Δευτέρα 21/02/2010

- $A(\mathbb{T}) = \{ f \in C(\mathbb{T}) : \sum |\hat{f}(n)| < +\infty \}$, $\|f\|_A = \|f\|_1$

- $PM(\mathbb{T}) = (A(\mathbb{T}))^*$

- $E \subseteq \mathbb{T}$ κλειστό είναι s-set $\iff$
  $\forall \varphi \in PM(\mathbb{T})$ που "φέρεται" στο E $\underset{(*)}{}$ ισχύει ότι $\varphi \in [\delta_t : t \in E]^{w^*}$

- $\forall \mu \in M(\mathbb{T})$ τότε $\forall U \subseteq \mathbb{T}$ ανοικτό έχουμε:
  $$|\mu|(U) = \sup \{ |\int f d\mu| : f \in A(\mathbb{T}),\ \text{supp} f \text{ συμπαγής} \subseteq U \text{ για } 0 \le f \le 1 \}$$

$(*)$: $\forall f \in A(\mathbb{T})$ με $\text{supp} f \cap E = \emptyset$ ισχύει $\varphi(f) = 0$.

<u>Φορέας ενός τελεστή</u> : $T \in B(H)$

$T \sim (a_{ij})$ με $a_{ij} = \langle Te_j, e_i \rangle$ ως προς μια ορθοκανονική βάση $\{e_i\}$ στον H.

- $\text{supp}((a_{ij})) = \{ (i,j) \in \mathbb{N}^2 : a_{ij} \neq 0 \}$

- $a_{ij} = 0 \iff T(e_j) \in [e_i]^\perp$

- Επομένως: $\underbrace{(I \times J)}_{\subseteq \mathbb{N}^2} \cap \text{supp}[a_{ij}] = \emptyset \iff$
  $(i,j) \in I \times J \Rightarrow P_{[e_i]} T P_{[e_j]} = 0$.

$\Leftrightarrow \quad P_{[I]} \, T \, P_{[J]} = 0$

Ορσ: Έστω τώρα $T: H \longrightarrow H'$ που $H = L^2(X, \nu)$, $H' = L^2(X, \mu)$. Θα λέμε ότι φέρεται σε $K \subseteq X \times X$ αν για $E \times F \subseteq X \times X$ με $(E \times F) \cap K = \phi$ έπεται ότι $P_F T P_E = 0$.
(το ελάχιστο που απαιτούμε είναι το K να είναι Borel).

Παρ: Αν για παράδειγμα ο T είναι ολοκληρωτικός τελεστής, δηλαδή για $g \in L^2(X \times X, \mu \otimes \nu)$ και $(T_g f)(x) = \int g(x,y) f(y) \, d\nu(y)$

τότε ο T_g φέρ. στο $K \Leftrightarrow g(x,y) = 0$ σχεδόν στο K^c.

απόδ: $0 = (P_F T_g P_E f)(x) = \int \chi_F(x) g(x,y) \chi_E(y) f(y) \, d\nu(y)$

$\Leftrightarrow \chi_F(x) g(x,y) \chi_E(y) f(y) = 0$ σχ. $\forall (x,y) \in X \times X$

$\Leftrightarrow g(x,y) = 0$ σχ. $\forall (x,y) \in K^c$ ∎

• Έστω $f \in L^2(X, \nu)$, $h \in L^2(X, \mu)$. Τότε:

$$\langle T_g f, h \rangle = \int \left(\int g(x,y) f(y) \, d\nu(y) \right) \overline{h(x)} \, d\mu(x) \overset{\text{fub}}{=} \iint f(y) \overline{h(x)} g(x,y) \, d\nu(y) \, d\mu(x)$$

Αντίστροφα, αν σ είναι ένα "καλό" μέτρο στο $X \times X$, τότε μπορούμε να ορίσουμε:

$T_\sigma : L^2(X, \nu) \longrightarrow L^2(X, \mu)$ με

$$\langle T_\sigma f, h \rangle = \iint f(y)\,\overline{h(x)}\, d\sigma(y,x).$$

~~Στο προηγούμενο ορίζεται για~~
~~$\sigma(\alpha\times\beta)=\mu(\alpha)\nu(\beta)$~~

Με κατάλληλες υποθέσεις ο T_σ ορίζεται κα[λά] και είναι φραγμένος.

Αποδεικνύεται ότι το T_σ φέρεται στο K όταν το μέτρο σ φέρεται στο K.

→ Αυτοί οι τελεστές λέγονται ψευδο-ολοκληρωτικοί.

~ ~

Ας περιοριστούμε στην περίπτωση όπου οι X, Y είναι συμπαγείς (μετρικοί) και μ, ν κανονικά μέτρα Borel.
Έστω $K \subseteq X\times Y$ κλειστό.

