Δευτέρα 8/02/2010

Φασματική σύνθεση ⟷ Σύνθεση Τελεστών

- Spectral synthesis, Operator synthesis

Σήμα: $f(e^{it}) = \underbrace{\sum_{n\in\mathbb{Z}}}_{\text{υπέρθεση}} \hat{f}(n)\, \underbrace{e^{int}}_{\text{σταθερές συχνότητας ή χαρακτήρες}}$

ανάλυση: από την f → πληροφορία των σταθερών συνιστωσών του φάσματος της f

σύνθεση: από τις σταθερές συνιστώσες → f.

Παρ: f τριγωνομετρικό πολυώνυμο

δηλαδή γρ. συνδ. σταθερών συχνοτήτων $\{e^{int} : n\in\mathbb{Z}\}$

ανάλυση: ποιοι είναι οι συντελεστές $\{a_n\}$

σύνθεση: σχηματίζω άθροισμα $f = \sum_n a_n e_n$

$$f \rightsquigarrow \underset{\hat{f}(n)}{\underset{\parallel}{a_n}} = \int_{\mathbb{T}} f(t)\, \overline{e^{int}}\, \frac{dt}{2\pi} = \langle f, e_n \rangle .$$

Ορ: G: τοπ. συμπαγής αβελιανή ομάδα

π.χ. $\mathbb{T}, \mathbb{Z}, \mathbb{R}$

εφοδιασμένη με το μέτρο Haar

μ/σ Fourier:

$$\mathcal{F} : L^1(G) \longrightarrow C_0(\hat{G})$$

$$f \longmapsto \hat{f}$$

$$\hat{f}(\gamma) = \int_G f(t)\, \overline{\gamma(t)}\, dt, \quad \gamma \in \hat{G}$$

όπου $\hat{G} = \Gamma$: δυϊκή ομάδα → χαρακτήρες της G

δηλαδή $\exists \gamma : G \longrightarrow \mathbb{T}$ συνεχής και μορφισμός.

$$\gamma(t+s) = \gamma(t)\cdot\gamma(s).$$

Τότε $\hat{f}$ συνεχής στη $\hat{G}$ και μηδενίζεται στο ∞.

• Άλγεβρα Fourier ή Wiener $A(\Gamma)$ είναι η $\mathcal{F}(L^1(G)) = \{ f \in C_0(\hat{G}) : \exists \varphi \in L^1(G)$ με $\mathcal{F}(\varphi) = f \}$

Την εφοδιάζω με την εξής νόρμα:

$$\|f\|_A := \|\varphi\|_{L^1} \quad \text{όπου} \quad f = \hat{\varphi} \equiv \mathcal{F}(\varphi).$$

και επιπλέον έχουμε ότι

$\|\varphi\|_1 \geq \|f\|_\infty$ δηλ. $\|f\|_A \geq \|f\|_\infty$

$$A(\Gamma) \subseteq C_0(\Gamma)$$

Μάλιστα είναι υπάλγεβρα: $f, g \in A(\Gamma)$ τότε $fg \in A(\Gamma)$

από: $f = \hat{\varphi}$, $g = \hat{\psi}$ τότε $f\cdot g = \widehat{\varphi * \psi}$ και $\varphi * \psi \in L^1(G)$. ■

Παράδ: $G = \mathbb{Z} \Rightarrow \hat{G} = \mathbb{T} = \{\gamma_z : z \in \mathbb{T}\}$ όπου $\gamma_z(n) = z^n$

διακριτή τοπολογία   συμπαγής τοπολογία.

$$\mathcal{F} : \ell^1(\mathbb{Z}) \longrightarrow C(\mathbb{T})$$

$$a = (a(n)) \longrightarrow \hat{a}$$

όπου $\hat{a}(e^{it}) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a(n)\cdot e^{\overline{int}} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a(n) e^{-int}$

$$\|f\|_A = \sum |\hat{f}(n)|$$

Άρα $A(\mathbb{T}) = \{ f \in C(\mathbb{T}) : \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\hat{f}(n)| < +\infty \} \subseteq C(\mathbb{T})$

Επειδή $\sum |a(n)| < +\infty \rightarrow$ η σειρά είναι ομ. ως προς t.

