3/11/18

Διευκρινίσεις για Watrous

(1) $\forall v \in \mathcal{Y}$ θεωρούμε επίσης ως γραμμ. απεικ.:

$$v : \mathbb{C} \to \mathcal{Y} : \lambda \mapsto \lambda v$$

τότε $v^* : \mathcal{Y} \to \mathbb{C}$ είναι το

$$v^*(\xi) = \langle v, \xi \rangle \quad \forall \xi \in \mathcal{Y}$$

(αφού $\langle \lambda, v^*(\xi) \rangle_{\mathbb{C}} = \langle v(\lambda), \xi \rangle_{\mathcal{Y}} \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}, \forall \xi \in \mathcal{Y}$

$$\Updownarrow$$

$$\bar{\lambda}\, v^*(\xi) = \langle \lambda v, \xi \rangle_{\mathcal{Y}} = \bar{\lambda} \langle v, \xi \rangle \;).$$

Επομένως, $\forall u \in \mathcal{X}$ έχουμε τον τελεστή $uv^* \in L(\mathcal{Y}, \mathcal{X})$

$$\mathcal{Y} \xrightarrow{v^*} \mathbb{C} \xrightarrow{u} \mathcal{X}$$

$$\xi \mapsto \langle v, \xi \rangle \mapsto \langle v, \xi \rangle u$$

Ειδικότερα όταν $\mathcal{X} = \mathbb{C}^A$, $\mathcal{Y} = \mathbb{C}^B$ με τις βάσεις $\{e_\alpha\}$, $\{e_\beta\}$ αντίστοιχα έχουμε

$$(e_a e_b^*)(e_{\beta'}) = \langle e_\beta, e_{\beta'} \rangle e_a = \begin{cases} e_a, & \beta' = \beta \\ 0, & \beta' \neq \beta \end{cases}$$

δηλ. $e_a e_b^* = E_{ab}$

(2) Η απεικόνιση $\operatorname{vec} : L(\mathcal{Y}, \mathcal{X}) \to \mathcal{X} \otimes \mathcal{Y}$

ορίζεται από $\quad uv^* \mapsto u \otimes \bar{v}$

(όπου, αν $v = (v(\beta))_{\beta \in B}$ όπου $v(\beta) \in \mathbb{C}$ γράφουμε $\bar{v} = (\overline{v(\beta)})$)

και επεκτείνεται γραμμικά.

Ειδικότερα, $\quad e_a e_b^* \to e_a \otimes e_b$

δηλ. $\quad E_{ab} \to e_a \otimes e_b$

οπότε, $\forall T \in L(\mathcal{Y}, \mathcal{X})$

με πίνακα $\quad T(\alpha, \beta) = \langle e_a, T e_b \rangle_{\mathbb{C}}$ (W, 1.39)

επειδή έχουμε

$$T = \sum_{\alpha,\beta} T(\alpha,\beta) E_{\alpha\beta}$$

ισχύει ότι

$$\operatorname{vec}(T) = \sum_{\alpha,\beta} T(\alpha,\beta)\, e_\alpha \otimes e_\beta$$

Ειδικότερα (αν $\mathcal{X} = \mathcal{Y}$) $\operatorname{vec}(\mathbb{1}_{\mathcal{Y}}) = \sum_\beta e_\beta \otimes e_\beta$

Παρατήρηση όμως ότι αν $u = x\otimes y$, $v = \xi\otimes\eta$ τότε

$$uv^* = (x\otimes y)(\xi\otimes\eta)^* = (x\xi^*)\otimes(y\eta^*)$$

Πράγματι,
$$\begin{aligned} uv^*(z\otimes w) &= \langle v, z\otimes w\rangle u \\ &= \langle \xi\otimes\eta, z\otimes w\rangle x\otimes y \\ &= \langle \xi, z\rangle x \otimes \langle \eta, w\rangle y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \big((x\xi^*)\otimes(y\eta^*)\big)(z\otimes w) &= (x\xi^*)(z)\otimes(y\eta^*)(w) \\ &= \langle \xi, z\rangle x \otimes \langle \eta, w\rangle y \end{aligned}$$

Επομένως,

$$\mathrm{vec}(1_X)\,\mathrm{vec}(1_X)^* = \Big(\sum_\alpha e_\alpha\otimes e_\alpha\Big)\Big(\sum_\beta e_\beta\otimes e_\beta\Big)^*$$

$$= \sum_{\alpha\beta}(e_\alpha e_\beta^*)\otimes(e_\alpha e_\beta^*) = \sum_{\alpha\beta} E_{\alpha\beta}\otimes E_{\alpha\beta}$$

(είναι τελεστής $X\otimes X \longrightarrow X\otimes X$. Εδώ αν $E, F \in L(X)$ ο $E\otimes F$ ορίζεται από τη $(E\otimes F)(x\otimes x') = E(x)\otimes E(x')$)

(3) Επομένως, $\forall$ υπερτελεστή $\varphi : L(X) \longrightarrow L(Y)$ (γράφε $\varphi\in T(X,Y)$ (να: σελ. 21)) αν ορίσω

$$J(\varphi) := (\varphi\otimes 1_{L(X)})\big(\overbrace{\mathrm{vec}(1_X)\,\mathrm{vec}(1_X)^*}^{\in L(X\otimes X)\cong L(X)\otimes L(X)}\big)$$

Έχω:

$$J(\varphi) = (\varphi\otimes 1_{L(X)})\Big(\sum_{\alpha\beta} E_{\alpha\beta}\otimes E_{\alpha\beta}\Big)$$

$$= \sum_{\alpha\beta}\varphi(E_{\alpha\beta})\otimes E_{\alpha\beta} : Y\otimes X \longrightarrow Y\otimes X$$

δηλαδή $\quad J : T(X,Y) \longrightarrow L(Y\otimes X)$

∎