομίσματος

- Για να βρούμε τη ζητούμενη πιθανότητα χρησιμοποιούμε το λόγο της *σχετικής συχνότητας* (relative frequency)

$$P[K=3] = \frac{\text{Αριθμός} \quad \text{επαναλλήψεων} \quad \text{όπου} \quad \text{πήραμε} \quad 3 \quad \text{φορές} \quad \text{K}}{1000}$$

- Είναι προφανές η σημασία της προσομοίωσης σε υπολογιστή μιας τέτοιας διαδικασίας

- Ας δούμε το ίδιο πείραμα στο Matlab

Πείραμα 1ο – Ρίψη νομίσματος

- Ορίζουμε το πρόβλημα στο Matlab

```
x = rand;
if(x < 0.5),
        coin_toss=1; % Head
  else
        coin_toss =0; % Tail
end
```

- Το αποτέλεσμα σε μία ρίψη είναι

```
x =    0.9227
coin_toss =   0
```

- Η λογική έκφραση x<0.5 στο Matlab δίνει αποτέλεσμα 1 αν είναι αληθής και 0 αν είναι ψευδής.

Πείραμα 1ο – Ρίψη νομίσματος

- Μπορούμε να γράψουμε το προηγούμενο παράδειγμα λίγο καλύτερα , σε λιγότερες γραμμές

```
x = rand
coin_toss = (x < 0.5)

x = 0.1572
coin_toss =   1
```

- Ας δούμε τώρα το πείραμα στο Matlab όπου ρίχνουμε το νόμισμα 1000 φορές.

```
x=rand(1000,1); %δημιουργούμε πίνακα με τυχαίους αριθμούς

p=sum(x<0.5)/1000 %μετράμε τον αριθμό των Heads και διαιρούμε
        με το πλήθος των ρίψεων
  p =    0.5110
```

- Παρατηρούμε ότι όταν ρίξουμε το νόμισμα 1000 φορές , η αναλογία του K είναι κοντά στην πραγματική τιμή 0.5.

Πείραμα 1ο – Ρίψη νομίσματος

- Θα μπορούσαμε να έχουμε το ίδιο πείραμα με P(K)=0.4 , δηλαδή τα γεγονότα να μην είναι ισοπίθανα

```
x=rand(1000,1);
p=sum(x<0.4)/1000

 p =    0.4160
```

- Στο πείραμα ρίψης νομίσματος γνωρίζαμε ότι η πιθανότητα θα είναι 0.5

- Η πραγματική όμως δυναμική τέτοιων προσομοιώσεων είναι ότι μπορούμε να υπολογίζουμε πιθανότητες που δεν είναι γνωστές από πριν.

- Τέτοια παραδείγματα θα δούμε στη συνέχεια.

Πείραμα 2ο – Ρίψη ζαριού

- Αν ρίξουμε ένα ζάρι τα πιθανά αποτελέσματα είναι στο διάστημα {1,2,3,4,5,6}.

- Αν τρέξουμε την εντολή `k=(6*rand(5,1))`

- Θα πάρουμε 5 τυχαίες τιμές στο διάστημα [0,6]

```
k =
      5.8928
      3.7745
      4.3587
      1.6255
      1.2597
```

Πείραμα 2ο – Ρίψη ζαριού

- Το ζητούμενο είναι όμως το διάστημα [1,6] και συγκεκριμένα μόνο οι ακέραιες τιμές {1,2,3,4,5,6} .
  - Βήμα 1ο : προσθέτω +1

```
k=(6*rand(5,1))+1
k =
        3.6485
        3.3918
        5.6665
        6.6223
        3.5569
```

  - Βήμα 2ο: Χρησιμοποιούμε την εντολή fix του Matlab για να στρογγυλοποιήσουμε τους αριθμούς «προς τα κάτω» στον πλησιέστερο ακέραιο.

```
k=fix(k)
k =
        3
        3
        5
        6
        3
```