και τα $a(n)$ προκύπτουν ως εξής:

$$a(k) = \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it}) \cdot e^{-ikt} \frac{dt}{2\pi} = \hat{f}(k).$$

$$\mathcal{F} : L^1(\mathbb{T}) \longrightarrow C_0(\mathbb{Z})$$
$$f \longmapsto \hat{f}$$

• Σημ: τριγ. πολ. $\mathcal{P}$ πυκνή ως προς $\|\cdot\|_\infty$ στη $C(\mathbb{T})$
$\Rightarrow \overline{A(\mathbb{T})}^{\|\cdot\|_\infty} = C(\mathbb{T})$.

Όμως $A(\mathbb{T}) \subsetneq C(\mathbb{T})$ πρόδ?

Υπόμν: $G = \mathbb{T} = \{ e^{it} : t \in \mathbb{R} \}$ $\quad \hat{G} = \{ \gamma_n : n \in \mathbb{Z} \} \simeq \mathbb{Z}$
$\gamma_n(e^{it}) = e^{int}$

$$\mathcal{F} : L^1(\mathbb{T}) \longrightarrow C_0(\mathbb{Z})$$
$$f \longmapsto \hat{f} \quad \text{με} \quad \hat{f}(n) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} \frac{dt}{2\pi}$$

$$A(\mathbb{Z}) = \{ a = (a(n)) \in C_0(\mathbb{Z}) : \exists f \in L^1(\mathbb{T}) \text{ με } \hat{f}(n) = a(n) \ \forall n \in \mathbb{Z} \}$$

Τότε $c_{00}(\mathbb{Z}) \subseteq A(\mathbb{Z}) \subseteq C_0(\mathbb{Z})$

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{\log n}, & n \geq 2 \\ 0, & -1 \leq n \leq 1 \\ -\frac{1}{\log|n|}, & n \leq -2 \end{cases}$$

είναι μια $c_0(\mathbb{Z})$ αλλά όχι $A(\mathbb{Z})$.

entypon

Παράδ: $G = \mathbb{R}$ $\quad \hat{G} = \{\gamma_\xi : \xi \in \mathbb{R}\} \simeq \mathbb{R}$ $\quad \gamma_\xi(t) = e^{i\xi t}$ $(t \in \mathbb{R})$

$$\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}) \longrightarrow C_0(\hat{\mathbb{R}})$$
$$f \longmapsto \hat{f}$$

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-it\xi} \frac{dt}{\sqrt{2\pi}} \qquad \|\hat{f}\|_{L^2(\mathbb{R})} = \|f\|_{L^2(\mathbb{R})}$$

$$A(\hat{\mathbb{R}}) = \{\varphi \in C_0(\hat{\mathbb{R}}) : \exists f \in L^1(\mathbb{R}) \text{ με } \varphi = \hat{f}\}$$
$$\subseteq C_0(\hat{\mathbb{R}}).$$

Χώρος Schwartz: $S(\hat{\mathbb{R}}) = \{f \in C_\infty(\hat{\mathbb{R}}) : \forall n \in \mathbb{N}\ \lim_{|x| \to \infty} |x^n f(x)| = 0\}$

Ισχύει $S(\hat{\mathbb{R}}) \subseteq A(\hat{\mathbb{R}})$
ενώ είναι πυκνός στο $(C_0(\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$.

Δεν ισχύει ότι $A(\hat{\mathbb{R}}) = C_0(\hat{\mathbb{R}})$.

αποδ: $A(\hat{\mathbb{R}}) = \mathcal{F}(L^1(\mathbb{R}))$

1) η $\mathcal{F}$ είναι συνεχής
2) αν ισχύει η ισότητα τότε $\mathcal{F}$ επί
3) επίσης είναι 1-1 (αν $\hat{f}(\xi) = 0 \Rightarrow f = 0$ σ.π.)
4) είναι και οι 2 χώροι Banach
Άρα η αντίστροφη $\mathcal{F}^{-1}$ θα ήταν συνεχής
Όμως, αν $a > 0$ και $f_a(t) = e^{-at^2}$, τότε αποδεικνύεται ότι $\hat{f}_a(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2a}} e^{-\xi^2/4a}$

