

Η άλγεβρα Fourier

Από την amenability στην προσεγγιστική ιδιότητα των Haagerup-Kraus

Δ. Ανδρέου (ΕΚΠΑ)

Σεμινάριο: Συναρτησιακή Ανάλυση & Άλγεβρες Τελεστών

Αθήνα 2024

Η άλγεβρα Fourier

Έστω G μια τοπικά συμπαγής ομάδα. Η αριστερή κανονική αναπαράσταση $\lambda: G \rightarrow B(L^2(G))$ της G ορίζεται ως εξής:

$$\lambda_s \xi(t) = \xi(s^{-1}t), \quad \xi \in L^2(G), \quad s, t \in G.$$

Έστω $L(G)$ η άλγεβρα von Neumann της G , δηλαδή $L(G) = \lambda(G)''$.
Η άλγεβρα Fourier $A(G)$ της G αποτελείται από τους coefficients της λ , δηλ.

$$A(G) = \{u: G \rightarrow \mathbb{C} : u(s) = \langle \lambda_s \xi | \eta \rangle, \quad \xi, \eta \in L^2(G)\}.$$

Για κάθε $u \in A(G)$, η νόρμα της u ορίζεται ως εξής:

$$\|u\|_{A(G)} = \inf \{ \|\xi\| \|\eta\| \},$$

όπου το infimum λαμβάνεται ως προς όλες τις δυνατές αναπαραστάσεις $u = \langle \lambda \xi | \eta \rangle$, $\xi, \eta \in L^2(G)$.

Με την παραπάνω νόρμα και με το κατά σημείο γινόμενο, η $A(G)$ είναι μεταθετική άλγεβρα Banach.

Θεώρημα (Eymard)

$A(G)^* \simeq L(G)$ ισομετρικά και μάλιστα, για κάθε $u \in A(G)$ και $s \in G$:

$$\langle \lambda_s, u \rangle = u(s).$$

Δηλαδή, αν $u(s) = \langle \lambda_s \xi | \eta \rangle$ και $T \in L(G)$, τότε

$$\langle T, u \rangle = \langle T\xi | \eta \rangle.$$

Μάλιστα, αν η G είναι αβελιανή και $\widehat{G}$ η δυϊκή ομάδα της G , τότε

$$A(G) \simeq L^1(\widehat{G}), \quad L(G) \simeq L^\infty(\widehat{G}).$$

Συνεπώς, για μια μη αβελιανή ομάδα G , το ζεύγος $(A(G), L(G))$ αναπαριστά το δυϊκό αντικείμενο $\widehat{G}$ της G , το οποίο γενικά δεν έχει δομή ομάδας.

Amenability

Ορισμός

Μια τοπικά συμπαγής ομάδα G λέγεται **amenable** αν υπάρχει αριστερά αναλλοίωτο *state* $\phi: L^\infty(G) \rightarrow \mathbb{C}$, δηλαδή ένα γραμμικό συναρτησοειδές τέτοιο ώστε:

- $f \geq 0 \implies \phi(f) \geq 0$
- $\phi(1_G) = 1$
- $\phi(\lambda_s f) = \phi(f)$ για κάθε $f \in L^\infty(G)$, $s \in G$.

Παρατηρείστε ότι το (αριστερό) μέτρο Haar της G ορίζει πάντα ένα weight $\psi_G: L^\infty(G)^+ \rightarrow [0, \infty]$:

$$\psi_G(f) = \int_G f(x) dx, \quad f \in L^\infty(G)^+$$

το οποίο είναι αριστερά αναλλοίωτο. Όμως, το ψ_G δεν είναι φραγμένο παρά μόνο αν η G είναι συμπαγής...

Amenability και η άλγεβρα Fourier

Θεώρημα (Leptin)

Μια τοπικά συμπαγής ομάδα G είναι *amenable* αν και μόνο αν η $A(G)$ περιέχει φραγμένη προσεγγιστική μονάδα, δηλαδή αν υπάρχει ένα δίκτυο $(u_\alpha)_{\alpha \in A}$ στην $A(G)$ με τις εξής ιδιότητες:

- υπάρχει $C > 0$, ώστε $\|u_\alpha\|_{A(G)} \leq C$ για κάθε $\alpha \in A$
- $\|u_\alpha v - v\|_{A(G)} \rightarrow 0$ για κάθε $v \in A(G)$.