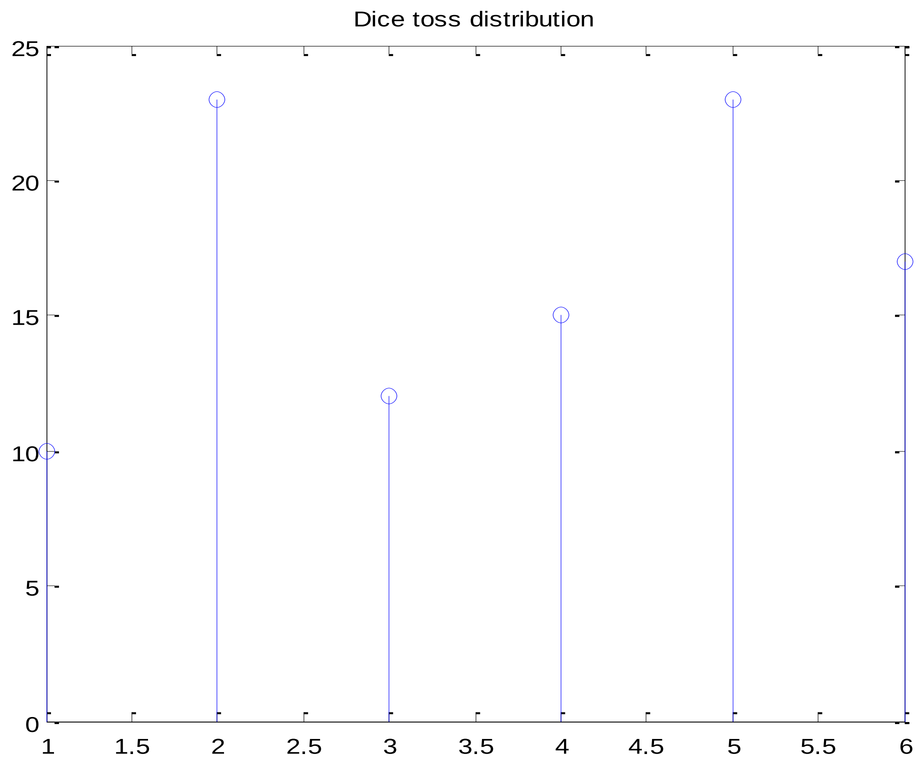
Πείραμα 2ο – Ρίψη ζαριού

- Έστω ότι θέλουμε 100 παρατηρήσεις από τη ρίψη ενός ζαριού.

```
x = fix(6*rand(1, 100)+1);
[h, xbin] = hist(x, 1:6);
stem(xbin, h);
```

```
xbin = 1      2      3      4      5      6

h =     21     16     19     15     16     13
```

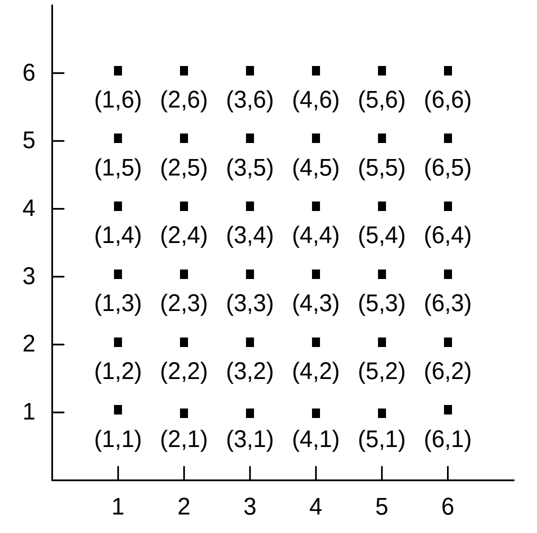


Πείραμα 3ο – Άθροισμα ζαριών

- Ας δούμε τώρα το άθροισμα των δύο ζαριών. Θα προσομοιώσουμε πείραμα για 1000 παρατηρήσεις

- Τα πιθανά αποτελέσματα αυτού του πειράματος συνοψίζονται στο παρακάτω σχήμα (δειγματοχώρος).

```
x1=fix(6*rand(1000,1)+1); %ρίψη ενός ζαριού
x2=fix(6*rand(1000,1)+1); %ρίψη ενός ζαριού
y=x1+x2; %άθροισμά τους
```



