Δευτέρα 14/02/2010

• $\mathbb{T}$: περιφέρεια

άλγεβρα Wiener

• $A(\mathbb{T}) = \{ g \in C(\mathbb{T}) : \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\hat{g}(n)| < +\infty \} \subsetneq C(\mathbb{T})$

• $\|g\|_A := \|\hat{g}\|_1 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\hat{g}(n)|$ όπου $\hat{g}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(e^{it})\,dt$

Τότε η $(A(\mathbb{T}), \|\cdot\|_A)$ είναι άλγεβρα Banach με

$$\mathcal{P} \subseteq A(\mathbb{T}) \subseteq C(\mathbb{T})$$

όπου $\mathcal{P}$: τριγωνομετρικά πολυώνυμα.

Τότε $\overline{\mathcal{P}}^{\|\cdot\|_\infty} = \overline{A(\mathbb{T})}^{\|\cdot\|_\infty} = C(\mathbb{T})$

Όμως $A(\mathbb{T}) \subsetneq C(\mathbb{T})$.

Σχ.: 1) $\|g\|_A \geq \|g\|_\infty \quad \forall g \in A(\mathbb{T})$

2) Αν ίσχυε η ισότητα τότε, εφόσον $A(\mathbb{T}) = \mathcal{F}(\ell^1(\mathbb{Z}))$ όπου $\mathcal{F}$ μ/σ fourier, από το Θ. ανοιχτής απ. η $\mathcal{F}$ θα ήταν επί και άρα αντιστρέφεται.

Όμως: (αντιπαράδειγμα)

$$f_n(t) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n}\sin(kt)$$

και $\|f_n\|_\infty \leq 2\pi$

αλλά $\|f_n\|_A = 2\cdot\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} \sim 2\log n \to \infty$.

άρα $\|f_n\|_A$ όχι ομ. φραγμένη.

3) Οι $f_n(t) \xrightarrow{\text{κ.σ.}} f(t) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\sin kt$ δεν είναι παντού συνεχής.

Ορσ: Έστω κλειστό $E \subseteq \mathbb{T}$. Τότε:

$$k(E) = \{ f \in A(\mathbb{T}) : f|_E = 0 \} \to \text{κλειστό}$$

και

$$J(E) = \{ f \in A(\mathbb{T}) : f \text{ μηδενίζονται γύρω από το } E \}$$

$$= \{ f \in A(\mathbb{T}) : \operatorname{supp} f \cap E = \emptyset \}$$

Τα $k(E)$, $J(E)$ είναι ιδεώδη της $A(\mathbb{T})$.
Επίσης ~~αναγκαστικά~~ $\overline{J(E)}^{\|\cdot\|_A} \subseteq k(E)$

Ορσ: Το E λέγεται s-set αν $\overline{J(E)}^{\|\cdot\|_A} = k(E)$

→ Malliavin: $\exists$ $E \subseteq \mathbb{T}$ όχι s-set

→ Βαρόπουλος: άλλη απόδειξη με $C(E) \hat{\otimes} C(F)$

$$\hat{\otimes} = \otimes_h^{\cdots}$$

Πρτρ: $\overline{J(E)}^{\|\cdot\|_\infty} = \overline{k(E)}^{\|\cdot\|_\infty} = C_0(\mathbb{T} \setminus E)$

Ορσ: Έστω $J \subseteq A(\mathbb{T})$ κλειστό ιδεώδες. Τότε

$$Z(J) = \{ z \in \mathbb{T} : \forall f \in J \ f(z) = 0 \}$$

$$\| \quad \operatorname{hull}(J) = h(J).$$

Το $Z(J)$ είναι κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{T}$

Πρτ: Αν $E \subseteq \mathbb{T}$ κλειστό τότε $\forall J$ ιδεώδες της $A(\mathbb{T})$ με $Z(J) = E$ έπεται ότι

$$\overline{J(E)} \subseteq J \subseteq k(E)$$

$Z(k(E)) = E$: $k(E)$ το μεγαλύτερο ιδεώδες J τ.ω. $Z(J) = E$

Ενώ $J(E)$ το μικρότερο ιδεώδες J τ.ω. $Z(J) = E$

Αναδιατύπωση: E είναι s-set $\iff \exists!\, J \triangleleft A(\mathbb{T})$ τ.ω. $Z(J) = E$.

