ΕΘΝΙΚΟ ΚΑΙ ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Άλγεβρες Τελεστών που περιέχουν μεγιστικές μεταθετικές Άλγεβρες von Neumann

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ ΕΙΔΙΚΕΥΣΗΣ ΣΤΑ ΘΕΩΡΗΤΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Θεοφιλος Κλημης

2009

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία εκπονήθηκε
στα πλαίσια των σπουδών για την απόκτηση του
Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης στα
Θεωρητικά Μαθηματικά
που απονέμει το Τμήμα Μαθηματικών του
Εθνικού και Καποδιστριακού Πανεπιστήμιου Αθηνών

Εγκρίθηκε στις .... από Εξεταστική Επιτροπή αποτελούμενη από τους:

Ονοματεπώνυμο	**Βαθμίδα**	**Υπογραφή**
Μιχαήλ Ανούσης	Καθηγητής	....
Απόστολος Γιαννόπουλος	Καθηγητής	....
Αριστείδης Κατάβολος (Επιβλέπων)	Καθηγητής	....

Πρόλογος

Η παρούσα διπλωματική εργασία βασίζεται στο άρθρο "Operator Algebras and Invariant Subspaces" του William Arveson, και ασχολείται με την μελέτη Αλγεβρών Τελεστών που δρούν σ' έναν διαχωρίσιμο χώρο Hilbert και περιέχουν μια μεγιστική μεταθετική Άλγεβρα von Neumann.

Στο πρώτο κεφάλαιο δίνονται βασικές προκαταρκτικές έννοιες από την Θεωρία Τελεστών, την Θεωρία Μέτρου και την Τοπολογία, που χρειάζονται στα επόμενα.

Στο δεύτερο κεφάλαιο, εισάγουμε την έννοια ενός μεταθετικού συνδέσμου υποχώρων, δηλαδή ενός μεταθετικού συνδέσμου (ορθών) προβολών σ' έναν χώρο Hilbert, που είναι κλειστός ως προς την ισχυρή (SOT) τοπολογία τελεστών και περιέχει τον μηδενικό και τον ταυτοτικό τελεστή.

Ειδικότερα, σε κάθε χώρο σ-πεπερασμένου μέτρου (X, m), που είναι εφοδιασμένος με μια αυτοπαθή και μεταβατική σχέση $\leqslant$ (ένας τέτοιος χώρος λέγεται προδιατεταγμένος χώρος μέτρου), αντιστοιχούμε έναν μεταθετικό σύνδεσμο υποχώρων που τον συμβολίζουμε με $\mathcal{L}(X, \leqslant, m)$.

Ο $\mathcal{L}(X, \leqslant, m)$ θα περιέχει πολλαπλασιαστικούς τελεστές χαρακτηριστικών συναρτήσεων μιας συγκεκριμένης κλάσης υποσυνόλων του X, που θα τα ονομάζουμε αύξοντα σύνολα και σχετίζονται με την σχέση $\leqslant$.

Το κεντρικό συμπέρασμα αυτού του κεφαλαίου είναι ότι κάθε μεταθετικός σύνδεσμος υποχώρων που δρα σ' έναν διαχωρίσιμο χώρο Hilbert, ταυτίζεται (μέσω ορθομοναδιαίας ισοδυναμίας) μ' έναν σύνδεσμο υποχώρων της μορφής $\mathcal{L}(X, \leqslant, m)$. Το αποτέλεσμα αυτό είναι ανάλογο του Φασματικού Θεωρήματος, σύμφωνα με το οποίο κάθε μεταθετική C^* άλγεβρα τελεστών που δρα σ' έναν διαχωρίσιμο χώρο Hilbert, είναι ορθμοναδιαία ισοδύναμη με μια υπάλγεβρα της πολλαπλασιαστικής άλγεβρας ενός χώρου μέτρου.

Στο τρίτο κεφάλαιο, η προηγούμενη ταύτιση θα χρησιμοποιηθεί κατά ουσιαστικό τρόπο για να αποδείξουμε ότι ένας τέτοιος σύνδεσμος υποχώρων $\mathcal{L}$ είναι ανακλαστικός, δηλαδή $\mathcal{L} = latalg\mathcal{L}$. Προς την κατεύθυνση αυτή, θα ορίσουμε πρώτα μια ειδική κατηγορία τελεστών στον χώρο $L^2(X, m)$, τους ψευδο-ολοκληρωτικούς τελεστές, που σχετίζονται με μια κατάλληλη άλγεβρα μέτρων στον χώρο γινόμενο $X \times X$.

Από τους τελεστές αυτούς ορίζουμε στη συνέχεια μια ultraweakly κλειστή άλγεβρα, που περιέχει την πολλαπλασιαστική άλγεβρα του (X, m), και έχει τον $\mathcal{L}(X, \leqslant, m)$ ως σύνδεσμο αναλλοίωτων υποχώρων. Την άλγεβρα αυτή θα την συμβολίσουμε με $\mathcal{A}_{min}(X, \leqslant, m)$.

Στο τέταρτο κεφάλαιο, αποδεικνύουμε καταρχήν ότι η $\mathcal{A}_{min}(X, \leqslant, m)$ είναι η μικρότερη (ως προς την σχέση του περιέχεσθαι) άλγεβρα στον $B(L^2(X, m))$ με τις προηγούμενες ιδιότητες, καθώς επίσης ότι η $\mathcal{A}_{min}(X, \leqslant, m)$ είναι μια pre-reflexive άλγεβρα τελεστών, δηλαδή έχει την ίδια διαγώνιο με την άλγεβρα $alglat\mathcal{A}_{min}(X, \leqslant, m)$.

Τα αποτελέσματα αυτά, καθώς και η ταύτιση ενός μεταθετικού συνδέσμου υποχώρων $\mathcal{L}$ μ' έναν $\mathcal{L}(X, \leqslant, m)$, χρησιμοποιούνται με καταλυτικό τρόπο για να εξάγουμε αντίστοιχα συμπεράσματα σε τυχαίες άλγεβρες τελεστών, που δρούν σε διαχωρίσιμους χώρους Hilbert.

Συγκεκριμένα, αποδεικνύουμε τα εξής:

1. Κάθε ultraweakly κλειστή άλγεβρα τελεστών που περιέχει μια μεγιστική μεταθετική άλγεβρα von Neumann, είναι pre-reflexive.
   Σημειώνουμε, ωστόσο, ότι μια τέτοια άλγεβρα δεν είναι απαραίτητα ανακλαστική (ένα παράδειγμα υπάρχει στο προαναφερθέν άρθρο του W.Arveson)

2. Για έναν δεδομένο μεταθετικό σύνδεσμο υποχώρων $\mathcal{L}$, υπάρχει πάντοτε η μικρότερη ultraweakly κλειστή, pre-reflexive άλγεβρα που έχει τον $\mathcal{L}$ ως σύνδεσμο αναλλοίωτων υποχώρων.

Κλείνοντας, θα ήθελα να ευχαριστήσω ιδιαίτερα τον Καθηγητή μου κο Αριστείδη Κατάβολο για την επιλογή του θέματος, και κυρίως για την υπομονή και τον χρόνο που αφιέρωσε. Η συμβολή του σε καίρια σημεία αυτής της εργασίας υπήρξε καθοριστική και αναντικατάστατη.

Ευχαριστώ επίσης τους Καθηγητές κους Απόστολο Γιαννόπουλο και Μιχαήλ Ανούση για την συμμετοχή τους στην τριμελή επιτροπή.

Τέλος, θεωρώ υποχρέωσή μου να ευχαριστήσω την Ρέζη και την Μάρθα για την γραφή αυτής της εργασίας σε ηλεκτρονική μορφή.

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Προκαταρκτικά

1.1 Έννοιες από την Θεωρία Μέτρου και την Τοπολογία

Σ' αυτήν την εργασία, με τον όρο χώρος Borel θα εννοούμε ένα μη κενό σύνολο X, εφοδιασμένο με μία σ-άλγεβρα υποσυνόλων του X, που θα την συμβολίζουμε με $\mathcal{B}(X)$.
Τα στοιχεία της $\mathcal{B}(X)$ θα λέγονται Borel μετρήσιμα σύνολα ή απλά σύνολα Borel.

Κάθε τοπολογικός χώρος X γίνεται ένας χώρος Borel, αν εφοδιαστεί με την σ-άλγεβρα που παράγεται από τα ανοικτά (ισοδύναμα τα κλειστά) υποσύνολά του.

Ορισμός 1.1. *Έστω X χώρος Borel και S ένα μη κενό υποσύνολο του X. Η οικογένεια*

$$\mathcal{B}(S) = \{A \cap S : A \in \mathcal{B}(X)\}$$

είναι μια σ-άλγεβρα υποσυνόλων του S, η οποία ονομάζεται σ-άλγεβρα ίχνος της $\mathcal{B}(X)$ στο S. Το ζεύγος $(S, \mathcal{B}(S))$ θα λέγεται Borel υπόχωρος του X.

Ορισμός 1.2. *Έστω X, Ψ δύο χώροι Borel. Μια συνάρτηση $f : X \to \Psi$ ονομάζεται:*

1. *Borel μετρήσιμη, αν $f^{-1}(B) \in \mathcal{B}(X)$ $\forall B \in \mathcal{B}(\Psi)$.*

2. *Borel ισομορφισμός αν είναι $1-1$, επί και οι f, f^{-1} είναι Borel μετρήσιμες.*

Ορισμός 1.3. *Έστω X, Ψ χώροι Borel και $f : X \to \Psi$ μια Borel μετρήσιμη συνάρτηση. Τότε, για κάθε μέτρο Borel m στον X, ορίζεται ένα μέτρο Borel στον Ψ, που θα συμβολίζεται με $f_* m$, μέσω της σχέσης:*

$$f_* m(B) = m(f^{-1}(B)) \;\forall\, B \in \mathcal{B}(\Psi)$$

Το $f_* m$ θα λέγεται μέτρο εικόνα του m ως προς f.

Σύμφωνα με το επόμενο Θεώρημα, η ολοκλήρωση ως προς το μέτρο $f_* m$ ανάγεται σε ολοκλήρωση ως προς το m.

Θεώρημα 1.4. *Έστω X, Ψ χώροι Borel, $f : X \to \Psi$ μια Borel μετρήσιμη συνάρτηση και m ένα μέτρο Borel στον X. Τότε, για κάθε $B \in \mathcal{B}(X)$ και κάθε συνάρτηση $\phi : \Psi \to \mathbb{R}$ Borel μετρήσιμη ή $\phi : \Psi \to \mathbb{C}$ ολοκληρώσιμη ως προς $f_* m$, ισχύει:*

$$\int_B \phi \, df_* m = \int_{f^{-1}(B)} (\phi \circ f) dm.$$

Θεώρημα 1.5. *(Radon-Nikodym για θετικά μέτρα)*
Έστω X χώρος Borel και m, n θετικά μέτρα Borel στον X ώστε το m είναι σ-πεπερασμένο και $n \ll m$.
Τότε υπάρχει μια μοναδική m-σχεδόν παντού, μετρήσιμη συνάρτηση $f : X \to [0, \infty]$, ώστε:

$$n(A) = \int_A f(x) \, dm(x) \;\; \forall \, A \in \mathcal{B}(X).$$

Επιπλέον, αν το n είναι σ-πεπερασμένο, τότε η f παίρνει πραγματικές τιμές, και αν το n είναι πεπερασμένο, τότε η f είναι ολοκληρώσιμη ως προς m.

Θεώρημα 1.6. *(Radon-Nikodym για μιγαδικά μέτρα)*
Έστω X χώρος Borel, m ένα σ-πεπερασμένο μέτρο Borel στον X και n ένα μιγαδικό μέτρο Borel στον X, ώστε $n \ll m$.
Τότε υπάρχει μια μοναδική m-σχεδόν παντού συνάρτηση $f : X \to \mathbb{C}$, ολοκληρώσιμη ως προς m, ώστε:

$$n(A) = \int_A f(x) \, dm(x) \;\; \forall \, A \in \mathcal{B}(X).$$

Επιπλέον, αν το n είναι προσημασμένο μέτρο, τότε η f παίρνει πραγματικές τιμές.

Ορισμός 1.7. *Η συνάρτηση f στα δύο προηγούμενα Θεωρήματα ονομάζεται παράγωγος Radon-Nikodym του n ως προς m, και συμβολίζεται με $\frac{dn}{dm}$.*

Ορισμός 1.8. *Έστω X χώρος Borel και μ ένα μιγαδικό μέτρο Borel στον X.*
Η κύμανση $|\mu|$ του μ είναι το μέτρο Borel που ορίζεται από την σχέση:

$$|\mu|(A) = \sup \sum_{i=1}^{n} |\mu(Bi)|, \;\; A \in \mathcal{B}(X)$$

όπου το supremum λαμβάνεται ως προς κάθε πεπερασμένη, μετρήσιμη διαμέριση $\{B_1, B_2, , ..., B_n\}$ του A.
Αποδεικνύεται ότι η κύμανση $|\mu|$ είναι ένα πεπερασμένο, θετικό μέτρο Borel στον X, και μάλιστα είναι το μικρότερο τέτοιο μέτρο που ικανοποιεί:

$$|\mu(A)| \leqslant |\mu|(A) \quad \forall \, A \in \mathcal{B}(X)$$

Ορισμός 1.9. *Έστω X χώρος Borel, μ ένα μιγαδικό μέτρο Borel στον X και $A \in \mathcal{B}(X)$. Το μ λέγεται συγκεντρωμένο στο A, αν*

$$\mu(B) = 0 \ \text{ για κάθε } B \in \mathcal{B}(X) \text{ με } B \subseteq X \setminus A$$

Είναι σαφές ότι αν το μ είναι θετικό, τότε η προηγούμενη συνθήκη ισοδυναμεί με $\mu(X \setminus A) = 0$. Επίσης, το μ είναι συγκεντρωμένο στο A αν, και μόνο αν, το $|\mu|$ είναι συγκεντρωμένο στο A.

Πρόταση 1.10. *Έστω X χώρος Borel, m ένα θετικό μέτρο Borel στον X και n ένα μιγαδικό μέτρο Borel στον X, ώστε $n \ll m$.
Αν υπάρχει η παράγωγος Radon-Nikodym $\frac{dn}{dm}$ του n ως προς m, τότε υπάρχει και η παράγωγος Radon-Nikodym $\frac{d|n|}{dm}$ της κύμανσης του n ως προς m και μάλιστα ισχύει:*

$$\frac{d|n|}{dm} = \left|\frac{dn}{dm}\right| \quad m\text{-σχεδόν παντού}$$

Ιδιαιτέρως, για κάθε μιγαδικό μέτρο Borel μ στον X ισχύει:

$$\left|\frac{d\mu}{d|\mu|}\right| = 1 \quad |\mu|\text{-σχεδόν παντού}$$

Θεώρημα 1.11. *Έστω X χώρος Borel και m, n θετικά μέτρα Borel στον X, ώστε $n \ll m$ και υπάρχει η παράγωγος Radon-Nikodym $f = \frac{dn}{dm}$ του n ως προς m.
Τότε για κάθε Borel μετρήσιμη συνάρτηση $g : X \to [0, \infty]$ ή $g : X \to \mathbb{C}$ ολοκληρώσιμη ως προς n, ισχύει:*

$$\int_X g(x)\, dn(x) = \int_X g(x) f(x)\, dm(x).$$

Το Θεώρημα ισχύει επίσης στην περίπτωση που το μέτρο n είναι μιγαδικό και η g είναι ολοκληρώσιμη ως προς $|n|$.