Πείραμα 3ο – Άθροισμα ζαριών

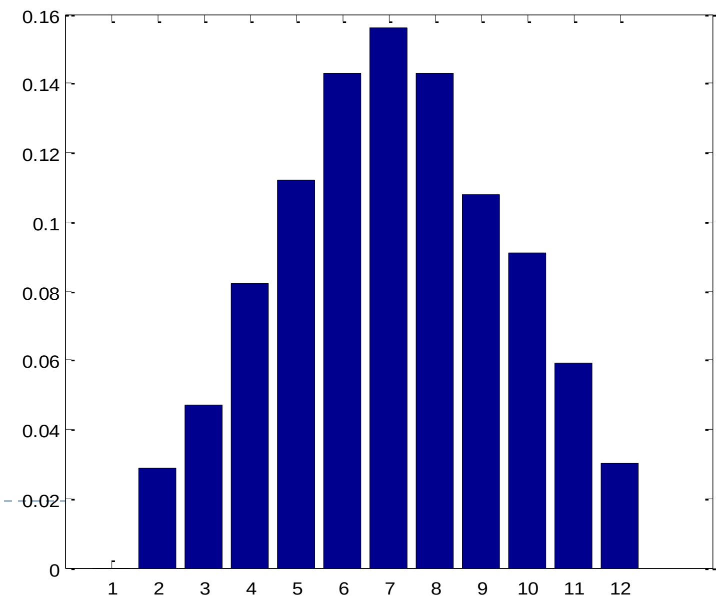
- Υπολογίζουμε τη σχετική συχνότητα για κάθε μία τιμή αθροίσματος

```
sum(y==2)/1000      ans = 0.0290
sum(y==3)/1000      ans = 0.0470
sum(y==4)/1000      ans = 0.0820
```

κτλ …

- Η καλύτερα τα συνοψίζουμε σε λιγότερες εντολές

```
for i=2:12
     z(i)=sum(y==i)/1000;
end
bar(z)  %A bar graph displays the values
        in a vector or matrix as
        horizontal or vertical bars
```



Παράδειγμα 1

- Ρίχνουμε δύο ζάρια 100 φορές. Να υπολογιστούν οι παρακάτω σχετικές συχνότητες
  1. Το άθροισμα να διαιρείται με το 4
  2. Και οι δύο αριθμοί να είναι άρτιοι
  3. Οι αριθμοί να διαφέρουν κατά δύο

- Με τον ίδιο τρόπο που αναφέραμε πριν θα ορίσουμε το πείραμα τύχης

```
x1=fix(6*rand(100,1)+1);
x2=fix(6*rand(100,1)+1);
y=x1+x2;
```

- 1. Θα χρησιμοποιήσουμε την εντολή

```
sum(y/4==1)/100 ans =    0.1100
```

Παράδειγμα 1 (συνέχεια)

- 2. Αφού και οι δύο αριθμοί θα είναι άρτιοι, άρα και το άθροισμα τους θα είναι άρτιο.
  - Θα χρησιμοποιήσουμε την εντολή mod που δίνει το υπόλοιπο της διαίρεσης

```
sum(mod(y,2)==0)/100          ans =     0.5600
```

- 3. Οι αριθμοί που διαφέρουν κατά δύο είναι {1-3,3-1,2-4,4-2,3-5,5-3} . Αλλά στο Matlab μπορώ πολύ απλά να βρω τη διαφορά των δύο αριθμών

```
z=abs(x1-x2);
sum (z ==2)/100     ans =    0.2700
```

Παράδειγμα 2

- Αν ρίξουμε ένα ζάρι 4 φορές τουλάχιστον 1 φορά θα εμφανιστεί το 6 . Στοίχημα ;
- Θα τρέξουμε το πείραμα αρχικά για 100 επαναλήψεις.

```
roll=100;
for i=1:roll
out=floor(6*(rand(4,1)))+1; %4 ρίψεις ενός ζαριού
sixes=sum(out==6); %πόσες φορές πήραμε 6 στις ρίψεις
success(i)=sum(sixes>=1); %επιτυχία αν πήραμε 6 τουλάχιστον 1 φορά
end
sum(success)

ans =      48   %a six came up in the first four rolls 48.6 percent of the time
```

Παράδειγμα 2 (συνέχεια)