~~Αποδ~~: Αν $J \triangleleft A(\mathbb{T})$ με $Z(J) = E \Rightarrow J \subseteq K(E)$

αρκεί νδο ~~$J(E) \subseteq J$ δηλαδή ότι αν $f \in J(E)$ τότε προσεγγίζεται από στοιχεία του J~~ ότι $J \supseteq J(E)$. Έστω $f \in J(E)$.

Θέτουμε $K = \operatorname{supp} f$ και τότε $K \cap E = \emptyset$. Άρα $\forall \lambda \in K$ υπάρχει $g \in J$ με $g(\lambda) = 1$. Συνεπώς υπάρχει συμπαγής περιοχή του λ, έστω K_λ, τ.ω.

$$\big|\, g|_{K_\lambda} \big| \geq \frac{1}{2}$$

Αποδεικνύεται ότι $\exists\, \psi_\lambda \in A(\mathbb{T})$ τ.ω. $\psi_\lambda g = 1$ στο K_λ.
Θέτουμε $h_\lambda = \psi_\lambda \cdot g \Rightarrow \in J$
Όμως ότι το K καλύπτεται από $\bigcup_{\lambda \in K} K_\lambda^\circ$. Άρα υπάρχουν $\lambda_1 \dots \lambda_n$ τ.ω. $K \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} K_{\lambda_i}^\circ$.

Θέτουμε $h = 1 - \prod_{i=1}^{n} (1 - h_i)$

$$= h_1 + \dots + h_n + h_1 h_2 + \dots + h_1 h_2 \cdots h_n \in J$$

τότε $h|_K = 1$ οπότε $hf = f$ άρα $f \in J$! ∎

~~και $\|(hf - f)|_{K^c}\|$~~

$$\begin{array}{ccc}
(A(\mathbb{T}), \|\cdot\|_A) & \xrightarrow{\ F\ } & (\ell^1(\mathbb{Z}), \|\cdot\|_1) \to a \\
(PM(\mathbb{T}), \|\cdot\|_{A^*}) & \longleftarrow & (\ell^\infty(\mathbb{Z}), \|\cdot\|_\infty) \to b
\end{array}$$

ψευδομέτρα

και $(C(\mathbb{T}), \|\cdot\|_\infty)^* = (M(\mathbb{T}), \|\cdot\|)$ με $M(\mathbb{T})$

↳ μέτρα.

και $(f_n) \subseteq A(\mathbb{T})$ με $\|f_n\|_A \longrightarrow 0$

τότε $\|f_n\|_\infty \longrightarrow 0$

άρα $\int f_n \, d\mu \longrightarrow 0$

οπότε $\mu \in PM(\mathbb{T})$

Όταν $\mu \in M(\mathbb{T})$ και $n \in \mathbb{Z}$: $\hat{\mu}(n) = \int e^{-int} d\mu(t) = \mu(e_{-n})$

όταν $\varphi \in M(\mathbb{T})$, ορίζω

$$\hat{\varphi}(n) = \varphi(e_{-n})$$

δηλαδή ότι $f \in A(\mathbb{T})$ $\quad f = \sum \hat{f}(n) e_n$ (συγκλίνει απόλυτα και ορ.

$\varphi(f) = \sum \hat{f}(n) \varphi(e_n)$ και στην $\|\ \|_A$)

$$\varphi(f) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n) \hat{\varphi}(-n)$$

Σημ: $b(a) = \sum a(n) b(-n)$. Αν $a \in \ell^1(\mathbb{Z})$, $b \in \ell^\infty(\mathbb{Z})$ γράφω $b(a) = \sum_n a(n) b(-n)$

Αναπαριστώ τους $A(\mathbb{T})$ και $PM(\mathbb{T})$ ως τελεστές στον $L^2(\mathbb{T})$ ως εξής:

$f \in A(\mathbb{T})$, $T_f : L^2(\mathbb{T}) \longrightarrow L^2(\mathbb{T})$ $\qquad \{e_n : n \in \mathbb{Z}\}$ ορθ. βάση του $L^2(\mathbb{T})$.

$$e_n \longmapsto \hat{f}(n) e_n$$

και για

$\varphi \in PM(\mathbb{T})$, $\quad C_\varphi : L^2(\mathbb{T}) \longrightarrow L^2(\mathbb{T})$

$$e_n \longmapsto \hat{\varphi}(-n) e_n$$

δηλαδή $\quad C_\varphi = \operatorname{diag}\{\hat{\varphi}(-n) : n \in \mathbb{Z}\}$.