Παραδείγματα:

- G συμπαγής: η $A(G)$ έχει μονάδα (την σταθερή συνάρτηση 1).
- G αβελιανή: $A(G) \simeq L^1(\widehat{G})$ και άρα έχει φραγμένη προσεγγιστική μονάδα.

Banach bimodules

Έστω A μια άλγεβρα Banach και ένα A -bimodule X . Το X λέγεται **Banach A -bimodule** αν είναι χώρος Banach και οι A -bimodule δράσεις

$$A \times X \rightarrow X : (a, x) \mapsto a \cdot x, \quad X \times A \rightarrow X : (a, x) \mapsto x \cdot a$$

είναι φραγμένες γραμμικές απεικονίσεις, δηλαδή $\exists k > 0$ ώστε

$$\|a \cdot x\| \leq k \|a\| \|x\|, \quad \|x \cdot a\| \leq k \|a\| \|x\| \quad \forall a \in A, x \in X.$$

Ο δυϊκός χώρος X^* γίνεται φυσιολογικά Banach A -bimodule ως εξής:

$$\langle a \cdot f, x \rangle = \langle f, x \cdot a \rangle, \quad \langle f \cdot a, x \rangle = \langle f, a \cdot x \rangle$$

για $a \in A, x \in X, f \in X^*$.

Μια γραμμική απεικόνιση $D: A \rightarrow X$ λέγεται **παραγωγή** αν

$$D(ab) = D(a) \cdot b + a \cdot D(b), \quad \forall a, b \in A.$$

Η D λέγεται **εσωτερική** αν υπάρχει $x \in X$, τέτοιο ώστε

$$D(a) = a \cdot x - x \cdot a \quad \forall a \in A.$$

Amenable άλγεβρες Banach

Ορισμός

Μια άλγεβρα Banach A λέγεται *amenable* αν για κάθε Banach A -bimodule X , κάθε φραγμένη παραγωγή $D: A \rightarrow X^*$ είναι εσωτερική.

Θεώρημα (Johnson)

Μια τοπικά συμπαγής ομάδα G είναι *amenable* αν και μόνο αν η άλγεβρα Banach $L^1(G)$ είναι *amenable*.

Παρατήρηση: Η άλγεβρα Fourier $A(G)$ μιας amenable ομάδας G μπορεί να μην είναι amenable ακόμα και αν η G είναι συμπαγής, π.χ. $SU(2, \mathbb{C})$, $SO(3, \mathbb{R})$ (Johnson).

Θεώρημα (Forrest-Runde)

Η άλγεβρα Fourier $A(G)$ μιας τοπικά συμπαγούς ομάδας G είναι *amenable* αν και μόνο αν η G περιέχει μια αβελιανή υποομάδα πεπερασμένου δείκτη.

Συνοψίζοντας...

- Η άλγεβρα $L^1(G)$:
 - ① έχει πάντα φραγμένη προσεγγιστική μονάδα
 - ② είναι amenable $\iff$ η G είναι amenable.
- Η άλγεβρα Fourier $A(G)$:
 - ① έχει φραγμένη προσεγγιστική μονάδα $\iff$ η G είναι amenable
 - ② είναι amenable $\iff$ η G είναι σχεδόν αβελιανή.

Χώροι τελεστών

Ένας συγκεκριμένος (concrete) χώρος τελεστών είναι ένας γραμμικός υπόχωρος V του $B(H)$ (όπου H ένας χώρος Hilbert). Για κάθε $n \in \mathbb{N}$, η εμφύτευση

$$M_n(V) \subseteq M_n(B(H)) \simeq B(H^n)$$

επάγει μια νόρμα $\|\cdot\|_n$ στον χώρο $M_n(V)$ των $n \times n$ πινάκων με στοιχεία από τον V .

Δηλαδή, ένας πίνακας $[v_{ij}] \in M_n(V)$ ταυτίζεται με τον τελεστή

$$H^n \ni \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} v_{11} & \dots & v_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{n1} & \dots & v_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^n v_{1j} \xi_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n v_{nj} \xi_j \end{bmatrix} \in H^n$$

Ένας αφηρημένος (abstract) χώρος τελεστών είναι ένας γραμμικός χώρος V μαζί με μια ακολουθία νορμών $\|\cdot\|_n: M_n(V) \rightarrow [0, \infty)$ για $n \in \mathbb{N}$, με τις ιδιότητες:

- $\|v \oplus w\|_{m+n} = \max\{\|v\|_m, \|w\|_n\}$
- $\|\alpha v \beta\|_n \leq \|\alpha\| \|v\|_m \|\beta\|$

για κάθε $m, n \in \mathbb{N}$, $v \in M_m(V)$, $w \in M_n(V)$, $\alpha \in M_{n,m}(\mathbb{C})$ και $\beta \in M_{m,n}(\mathbb{C})$.