Θεώρημα 1.12. *(Θεώρημα Dini) Έστω X συμπαγής χώρος Hausdorff, $(f_i)_{i\in I}$ ένα μονότονο δίκτυο στον $C_{\mathbb{R}}(X)$ και $f \in C_{\mathbb{R}}(X)$, ώστε $f_i \to f$ κατά σημείο.
Τότε, $f_i \to f$ ομοιόμορφα στον X.*

Θεώρημα 1.13. *Αν X είναι διαχωρίσιμος χώρος Banach, τότε:*

1. *η κλειστή μοναδιαία σφαίρα $S_{X^*} = \{x^* \in X^* : ||x^*|| \leqslant 1\}$ του X^*, με την w^*-τοπολογία, είναι συμπαγής μετρικοποιήσιμος χώρος.*

2. *ο X^* είναι w^*-διαχωρίσιμος.*

Πρόταση 1.14. *Αν X τοπολογικός χώρος και Ψ συμπαγής χώρος, τότε η πρώτη προβολή του $X \times \Psi$ είναι κλειστή συνάρτηση.*

1.2 Πολωνικοί χώροι και Standard χώροι Borel

Ορισμός 1.15. *Ένας τοπολογικός χώρος λέγεται Πολωνικός, αν είναι ομοιομορφικός με έναν διαχωρίσιμο, πλήρη μετρικό χώρο.*

Πρόταση 1.16. *Κάθε ανοικτός και κάθε κλειστός υπόχωρος ενός Πολωνικού χώρου, είναι Πολωνικός.*

Πόρισμα 1.17. *Κάθε 2ος αριθμήσιμος, τοπικά συμπαγής χώρος Hausdorff, είναι Πολωνικός.*

Πρόταση 1.18. *Το καρτεσιανό γινόμενο μιας ακολουθίας Πολωνικών χώρων, είναι Πολωνικός χώρος.*

Πρόταση 1.19. *Αν X είναι ένας Πολωνικός χώρος και m ένα πεπερασμένο, θετικό μέτρο Borel στον X, τότε το m είναι κανονικό, δηλαδή ικανοποιεί τα εξής:*
(1) $m(K) < \infty$ για κάθε συμπαγές υποσύνολο K του X
(2) $m(A) = \inf\{m(U) : U$ ανοικτό στον X, $A \subseteq U\}$ για κάθε $A \in \mathcal{B}(X)$
(3) $m(U) = \sup\{m(K) : K$ συμπαγές στον X, $K \subseteq U\}$ για κάθε ανοικτό υποσύνολο U του X

Η $2^η$ και $3^η$ ιδιότητα λέγονται, αντίστοιχα, εξωτερική και εσωτερική κανονικότητα του m.

Ορισμός 1.20. *Ένας χώρος Borel λέγεται standard, αν είναι Borel ισομορφικός με ένα Borel υποσύνολο ενός Πολωνικού χώρου.*
Δηλαδή ένας χώρος Borel X είναι standard, αν υπάρχουν ένας Πολωνικός χώρος Z, ένα Borel υποσύνολο Ψ του Z και ένας Borel ισομορφισμός $f : X \to \Psi$.

Θεώρημα 1.21. *Αν X standard χώρος Borel, τότε υπάρχει μια ακολουθία $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ Borel υποσυνόλων του X, ώστε:*

1. *η $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ παράγει την Borel δομή του X*

2. *η $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ διαχωρίζει τα σημεία του X.*

Θεώρημα 1.22. *Έστω X standard χώρος Borel, Ψ Πολωνικός χώρος και $f : X \to \Psi$ μια $1-1$, Borel μετρήσιμη συνάρτηση. Τότε το $f(X)$ είναι Borel υποσύνολο του Ψ και η $f : X \to f(X)$ είναι Borel ισομορφισμός.*

1.3 Έννοιες από την Θεωρία Τελεστών

Τοπολογίες στον B(H)

Έστω H χώρος Hilbert.
Όπως είναι γνωστό, ο χώρος $B(H)$ των φραγμένων γραμμικών τελεστών επί του H, εφοδιάζεται με την τοπολογία της νόρμας, με την οποία μάλιστα γίνεται χώρος Banach.
Στην ενότητα αυτή θα ορίσουμε τρεις άλλες τοπολογίες στον $B(H)$, συγκεκριμένα την ισχυρή, την ασθενή και την υπερασθενή τοπολογία, και θα διατυπώσουμε τις ιδιότητές τους που θα μας χρειαστούν στα επόμενα.
Σημειώνουμε ότι οι προηγούμενες τοπολογίες είναι όλες ασθενέστερες της τοπολογίας της νόρμας.

(I) **Η ισχυρή και η ασθενής τοπολογία τελεστών**

Ορισμός 1.23. *Η ισχυρή τοπολογία τελεστών (ή SOT τοπολογία) στον $B(H)$, είναι η τοπολογία της κατά σημείο σύγκλισης στον H.*
Επομένως, αν $(T_i)_{i\in I}$ είναι ένα δίκτυο στον $B(H)$ και $T \in B(H)$, τότε:

$$T_i \xrightarrow{SOT} T \;\Leftrightarrow\; ||T_i x - Tx|| \to 0 \quad \forall\, x \in H$$

Αν $T \in B(H)$, τότε μια βάση περιοχών του T για την SOT τοπολογία είναι η οικογένεια των συνόλων

$$\{A \in B(H) : ||Tx_i - Ax_i|| < \varepsilon \quad \forall\, i = 1, ..., n\}$$

όπου $\varepsilon > 0$ και $\{x_1, ..., x_n\} \subseteq H$.

Ορισμός 1.24. *Η ασθενής τοπολογία τελεστών (ή WOT τοπολογία) στον $B(H)$, είναι η ασθενέστερη τοπολογία που καθιστά συνεχείς όλες τις γραμμικές μορφές $\omega_{x,y}$, $x, y \in H$, όπου:*

$$\omega_{x,y}(T) = \langle Tx,\, y\rangle \quad \forall\, T \in B(H).$$

Επομένως, αν $(T_i)_{i\in I}$ είναι ένα δίκτυο στον $B(H)$ και $T \in B(H)$, τότε:

$$T_i \xrightarrow{WOT} T \;\Leftrightarrow\; \langle T_i x,\, y\rangle \to \langle Tx,\, y\rangle \quad \forall\, x, y \in H$$

Πρόταση 1.25. *Η WOT τοπολογία στον $B(H)$ είναι ασθενέστερη της SOT, και μάλιστα γνήσια ασθενέστερη όταν ο H είναι απειροδιάστατος.*

Πρόταση 1.26. *Έστω $\omega : B(H) \to \mathbb{C}$ μια γραμμική απεικόνιση.*
Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

1. *η ω είναι SOT-συνεχής*

2. *η ω είναι WOT-συνεχής*

3. *υπάρχουν $\{x_1, ..., x_n\}$, $\{y_1, ..., y_n\} \subseteq H$ ώστε:*

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} \omega_{x_i, y_i},$$

δηλαδή

$$\omega(T) = \sum_{i=1}^{n} \langle Tx_i, \, y_i \rangle \quad \forall T \in B(H).$$

Πρόταση 1.27. *Ένα κυρτό υποσύνολο του $B(H)$ (ειδικότερα ένας γραμμικός υπόχωρος) είναι SOT-κλειστό αν, και μόνο αν, είναι WOT-κλειστό.*

Πρόταση 1.28. *Ο πολλαπλασιασμός*

$$\big(B(H), SOT\big) \times \big(B(H), SOT\big) \to \big(B(H), SOT\big) \ : \ (T, S) \mapsto TS,$$

1. *δεν είναι συνεχής (εκτός αν ο H είναι πεπερασμένης διάστασης)*

2. *είναι ακολουθιακά συνεχής, δηλαδή αν $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι δύο ακολουθίες στον $B(H)$ με $T_n \xrightarrow{SOT} T$ και $S_n \xrightarrow{SOT} S$, τότε $T_n S_n \xrightarrow{SOT} TS$*

3. *είναι χωριστά συνεχής, δηλαδή αν $T_i \xrightarrow{SOT} T$, τότε για κάθε $A \in B(H)$ έχουμε ότι:*

$$AT_i \xrightarrow{SOT} AT \quad \text{και} \quad T_i A \xrightarrow{SOT} TA$$

Πρόταση 1.29. *Ο πολλαπλασιασμός*

$$\big(B(H), WOT\big) \times \big(B(H), WOT\big) \to \big(B(H), WOT\big) \ : \ (T, S) \mapsto TS,$$

1. *δεν είναι συνεχής, ούτε καν ακολουθιακά (εκτός αν ο H είναι πεπερασμένης διάστασης)*

2. *είναι χωριστά συνεχής*

Πρόταση 1.30. *Η ενέλιξη $B(H) \to B(H) \ : \ T \mapsto T^*$,*

1. *δεν είναι (SOT, SOT)-συνεχής, ούτε καν ακολουθιακά (εκτός αν ο H είναι πεπερασμένης διάστασης)*

2. *είναι (WOT, WOT)-συνεχής, δηλαδή αν $T_i \xrightarrow{WOT} T$ τότε και $T_i^* \xrightarrow{WOT} T^*$*

(II) **Η υπερασθενής τοπολογία τελεστών**

Ορίζουμε το υποσύνολο $B_*(H)$ του $B(H)$, ως την $||\cdot||$-κλειστή γραμμική θήκη του συνόλου $\{\omega_{x,y} : x, y \in H\}$, όπου $\omega_{x,y}(T) = \langle Tx, y\rangle \quad \forall T \in B(H)$.
Αποδεικνύεται ότι ο $B_*(H)$ είναι το σύνολο όλων των γραμμικών μορφών της μορφής:

$$\omega = \sum_{n=1}^{\infty} \omega_{x_n,y_n},$$

όπου $x_n, y_n \in H$ με $\sum\limits_{n=1}^{\infty} ||x_n||^2 < \infty$ και $\sum\limits_{n=1}^{\infty} ||y_n||^2 < \infty$.

Ορισμός 1.31. *Η υπερασθενής ή ultraweak τοπολογία στον $B(H)$, είναι η ασθενέστερη τοπολογία ως προς την οποία κάθε γραμμική μορφή $\omega \in B_*(H)$ είναι συνεχής.*
Αποδεικνύεται ότι ο δυϊκός του $B_*(H)$ είναι ο $B(H)$, άρα η ultrweak τοπολογία ταυτίζεται με την ασθενή-*.

Επομένως, για ένα δίκτυο $(T_i)_{i\in I}$ στον $B(H)$ και για έναν τελεστή $T \in B(H)$ έχουμε ότι:

$$T_i \xrightarrow{w^*} T \;\Leftrightarrow\; \sum_{n=1}^{\infty} \langle T_i x_n, y_n\rangle \longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \langle T x_n, y_n\rangle$$

για κάθε δύο ακολουθίες $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στον H, με $\sum\limits_{n=1}^{\infty} ||x_n||^2 < \infty$ και $\sum\limits_{n=1}^{\infty} ||y_n||^2 < \infty$.

Επειδή ο $B_*(H)$ περιέχει όλες τις γραμμικές μορφές $\omega_{x,y}$, είναι σαφές ότι η υπερασθενής τοπολογία είναι ισχυρότερη της ασθενούς.
Επίσης, είναι φανερό ότι οι w^*-συνεχείς γραμμικές μορφές του $B(H)$, είναι ακριβώς οι $\omega \in B_*(H)$.

Πρόταση 1.32. *Οι WOT και w^* τοπολογίες συμπίπτουν στα $||\cdot||$-φραγμένα υποσύνολα του $B(H)$.*

Θεώρημα 1.33. *Η κλειστή μοναδιαία σφαίρα $B(H)_1 = \{T \in B(H) : ||T|| \leqslant 1\}$ του $B(H)$ είναι w^*-συμπαγής, άρα και WOT-συμπαγής.*

Θεώρημα 1.34. *Αν H διαχωρίσιμος χώρος Hilbert, τότε ο χώρος $\big(B(H)_1, WOT\big)$ είναι μετρικοποιήσιμος, και άρα διαχωρίσιμος (ως συμπαγής).*

Πρόταση 1.35. *Αν H διαχωρίσιμος χώρος Hilbert, τότε ο χώρος $\big(B(H)_1, SOT\big)$ είναι διαχωρίσιμος, πλήρης μετρικός χώρος.*

Ορισμός 1.36. *Έστω H χώρος Hilbert. Η οικογένεια όλων των κλειστών υποχώρων του H είναι ένας σύνδεσμος υποσυνόλων του H, ως προς τις πράξεις $\wedge$ (infimum) και $\vee$ (supremum) που ορίζονται ως εξής:*

$$\begin{aligned} & M \wedge N = \overline{M \cap N} \\ \text{και} \quad & M \vee N = \overline{M + N} \end{aligned}$$

όπου M, N κλειστοί υπόχωροι του H.

Ορισμός 1.37. *Έστω H χώρος Hilbert.*

1. *αν $\mathcal{L}$ είναι ένας σύνδεσμος κλειστών υποχώρων του H, αποδεικνύεται ότι το σύνολο όλων των τελεστών που αφήνουν αναλλοίωτο κάθε στοιχείο του $\mathcal{L}$, είναι μια άλγεβρα τελεστών. Η άλγεβρα αυτή θα συμβολίζεται με $alg\mathcal{L}$. Συνεπώς:*

$$alg\mathcal{L} = \{T \in B(H) : T(S) \subseteq S \quad \forall S \in \mathcal{L}\}$$

2. *Όμοια, αν $\mathcal{A}$ είναι μια άλγεβρα τελεστών στον $B(H)$, αποδεικνύεται ότι το σύνολο των κλειστών υποχώρων του H που είναι αναλλοίωτοι ως προς κάθε στοιχείο της $\mathcal{A}$, είναι ένας σύνδεσμος ως προς τις πράξεις $\wedge$ και $\vee$ του Ορισμού 1.36.*
Ο σύνδεσμος αυτός θα συμβολίζεται με $lat\mathcal{A}$, δηλαδή:

$$lat\mathcal{A} = \{S \mid S \text{ κλειστός υπόχωρος του } H \text{ με } T(S) \subseteq S \quad \forall T \in \mathcal{A}\}$$

Είναι φανερό ότι για κάθε $\mathcal{L}$ και $\mathcal{A}$ όπως στα προηγούμενα, ορίζονται ο σύνδεσμος $latalg\mathcal{L}$ και η άλγεβρα $alglat\mathcal{A}$, και μάλιστα ισχύουν οι σχέσεις:

$$\begin{aligned} & \mathcal{L} \subseteq latalg\mathcal{L} \\ \text{και} \quad & \mathcal{A} \subseteq alglat\mathcal{A}. \end{aligned}$$

Ορισμός 1.38. *Έστω H χώρος Hilbert.*

1. *αν $\mathcal{L}$ είναι ένας σύνδεσμος κλειστών υποχώρων του H, ο $\mathcal{L}$ ονομάζεται ανακλαστικός (reflexive) αν $\mathcal{L} = latalg\mathcal{L}$*

2. *αντίστοιχα, μια άλγεβρα τελεστών $\mathcal{A}$ στον $B(H)$ ονομάζεται ανακλαστική, αν $\mathcal{A} = alglat\mathcal{A}$.*

Ορισμός 1.39. *Έστω $\mathcal{S}$ ένα μη κενό υποσύνολο του $B(H)$. Ο μεταθέτης του $\mathcal{S}$ είναι το σύνολο:*

$$\mathcal{S}^{'} = \{T \in B(H) : TS = ST \ \ \forall S \in \mathcal{S}\}$$

Πρόταση 1.40. *Έστω H χώρος Hilbert, $\mathcal{A}$ μια αυτοσυζυγής υπάλγεβρα του $B(H)$ και P μια προβολή του $B(H)$.*
Τότε: $P \in lat\mathcal{A} \iff P \in \mathcal{A}^{'}$.