Αν θέσουμε $H = L^2(\mathbb{T})$ τότε:

$$\|C_\varphi\|_{B(H)} = \sup\{|\hat{\varphi}(-n)| : n \in \mathbb{Z}\} = \|\hat{\varphi}\|_\infty =$$

$$= \left(\text{η νόρμα της } \hat{\varphi} \in \ell^\infty(\mathbb{Z}) = \ell^1(\mathbb{Z})^*\right) =$$

$$= \|\varphi\|_{A^*}$$

Άρα η αντιστοιχία:

$$(PM(\mathbb{T}), \|\cdot\|_{A^*}) \longrightarrow (B(\mathcal{H}), \|\cdot\|_{B(\mathcal{H})})$$

$$\varphi \longmapsto C_\varphi$$

είναι ισομετρία (και γραμμική).

Επίσης: $\|T_f\|_{B(\mathcal{H})} = \sup\{|\hat{f}(n)| : n \in \mathbb{Z}\} \le$

$$\le \sum |\hat{f}(n)| = \|\hat{f}\|_1 = \|f\|_A$$

Άρα ο T_f είναι trace class και

$$\|T_f\|_{\mathcal{C}_1} = \|f\|_A \quad (*)$$

Επομένως η αντιστοιχία:

$$(A(\mathbb{T}), \|\cdot\|_A) \longrightarrow (\mathcal{C}(\mathcal{H}), \|\cdot\|_{\mathcal{C}})$$

$$f \longmapsto T_f$$

είναι ισομετρία (και γραμμική).

Παρατ: $C_\varphi T_f(e_n) = \hat{\varphi}(-n)\hat{f}(n)e_n$

και άρα το ίχνος:

$$tr(C_\varphi T_f) = \sum_n \hat{\varphi}(-n)\hat{f}(n) = \varphi(f).$$

$E \subseteq \mathbb{T}$ κλειστό s.set $\iff$ $\forall \varphi \in PM(\mathbb{T})$ που φέρεται στο E "προσεγγίζεται" από $\{\delta_t : t \in E\}$

Φορέας: Έστω $\mu \in M(\mathbb{T})$ και $E \subseteq \mathbb{T}$ κλειστό τότε το μ "φέρεται μέσα στο E" αν $|\mu|(U) = 0$ $\forall$ $U \subseteq E^c$, U: ανοικτό

Τότε $\operatorname{supp}\mu = \cap\{F \subseteq \mathbb{T}$ κλειστό : μ φέρ. στο $F\}$

$(*)$ $\|T_f\|_{\mathcal{C}_1} = tr\left((T_f^* T_f)^{1/2}\right) = tr\left(\operatorname{diag}(|\hat{f}(n)|)\right) = \sum_n |\hat{f}(n)|$

Πρτρ: $|\mu|(U) = 0 \iff \forall f \in C(\Pi)$ με $\text{supp} f \subseteq U$ ισχύει ότι $\int f \, d\mu = 0$.

αποδ: $(\Rightarrow)$:

~~(???)~~: έστω $\text{supp} f \subseteq U$ και $0 \neq \int f \, d\mu$ τότε

$0 < |\int f \, d\mu| \leq \|f\|_\infty \cdot |\mu|(U)$

$\Rightarrow |\mu|(U) > 0$.

$(\Leftarrow)$: Αν $|\mu|(U) = \delta > 0$ $\exists K \subseteq U$ συμπαγές με $|\mu|(K) > \delta/2$ τότε από Λ. Urysohn

$\exists f \in C(\Pi)$ με $\chi_K \leq f \leq \chi_U$

τότε $\int f \, d|\mu| > \delta/2$

δεν μπορώ να πετύχω (?) $\int f \, d\mu \neq 0$. $\boxed{?}$

Άρα μ ζει στο $E \iff \forall f \in C(\Pi)$ με $\text{supp} f \cap E = \emptyset$ έχει $\int f \, d\mu = 0$.