Μια γραμμική απεικόνιση $\phi: V \rightarrow W$ μεταξύ χώρων τελεστών επάγει για κάθε $n \in \mathbb{N}$ μια γραμμική απεικόνιση $\phi_n: M_n(V) \rightarrow M_n(W)$:

$$\phi_n([v_{ij}]) = [\phi(v_{ij})].$$

Η ϕ λέγεται πλήρως φραγμένη αν

$$\|\phi\|_{cb} := \sup\{\|\phi_n\| : n \in \mathbb{N}\} < \infty.$$

Αν $\|\phi\|_{cb} \leq 1$ η ϕ λέγεται πλήρης συστολή και αν κάθε ϕ_n είναι ισομετρία η ϕ λέγεται πλήρως ισομετρική.

Θεώρημα (Ruan)

Κάθε αφηρημένος χώρος τελεστών είναι ισομετρικά ισόμορφος με ένα συγκεκριμένο χώρο τελεστών.

$CB(V, W)$

Ο χώρος $CB(V, W)$ των πλήρως φραγμένων απεικονίσεων μεταξύ δύο χώρων τελεστών V, W εφοδιάζεται με μια δομή χώρου τελεστών μέσω του γραμμικού ισομορφισμού

$$M_n(CB(V, W)) \simeq CB(V, M_n(W)).$$

Συγκεκριμένα, αν $[\phi_{ij}] \in M_n(CB(V, W))$, τότε

$$\|[\phi_{ij}]\|_n = \sup\{\|[\phi_{ij}(v_{kl})]\|_{nm} : [v_{kl}] \in M_m(V), m \in \mathbb{N}\}$$

Ειδικότερα, ο δυϊκός $V^* = B(V, \mathbb{C}) = CB(V, \mathbb{C})$ έχει επίσης δομή χώρου τελεστών και μάλιστα είναι πλήρως ισομετρικά ισόμορφος με ένα w^* -κλειστό υπόχωρο του $B(H)$ για κάποιο χώρο Hilbert H .

Το προβολικό τανυστικό γινόμενο

Έστω V και W δύο χώροι τελεστών. Για $v = [v_{ij}] \in M_p(V)$ και $w = [w_{kl}] \in M_q(W)$ θέτουμε

$$v \otimes w = [v_{ij} \otimes w_{kl}] \in M_{pq}(V \otimes W).$$

Κάθε $u \in M_n(V \otimes W)$ γράφεται (όχι μοναδικά) στην μορφή

$$u = \alpha(v \otimes w)\beta$$

για κάποια $\alpha \in M_{n,pq}(\mathbb{C})$, $v \in M_p(V)$, $w \in M_q(W)$ και $\beta \in M_{pq,m}(\mathbb{C})$. Θέτουμε

$$\|u\|_{\wedge, n} = \inf \{ \|\alpha\| \|v\| \|w\| \|\beta\| \}$$

όπου το infimum λαμβάνεται ως προς όλες τις δυνατές αναπαραστάσεις $u = \alpha(v \otimes w)\beta$. Η πλήρωση $V \widehat{\otimes} W$ του $V \otimes W$ ως προς την $\|\cdot\|_{\wedge}$ είναι χώρος τελεστών και λέγεται το **προβολικό τανυστικό γινόμενο** των V και W .

Βασικές ιδιότητες του $\widehat{\otimes}$

- Για κάθε ζεύγος χώρων τελεστών V και W , υπάρχει πλήρως ισομετρικός ισομορφισμός

$$CB(V, W^*) \simeq (V \widehat{\otimes} W)^*.$$

- Αν $M \subseteq B(H)$ και $N \subseteq B(K)$ είναι άλγεβρες von Neumann με προδουϊκούς M_* και N_* αντίστοιχα, τότε

$$CB(M_*, N) \simeq (M_* \widehat{\otimes} N_*)^* \simeq M \overline{\otimes} N,$$

όπου

$$M \overline{\otimes} N = \overline{\text{span}}^{w*} \{x \otimes y \in B(H \otimes_2 K) : x \in M, y \in N\},$$

$$(x \otimes y)(\xi \otimes \eta) = x\xi \otimes y\eta, \quad \xi \in H, \eta \in K.$$

Completely contractive Banach άλγεβρες

Μια άλγεβρα Banach A που είναι και χώρος τελεστών λέγεται **completely contractive Banach άλγεβρα** (ccBa), αν ο πολλαπλασιασμός $\widehat{A \otimes A} \rightarrow A: x \otimes y \mapsto xy$ είναι πλήρης συστολή, δηλαδή

$$\|[a_{i,j}b_{k,l}]\|_{nm} \leq \|a\|_n \|b\|_m$$

για κάθε $a = [a_{i,j}] \in M_n(A)$, $b = [b_{k,l}] \in M_m(A)$ και $m, n \in \mathbb{N}$.