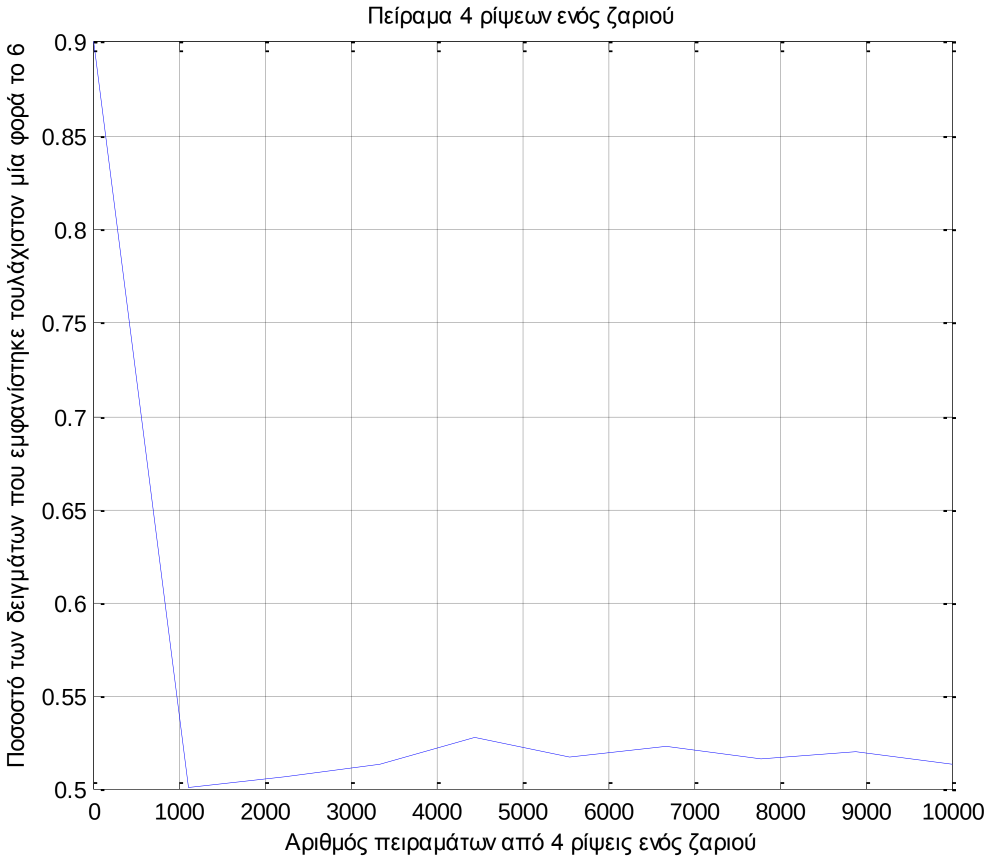
- Θα τρέξουμε το πείραμα για διαφορετικό αριθμό επαναλήψεων από 10 έως 10000

```
clear;
rolls=linspace(10,10000,10);

% y = linspace(a,b,n) generates
% a row vector y of n points linearly
% spaced between and including a and b.

for i=1:size(rolls,2)
    out=floor(6*(rand(4,rolls(i))))+1;
    %4 ρίψεις ενός ζαριού
    sixes=sum(out==6);
    %πόσα 6 πήραμε σε κάθε πείραμα
    success(i)=sum(sixes>=1)/rolls(i);
    %ποσοστό των πειραμάτων όπου
    %εμφανίστηκε τουλάχιστον μία φορά το 6
end

plot(rolls,success);
```



Παράδειγμα

- Αν ρίξω δύο ζάρια Ν φορές πόσες φορές θα πάρω «6-άρες» ;
  - hint!! χρησιμοποιήστε το άθροισμα των ζαριών για να λύσετε το πρόβλημα
  - Τρέξτε το πείραμα με διαφορετικές επαναλήψεις, χρησιμοποιώντας τη linspace και δείτε με την plot τα αποτελέσματα

Πηγές

- http://www.math.toronto.edu/mpugh/primer.pdf
- http://www.dartmouth.edu/~chance/teaching_aids/books_articles/probability_book/amsbook.mac.pdf