Απόδειξη. Αν $P \in lat\mathcal{A}$, τότε $TP = PTP\ \forall T \in \mathcal{A}$.
Παίρνοντας συζυγείς στην προηγούμενη σχέση κι εφ' όσον η $\mathcal{A}$ είναι αυτοσυζυγής, έχουμε ότι $PT = PTP\ \forall T \in \mathcal{A}$.
Συνεπώς $TP = PT\ \forall T \in \mathcal{A}$, δηλαδή $P \in \mathcal{A}'$.
Αντίστροφα, αν $P \in \mathcal{A}'$, τότε για κάθε $T \in \mathcal{A}$ θα ισχύει $PTP = TP^2 = TP$, και άρα $P \in lat\mathcal{A}$.
$\square$

Ορισμός 1.41. *Έστω H χώρος Hilbert. Μια άλγεβρα von Neumann στον H είναι ένα αυτοσυζυγές υποσύνολο $\mathcal{M}$ του $B(H)$ που ικανοποιεί $\mathcal{M} = \mathcal{M}''$.*

Θεώρημα 1.42. *(Θεώρημα $2^{ου}$ Μεταθέτη) Έστω H χώρος Hilbert και $\mathcal{A}$ μια αυτοσυζυγής υπάλγεβρα του $B(H)$, που περιέχει τον ταυτοτικό τελεστή. Τότε:*

$$\mathcal{A}'' = \overline{\mathcal{A}}^{SOT} = \overline{\mathcal{A}}^{WOT}.$$

Επομένως, η $\mathcal{A}$ είναι άλγεβρα von Neumann αν, και μόνο αν είναι SOT-κλειστή αν, και μόνο αν, είναι WOT-κλειστή.

Πρόταση 1.43. *Κάθε άλγεβρα von Neumann είναι η $||\cdot||$-κλειστή γραμμική θήκη των προβολών που περιέχει.*

Πρόταση 1.44. *Έστω H διαχωρίσιμος χώρος Hilbert και $\mathcal{M}$ μια μεταθετική άλγεβρα von Neumann στον H.*
Τότε υπάρχει $\xi \in \mathcal{M}$ με $||\xi|| = 1$, ώστε $T\xi \neq 0$ για κάθε $T \in \mathcal{M}$, $T \neq \mathbf{0}$ (δηλαδή το διάνυσμα ξ διαχωρίζει την $\mathcal{M}$).
Αν επιπλέον η $\mathcal{M}$ είναι μεγιστική, τότε ο υπόχωρος $\mathcal{M}\xi = \{T\xi : T \in \mathcal{M}\}$ είναι πυκνός στον H (ένα τέτοιο διάνυσμα λέγεται κυκλικό για την $\mathcal{M}$).

Το Τανυστικό Γινόμενο δύο χώρων Hilbert

Έστω H_1, H_2 δύο χώροι Hilbert.
Συμβολίζουμε με $H_1 \odot H_2$ το αλγεβρικό τανυστικό γινόμενο των H_1, H_2, που θα το θεωρούμε ως τον γραμμικό χώρο που παράγεται από τα στοιχεία της μορφής $x \otimes y$, $x \in H_1$, $y \in H_2$, που ικανοποιούν τις ιδιότητες:

$$\begin{aligned} x_1 \otimes y + x_2 \otimes y &= (x_1 + x_2) \otimes y \\ x \otimes y_2 + x \otimes y_2 &= x \otimes (y_1 + y_2) \end{aligned}$$

και

$$\lambda \cdot x \otimes y = (\lambda x) \otimes y = x \otimes (\lambda y), \quad \lambda \in \mathbb{C}$$

Ορίζουμε $\langle x_1 \otimes y_1, x_2 \otimes y_2 \rangle = \langle x_1, x_2 \rangle_1 \cdot \langle y_1, y_2 \rangle_2$ και επεκτείνουμε γραμμικά.
Τότε αποδεικνύεται ότι η προηγούμενη απεικόνιση είναι μια καλά ορισμένη sesquilinear μορφή, η

οποία μάλιστα ορίζει ένα εσωτερικό γινόμενο στον $H_1 \odot H_2$.
Η επαγόμενη νόρμα ικανοποιεί την σχέση: $\|x \otimes y\| = \|x\|_1 \cdot \|y\|_2$.

Ορισμός 1.45. *Ορίζουμε ως $H_1 \otimes H_2$ την πλήρωση του χώρου $(H_1 \odot H_2, \langle , \rangle)$.*
Ο χώρος Hilbert $H_1 \otimes H_2$ θα λέγεται τανυστικό γινόμενο των H_1, H_2.

Παρατήρηση 1.46. *Αν $x \otimes y = 0$, τότε $x = 0$ ή $y = 0$.*
Πράγματι: έστω ότι $y \neq 0$.
Τότε για κάθε $x' \in H_1$ θα ισχύει:

$$\langle x \otimes y, x' \otimes y \rangle = 0,$$

απ' όπου $\langle x, x' \rangle = 0$, διότι $y \neq 0$. Άρα $x = 0$.

Είναι εύκολο να δούμε ότι αν $\{x_i : i \in I\}$, $\{y_j : j \in J\}$ είναι ορθοκανονικές βάσεις των H_1 και H_2 αντίστοιχα, τότε το σύνολο $\{x_i \otimes y_j : i \in I, j \in J\}$ είναι μια ορθοκανονική βάση του $H_1 \otimes H_2$.

Έστω τώρα $T_1 \in \mathcal{B}(H_1)$, $T_2 \in \mathcal{B}(H_2)$.
Ορίζουμε έναν γραμμικό τελεστή $T_1 \odot T_2$ στο αλγεβρικό τανυστικό γινόμενο, θέτοντας

$$(T_1 \odot T_2)(x \otimes y) = T_1 x \otimes T_2 y$$

και επεκτείνοντας γραμμικά.
Ο $T_1 \odot T_2$ είναι τότε φραγμένος, με $\|T_1 \odot T_2\| = \|T_1\|_{\mathcal{B}(H_1)} \cdot \|T_2\|_{\mathcal{B}(H_2)}$.
Λόγω συνέχειας και εφ' όσον ο $H_1 \odot H_2$ είναι πυκνός υπόχωρος του $H_1 \otimes H_2$, ο $T_1 \odot T_2$ επεκτείνεται μοναδικά στον χώρο Hilbert $H_1 \otimes H_2$, με την ίδια νόρμα.
Θα συμβολίζουμε με $T_1 \otimes T_2$ την επέκταση αυτή, δηλαδή $T_1 \otimes T_2$ είναι ο τελεστής στον $\mathcal{B}(H_1 \otimes H_2)$ που ικανοποιεί τις σχέσεις:

$$(T_1 \otimes T_2)(x \otimes y) = T_1 x \otimes T_2 y \quad \forall\, x \in H_1,\, y \in H_2$$

και

$$\|T_1 \otimes T_2\| = \|T_1\|_{\mathcal{B}(H_1)} \cdot \|T_2\|_{\mathcal{B}(H_2)}$$

Ισχύουν μάλιστα τα εξής:

$$(T_1 \otimes T_2)^* = T_1^* \otimes T_2^*$$

και

$$(T_1 \otimes T_2)(S_1 \otimes S_2) = T_1 S_1 \otimes T_2 S_2 \text{ για κάθε } T_1, S_1 \in \mathcal{B}(H_1), T_2, S_2 \in \mathcal{B}(H_2).$$

Ορισμός 1.47. *(Τανυστικό Γινόμενο δύο αλγεβρών von Neumann)*
Έστω $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{B}(H_1)$, $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{B}(H_2)$ δύο άλγεβρες von Neumann. Ορίζουμε ως $\mathcal{M} \bar{\otimes} \mathcal{N}$ την άλγεβρα von Neumann στον $\mathcal{B}(H_1 \otimes H_2)$ που παράγεται από το σύνολο $\{M \otimes N : M \in \mathcal{M}, N \in \mathcal{N}\}$.
Ισοδύναμα, η $\mathcal{M} \bar{\otimes} \mathcal{N}$ είναι η WOT-κλειστή γραμμική θήκη του προηγούμενου συνόλου.
Αν $\mathcal{N} = \mathbb{C} I_2 = \{\lambda I_2 : \lambda \in \mathbb{C}\}$, θα συμβολίζουμε με $\mathcal{M} \otimes I_2$ την άλγεβρα von Neumann $\mathcal{M} \bar{\otimes} \mathbb{C} I_2$.

Ισχύει σχετικά η ακόλουθη Πρόταση.

Πρόταση 1.48. *Για κάθε άλγεβρα von Neumann $\mathcal{M}$ στον $\mathcal{B}(H_1)$ ισχύει:*

$$\mathcal{M} \otimes I_2 = \{M \otimes I_2 : M \in \mathcal{M}\}.$$

Το επόμενο Θεώρημα αποτελεί μια ειδική περίπτωση του Θεωρήματος του Tomita, σύμφωνα με το οποίο ισχύει:

$$(\mathcal{M} \otimes \mathcal{N})^{'} = \mathcal{M}^{'} \otimes \mathcal{N}^{'}$$

Θεώρημα 1.49. *Έστω $\mathcal{M}$ άλγεβρα von Neumann στον $\mathcal{B}(H_1)$. Τότε:*

$$(\mathcal{M} \otimes \mathcal{B}(H_2))^{'} = \mathcal{M}^{'} \otimes I_2.$$

Απόδειξη. Αποδεικνύουμε πρώτα το Θεώρημα όταν $\mathcal{M} = \mathbb{C}I_1$, δηλαδή θα δείξουμε ότι

$$(I_1 \otimes \mathcal{B}(H_2))^{'} = \mathcal{B}(H_1) \otimes I_2 \qquad (*)$$

Για κάθε $B_1 \in \mathcal{B}(H_1)$ είναι σαφές ότι $B_1 \otimes I_2 \in (I_1 \otimes \mathcal{B}(H_2))^{'}$, δηλαδή $\mathcal{B}(H_1) \otimes I_2 \subseteq (I_1 \otimes \mathcal{B}(H_2))^{'}$.
Αντίστροφα, αν $T \in (I_1 \otimes \mathcal{B}(H_2))^{'}$, θα δείξουμε ότι υπάρχει $B_1 \in \mathcal{B}(H_1)$ ώστε $T = B_1 \otimes I_2$.
Έστω $y \in H_2$, $y \neq 0$ και P_y η προβολή στον υπόχωρο $[y]$.
Για κάθε $x \in H_1$, από την υπόθεση για τον T έχουμε ότι:

$$T(x \otimes y) = T(I_1 \otimes P_y)(x \otimes y) = (I_1 \otimes P_y)T(x \otimes y),$$

δηλαδή το $T(x \otimes y)$ ανήκει στην εικόνα της προβολής $I_1 \otimes P_y$, που είναι ακριβώς ο υπόχωρος $\{w \otimes y : w \in H_1\}$.
Συνεπώς, για κάθε $x \in H_1$ υπάρχει $w_x \in H_1$ ώστε $T(x \otimes y) = w_x \otimes y$. Μάλιστα, το διάνυσμα w_x είναι μοναδικό, από την παρατήρηση (1.46).
Επομένως, για κάθε $y \in H_2$, $y \neq 0$ ορίζεται η απεικόνιση $B_y : H_1 \to H_1$ με $B_y x = w_x$, που ικανοποιεί την σχέση:

$$T(x \otimes y) = B_y x \otimes y \tag{1.1}$$

Θα δείξουμε ότι $B_y \in \mathcal{B}(H_1)$ (για κάθε $y \in H_2$, $y \neq 0$).
Για κάθε x_1, $x_2 \in H_1$ και $\lambda \in \mathbb{C}$, από την γραμμικότητα του T και την σχέση (1.1), έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} B_y(x_1 + \lambda x_2) \otimes y &= T((x_1 + \lambda x_2) \otimes y) \\ &= T(x_1 \otimes y) + \lambda T(x_2 \otimes y) \\ &= B_y x_1 \otimes y + \lambda B_y x_2 \otimes y \\ &= (B_y x_1 + \lambda B_y x_2) \otimes y \end{aligned}$$

Επομένως, από την παρατήρηση (1.46), προκύπτει ότι:

$$B_y(x_1 + \lambda x_2) = B_y x_1 + \lambda B_y x_2$$

και άρα B_y είναι γραμμικός τελεστής.
Επιπλέον, λόγω της (1.1) θα ισχύει:

$$\|B_y x\|_1 \cdot \|y\|_2 = ||T(x \otimes y)|| \leqslant ||T|| \cdot ||x||_1 \cdot ||y||_2,$$

δηλαδή:
$$||B_y x||_{_1} \leqslant ||T|| \cdot ||x||_{_1} \quad \forall\, x \in H_1,$$
απ' όπου έπεται ότι ο B_y είναι φραγμένος.

Ισχυρισμός : ο τελεστής B_y είναι ανεξάρτητος από την επιλογή του y.
Θα δείξουμε ισοδύναμα ότι $B_{y_1} = B_{y_2}$ για κάθε $y_1,\, y_2 \in H_2$ $(y_1,\, y_2 \neq 0)$.
Υποθέτουμε πρώτα ότι $y_1 = \lambda y_2$ για κάποιον μιγαδικό αριθμό $\lambda \neq 0$.
Έχουμε τότε:

$$\begin{aligned}
\lambda(B_{y_2}x \otimes y_2) &= \lambda T(x \otimes y_2) = T(x \otimes (\lambda y_2)) \\
&= T(x \otimes y_1) = B_{y_1}x \otimes y_1 \\
&= B_{y_1}x \otimes (\lambda y_2) = \lambda(B_{y_1}x \otimes y_2), \quad x \in H_1
\end{aligned}$$

Επομένως, $B_{y_2}x = B_{y_1}x \quad \forall\, x \in H_1$, από την παρατήρηση (1.46) και εφ' όσον $\lambda \neq 0$.
Έστω τώρα ότι τα $y_1,\, y_2$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.
Για κάθε $x \in H_1$ παρατηρούμε ότι:

$$\begin{aligned}
B_{y_1+y_2}x \otimes y_1 + B_{y_1+y_2}x \otimes y_2 &= B_{y_1+y_2}x \otimes (y_1 + y_2) \\
&= T(x \otimes (y_1 + y_2)) = T(x \otimes y_1) + T(x \otimes y_2) \\
&= B_{y_1}x \otimes y_1 + B_{y_2}x \otimes y_2
\end{aligned}$$

Επομένως, θέτοντας $B_{y_1+y_2}x = x_0$, $B_{y_1}x = x_1$ και $B_{y_2}x = x_2$, από την τελευταία έχουμε:

$$\begin{aligned}
& x_0 \otimes y_1 + x_0 \otimes y_2 = x_1 \otimes y_1 + x_2 \otimes y_2 \\
\Leftrightarrow \quad & (x_0 - x_1) \otimes y_1 = (x_2 - x_0) \otimes y_2
\end{aligned}$$

Τότε, για κάθε $\xi \in H_1$ και $u \in H_2$ θα ισχύει:

$$\begin{aligned}
& \langle (x_0 - x_1) \otimes y_1,\, \xi \otimes u \rangle = \langle (x_2 - x_0) \otimes y_2,\, \xi \otimes u \rangle \\
\Leftrightarrow \quad & \langle x_0 - x_1,\, \xi \rangle_{_1} \langle y_1,\, u \rangle_{_2} = \langle x_2 - x_0,\, \xi \rangle_{_1} \langle y_2,\, u \rangle_{_2} \\
\Leftrightarrow \quad & \langle \lambda y_1,\, u \rangle_{_2} = \langle \mu y_2,\, u \rangle_{_2}
\end{aligned}$$

όπου θέσαμε $\lambda = \langle x_0 - x_1,\, \xi \rangle_{_1}$, $\mu = \langle x_2 - x_0,\, \xi \rangle_{_1}$.
Από την τελευταία και εφ' όσον το u επελέγη αυθαίρετα , συμπεραίνουμε ότι $\lambda y_1 = \mu y_2$.
Αλλά τα $y_1,\, y_2$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, και συνεπώς $\lambda = \mu = 0$, δηλαδή
$\langle x_0 - x_1,\, \xi \rangle_{_1} = \langle x_2 - x_0,\, \xi \rangle_{_1} = 0$ για κάθε $\xi \in H_1$.
Έπεται ότι $x_0 - x_1 = x_2 - x_0 = 0$, απ' όπου:

$$B_{y_1}x = B_{y_2}x = B_{y_1+y_2}x \quad \forall\, x \in H_1.$$

Άρα ο ισχυρισμός απεδείχθη.