Παραδείγματα

- ❶ $CB(V)$, όπου V πλήρης χώρος τελεστών.
- ❷ $L^1(G) \simeq L^\infty(G)_*$.
- ❸ $A(G) \simeq L(G)_*$.
- ❹ Κάθε άλγεβρα τελεστών είναι ccBa.

Hopf-von Neumann άλγεβρες

Μια **Hopf-von Neumann άλγεβρα** (HvN) είναι ένα ζεύγος (M, Δ) , όπου M μια άλγεβρα von Neumann και $\Delta: M \rightarrow M \bar{\otimes} M$ ένας unital, normal, injective *-ομομορφισμός, που ικανοποιεί την σχέση:

$$(\Delta \otimes id_M) \circ \Delta = (id_M \otimes \Delta) \circ \Delta \quad (\text{coassociativity})$$

Η απεικόνιση Δ ονομάζεται **comultiplication**.

Έστω $A := M_*$ ο προδυϊκός της M , με την δομή χώρου τελεστών που κληρονομεί από τον δυϊκό χώρο τελεστών M^* . Επειδή $\widehat{A \otimes A} \simeq (M \bar{\otimes} M)_*$ πλήρως ισομετρικά, η απεικόνιση:

$$m = \Delta_*: \widehat{A \otimes A} \rightarrow A, \quad m(a \otimes b) = (a \otimes b) \circ \Delta$$

ορίζει ένα προσεταιριστικό και completely contractive πολλαπλασιασμό στον $A = M_*$. Δηλαδή, ο A με γινόμενο $ab := m(a \otimes b) = (a \otimes b) \circ \Delta$, για $a, b \in A$, είναι ccBa.

Παραδείγματα:

- 1) Στην von Neumann άλγεβρα $L^\infty(G)$, ορίζεται η comultiplication:

$$\Gamma(f)(s, t) = f(ts), \text{ για } f \in L^\infty(G), s, t \in G$$

Τότε, το ζεύγος $(L^\infty(G), \Gamma)$ είναι HvN άλγεβρα και ο επαγόμενος πολλαπλασιασμός στον $L^1(G)$ δεν είναι παρά η συνήθης συνέλιξη.

- 2) Στην von Neumann άλγεβρα $L(G)$ ορίζεται η comultiplication:

$$\Delta(\lambda_s) = \lambda_s \otimes \lambda_s, \quad \forall s \in G$$

Σε αυτήν την περίπτωση, το ζεύγος $(L(G), \Delta)$ είναι HvN άλγεβρα και ο επαγόμενος πολλαπλασιασμός στον προδουϊκό $VN(G)_* \cong A(G)$ ταυτίζεται με το κατά σημείο γινόμενο στην άλγεβρα Fourier $A(G)$.

Operator bimodules

Ένα A -bimodule V λέγεται **operator A -bimodule**, αν ο V είναι πλήρης χώρος τελεστών και οι A -bimodule δράσεις:

$$A \widehat{\otimes} V \rightarrow V, a \otimes v \mapsto a \cdot v, \quad V \widehat{\otimes} A \rightarrow V, v \otimes a \mapsto v \cdot a$$

είναι πλήρως φραγμένες, δηλαδή υπάρχει μια σταθερά $C > 0$, ώστε:

$$\|[a_{i,j} \cdot v_{k,l}]\| \leq C \|[a_{i,j}]\| \| [v_{k,l}] \|, \quad \|[v_{k,l} \cdot a_{i,j}]\| \leq C \|[a_{i,j}]\| \| [v_{k,l}] \|\$$

για κάθε $[a_{i,j}] \in M_n(A)$, $[v_{k,l}] \in M_m(V)$ και $m, n \in \mathbb{N}$.