Πρότ: Ένας τελεστής $T: H \to H'$ φέρεται στο K $\Longleftrightarrow$ $\left\{ \begin{array}{l} M_g T M_f \text{ φέρεται στο } K \\ \forall g \in L^\infty(\mu),\ f\in L^\infty(\nu). \end{array}\right.$

Πρότ: Έστω $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{B}(H, H')$. Τότε $\mathcal{M}$ φέρεται στο K (δηλ. κάθε $T\in\mathcal{M}$ φέρεται στο K) $\Longleftrightarrow$ $\mathcal{D}_X \mathcal{M} \mathcal{D}_Y$ φέρεται στο K, όπου

$$\mathcal{D}_X = \{ M_g : g \in L^\infty(\mu) \}$$

Υπενθ.: Οι $\mathcal{D}_X, \mathcal{D}_X$ είναι m.a.s.a.

Από τα προηγούμενα προκύπτει ότι αρκεί να περιορισθούμε σε $\mathcal{M}$ masa ~~δι~~πρότυπα (δηλαδή $\mathcal{D}_X$-$\mathcal{D}_Y$-πρότυπα).

Ορσ: $\mathcal{M}_{max}(K) = \{ T \in B(H, H') : T$ φέρεται στο $K \}$

$$= \{ T \in B(H, H') : (E \times F) \cap K = \emptyset \Rightarrow P_F T P_E = 0 \}$$

Παρ: Το $\mathcal{M}_{max}(K)$ είναι w^*-κλειστό masa πρότυπο (~~...~~ επίσης είναι wot-κλειστό).

Ο Arveson στο (100): $K \subseteq X \times Y$

$\mathfrak{U}_K = \{ \mathcal{M} :$ w^*-κλειστό $\mathcal{D}_X$-$\mathcal{D}_Y$-πρότυπο που φέρεται ακριβώς στο $K \}$.

Παρ: $\forall\, \mathcal{M} \in \mathfrak{U}_K$ ισχύει ότι:

$$\mathcal{M} \subseteq \mathcal{M}_{max}(K).$$

Θεώρ (Arveson): $\exists\, \mathcal{M}_{min}(K) \in \mathfrak{U}_K$ ε.ω. $\forall\, \mathcal{M} \in \mathfrak{U}_K$ ισχύει $\mathcal{M}_{min}(K) \subseteq \mathcal{M} \subseteq \mathcal{M}_{max}(K)$.

Σύγκριση με αρμονική ανάλυση

∘ $E \subseteq \mathbb{T}$ κλειστό, τότε $\exists$ ελάχιστο και μέγιστο ιδεώδες της $A(\mathbb{T})$: $sp(J) = E$

ελάχιστο $J(E)$

μέγιστο $K(E)$

E s-set $\Leftrightarrow$ $J(E) = K(E)$.

Ορσ (Arveson): K λέγεται συνθετικό αν $\mathfrak{U}_K = \{\mathcal{M}_{max}(K)\}$ δηλαδή αν $\mathcal{M}_{min}(K) = \mathcal{M}_{max}(K)$.

Σημ: Το $\mathcal{M}_{min}(K)$ είναι το εξής:
$$\mathcal{M}_{min}(K) = \overline{\{ T_\mu : \mu \text{ φέρεται στο } K \}}^{w^*}.$$

Πρόσθ: Όταν οι X, Y συμπαγείς μετρικοί τότε
$$\operatorname{supp} T = \bigcap \{ K \subseteq X \times Y \text{ κλειστό} : T \text{ φέρεται στο } K \}$$
$$\operatorname{supp} \mathcal{M} = \bigcap \{ K \subseteq X \times Y \text{ κλειστό} : \mathcal{M} \text{ φέρεται στο } K \}$$

- $\mathcal{M}$ φέρεται ακριβώς στο $K \overset{ορσ}{\Longleftrightarrow} \operatorname{supp} \mathcal{M} = K$.

Πρτ: K συνθετικό $\Leftrightarrow$ $\forall T$ που ζει στο K προσεγγίζεται από T_μ, $\operatorname{supp} T_\mu \subseteq K$.

John Froelich: $X = Y = \mathbb{T}$, $\mu = \nu = m$.

- Έστω $\varphi \in P\mathcal{M}(\mathbb{T})$ τότε ορίζουμε
$$C_\varphi : L^2(\mathbb{T}) \longrightarrow L^2(\mathbb{T}) :$$
$$e_k \longmapsto \hat{\varphi}(-k)\, e_k$$
$$\langle C_\varphi f, g \rangle = \langle \mathcal{M}_{\tilde{\varphi}} \hat{f}, \hat{g} \rangle$$
όπου $\hat{\tilde{\varphi}}(n) = \hat{\varphi}(-n)$.

- $\| C_\varphi \| = \sup_n \{ |\hat{\varphi}(-n)| \} = \|\hat{\varphi}\|_{\ell^\infty} = \|\varphi\|_{A^*}$.

Αν $E \subseteq \mathbb{T}$ κλειστό τότε φ φέρεται στο E ανν C_φ φέρεται στο $\tilde{E} = \{ (t, s) \in \mathbb{T}^2 : t/s \in E \}$
$\rightarrow \arg t - \arg s \in \arg(E)$.

Θρμ (Froelich) E είναι s-set $\Leftrightarrow$ $\mathcal{U}_{\tilde{E}}$ είναι συνθετικό
(δηλαδή $\mathcal{M}_{max}(\tilde{E}) = \mathcal{M}_{min}(\tilde{E})$).