Δείξαμε επομένως ότι υπάρχει $B \in \mathcal{B}(H_1)$ ώστε:

$$T(x \otimes y) = Bx \otimes y = (B \otimes I_2)(x \otimes y),$$

για κάθε $x \in H_1$, $y \in H_2$.
Αφού ο $H_1 \otimes H_2$ είναι η κλειστή γραμμική θήκη του συνόλου $\{x \otimes y \,:\, x \in H_1, y \in H_2\}$,

συμπεραίνουμε τελικά ότι $T = B \otimes I_2$, δηλαδή το ζητούμενο.

Μένει να δείξουμε ότι $(\mathcal{M} \otimes \mathcal{B}(H_2))^{'} = \mathcal{M}^{'} \otimes I_2$.
Έστω $T \in (\mathcal{M} \otimes \mathcal{B}(H_2))^{'}$.
Από την $(*)$ και εφ' όσον η άλγεβρα $\mathcal{M} \otimes \mathcal{B}(H_2))$ περιέχει την $I_1 \otimes \mathcal{B}(H_2))$, θα ισχύει:

$$(\mathcal{M} \otimes \mathcal{B}(H_2))^{'} \subseteq (I_1 \otimes \mathcal{B}(H_2))^{'} = \mathcal{B}(H_1) \otimes I_2$$

Επομένως, υπάρχει $B_1 \in \mathcal{B}(H_1)$ ώστε $T = B_1 \otimes I_2$.
Τότε, από την υπόθεση για τον T, για κάθε $M \in \mathcal{M}$ και $B_2 \in \mathcal{B}(H_2)$ θα ισχύει:

$$\begin{aligned} B_1 M \otimes B_2 &= (B_1 \otimes I_2)(M \otimes B_2) \\ &= (M \otimes B_2)(B_1 \otimes I_2) \\ &= (M B_1) \otimes B_2 \end{aligned}$$

απ' όπου προκύπτει ότι $B_1 M = M B_1$, λόγω της παρατήρησης (1.46).
Άρα $B_1 \in \mathcal{M}^{'}$ και δείξαμε συνεπώς ότι:

$$(\mathcal{M} \otimes \mathcal{B}(H_2))^{'} \subseteq \mathcal{M}^{'} \otimes I_2.$$

Αντίστροφα, αν $B_1 \in \mathcal{M}^{'}$ θα δείξουμε ότι $B_1 \otimes I_2 \in (\mathcal{M} \otimes \mathcal{B}(H_2))^{'}$.
Πράγματι, εφ' όσον $B_1 \in \mathcal{M}^{'}$, ο τελεστής $B_1 \otimes I_2$ θα μετατίθεται και με την WOT-κλειστή θήκη αυτού του συνόλου[1], που είναι ακριβώς η $\mathcal{M} \otimes \mathcal{B}(H_2)$.

$\square$

[1] διότι ο πολλαπλασιασμός είναι χωριστά (WOT,WOT)-συνεχής

Κεφάλαιο 2

Σύνδεσμοι Υποχώρων

2.1 Προδιατεταγμένοι Χώροι Μέτρου

Ορισμός 2.1. *Έστω X χώρος Borel και $\leqslant$ μια προδιάταξη στον X, δηλαδή μια σχέση αυτοπαθής και μεταβατική.*
Το ζεύγος $(X, \leqslant)$ θα καλείται προδιατεταγμένος χώρος Borel.

Το γράφημα της $\leqslant$ είναι το σύνολο:

$$G = \{(x, y) \in X \times X : y \leqslant x\}.$$

Σημειώνουμε ότι αν $x \leqslant y$ και $y \leqslant x$ δεν έπεται πάντοτε ότι $x = y$, δηλαδή η $\leqslant$ δεν είναι κατ' ανάγκη μερική διάταξη.

Ορισμός 2.2. *Έστω $(X, \leqslant)$ ένας προδιατεταγμένος χώρος Borel. Ένα μη κενό υποσύνολο E του X, θα λέγεται αύξον, αν:*

$$\forall\, x \in E \text{ και } y \in X \text{ με } x \leqslant y, \text{ έπεται ότι } y \in E.$$

Αντίστοιχα, το $E \subseteq X$ θα λέγεται φθίνον, αν:

$$\forall\, x \in X \text{ και } y \in E \text{ με } x \leqslant y, \text{ έπεται ότι } x \in E.$$

Θέτουμε: $\qquad L(X, \leqslant) = \{E \in \mathcal{B}(X) : E \text{ αύξον } \}$

Είναι άμεσο ότι η οικογένεια $L(X, \leqslant)$ είναι ένας σ-σύνδεσμος υποσυνόλων του X, δηλαδή:

1. $\emptyset, X \in L(X, \leqslant)$
2. η $L(X, \leqslant)$ είναι κλειστή ως προς αριθμήσιμες ενώσεις και τομές.

Ορισμός 2.3. *Ένας προδιατεταγμένος χώρος Borel $(X, \leqslant)$ θα λέγεται standard, αν:*

1. *ο X είναι standard χώρος Borel*
2. *η προδιάταξη $\leqslant$ είναι standard, με την εξής έννοια:*
   υπάρχει μια ακολουθία $f_n : X \to \mathbb{R}$, $n = 1, 2, ...$, Borel μετρήσιμων συναρτήσεων, ώστε για κάθε x, $y \in X$ να ισχύει:

$$x \leqslant y \Leftrightarrow f_n(x) \leqslant f_n(y) \ \ \forall n \in \mathbb{N}$$

Πρόταση 2.4. *Έστω X ένας standard χώρος Borel και $\leqslant$ μια προδιάταξη στον X.*
Τότε η $\leqslant$ είναι standard (και άρα ο $(X, \leqslant)$ είναι ένας standard προδιατεταγμένος χώρος Borel) αν, και μόνο αν, υπάρχει μια ακολουθία $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ στον $L(X, \leqslant)$ ώστε για κάθε x, $y \in X$ να ισχύει:

$$x \leqslant y \Leftrightarrow \chi_{E_n}(x) \leqslant \chi_{E_n}(y) \ \ \forall n \in \mathbb{N}$$

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι η $\leqslant$ είναι standard, οπότε υπάρχει μια ακολουθία $f_n : X \to \mathbb{R}$ Borel μετρήσιμων συναρτήσεων, ώστε για κάθε x, $y \in X$ να ισχύει:

$$x \leqslant y \Leftrightarrow f_n(x) \leqslant f_n(y) \ \ \forall n \in \mathbb{N}$$

Έστω $\{q_1, q_2, ...\}$ μια αρίθμηση των ρητών. Για κάθε n, $m \in \mathbb{N}$ θέτουμε:

$$A_{n,m} = [f_n \geqslant q_m]$$

Είναι σαφές ότι τα $A_{n,m}$ είναι Borel μετρήσιμα υποσύνολα του X, αφού οι f_n είναι Borel μετρήσιμες. Παρατηρούμε επίσης ότι τα $A_{n,m}$ είναι αύξοντα διότι, αν $x \in A_{n,m}$ και $x \leqslant y$, τότε από τον ορισμό των $A_{n,m}$ και της $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, έχουμε ότι:

$$f_n(y) \geqslant f_n(x) \geqslant q_m,$$

απ' όπου $y \in A_{n,m}$.
Δείξαμε συνεπώς ότι $A_{n,m} \in L(X, \leqslant)$ για κάθε $n, m \in \mathbb{N}$.

Ισχυριζόμαστε τώρα ότι:

$$x \leqslant y \Leftrightarrow \chi_{A_{n,m}}(x) \leqslant \chi_{A_{n,m}}(y) \ \ \forall n,\ m \in \mathbb{N}$$

Πράγματι:
αν $x \leqslant y$, τότε βέβαια $\chi_{A_{n,m}}(x) \leqslant \chi_{A_{n,m}}(y)$ $\forall n$, $m \in \mathbb{N}$ αφού τα $A_{n,m}$ είναι αύξοντα.
Αντίστροφα, αν $\chi_{A_{n,m}}(x) \leqslant \chi_{A_{n,m}}(y)$ $\forall n$, $m \in \mathbb{N}$, θα δείξουμε ότι $f_n(x) \leqslant f_n(y)$ $\forall n \in \mathbb{N}$, απ' όπου θα έχουμε ότι $x \leqslant y$.
Υποθέτουμε αντίθετα ότι $f_n(x) > f_n(y)$ για κάποιο $n \in \mathbb{N}$. Τότε υπάρχει $q_m \in Q$, ώστε:

$$f_n(x) > q_m > f_n(y),$$

απ' όπου έπεται ότι $x \in A_{n,m}$ ενώ $y \notin A_{n,m}$, άτοπο.

Επομένως, αν $\{E_1, E_2, ...\}$ είναι μια αρίθμηση της οικογένειας $\{A_{n,m} : n, m \in \mathbb{N}\}$, τότε η ακολουθία $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ ικανοποιεί το συμπέρασμα.
Τέλος, ο αντίστροφος ισχυρισμός της Πρότασης είναι προφανής από τον ορισμό 2.3.

$\square$

Από τον ορισμό του αύξοντος συνόλου, έχουμε άμεσα ότι:

$$\text{αν } x \leqslant y, \text{ τότε } \chi_E(x) \leqslant \chi_E(y) \ \forall E \in L(X, \leqslant).$$

Σύμφωνα με την προηγούμενη πρόταση ισχύει και το αντίστροφο, όταν η προδιάταξη $\leqslant$ είναι standard. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι, στην περίπτωση ενός standard προδιατεταγμένου χώρου Borel $(X, \leqslant)$, ο $\sigma-$σύνδεσμος $L(X, \leqslant)$ καθορίζει πλήρως την προδιάταξη $\leqslant$, με την έννοια ότι για κάθε x, $y \in X$ ισχύει:

$$x \leqslant y \Leftrightarrow \chi_E(x) \leqslant \chi_E(y), \forall E \in L(X, \leqslant).$$

Δίνουμε τώρα μερικά παραδείγματα standard προδιατεταγμένων χώρων Borel:

1. Ο $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 1$, με την Borel σ-άλγεβρα που παράγεται από την συνήθη τοπολογία του, είναι ένας standard χώρος Borel.
   Ορίζουμε στον $\mathbb{R}^n$ μια μερική διάταξη $\leqslant$ κατά συντεταγμένη:
   $$(x_1, ..., x_n) \leqslant (y_1, ..., y_n) \Leftrightarrow x_i \leqslant y_i \ \forall i = 1, ..., n.$$
   Η $\leqslant$ είναι standard, αφού οι προβολές $pr_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $i = 1, 2, ...n$ είναι Borel μετρήσιμες (ως συνεχείς) και προφανώς ικανοποιούν:
   $$(x_1, ..., x_n) \leqslant (y_1, ..., y_n) \Leftrightarrow pr_i(x_1, ..., x_n) \leqslant pr_i(y_1, ..., y_n) \ \forall i = 1, ..., n.$$
   Επομένως, ο $(\mathbb{R}^n, \leqslant)$ είναι ένας standard προδιατεταγμένος χώρος Borel.

2. Έστω $\mathbf{2}^{\mathbb{N}}$ ο χώρος όλων των ακολουθιών με όρους 0 ή 1. Ο $\mathbf{2}^{\mathbb{N}}$, εφοδιασμένος με την Borel σ-άλγεβρα που παράγεται από την καρτεσιανή τοπολογία, είναι ένας standard χώρος Borel (ως Πολωνικός χώρος, βλ. Προτ. 1.18)
   Για κάθε μη κενό υποσύνολο S του $\mathbb{N}$, ορίζουμε την μερική διάταξη:
   $$(x_n)_n \leqslant_s (y_n)_n \Leftrightarrow x_n \leqslant y_n \ \ \forall n \in S.$$
   Τότε, όπως στο προηγούμενο παράδειγμα, η προηγούμενη μερική διάταξη καθορίζεται πλήρως από τις προβολές
   $$pr_i : \mathbf{2}^{\mathbb{N}} \longrightarrow \mathbb{R} : (x_n)_n \longmapsto x_i, \ \ i \in S,$$
   και συνεπώς ο $(\mathbf{2}^{\mathbb{N}}, \leqslant_s)$ είναι ένας standard προδιατεταγμένος χώρος Borel, για κάθε $S \subseteq \mathbb{N}$.

Ιδιαιτέρως, η μερική διάταξη που προκύπτει για $S = \{2, 4, 6, ...\}$ θα καλείται άρτια προδιάταξη και θα συμβολίζεται με $\leqslant_a$.
Όπως θα δούμε παρακάτω (λήμμα 2.8), ο standard χώρος Borel $(\mathbf{2}^{\mathbb{N}}, \leqslant_a)$ μας επιτρέπει να ταξινομήσουμε, υπό μίαν έννοια, όλους τους standard χώρους Borel.

3. Έστω E διαχωρίσιμος πραγματικός χώρος Banach.
Ο E είναι προφανώς ένας Πολωνικός χώρος, οπότε και το καρτεσιανό γινόμενο $E \times \mathbb{R}$ είναι Πολωνικός χώρος (βλ. Προτ. 1.18).
Άρα ο $E \times \mathbb{R}$ με την συνήθη Borel σ-άλγεβρα που παράγεται από τα μετρήσιμα ορθογώνια, είναι ένας standard χώρος Borel.
Ορίζουμε τώρα μια μερική διάταξη στον $E \times \mathbb{R}$ ως εξής:

$$(x, t) \leqslant (y, s) \Leftrightarrow \|y - x\| \leqslant s - t,$$

όπου $x, y \in E$ και $t, s \in \mathbb{R}$.
Θα δείξουμε ότι η $\leqslant$ είναι standard. Ισοδύναμα, θα κατασκευάσουμε μια ακολουθία
$f_n : E \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Borel μετρήσιμων συναρτήσεων, ώστε:

$$(x, t) \leqslant (y, s) \Leftrightarrow f_n(x, t) \leqslant f_n(y, s) \ \forall\, n \in \mathbb{N}$$

Αφού ο E είναι διαχωρίσιμος χώρος Banach, η κλειστή μοναδιαία σφαίρα S_{E^*} του E^* είναι w^*-διαχωρίσιμος χώρος (βλ. Θεώρημα 1.13).
Έστω λοιπόν $\{\rho_n : n \in \mathbb{N}\}$ ένα w^*-πυκνό υποσύνολο της S_{E^*}.
Θέτουμε $f_n(x, t) = \rho_n(x) + t,\ n \in \mathbb{N}$, και ισχυριζόμαστε ότι η ακολουθία $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ έχει την ζητούμενη ιδιότητα.
Παρατηρούμε καταρχήν ότι για κάθε $x \in E$ ισχύει:

$$\|x\| = \sup_n \rho_n(x).$$

Πράγματι: εφ' όσον $||\rho_n||_{_{E^*}} \leqslant 1 \ \ \forall\, n \in \mathbb{N}$, έχουμε ότι:

$$\sup_n \rho_n(x) \leqslant \sup_n |\rho_n(x)| \leqslant \|x\| \tag{2.1}$$

Τώρα, από το Θεώρημα Hanh-Banach, υπάρχει $x^* \in E^*$ με $||x^*||_{_{E^*}} = 1$, ώστε $x^*(x) = ||x||$.
Επίσης, αφού $\overline{\{\rho_n : n \in \mathbb{N}\}}^{w^*} = S_{E^*}$, υπάρχει υπακολουθία $(\rho_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ της $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}}$ με
$\rho_{k_n} \xrightarrow{w^*} x^*$.
Τότε $||x|| = x^*(x) = \lim\limits_n \rho_{k_n}(x)$, και λόγω της (2.1) έχουμε το ζητούμενο.

Έπεται ότι για κάθε (x, t), $(y, s) \in E \times \mathbb{R}$ ισχύει:

$$\begin{aligned}
& f_n(x, t) \leqslant f_n(y, s) \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \\
\Leftrightarrow\ & \rho_n(x) + t \leqslant \rho_n(y) + s \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \\
\Leftrightarrow\ & \rho_n(x - y) \leqslant s - t \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \\
\Leftrightarrow\ & \|x - y\| = \sup_n \rho_n(x - y) \leqslant s - t \\
\Leftrightarrow\ & (x, t) \leqslant (y, s)
\end{aligned}$$

Επομένως, ο $(E \times \mathbb{R}, \leqslant)$ είναι ένας standard προδιατεταγμένος χώρος Borel.