Ο δυϊκός χώρος τελεστών V^* του V αποκτά φυσιολογικά δομή operator A -bimodule θέτοντας:

$$\langle f \cdot a, v \rangle = \langle f, a \cdot v \rangle, \quad \langle a \cdot f, v \rangle = \langle f, v \cdot a \rangle$$

για κάθε $a \in A$, $f \in V^*$, $v \in V$.

Operator amenability

Ορισμός

Μια *completely contractive Banach* άλγεβρα A λέγεται *operator amenable* αν για κάθε δυϊκό *operator A-bimodule* V^* , κάθε πλήρως φραγμένη παραγωγήιση $D: A \rightarrow V^*$ είναι εσωτερική.

Θεώρημα (Ruan)

Έστω G μια τοπικά συμπαγής ομάδα. Τα εξής είναι ισοδύναμα:

- Η G είναι *amenable*.
- Η $L^1(G)$ είναι *operator amenable*.
- Η $A(G)$ είναι *operator amenable*.

Πολλαπλασιαστές

Μια συνάρτηση $u: G \rightarrow \mathbb{C}$ λέγεται **πολλαπλασιαστής** (multiplier) της $A(G)$ αν $uv \in A(G)$ για κάθε $v \in A(G)$. Σε αυτή την περίπτωση η u είναι φραγμένη συνάρτηση και η $m_u: A(G) \rightarrow A(G)$, $m_u(v) = uv$ είναι φραγμένος τελεστής. Έστω $M_u: L(G) \rightarrow L(G)$, $M_u = m_u^*$, δηλαδή

$$\langle M_u(x), v \rangle = \langle x, uv \rangle, \quad x \in L(G), \quad v \in A(G).$$

Επομένως, $M_u(\lambda_s) = u(s)\lambda_s$, $s \in G$.

Αν επιπλέον η M_u είναι πλήρως φραγμένη, η u λέγεται **πλήρως φραγμένος πολλαπλασιαστής** της $A(G)$.

Ο χώρος $M_0A(G)$ των π.φ. πολ/στών με την νόρμα $\|u\|_{M_0} = \|M_u\|_{cb}$ ταυτίζεται με τον δυϊκό χώρο Banach της πλήρωσης $Q(G)$ του $L^1(G)$ ως προς την νόρμα

$$\|f\|_Q = \sup \left\{ \left| \int_G f(x)u(x)dx \right| : u \in M_0A(G), \|u\|_{M_0} \leq 1 \right\}.$$

Επιλέον, $A(G) \subseteq M_0A(G)$.

Ορισμός

Μια τοπικά συμπαγής ομάδα G έχει την **προσεγγιστική ιδιότητα (AP)** αν υπάρχει ένα δίκτυο (u_α) στην $A(G)$ ώστε $u_\alpha \rightarrow 1$ ως προς την $\sigma(M_0A(G), Q(G))$ -τοπολογία.

Θεώρημα (Haagerup-Kraus)

Η G έχει την AP αν και μόνο αν υπάρχει ένα δίκτυο (u_α) στην $A(G)$, τέτοιο ώστε, για κάθε χώρο Hilbert H ,

$$(\text{id}_{B(H)} \otimes M_{u_\alpha})(x) \xrightarrow{w^*} x, \quad \forall x \in B(H) \overline{\otimes} L(G).$$

Κανονικά operator $A(G)$ -modules

Έστω H χώρος Hilbert. Για κάθε $x \in B(H) \overline{\otimes} L(G)$ και $u \in A(G)$ ορίζουμε

$$u \cdot x = (\text{id}_{B(H)} \otimes M_u)(x).$$

Ειδικότερα, για $y \in B(H)$ και $s \in G$, έχουμε

$$u \cdot (y \otimes \lambda_s) = u(s)(y \otimes \lambda_s).$$

Εύκολα επαληθεύεται ότι κάθε w^* -κλειστός υπόχωρος X της άλγεβρας von Neumann $B(H) \overline{\otimes} L(G)$ με $A(G) \cdot X \subseteq X$ είναι (αριστερό) δυϊκό operator $A(G)$ -module.

Ένα X όπως παραπάνω θα λέγεται κανονικό operator $A(G)$ -module.

Θεώρημα (A)

Η G έχει την AP αν και μόνο αν για κάθε κανονικό operator $A(G)$ -module X , κάθε πλήρως φραγμένη γραμμική απεικόνιση $D: A(G) \rightarrow X$ με την ιδιότητα $D(uv) = u \cdot D(v)$ για κάθε $u, v \in A(G)$ είναι της μορφής $D(u) = u \cdot x_0$, $u \in A(G)$, για κάποιο $x_0 \in X$.