Ισχύει $\|f_a\|_1 = \text{σταθ} = \sqrt{2\pi}$
ενώ $\|\hat{f}_a\|_1 = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$ $\quad$ άρα

$$\mathcal{F}: (L^1(\mathbb{R}), \|\cdot\|_1) \longrightarrow (C_0(\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$$
$$f_a \longleftarrow \hat{f}_a$$
$\|\hat{f}_a\|_\infty \xrightarrow[a\to\infty]{} 0$ ενω $\mathcal{F}^{-1}(\hat{f}_a) = f_a \overset{\|\cdot\|_1}{\not\to} 0$ ~~FAIL~~ ok.

Περιορίζομαι στην περίπτωση $G = \mathbb{T}$.

$$A(\mathbb{T}) = \{ f \in C(\mathbb{T}) : \sum |\hat{f}(n)| < +\infty \}$$

Προτ: Έστω $f \in A(\mathbb{T})$, $f(e^{it}) \neq 0 \quad \forall t \in [0, 2\pi]$ και $g = \frac{1}{f}$ ορίζεται και $\in C(\mathbb{T})$

Wiener: $\sum |\hat{g}(n)| < +\infty$? ΝΑΙ.

Γενικότερα: Έστω $E \subseteq \mathbb{T}$ κλειστό και θεωρώ τις συναρτήσεις $k(E) = \{ f \in A(\mathbb{T}) : f|_E = 0 \}$

Θεωρώ $J(E) = \{ f \in A(\mathbb{T}) : f$ μηδενίζεται γύρω από το $E \}$

$$\subseteq k(E)$$
και $\overline{J(E)}^{\|\cdot\|_A} \subseteq k(E)$.

E: σύνολο σύνθεσης s-set αν ισχύει η ισότητα

Προτ: Και τα δύο είναι ιδεώδη της $A(\mathbb{T})$. Είναι ίσα? ~~ΠΟΤΕ~~. όχι πάντα

~~L. Schwartz: Για τη περίπτωση $G = \mathbb{R}^3$~~

E: σύνολο σύνθεσης, αν $\forall f \in A(\mathbb{T})$ που $f|_E = 0$ προσεγγίζεται από $(f_n) \subseteq A(\mathbb{T})$ που μηδενίζονται στο E και λίγο παραέξω. (δηλαδή $\exists U_n \supseteq E$ ανοιχτά τ.ω. $f_n|_{U_n} = 0$).

L. Schwartz: Για τη περίπτωση $G = \mathbb{R}^3$, η S^2 δεν είναι s-set

Malliavin: σε κάθε G όχι διακριτή
$\exists\, E \subseteq \hat{G}$ κλειστό που δεν είναι s-set.

- Αν E, F s-set $\Rightarrow$ $E \cup F$ s-set ?
- E πεπερ. $\Rightarrow$ E s-set ✓
- $\emptyset$ s-set ✓

~~~

Ας δούμε το ίδιο ερώτημα στη $C(\mathbb{T})$

$$K(E) = \{ f \in C(\mathbb{T}) : f|_E = 0 \}$$

και

$$J(E) = \{ f \in C(\mathbb{T}) : f|_U = 0 \text{ για κάποιο } U \supseteq E \}$$

Ισχ. $\overline{J(E)}^{\|\cdot\|_\infty} = K(E)$.

αποδ: $K(E) = C_0(\mathbb{T} \setminus E)$

$J(E) \subseteq C_0(\mathbb{T}\setminus E)$ υπάλγεβρα, δεν έχει μηδενοσύνολα
χωρίζει τα σημεία του $\mathbb{T}\setminus E$
και είναι αυτοσυζυγής

Stone-Weierstrass $\Rightarrow$ $J(E)$ πυκνή στη $C_0(\mathbb{T}\setminus E)$

$\forall \lambda \in \mathbb{T}\setminus E$ υπάρχει $f \in J(E)$ τ.ω. $f(\lambda) \neq 0$
διότι $\exists\, U$ ανοιχτό $\not\ni \lambda$ και $U \supseteq E$ οπότε
από Urysohn $\exists\, f$ συνεχής με $f|_U = 0$
και $f(\lambda) = 1$.
~~~