4. Έστω H διαχωρίσιμος χώρος Hilbert και $Proj(H)$ ο χώρος όλων των προβολών του H, εφοδιασμένος με την (σχετική) SOT-τοπολογία του $B(H)$.
Εφ' όσον ο H είναι διαχωρίσιμος, ο χώρος $(B(H)_1, SOT)$ είναι Πολωνικός (βλ. Πρόταση 1.35). Επίσης, το σύνολο $Proj(H)$ είναι SOT-κλειστό, δηλαδή ο $Proj(H)$ είναι κλειστός υπόχωρος του $(B(H)_1, SOT)$.
Συνεπώς, από την Πρόταση 1.16 έχουμε ότι ο χώρος $(Proj(H), SOT)$ είναι Πολωνικός, και άρα standard χώρος Borel.

Θεωρούμε τώρα την συνήθη μερική διάταξη $\leqslant$ που ορίζεται στο σύνολο των αυτοσυζυγών τελεστών του $B(H)$, δηλαδή για δύο αυτοσυζυγείς τελεστές T, S ισχύει $T \leqslant S$ αν, και μόνο αν, ο τελεστής $S - T$ είναι θετικός.
Ισχυριζόμαστε ότι η $\leqslant$, περιορισμένη στο σύνολο $Proj(H)$, είναι μια standard μερική διάταξη.
Έστω $\{x_1, x_2, ...\}$ αριθμήσιμο πυκνό υποσύνολο του H. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$, ορίζουμε την συνάρτηση $f_n : Proj(H) \to \mathbb{R}$ με

$$f_n(P) = \langle Px_n, x_n \rangle \quad \forall\, P \in Proj(H)$$

Θα δείξουμε ότι κάθε f_n είναι συνεχής συνάρτηση, άρα Borel μετρήσιμη.
Έστω $(P_k)_k$ ακολουθία στον $Proj(H)$ και $P \in Proj(H)$, με $P_k \xrightarrow{SOT} P$.
Από την ανισότητα Cauchy-Schwarz, για κάθε $n,\ k \in \mathbb{N}$ έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} |f_n(P_k) - f_n(P)| &= |\langle (P_k - P)x_n, x_n \rangle| \\ &\leqslant \|(P_k - P)x_n\| \cdot \|x_n\|, \end{aligned}$$

όπου $||(P_k - P)x_n|| \to 0$ καθώς $k \to \infty$, διότι $P_k \xrightarrow{SOT} P$.
Έπεται ότι

$$\lim_k ||f_n(P_k) - f_n(P)|| = 0 \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

και συνεπώς κάθε f_n είναι συνεχής.
Μένει να δείξουμε ότι:

$$P \leqslant Q \Leftrightarrow f_n(P) \leqslant f_n(Q) \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Αν $P \leqslant Q$, τότε βέβαια $f_n(P) \leqslant f_n(Q) \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$, από τον ορισμό της $\leqslant$.
Αντίστροφα, έστω ότι

$$\langle Px_n, x_n \rangle \leqslant \langle Qx_n, x_n \rangle \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

Αν $x \in H$ και $(x_{k_n})_n$ είναι μια υπακολουθία της $(x_n)_n$, με $x_{k_n} \to x$, τότε

$$\begin{aligned} \langle Px, x \rangle &= \lim_n \langle Px_{k_n}, x_{k_n} \rangle \\ &\leqslant \lim_n \langle Qx_{k_n}, x_{k_n} \rangle = \langle Qx, x \rangle, \end{aligned}$$

απ' όπου $P \leqslant Q$.
Δείξαμε λοιπόν ότι η $\leqslant$, περιορισμένη στο σύνολο $Proj(H)$ είναι standard, και συνεπώς ο $(Proj(H), \leqslant)$ είναι ένας standard προδιατεταγμένος χώρος Borel.

Ορισμός 2.5. *Έστω* $(X, \leqslant_X)$, $(\Psi, \leqslant_\Psi)$ *δύο προδιατεταγμένοι χώροι Borel. Μια απεικόνιση* $\phi : X \to \Psi$ *θα λέγεται order-ισομορφισμός , αν:*

1. *η* ϕ *είναι ένας Borel ισομορφισμός των αντίστοιχων χώρων Borel*

2. *η* ϕ *διατηρεί τις διατάξεις, με την έννοια ότι:*

$$\forall\, x, y \in X,\;\; x \leqslant_{\mathrm{X}} y \;\Leftrightarrow\; \phi(x) \leqslant_\Psi \phi(y).$$

Πρόταση 2.6. *Έστω* $(X, \leqslant_X)$, $(\Psi, \leqslant_\Psi)$ *δύο standard προδιατεταγμένοι χώροι Borel και* $\phi : X \to \Psi$ *ένας Borel ισομορφισμός. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

1. *η* ϕ *διατηρεί τις διατάξεις (και άρα είναι order-ισομορφισμός)*

2. *η* ϕ *επάγει έναν ισομορφισμό μεταξύ των σ-συνδέσμων* $L(X, \leqslant_X)$ *και* $L(\Psi, \leqslant_\Psi)$, *(δηλαδή απεικονίζει και αντιστρέφει Borel αύξοντα σύνολα σε Borel αύξοντα σύνολα).*

Απόδειξη.
(1) $\Rightarrow$ (2) Έστω ότι για κάθε $x, y \in X$, $x \leqslant_{\mathrm{X}} y \Leftrightarrow \phi(x) \leqslant_\Psi \phi(y)$.
Θα αποδείξουμε ότι $\phi(E) \in L(\Psi, \leqslant_\Psi)$ για κάθε $E \in L(X, \leqslant_{\mathrm{X}})$.
Καταρχήν, το $\phi(E)$ είναι Borel μετρήσιμο, διότι η ϕ είναι Borel ισομορφισμός. Επιπλέον το $\phi(E)$ είναι αύξον υποσύνολο του Ψ, διότι αν $x \in E$ και $\phi(x) \leqslant_\Psi \phi(y)$, τότε $x \leqslant_{\mathrm{X}} y$, και εφ' όσον το E είναι αύξον, έχουμε ότι $y \in E$, και άρα $\phi(y) \in \phi(E)$.
Όμοια αποδεικνύουμε και ότι $\phi^{-1}(F) \in L(X, \leqslant_{\mathrm{X}})$ για κάθε $F \in L(\Psi, \leqslant_\Psi)$.

(2) $\Rightarrow$ (1) Έστω ότι

$$L(X, \leqslant_{\mathrm{X}}) = \{\phi^{-1}(F) :\; F \in L(\Psi, \leqslant_\Psi)\} \;\text{και}\; L(\Psi, \leqslant_\Psi) = \{\phi(E) : E \in L(X, \leqslant_{\mathrm{X}})\}.$$

Τότε, αφού οι διατάξεις $\leqslant_{\mathrm{X}}$, $\leqslant_\Psi$ είναι standard, έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} x \leqslant_\Psi y \;&\Leftrightarrow\; \chi_E(x) \leqslant \chi_E(y)\;\; \forall\, E \in L(X, \leqslant_{\mathrm{X}}) \\ &\Leftrightarrow\; \chi_{\phi^{-1}(F)}(x) \leqslant \chi_{\phi^{-1}(F)}(y)\;\; \forall\, F \in L(\Psi, \leqslant_\Psi) \\ &\Leftrightarrow\; \chi_F\big(\phi(x)\big) \leqslant \chi_F\big(\phi(y)\big)\;\; \forall\, F \in L(\Psi, \leqslant_\Psi) \\ &\Leftrightarrow\; \phi(x) \leqslant_\Psi \phi(y) \end{aligned}$$

□

Ορισμός 2.7. *Έστω* $(X, \leqslant)$ *ένας προδιατεταγμένος χώρος Borel. Ένας Borel υπόχωρος του* X, *με την σχετική προδιάταξη που επάγεται από τον* X, *θα λέγεται προδιατεταγμένος Borel υπόχωρος του* X.

Λήμμα 2.8. *Κάθε standard προδιατεταγμένος χώρος Borel είναι order-ισομορφικός με έναν προδιατεταγμένο Borel υπόχωρο του* $(\mathbf{2}^{\mathbb{N}}, \leqslant_\alpha)$.

Απόδειξη. Έστω $(X, \leqslant)$ ένας standard προδιατεταγμένος χώρος Borel. Τότε, αφού η προδιάταξη $\leqslant$ είναι standard, υπάρχει ακολουθία $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ στον $L(X, \leqslant)$, ώστε για κάθε x, $y \in X$ να ισχύει:

$$x \leqslant y \Leftrightarrow \chi_{E_n}(x) \leqslant \chi_{E_n}(y) \ \ \forall n \in \mathbb{N}$$

Επίσης, εφ'όσον η Borel δομή του X είναι standard, μπορούμε να βρούμε μια ακολουθία $\{F_n\}_n$ Borel υποσυνόλων του X, η οποία παράγει την Borel δομή του X και διαχωρίζει τα σημεία του (βλ. Πρόταση 1.21).
Ορίζουμε την απεικόνιση $\phi : X \to \mathbf{2}^{\mathbb{N}}$, με

$$\phi(x) = (\chi_{F_1}(x), \chi_{E_1}(x), \chi_{F_2}(x), \chi_{E_2}(x), ...).$$

Παρατηρούμε καταρχήν ότι η ϕ είναι $1-1$, διότι η $(F_n)_n$ διαχωρίζει τα σημεία του X.
(αν $x \neq y$, τότε υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε $x \in F_n$ και $y \notin F_n$, και συνεπώς $\phi(x) \neq \phi(y)$).
Ισχυριζόμαστε τώρα ότι η ϕ είναι Borel μετρήσιμη.
Επειδή ο $\mathbf{2}^{\mathbb{N}}$ είναι 2ος αριθμήσιμος, είναι σαφές ότι η $\mathcal{B}(\mathbf{2}^{\mathbb{N}})$ παράγεται, ως σ-άλγεβρα, από την εξής υποβάση της καρτεσιανής τοπολογίας του $\mathbf{2}^{\mathbb{N}}$:

$$\{C_k : k = 1, 2, ...\} \cup \{C_k^c : k = 1, 2, ...\},$$

όπου:

$$C_k = \{(x_n)_n \in \mathbf{2}^{\mathbb{N}} : x_k = 1\}, \ k \in \mathbb{N}$$

Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι η ϕ αντιστρέφει τα υποβασικά σύνολα, σε σύνολα Borel.
Πράγματι: για κάθε $k \in \mathbb{N}$ έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} \phi^{-1}(C_{2k}) &= \{x \in X : \phi(x) \in C_{2k}\} \\ &= \{x \in X : \chi_{E_k}(x) = 1\} = E_k \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} \phi^{-1}(C_{2k-1}) &= \{x \in X : \phi(x) \in C_{2k-1}\} \\ &= \{x \in X : \chi_{F_k}(x) = 1\} = F_k. \end{aligned}$$

Οι προηγούμενες ισότητες δείχνουν ότι $\phi^{-1}(C_k) \in \mathcal{B}(X)$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$, άρα και $\phi^{-1}(C_k^c) = X \setminus \phi^{-1}(C_k) \in \mathcal{B}(X)$, δηλαδή η ϕ είναι Borel μετρήσιμη.

Από το θεώρημα 1.22 προκύπτει ότι το $\phi(X)$ είναι Borel υποσύνολο του $\mathbf{2}^{\mathbb{N}}$, και η $\phi : X \to \phi(X)$ είναι Borel ισομορφισμός.
Επιπλέον, από τον ορισμό της $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ και της άρτιας προδιάταξης του $\mathbf{2}^{\mathbb{N}}$, για κάθε x, $y \in X$ έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} x \leqslant y &\Leftrightarrow \chi_{E_n}(x) \leqslant \chi_{E_n}(y) \quad \forall n = 1, 2, ... \\ &\Leftrightarrow \phi(x) \leqslant_a \phi(y) \end{aligned}$$

δηλαδή η ϕ διατηρεί τις διατάξεις.
Άρα τελικά, η $\phi : X \to \phi(X)$ είναι order-ισομορφισμός, κι αυτό αποδεικνύει το ζητούμενο. $\square$

Ορισμός 2.9. *Έστω X ένα μη κενό σύνολο και $\leqslant$ μια προδιάταξη στο X. Για κάθε μη κενό υποσύνολο E του X, ορίζουμε τα σύνολα:*

$$E^+ = \{y \in X : \exists\, x \in E \text{ με } x \leqslant y\}$$

και

$$E^- = \{y \in X : \exists\, x \in E \text{ με } y \leqslant x\}$$

Επειδή η $\leqslant$ είναι αυτοπαθής, έχουμε ότι $E \subseteq E^+$ και $E \subseteq E^-$ (και άρα, ιδιαιτέρως, τα E^+, E^- είναι μη κενά).

Δίνουμε τώρα κάποιες ιδιότητες των συνόλων της μορφής E^+ (οι αντίστοιχες θα ισχύουν και για τα E^-).

1. Το E^+ είναι αύξον, και μάλιστα είναι το μικρότερο αύξον σύνολο που περιέχει το E : έστω $x \leqslant y$, με $x \in E^+$.
   Τότε, υπάρχει $w \in E$ με $w \leqslant x$, οπότε και $w \leqslant y$, αφού η $\leqslant$ είναι μεταβατική. Άρα $y \in E^+$, δηλαδή το E^+ είναι αύξον.
   Επιπλέον, αν A είναι ένα αύξον υποσύνολο του X, με $E \subseteq A$, θα δείξουμε ότι $E^+ \subseteq A$.
   Πράγματι, αν $y \in E^+$, τότε υπάρχει $x \in E \subseteq A$ με $x \leqslant y$, κι εφ' όσον το A είναι αύξον, έπεται ότι $y \in A$.

2. E αύξον $\Leftrightarrow E = E^+$ (έπεται άμεσα από την 1η παρατήρηση)

3. $E_1 \subseteq E_2 \Rightarrow E_1^+ \subseteq E_2^+$

4. $\big(\bigcup_{i\in I} E_i\big)^+ = \bigcup_{i\in I} E_i^+$, αλλά η αντίστοιχη σχέση δεν ισχύει για τομές (ακόμα και για πεπερασμένες).
   Παραδείγματος χάριν, στο $\mathbb{R}$ με την συνήθη διάταξη, θέτουμε:

   $$E_1 = \{0\} \cup [2,3] \;\text{ και }\; E_2 = \{1\} \cup [3,4].$$

   Τότε,

   $$E_1^+ \cap E_2^+ = [0,+\infty) \cap [1,+\infty) = [1,+\infty),$$

   ενώ

   $$(E_1 \cap E_2)^+ = \{3\}^+ = [3,+\infty).$$

5. Αν $(X, \leqslant_{\mathrm{X}})$, $(\Psi, \leqslant_{\Psi})$ είναι δύο standard προδιατεταγμένοι χώροι Borel και $\phi : X \to \Psi$ ένας order-ισομορφισμός, τότε: $\phi(E^+) = \phi(E)^+ \quad \forall\, E \subseteq X$.
   Πράγματι:

   $$\phi(E^+) = \{\phi(x) : \exists\, y \in E \text{ με } y \leqslant_{\mathrm{X}} x\} = \{\phi(x) : \exists\, y \in E \text{ με } \phi(y) \leqslant_{\Psi} \phi(x)\} = \phi(E)^+.$$

   Όμοια, για κάθε $F \subseteq \Psi$ έχουμε ότι: $\phi^{-1}(F^+) = \phi^{-1}(F)^+$.

6. $E^+ = pr_1\big(G \cap (X \times E)\big)$, όπου pr_1 η 1η προβολή του $X \times X$ και G το γράφημα της $\leqslant$.