Πρτρ: $U \subseteq \Pi$ ανοικτό

$|\mu|(U) = 0 \iff \forall g \in A(\Pi)$ $\text{supp}\, g \subseteq U$ ισχύει $\int g \, d\mu = 0$.

αποδ: όπως πριν (~~???~~) (δες $\boxed{\text{αρχείο}}$)

~~αποδ: Αν $|\mu|(U) > 0$, $\exists f \in C(\Pi)$ $\text{supp} f \subseteq U$ ώστε $\int f \, d\mu \neq 0$~~

~~$\exists f_n \in A(\Pi)$ ε.ω. $f_n \to f$ δεν ώστε $\int f_n \, d\mu \neq 0$ τελικά.~~

Ορσ: $\varphi \in PM(\Pi)$ φέρεται στο E αν $\forall f \in A(\Pi)$ με $\text{supp} f \cap E = \emptyset$ ισχύει $\varphi(f) = 0$.

Πρτρ: Αν $t \in \Pi$ τότε το ψευδομέτρο δ_t: $\delta_t(f) = f(t)$ φέρεται στο $E \iff t \in E$.

ετοιμοτο

απόδ: Αν $t \notin E$ τότε $\exists f \in A(\mathbb{T}) : f(t) = 1$ και $\operatorname{supp} f \cap E = \emptyset$ (Λήμμα): Regularity (δες αρχείο) (Rudin, 2.6.2)

Θρμ: $E \subseteq \mathbb{T}$ είναι s-set $\Leftrightarrow$ $\forall \varphi \in PM(\mathbb{T})$ που φέρεται στο E μπορώ να βρω $\varphi \in [\delta_t : t \in E]^{w^*}$

απόδ: Ισοδύναμα: E όχι s-set αν $\exists \varphi \in PM(\mathbb{T})$ φέρεται στο E αλλά $\varphi \notin [\delta_t : t \in E]^{w^*}$.

$\Leftrightarrow \exists f \in A(\mathbb{T})$: f στοιχειώνεται από $\delta_t : t \in E$ αλλά $\varphi(f) \neq 0$.

$\Leftrightarrow \exists f \in A(\mathbb{T}) : f(t) = 0 \ \forall t \in E$. αλλά $\varphi(f) \neq 0$

E όχι s-set $\Leftrightarrow \exists \varphi \in PM(\mathbb{T})$ ώστε $\varphi(g) = 0 \ \forall g \in A($
ε.ω. $\operatorname{supp} g \cap E = \emptyset$ αλλά ~~$\varphi(f) \neq 0 \ \forall f \in A(\mathbb{T})$~~
με ~~...~~ $\exists f \in A(\mathbb{T})$ με $f|_E = 0$ ώστε $\varphi(f) \neq 0$

$\Leftrightarrow \exists \varphi \in PM(\mathbb{T}) = A(\mathbb{T})^*$: $\varphi(J(E)) = 0$ αλλά $\varphi(k(E)) \neq \{0\}$

$\Leftrightarrow \overline{J(E)} \neq k(E)$ (που είναι ο ορισμός του non-s-set)

---

hint:

~~απόδ: Έστω $|\mu|(U) > 0 \Rightarrow \exists t \in U : t \in V \subseteq \overline{V} \subseteq U$ με $\mu(V) \neq 0$~~

~~$\exists f \in C(\mathbb{T}) : f|_{\overline{V}} = 1, \ \chi_{\overline{V}} \leq f \leq \chi_U$~~
~~$\exists g \in A(\mathbb{T}) : g|_{\overline{V}} = 1 \quad f|_{\overline{V}} = 1$~~
~~$g|_{U^c} = -1 \quad f|_{U^c} = -1$~~

~~$1 + g \in A(\mathbb{T}) : 1+g|_{\overline{V}} = 2$~~

~~$1+g|_{U^c} = 0 \ \ldots$~~

entypon