Λήμμα 2.10. *Θεωρούμε τον standard προδιατεταγμένο χώρο Borel* $(\mathbf{2}^{\mathbb{N}}, \leqslant_a)$ *και έστω* $L_0(\mathbf{2}^{\mathbb{N}}, \leqslant_a)$ *ο σ-σύνδεσμος που παράγεται από την οικογένεια:*

$$\{\emptyset, \mathbf{2}^{\mathbb{N}}\} \cup \{C_{2k} : k \in \mathbb{N}\},$$

όπου $C_k = \{(x_n)_n \in \mathbf{2}^{\mathbb{N}} : x_k = 1\}$.
Έστω μ *ένα πεπερασμένο, θετικό μέτρο Borel στον* $\mathbf{2}^{\mathbb{N}}$ *και* $E \neq \emptyset$ *ένα αύξον,* μ*-μετρήσιμο υποσύνολο του* $\mathbf{2}^{\mathbb{N}}$ *(δηλαδή το* E *ανήκει στην πλήρωση* $\mathcal{B}(\mathbf{2}^{\mathbb{N}})_\mu$ *της* $\mathcal{B}(\mathbf{2}^{\mathbb{N}})$ *ως προς* μ*).*
Τότε υπάρχει $F \in L_0\big(\mathbf{2}^{\mathbb{N}}, \leqslant_a\big)$, $F \subseteq E$ *ώστε* $\overline{\mu}(E \setminus F) = 0$.
(όπου $\overline{\mu}$ *είναι η πλήρωση του μέτρου* μ*)*

Απόδειξη.
Ισχυρισμός 1 : Αν A κλειστό υποσύνολο του $\mathbf{2}^{\mathbb{N}}$, τότε και το A^+ είναι κλειστό.
Παρατηρούμε καταρχήν ότι το γράφημα G της $\leqslant_a$ είναι κλειστό υποσύνολο του $\mathbf{2}^{\mathbb{N}} \times \mathbf{2}^{\mathbb{N}}$.
Πράγματι, από τον ορισμό της $\leqslant_a$ έχουμε:

$$\begin{aligned} G^c &= \{(x,y) \in \mathbf{2}^{\mathbb{N}} \times \mathbf{2}^{\mathbb{N}} : \exists\, k \in \mathbb{N} \text{ με } x_{2k} < y_{2k}\} \\ &= \{(x,y) \in \mathbf{2}^{\mathbb{N}} \times \mathbf{2}^{\mathbb{N}} : \exists\, k \in \mathbb{N} \text{ με } x_{2k} = 0 \text{ και } y_{2k} = 1\} \\ &= \bigcup_{k=1}^{\infty} (C_{2k}^c \times C_{2k}) \end{aligned}$$

όπου τα σύνολα $C_{2k}^c \times C_{2k}$ είναι ανοικτά στον $\mathbf{2}^{\mathbb{N}} \times \mathbf{2}^{\mathbb{N}}$.
Έπεται ότι το G είναι κλειστό, άρα και το σύνολο $G \cap (\mathbf{2}^{\mathbb{N}} \times A)$ είναι κλειστό (εφ' όσον A κλειστό).
Αφού τώρα $A^+ = pr_1\big(G \cap (\mathbf{2}^{\mathbb{N}} \times A)\big)$ και η pr_1 είναι κλειστή συνάρτηση (βλ. Πρότ. 1.14), έπεται ότι το A^+ είναι κλειστό.

Ισχυρισμός 2 : Αν K κλειστό, αύξον υποσύνολο του $\mathbf{2}^{\mathbb{N}}$, τότε $K \in L_0(\mathbf{2}^{\mathbb{N}}, \leqslant_a)$.
Αρκεί, ισοδύναμα, να δείξουμε ότι αν U είναι ένα ανοικτό, φθίνον υποσύνολο του $\mathbf{2}^{\mathbb{N}}$, τότε το U ανήκει στον σ-σύνδεσμο που παράγεται από την οικογένεια:

$$\{\emptyset, \mathbf{2}^{\mathbb{N}}\} \cup \{C_{2k}^c : k \in \mathbb{N}\}.$$

Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και για κάθε $2n-$άδα $a = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_{2n})$, όπου όλα τα ε_i είναι 0 ή 1, θέτουμε:

$$H(a) = \{(x_n)_n \in \mathbf{2}^{\mathbb{N}} : x_i = \varepsilon_i \ \forall\, i = 1, 2, ..., 2n\}.$$

Τότε, η (αριθμήσιμη) οικογένεια όλων των συνόλων $H(a)$, όπου a όπως παραπάνω, αποτελεί βάση για την καρτεσιανή τοπολογία του $\mathbf{2}^{\mathbb{N}}$. Επομένως, υπάρχει μια ακολουθία $\{H(a_k)\}_{k=1}^{\infty}$ τέτοιων συνόλων, ώστε $U = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} H(a_k)$, και εφ'όσον το U είναι φθίνον, θα ισχύει:

$$U = U^- = \Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} H(a_k)\Big)^- = \bigcup_{k=1}^{\infty} H(a_k)^-.$$

Συνεπώς, αρκεί να δείξουμε ότι κάθε $H(a)^-$ ανήκει στον σ-σύνδεσμο που παράγεται από την οικογένεια $\{\emptyset, \mathbf{2}^{\mathbb{N}}\} \cup \{C_{2k}^c : k \in \mathbb{N}\}$.
Παρατηρούμε καταρχήν ότι:

$$H(a)^- = \{(x_n)_n \in \mathbf{2}^{\mathbb{N}} : x_2 \leqslant \varepsilon_2,\ x_4 \leqslant \varepsilon_4, ..., x_{2n} \leqslant \varepsilon_{2n}\}.$$

Πράγματι αν $(x_n)_n \in H(a)^-$, τότε υπάρχει $(y_n)_n \in H(a)$ ώστε $(x_n)_n \leqslant_\alpha (y_n)_n$, και άρα

$$x_2 \leqslant y_2 = \varepsilon_2,\ x_4 \leqslant y_4 = \varepsilon_4, ..., x_{2n} \leqslant y_{2n} = \varepsilon_{2n}.$$

Από την άλλη, αν $(x_n)_n \in \mathbf{2}^{\mathbb{N}}$ με $x_2 \leqslant \varepsilon_2, ..., x_{2n} \leqslant \varepsilon_{2n}$, τότε για την ακολουθία $(y_n)_n = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_{2n}, 1, 1, ...)$ του $\mathbf{2}^{\mathbb{N}}$, είναι σαφές ότι $(y_n)_n \in H(a)$ και $(x_n)_n \leqslant_\alpha (y_n)_n$. Συνεπώς, $(x_n)_n \in H(a)^-$.
Επομένως το $H(a)^-$ γράφεται:

$$H(a)^- = \bigcap_{i=1}^{n} \{(x_n)_n \in \mathbf{2}^{\mathbb{N}} : x_{2i} \leqslant \varepsilon_{2i}\}.$$

Αλλά, για κάθε $i = 1, ..., n$ παρατηρούμε ότι:

$$\{(x_n)_n \in \mathbf{2}^{\mathbb{N}} : x_{2i} \leqslant \varepsilon_{2i}\} = \begin{cases} C_{2i}^c, & \text{αν } \varepsilon_{2i} = 0, \\ \\ \mathbf{2}^{\mathbb{N}}, & \text{αν } \varepsilon_{2i} = 1. \end{cases}$$

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι το $H(a)^-$ ανήκει στον σ-σύνδεσμο που παράγεται από την οικογένεια $\{\emptyset, \mathbf{2}^{\mathbb{N}}\} \cup \{C_{2k}^c : k \in \mathbb{N}\}$, και αυτό τελικά αποδεικνύει τον ισχυρισμό.

Αποδεικνύουμε τώρα το ζητούμενο. Αφού ο $\mathbf{2}^{\mathbb{N}}$ είναι Πολωνικός χώρος, το μέτρο $\overline{\mu}$ είναι κανονικό (βλ. Πρότ.1.19), και συνεπώς μπορούμε να βρούμε μια ακολουθία $\{K_n\}_{n=1}^{\infty}$ συμπαγών υποσυνόλων του $\mathbf{2}^{\mathbb{N}}$, ώστε:

$$K_n \subseteq E \quad \forall n \in \mathbb{N} \text{ και } \overline{\mu}(E \setminus K_n) \to 0.$$

Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε ότι $K_n^+ \subseteq E$, γιατί το E είναι αύξον. Επίσης, από τον 1ο ισχυρισμό, το K_n^+ είναι κλειστό, και βέβαια αύξον. Έπεται ότι $K_n^+ \in L_0(\mathbf{2}^{\mathbb{N}}, \leqslant_a)$, λόγω του 2ου ισχυρισμού.
Θέτουμε: $F = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} K_n^+$. Τότε, από τα προηγούμενα, έχουμε άμεσα ότι:

$$F \subseteq E \text{ και } F \in L_0(\mathbf{2}^{\mathbb{N}}, \leqslant_a),$$

και από την μονοτονία του $\overline{\mu}$,

$$\overline{\mu}(E \setminus F) \leqslant \overline{\mu}(E \setminus K_n^+) \leqslant \overline{\mu}(E \setminus K_n) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

απ' όπου $\overline{\mu}(E \setminus F) = 0$.

□

Ορισμός 2.11. *Έστω $(X, \leqslant)$ ένας προδιατεταγμένος χώρος Borel, και m ένα θετικό, σ-πεπερασμένο μέτρο Borel στον X.*
Τότε η τριάδα $(X, \leqslant, m)$ θα λέγεται προδιατεταγμένος χώρος σ-πεπερασμένου μέτρου.
Ειδικότερα ο $(X, \leqslant, m)$ θα λέγεται standard, αν ο $(X, \leqslant)$ είναι standard.

Επεκτείνουμε την έννοια του αύξοντος συνόλου, δίνοντας τον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός 2.12. *Έστω $(X, \leqslant, m)$ ένας προδιατεταγμένος χώρος σ-πεπερασμένου μέτρου και E ένα μη κενό υποσύνολο του X.*
Το E θα λέγεται m-σχεδόν αύξον (ή σχεδόν αύξον ως προς m), αν υπάρχει $N \in \mathcal{B}(X)$ με $m(N) = 0$, ώστε:

$$\forall\, x,\, y \notin N, \text{ με } x \in E \text{ και } x \leqslant y, \text{ έπεται ότι } y \in E.$$

(δηλαδή ισοδύναμα, το $E \setminus N$ είναι αύξον υποσύνολο του $X \setminus N$).

Ορίζουμε $L_m(X, \leqslant) = \{E \in \mathcal{B}(X) : E\ m\text{-σχεδόν αύξον}\}$.

Όπως και στην περίπτωση του $L(X, \leqslant)$, η οικογένεια $L_m(X, \leqslant)$ είναι ένας σ-σύνδεσμος υποσυνόλων του X. Μάλιστα είναι προφανές ότι $L(X, \leqslant) \subseteq L_m(X, \leqslant)$.

Ορισμός 2.13. *Έστω X χώρος Borel και m ένα μέτρο Borel στον X. Δύο οικογένειες $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ Borel υποσυνόλων του X, θα λέγονται ισοδύναμες modulo m, αν*

$$\forall\, A \in \mathcal{C}\, (\text{αντίστοιχα } A \in \mathcal{D}),\ \exists\, B \in \mathcal{D} (\text{αντίστοιχα } B \in \mathcal{C}) \text{ ώστε } m(A \bigtriangleup B) = 0.$$

Γράφουμε τότε $\mathcal{C} \overset{m}{\sim} \mathcal{D}$.

Έστω τώρα $(X, \leqslant)$ ένας standard προδιατεταγμένος χώρος σ-πεπερασμένου μέτρου και $\mathcal{E} = \{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ μια ακολουθία στον $L(X, \leqslant)$, ώστε για κάθε $x,\, y \in X$,

$$x \leqslant y \Leftrightarrow \chi_{E_n}(x) \leqslant \chi_{E_n}(y) \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Συμβολίζουμε με $L_{\mathcal{E}}(X, \leqslant)$ τον σ-σύνδεσμο υποσυνόλων του X που παράγεται από την οικογένεια $\mathcal{E} \cup \{\emptyset,\, X\}$.

Με τον προηγούμενο συμβολισμό ισχύει το ακόλουθο Θεώρημα.

Θεώρημα 2.14. *Έστω $(X, \leqslant, m)$ ένας standard προδιατεταγμένος χώρος σ-πεπερασμένου μέτρου. Τότε:*

$$L_{\mathcal{E}}(X, \leqslant) \overset{m}{\sim} L(X, \leqslant) \overset{m}{\sim} L_m(X, \leqslant).$$

Απόδειξη. Επειδή $L_{\mathcal{E}}(X, \leqslant) \subseteq L(X, \leqslant) \subseteq L_m(X, \leqslant)$, αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε $B \in L_m(X, \leqslant)$ υπάρχει $A \in L_{\mathcal{E}}(X, \leqslant)$, ώστε $m(A \bigtriangleup B) = 0$.
Εφ' όσον αυτό αναφέρεται σε σύνολα μέτρου 0, και αφού κάθε σ-πεπερασμένο μέτρο είναι ισοδύναμο (δηλαδή έχει τα ίδια σύνολα μέτρου 0) μ' ένα πεπερασμένο μέτρο, μπορούμε να υποθέσουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι το m είναι πεπερασμένο.
Από το λήμμα 2.8, υπάρχει ένας order-ισομορφισμός $\phi : X \to \phi(X) \in \mathcal{B}(\mathbf{2}^{\mathbb{N}})$ που ικανοποιεί:

$$\phi(E_k) = C_{2k} \cap \phi(X) \ \ \forall\, k \in \mathbb{N},$$

όπου $C_k = \{(x_n)_n \in \mathbf{2}^{\mathbb{N}} : x_k = 1\}$ (βλ. απόδ. του Λήμματος 2.8).
Επομένως, μπορούμε να ταυτίσουμε τον X μ' ένα Borel υποσύνολο του $\mathbf{2}^{\mathbb{N}}$, την διάταξη $\leqslant$ με την

άρτια προδιάταξη $\leqslant_a$ του $\mathbf{2}^{\mathbb{N}}$ (περιορισμένη στον X) και τα E_k με τα $C_{2k} \cap X$.
Έστω λοιπόν $B \in L_m(X, \leqslant)$. Τότε, υπάρχει $N \in \mathcal{B}(X)$ με $m(N) = 0$, ώστε:

$$\text{αν } x,\, y \in X \setminus N, \text{ με } x \leqslant y \text{ και } x \in B, \text{ τότε και } y \in B \tag{2.2}$$

Σύμφωνα με τα προηγούμενα, αρκεί να βρούμε ένα σύνολο A στον σ-σύνδεσμο που παράγεται από την οικογένεια $\{C_{2k} \cap X\} \cup \{\emptyset, X\}$, ώστε $m(A \triangle B) = 0$.
Επεκτείνουμε το μέτρο m, στον $\mathbf{2}^{\mathbb{N}}$ ορίζοντας:

$$\mu(S) = m(S \cap X) \quad \forall\, S \in \mathcal{B}(\mathbf{2}^{\mathbb{N}}).$$

Το μ είναι προφανώς ένα πεπερασμένο, θετικό μέτρο Borel στον $\mathbf{2}^{\mathbb{N}}$.
Θέτουμε: $\quad B_1 = (B \setminus N)^+ = \{y \in \mathbf{2}^{\mathbb{N}} : \exists\, x \in B \setminus N \text{ με } x \leqslant y\}$.
Το B_1 είναι προφανώς ένα αύξον υποσύνολο του $\mathbf{2}^{\mathbb{N}}$.
Ισχυριζόμαστε επιπλέον ότι το B_1 είναι μ-μετρήσιμο.
Παρατηρούμε καταρχήν ότι:

$$B \setminus N \subseteq B_1 \subseteq B \cup N \cup X^c \tag{2.3}$$

Πράγματι: ο πρώτος εγκλεισμός είναι προφανής.
Για τον δεύτερο εγκλεισμό, έστω $y \in B_1$, οπότε υπάρχει $x \in B \setminus N$ με $x \leqslant y$.
Αν υποθέσουμε ότι $y \notin N \cup X^c$, δηλαδή $y \in X \setminus N$, τότε, επειδή $x \leqslant y$ και $x \in B \setminus N \subseteq X \setminus N$, από την σχέση (2.2) προκύπτει ότι $y \in B$.
Άρα $B_1 \subseteq B \cup N \cup X^c$.
Τώρα, τα $B \setminus N$, $B \cup N \cup X^c \in \mathcal{B}(\mathbf{2}^{\mathbb{N}})$ και

$$\mu\big((B \cup N \cup X^c) \setminus (B \setminus N)\big) = \mu(N \cup X^c) = m((N \cup X^c) \cap X) = m(N) = 0,$$

και άρα το B_1 είναι $\mu-$μετρήσιμο.
Από το λήμμα 2.10, μπορούμε να βρούμε ένα σύνολο A_1 στον σ-σύνδεσμο που παράγεται από τα C_{2k} (και άρα $A_1 \in \mathcal{B}(\mathbf{2}^{\mathbb{N}})$), με $A_1 \subseteq B_1$ και $\overline{\mu}(B_1 \setminus A_1) = 0$, απ' όπου:

$$\overline{\mu}(B_1) = \overline{\mu}(A_1) = \mu(A_1). \tag{2.4}$$

Θέτουμε $A = A_1 \cap X$, και θα δείξουμε ότι το A έχει τις ζητούμενες ιδιότητες.
Είναι σαφές ότι το A ανήκει στον ζητούμενο σ-σύνδεσμο, και μένει να δείξουμε ότι $m(A \triangle B) = 0$.
Αφού $A_1 \subseteq B_1 \subseteq B \cup N \cup X^c$, έχουμε:

$$\begin{aligned} m(A \setminus B) &= m(A_1 \cap B^c \cap X) = \mu(A_1 \cap B^c) \\ &\leqslant \mu\big((B \cup N \cup X^c) \cap B^c\big) = \mu\big((N \setminus B) \cup X^c\big) \\ &\overset{1}{=} \mu(N \setminus B) \leqslant \mu(N) = m(N) = 0 \end{aligned}$$

Επίσης, σύμφωνα με τα παραπάνω έχουμε ότι:

$$\overline{\mu}(B_1) = \mu(B \cup N \cup X^c) = m\big((B \cup N \cup X^c) \cap X\big) = m(B \cup N),$$

[1]διότι τα $N \setminus B$, X^c είναι ξένα και $\mu(X^c) = m(\emptyset) = 0$

και εφ' όσον $m(N \setminus A) = 0$ έπεται ότι:

$$\begin{aligned} m(B \setminus A) &= m\big((B \setminus A) \cup (N \setminus A)\big) = m\big((B \cup N) \setminus A\big) \\ &\overset{2}{=} m(B \cup N) - m(A) = \overline{\mu}(B_1) - m(A_1 \cap X) \\ &= \overline{\mu}(B_1) - \mu(A_1) = 0 \end{aligned}$$

Άρα τελικά,

$$m(A \triangle B) = m(A \setminus B) + m(B \setminus A) = 0.$$

□

Πόρισμα 2.15. *Έστω X ένας standard χώρος Borel, m ένα σ-πεπερασμένο μέτρο Borel στον X και $\leqslant_1$, $\leqslant_2$ δύο standard προδιατάξεις στον X. Τότε, οι σ-σύνδεσμοι $L_m(X, \leqslant_1)$ και $L_m(X, \leqslant_2)$ είναι ισοδύναμοι modulo m αν, και μόνο αν, οι $\leqslant_1$, $\leqslant_2$ είναι ισοδύναμες στο συμπλήρωμα ενός m-μηδενικού συνόλου. Δηλαδή:*

$$\begin{aligned} L_m(X, \leqslant_1) \overset{m}{\sim} L_m(X, \leqslant_2) \;\Leftrightarrow\; & \exists\, N \in \mathcal{B}(X) \text{ με } m(N) = 0, \text{ ώστε:} \\ & \forall\, x,\, y \notin N \text{ ισχύει } x \leqslant_1 y \text{ αν, και μόνο αν, } x \leqslant_2 y. \end{aligned}$$

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε αρχικά ότι $L_m(x, \leqslant_1) \overset{m}{\sim} L_m(X, \leqslant_2)$.
Παρατηρούμε τότε ότι $L(X, \leqslant_1) \overset{m}{\sim} L_m(X, \leqslant_2)$, από το Θεώρημα 2.14.
Αφού η $\leqslant_2$ είναι standard, υπάρχει μια ακολουθία $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ στον $L(X, \leqslant_2)$, ώστε για κάθε $x,\, y \in X$ να ισχύει:

$$x \leqslant_2 y \Leftrightarrow \chi_{F_n}(x) \leqslant \chi_{F_n}(y) \;\; \forall n \in \mathbb{N},$$

και σύμφωνα με τα προηγούμενα, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει $E_n \in L(X, \leqslant_1)$ ώστε $m(E_n \triangle F_n) = 0$.
Θέτουμε $N_1 = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} (E_n \triangle F_n)$. Προφανώς $N_1 \in \mathcal{B}(X)$ και $m(N_1) = 0$.
Ισχυριζόμαστε ότι αν $x,\, y \notin N_1$ και $x \leqslant_1 y$, τότε $x \leqslant_2 y$.
Πράγματι: εφ' όσον $x \notin N_1$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε ότι $x \in E_n \cap F_n$ ή $x \notin E_n \cup F_n$, και συνεπώς $\chi_{E_n}(x) = \chi_{F_n}(x)$.
Όμοια και $\chi_{E_n}(y) = \chi_{F_n}(y) \quad \forall n \in \mathbb{N}$.
Αφού τώρα $x \leqslant_1 y$, και τα E_n είναι $\leqslant_1$-αύξοντα, έχουμε ότι:

$$\chi_{F_n}(x) = \chi_{E_n}(x) \leqslant \chi_{E_n}(y) = \chi_{F_n}(y) \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

και άρα $x \leqslant_2 y$ από τον ορισμό της $\{F_n\}_n$.
Με ανάλογο τρόπο βρίσκουμε $N_2 \in \mathcal{B}(X)$ με $m(N_2) = 0$, ώστε αν $x,\, y \notin N_2$ και $x \leqslant_2 y$, τότε $x \leqslant_1 y$.
Συνεπώς, για το m-μηδενικό σύνολο $N = N_1 \cup N_2$ έχουμε το ζητούμενο.

Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι υπάρχει σύνολο N με τις παραπάνω ιδιότητες.
Έστω $E \in L_m(X, \leqslant_1)$ και $N_1 \in \mathcal{B}(X)$ με $m(N_1) = 0$ ώστε, αν $x,\, y \notin N_1$, $x \in E$ και $x \leqslant_1 y$, τότε $y \in E$.

[2] αφού $A = A_1 \cap X \subseteq B_1 \cap X \overset{(2.3)}{\subseteq} B \cup N$

Θέτουμε $N_2 = N \cup N_1$. Παρατηρούμε ότι $m(N_2) = 0$ και αν $x, y \notin N_2$, $x \in E$ και $x \leqslant_2 y$, τότε από τις ιδιότητες των N, N_1 προκύπτει ότι $y \in E$. Επομένως $E \in L_m(X, \leqslant_2)$.
Δείξαμε λοιπόν ότι $L_m(X, \leqslant_1) \subseteq L_m(X, \leqslant_2)$.
Ανάλογα αποδεικνύουμε και τον αντίστροφο εγκλεισμό, οπότε τελικά έχουμε ότι

$$L_m(X, \leqslant_1) = L_m(X, \leqslant_2).$$

□

Θεώρημα 2.16. *Έστω X διαχωρίσιμος, τοπικά συμπαγής μετρικός χώρος και $\leqslant$ μια προδιάταξη στον X, με κλειστό γράφημα G.*
Τότε ο $(X, \leqslant)$ είναι ένας standard προδιατεταγμένος χώρος Borel.

Απόδειξη. Είναι σαφές ότι ο X είναι Πολωνικός χώρος (βλ. πόρισμα 1.17), και άρα standard χώρος Borel.
Επομένως το μόνο που έχουμε να δείξουμε είναι ότι η $\leqslant$ είναι standard.
Εφ' όσον το G^c είναι ανοικτό και ο X είναι τοπικά συμπαγής, για κάθε $(x, y) \in G^c$ υπάρχουν K_x, L_y συμπαγείς περιοχές των x, y αντίστοιχα, ώστε $K_x \times L_y \subseteq G^c$.
Τώρα, η οικογένεια $\{K_x \times L_y : (x, y) \in G^c\}$ είναι μια ανοικτή κάλυψη του G^c, και άρα, αφού ο X είναι χώρος Lindelof[3], υπάρχουν ακολουθίες $\{K_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{L_n\}_{n=1}^{\infty}$ συμπαγών περιοχών των x, y αντίστοιχα, ώστε:

$$G^c = \bigcup_{n=1}^{\infty} (K_n \times L_n).$$

Θέτουμε $E_n = L_n^+,\ n = 1, 2, \dots$.

<u>Ισχυρισμός:</u> Κάθε E_n είναι κλειστό υποσύνολο του X.
Το L_n^+ γράφεται:

$$L_n^+ = pr_1\big(G \cap (X \times L_n)\big),$$

όπου pr_1 η 1η προβολή του $X \times X$. Θεωρούμε τον περιορισμό της pr_1 :

$$pr_1|_{X \times L_n} : X \times L_n \to X.$$

Επειδή ο L_n είναι συμπαγής χώρος, η $pr_1|_{X \times L_n}$ είναι κλειστή συνάρτηση (βλ. Πρότ. 1.14).
Επιπλέον, το $G \cap (X \times L_n)$ είναι κλειστό στον $X \times X$, άρα κλειστό και στον $X \times L_n$. Έπεται ότι το

$$E_n = L_n^+ = pr_1|_{X \times L_n}\big(G \cap (X \times L_n)\big)$$

είναι κλειστό στον X.

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι $E_n \in L(X, \leqslant) \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$.
Ισχυριζόμαστε τώρα ότι για κάθε x, $y \in X$ ισχύει:

$$x \leqslant y \;\Leftrightarrow\; \chi_{E_n}(x) \leqslant \chi_{E_n}(y) \;\; \forall\, n \in \mathbb{N}$$

[3]ένας μετρικός χώρος X είναι διαχωρίσιμος αν, και μόνο αν, είναι 2ος αριθμήσιμος αν, και μόνο αν, είναι χώρος Lindelof (δηλαδή κάθε ανοικτή κάλυψη του X έχει αριθμήσιμη υποκάλυψη) (βλ. [7] Πρότ. 12.44).

Αν $x \leqslant y$, τότε $\chi_{E_n}(x) \leqslant \chi_{E_n}(y) \ \ \forall n \in \mathbb{N}$ διότι τα E_n είναι αύξοντα.
Αντίστροφα, αν $\chi_{E_n}(x) \leqslant \chi_{E_n}(y) \ \ \forall n \in \mathbb{N}$, θα δείξουμε ότι $x \leqslant y$, δηλαδή ότι $(y,x) \in G$.
Υποθέτουμε αντίθετα ότι $(y,x) \notin G$, οπότε υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε $y \in K_n$ και $x \in L_n$.
Αφού $x \in L_n \subseteq E_n$, έχουμε ότι και $y \in E_n = L_n^+$ και συνεπώς υπάρχει $w \in L_n$ ώστε $w \leqslant y$.
Αλλά τότε $(y,w) \notin G^c$, άτοπο αφού $(y,w) \in K_n \times L_n$.
Άρα $x \leqslant y$ και ο ισχυρισμός απεδείχθη.
Επομένως η $\leqslant$ είναι standard από την Πρόταση 2.4.

$\square$

2.2 Σύνδεσμοι Υποχώρων

Έστω H χώρος Hilbert.
Για κάθε κλειστό υπόχωρο M του H, συμβολίζουμε με $P(M)$ την (ορθή) προβολή επί του M.
Η απεικόνιση $M \longmapsto P(M)$ είναι μια 1-1 και επί αντιστοιχία μεταξύ του συνόλου των κλειστών υποχώρων του H και του συνόλου $Proj(H)$ των προβολών του H.
Η αντιστοιχία αυτή μας επιτρέπει να ορίσουμε το supremum και το infimum δύο προβολών, μέσω των αντίστοιχων πράξεων που ορίζονται για κλειστούς υποχώρους (βλ.Ορισμό 1.36).
Έτσι, για κάθε δύο προβολές $P = P(M), \ \ Q = P(N)$ του H, θέτουμε:

$$\begin{aligned} & P \vee Q = P(M \vee N) = P(\overline{M+N}) \\ \text{και} \quad & P \wedge Q = P(M \wedge N) = P(M \cap N) \end{aligned}$$

Με τις προηγούμενες πράξεις, το συνολο $Proj(H)$ γίνεται ένας σύνδεσμος.
Με τον όρο σύνδεσμος προβολών, εννοούμε ένα υποσύνολο του $Proj(H)$ κλειστό ως προς τις πράξεις $\vee$ και $\wedge$ (δηλαδή έναν υποσύνδεσμο του $Proj(H)$).

Ορισμός 2.17. *Έστω H χώρος Hilbert. Ένας SOT-κλειστός σύνδεσμος προβολών του H, που περιέχει τον μηδενικό και τον ταυτοτικό τελεστή, θα λέγεται σύνδεσμος υποχώρων (subspace lattice).*

Παρατηρήσεις :

1. Κάθε σύνδεσμος υποχώρων είναι πλήρης σύνδεσμος προβολών:
   Έστω $\mathcal{L}$ ένας σύνδεσμος υποχώρων και $\{P_i : i \in I\}$ μια οικογένεια προβολών στον $\mathcal{L}$.
   Θα δείξουμε ότι $\underset{i\in I}{\vee} P_i \in \mathcal{L}$.
   Για κάθε πεπερασμένο υποσύνολο F του I, θέτουμε

   $$P_F = \underset{i\in F}{\vee} P_i$$

   Εφ' όσον ο $\mathcal{L}$ είναι σύνδεσμος, κάθε προβολή P_F ανήκει στον $\mathcal{L}$.
   Επίσης, $\underset{i\in I}{\vee} P_i = \vee\{P_F : F \subseteq I \text{ πεπερασμένο}\}$.
   Από την άλλη, εύκολα βλέπουμε ότι αν F_1, F_2 είναι πεπερασμένα υποσύνολα του I με $F_1 \subseteq F_2$, τότε $P_{F_1} \leqslant P_{F_2}$, δηλαδή το δίκτυο $\{P_F : F \subseteq I \text{ πεπερασμένο}\}$ είναι αύξον.
   Άρα $\vee\{P_F : F \subseteq I \text{ πεπερασμένο}\} = SOT - \lim\limits_{F} P_F$.

Επομένως $\bigvee\limits_{i\in I} P_i = SOT - \lim\limits_{F} P_F$ και αφού ο $\mathcal{L}$ είναι SOT-κλειστός, έπεται τελικά ότι $\bigvee\limits_{i\in I} P_i \in \mathcal{L}$.
Όμοια δείχνουμε και ότι $\bigwedge\limits_{i\in I} P_i \in \mathcal{L}$, και άρα πράγματι ο $\mathcal{L}$ είναι πλήρης.

2. Κάθε ανακλαστικός σύνδεσμος είναι σύνδεσμος υποχώρων:
   Έστω $\mathcal{L}$ ένας ανακλαστικός σύνδεσμος, δηλαδή $\mathcal{L} = latalg\mathcal{L}$.
   Το μόνο που έχουμε να δείξουμε είναι ότι ο $\mathcal{L}$ είναι SOT-κλειστός.
   Έστω λοιπόν $(P_i)_{i\in I}$ δίκτυο στον $\mathcal{L}$ και P προβολή του H με $P_i \xrightarrow{\text{SOT}} P$.
   Για κάθε $T \in alg\mathcal{L}$ έχουμε ότι $TP_i = P_iTP_i \quad \forall\, i \in I$, διότι $P_i \in \mathcal{L} = latalg\mathcal{L}$.
   Αφού ο πολλαπλασιασμός είναι χωριστά (SOT, SOT)-συνεχής, έπεται ότι $TP = PTP$, απ' όπου συμπεραίνουμε ότι $P \in latalg\mathcal{L} = \mathcal{L}$.

Το απλούστερο παράδειγμα συνδέσμου υποχώρων, είναι προφανώς το σύνολο $Proj(H)$, γιατί είναι SOT-κλειστό.

Δίνουμε τώρα ένα δεύτερο παράδειγμα συνδέσμου υποχώρων.
Έστω (X, m) χώρος σ-πεπερασμένου μέτρου. Για κάθε $B \in \mathcal{B}(X)$, συμβολίζουμε με P_B τον πολλαπλασιαστικό τελεστή M_{χ_B}, δηλαδή $P_B f = f\chi_B$ για κάθε $f \in L^2(X, m)$.
Προφανώς κάθε P_B είναι προβολή του $L^2(X, m)$.
Επιπλέον, άμεσα διαπιστώνουμε ότι η οικογένεια $\{P_B : B \in \mathcal{B}(X)\}$ είναι ένα φασματικό μέτρο, δηλαδή ικανοποιεί τα εξής:

1. $P_\emptyset = \mathbf{0},\ P_X = I$

2. $P_B^* = P_B$

3. $P_A P_B = P_B P_A = P_{A\cap B}$

4. $\forall\, f \in L^2(X, m)$, η συνολο-συνάρτηση

$$B \mapsto \langle\, P_B f,\, f\,\rangle$$

   είναι ένα θετικό μέτρο Borel στον X.

Πρόταση 2.18. *Το σύνολο $\{P_B : B \in \mathcal{B}(X)\}$ είναι ένας μεταθετικός σύνδεσμος υποχώρων.*

Απόδειξη. Δείχνουμε πρώτα ότι το σύνολο $\{P_B : B \in \mathcal{B}(X)\}$ είναι σύνδεσμος προβολών, δηλαδή κλειστό ως προς τις πράξεις $\vee$ και $\wedge$.
Έστω $A,\ B \in \mathcal{B}(X)$.
Εφ' όσον $P_A P_B = P_B P_A = P_{A\cap B}$ θα έχουμε ότι[4]:

$$P_A \wedge P_B = P_A P_B = P_{A\cap B} \tag{2.5}$$

[4]αν δύο προβολές P, Q μετατίθενται, τότε $P \wedge Q = PQ = QP$.

Από την άλλη, επειδή $\chi_{A\cup B} = \chi_A + \chi_B - \chi_{A\cap B}$, είναι σαφές ότι:

$$P_{A\cup B} = P_A + P_B - P_A P_B,$$

απ' όπου έπεται ότι[5]

$$P_A \vee P_B = P_{A\cup B} \tag{2.6}$$

Οι (2.5) και (2.6) δείχνουν ακριβώς ότι το σύνολο $\{P_B : B \in \mathcal{B}(X)\}$ είναι ένας σύνδεσμος προβολών (που προφανώς περιέχει τον μηδενικό και τον ταυτοτικό τελεστή του $L^2(X,m)$).

Μένει να δείξουμε ότι το $\{P_B : B \in \mathcal{B}(X)\}$ είναι SOT-κλειστό.
Εφ' όσον το σύνολο αυτό περιέχεται στην πολλαπλασιαστική άλγεβρα $\mathcal{M}_m$ του (X,m), καθώς και στο σύνολο $Proj(H)$ των προβολών του H (όπου τα $\mathcal{M}_m$, $Proj(H)$ είναι SOT-κλειστά), θα έχουμε ότι:

$$\overline{\{P_B :\ B \in \mathcal{B}(X)\}}^{SOT} \subseteq Proj(H) \cap \mathcal{M}_m \tag{2.7}$$

Αλλά, αν ένας πολλαπλασιαστικός τελεστής M_f είναι προβολή, τότε $f = f^2$ m-σχεδόν παντού, δηλαδή $f(x) = 0$ ή 1 m-σχεδόν $\forall\, x \in X$.
Συνεπώς, θέτοντας $A = [f = 1] \in \mathcal{B}(X)$, έπεται ότι $f = \chi_A$ $m-$σχεδόν παντού, απ' όπου $M_f = P_A$.
Συμπεραίνουμε ότι $Proj(H) \cap \mathcal{M}_m = \{P_B :\ B \in \mathcal{B}(X)\}$, και άρα από την (2.7) το σύνολο $\{P_B : B \in \mathcal{B}(X)\}$ είναι SOT-κλειστό.

□

Στα επόμενα, θεωρούμε έναν standard προδιατεταγμένο χώρο σ-πεπερασμένου μέτρου $(X, \leqslant, m)$. Σκοπός μας είναι να ορίσουμε έναν μεταθετικό σύνδεσμο υποχώρων που θα σχετίζεται με την προδιάταξη του X.
Θέτουμε: $\mathcal{L}(X, \leqslant, m) = \{P_E : E \in L(X, \leqslant)\}$

Πρόταση 2.19. *Το σύνολο $\mathcal{L}(X, \leqslant, m)$ είναι ένας μεταθετικός σύνδεσμος υποχώρων.*

Απόδειξη. Προφανώς το σύνολο $\mathcal{L}(X, \leqslant, m)$ είναι ένας σύνδεσμος προβολών που περιέχει τον μηδενικό και τον ταυτοτικό τελεστή του $L^2(X,m)$, διότι περιέχεται στον σύνδεσμο $\{P_B : B \in \mathcal{B}(X)\}$ και ο $L(X, \leqslant)$ είναι σύνδεσμος υποσυνόλων του X.
Επομένως έχουμε να δείξουμε ότι το σύνολο $\mathcal{L}(X, \leqslant, m)$ είναι SOT-κλειστό, και συγκεκριμένα ότι αν $(P_{E_n})_n$ είναι μια ακολουθία[6] στον $\mathcal{L}(X, \leqslant, m)$ και $A \in \mathcal{B}(X)$, ώστε $P_{E_n} \xrightarrow{\text{SOT}} P_A$, τότε $P_A \in \mathcal{L}(X, \leqslant, m)$.[7]

[5] $PQ = QP$ αν, και μόνο αν, ο τελεστής $P + Q - PQ$ είναι προβολή αν, και μόνο αν $P \vee Q = P + Q - PQ$ (βλ. [5] Πρότ. 2.5.7 και 2.5.9)

[6] Θυμίζουμε ότι η SOT-τοπολογία της $\mathcal{B}(L^2(X,m))_1$ είναι μετρικοποιήσιμη, διότι ο $L^2(X,m)$ είναι διαχωρίσιμος χώρος Hilbert (βλ.Πρότ. 1.35).

[7] αφού $\mathcal{L}(X, \leqslant, m) \subseteq \{P_B : B \in \mathcal{B}(X)\}$, όπου το 2^o σύνολο είναι SOT-κλειστό, η $(P_{E_n})_n$ θα συγκλίνει αναγκαστικά σε μια προβολή P_A, $A \in \mathcal{B}(X)$

Έστω f μια γνησίως θετική συνάρτηση του $L^2(X,m)$.[8] Από την υπόθεση, έχουμε ότι:

$$\|P_{E_n}f - P_A f\|_2 \to 0.$$

Παρατηρούμε όμως ότι:

$$\begin{aligned}\|P_{E_n}f - P_A f\|_2^2 &= \int_X |(\chi_{E_n}(x) - \chi_A(x))f(x)|^2\, dm(x) = \int_X \chi_{A\triangle E_n}(x)|f(x)|^2\, dm(x) \\ &= \int_{A\triangle E_n} |f(x)|^2\, dm(x) = \mu(A \triangle E_n),\end{aligned}$$

όπου μ το (θετικό) μέτρο που ορίζεται από την σχέση:

$$\mu(B) = \int_B |f(x)|^2\, dm(x) \quad \forall\, B \in \mathcal{B}(X)$$

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι $\mu(A \triangle E_n) \to 0$. Θεωρώντας, αν χρειάζεται, μια υπακολουθία, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\mu(A \triangle E_n) < \frac{1}{2^n} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$.
Θέτουμε $E = \limsup_n E_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} E_k$.
Προφανώς $E \in L(X, \leqslant)$. Επιπλέον, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε ότι:

$$\begin{aligned}\mu(E \setminus A) &\leqslant \mu\big(\bigcup_{k=n}^{\infty}(E_k \setminus A)\big) \leqslant \sum_{k=n}^{\infty} \mu(E_k \setminus A) \\ &\leqslant \sum_{k=n}^{\infty} \mu(E_k \triangle A) \leqslant \sum_{k=n}^{\infty} \tfrac{1}{2^k} \\ &= \frac{1}{2^{n-1}},\end{aligned}$$

και άρα $\mu(E \setminus A) = 0$.
Ανάλογα έχουμε και ότι:

$$\begin{aligned}\mu(A \setminus E) &\leqslant \mu\big(\bigcup_{k=n}^{\infty}(A \setminus E_k)\big) \leqslant \sum_{k=n}^{\infty} \mu(A \setminus E_k) \\ &\leqslant \sum_{k=n}^{\infty} \tfrac{1}{2^k} = \frac{1}{2^{n-1}},\end{aligned}$$

οπότε και $\mu(A \setminus E) = 0$.
Έπεται ότι $\mu(A \triangle E) = \mu(A \setminus E) + \mu(E \setminus A) = 0$, δηλαδή $\int_{A\triangle E} |f(x)|^2\, dm(x) = 0$.
Εφ' όσον τώρα η f είναι γνήσια θετική, έχουμε ότι $m(A \triangle E) = 0$, και άρα $\chi_A = \chi_E$ m-σχεδόν παντού.
Επομένως $P_A = P_E \in \mathcal{L}(X, \leqslant, m)$. □

[8] αφού ο X είναι σ-πεπερασμένος, υπάρχει $(X_n)_n$ μετρήσιμη διαμέριση του X, ώστε $m(X_n) < \infty\ \forall\, n \in \mathbb{N}$. Ορίζουμε $f = \big(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \frac{\chi_{X_n}}{m(X_n)}\big)^{1/2}$. Για κάθε $x \in X$, υπάρχει μοναδικό $n \in \mathbb{N}$ ώστε $x \in X_n$, άρα $f(x) = \big(\frac{1}{n^2 m(X_n)}\big)^{1/2}$ και η f είναι γνησίως θετική. Επιπλέον από το θεώρημα Beppo-Levi, $\int_X |f|^2\, dm = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X \frac{1}{n^2} \frac{\chi_{X_n}}{m(X_n)} dm = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty$, δηλαδή $f \in L^2(X,m)$.

Θεώρημα 2.20. *Έστω* $\mathcal{E} = \{E_1, E_2, ...\}$ *μια ακολουθία Borel υποσυνόλων του* X, *και* $\mathcal{L}\big((P_{E_n})_n\big)$ *ο σύνδεσμος υποχώρων που παράγεται από την ακολουθία* $\{P_{E_n} : n \in \mathbb{N}\}$. *Τότε:*

$$\mathcal{L}\big((P_{E_n})_n\big) = \mathcal{L}(X, \leqslant, m)$$

αν, και μόνο αν, υπάρχει $N \in \mathcal{B}(X)$ *με* $m(N) = 0$, *ώστε:*

$$\forall\, x,\, y \notin N,\;\; x \leqslant y \Leftrightarrow \chi_{E_n}(x) \leqslant \chi_{E_n}(y) \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Απόδειξη. Ορίζουμε μια δεύτερη προδιάταξη στον X, ως εξής:

$$x \leqslant_1 y \Leftrightarrow \chi_{E_n}(x) \leqslant \chi_{E_n}(y) \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Είναι σαφές ότι η $\leqslant_1$ είναι standard και ότι $E_n \in L(X, \leqslant_1)$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$.
Έστω τώρα $L_\mathcal{E}$ ο σ-σύνδεσμος που παράγεται από την ακολουθία $\mathcal{E}$.
Ισχυριζόμαστε ότι:

$$\{P_E : E \in L_\mathcal{E}\} = \mathcal{L}\big((P_{E_n})_n\big) = \mathcal{L}(X, \leqslant_1, m).$$

Παρατηρούμε καταρχήν ότι:$\{P_E : E \in L_\mathcal{E}\} \subseteq \mathcal{L}\big((P_{E_n})_n\big)$, γιατί ο $\mathcal{L}\big((P_{E_n})_n\big)$ είναι πλήρης σύνδεσμος προβολών (βλ. παρατήρηση 1 παραπάνω).
Επίσης, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε ότι $P_{E_n} \in \mathcal{L}(X, \leqslant_1, m)$, και συνεπώς $\mathcal{L}\big((P_{E_n})_n\big) \subseteq \mathcal{L}(X, \leqslant_1, m)$.
Από την άλλη, από το Θεώρημα 2.14, για κάθε $A \in L(X, \leqslant_1)$, υπάρχει $B \in L_\mathcal{E}$, ώστε $m(B \bigtriangleup A) = 0$, ισοδύναμα $P_A = P_B$.
Επομένως, $\mathcal{L}(X, \leqslant_1, m) \subseteq \{P_E : E \in L_\mathcal{E}\}$ και συνδυάζοντας τα προηγούμενα έχουμε το ζητούμενο.

Άρα αρκεί να δείξουμε ότι

$$\mathcal{L}(X, \leqslant_1, m) = \mathcal{L}(X, \leqslant, m)$$

αν, και μόνο αν, υπάρχει $N \in \mathcal{B}(X)$ με $m(N) = 0$, ώστε:

$$\forall\, x,\, y \notin N,\;\; x \leqslant y \Leftrightarrow x \leqslant_1 y.$$

Αλλά η συνθήκη $\mathcal{L}(X, \leqslant, m) = \mathcal{L}(X, \leqslant_2, m)$ είναι προφανώς ισοδύναμη με την

$$L(X, \leqslant) \overset{m}{\sim} L(X, \leqslant_2),$$

και επομένως το συμπέρασμα προκύπτει άμεσα από το Πόρισμα 2.15.

□

Στο εξής αν $\mathcal{P}$ είναι μια οικογένεια προβολών σ' έναν χώρο Hilbert H, θα συμβολίζουμε με $\mathcal{L}(\mathcal{P})$ τον σύνδεσμο υποχώρων που παράγεται από την $\mathcal{P}$.
Ιδιαιτέρως, για κάθε ακολουθία $\mathcal{E} = (E_n)_n$ στην $\mathcal{B}(X)$, θα συμβολίζουμε με $L_\mathcal{E}$ τον σ-σύνδεσμο υποσυνόλων του X που παράγεται από την $\mathcal{E}$, και με $\mathcal{L}\big((P_{E_n})_n\big)$ τον σύνδεσμο υποχώρων που παράγεται από την ακολουθία προβολών $(P_{E_n})_n$.

Παρατήρηση 2.21. *Γνωρίζουμε ότι όταν η προδιάταξη $\leqslant$ είναι standard, μπορούμε πάντοτε να βρούμε μια ακολουθία $\mathcal{E} = (E_n)_n$ στον $L(X, \leqslant)$, ώστε:*

$$x \leqslant y \Leftrightarrow \chi_{E_n}(x) \leqslant \chi_{E_n}(y) \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Σύμφωνα με το προηγούμενο θεώρημα, ισχύει τότε:

$$\mathcal{L}(X, \leqslant, m) = \mathcal{L}\big((P_{E_n})_n\big) = \{P_E : E \in L_{\mathcal{E}}\}.$$

Υπενθυμίζουμε ότι κάθε σύνολο προβολών (ειδικότερα κάθε σύνδεσμος υποχώρων) είναι μερικώς διατεταγμένο ως προς την σχέση:

$$P \leqslant Q \;\Leftrightarrow\; \text{ο } Q - P \text{ είναι θετικός.}$$

Στο επόμενο Πόρισμα συσχετίζουμε την μερική διάταξη του $\mathcal{L}(X, \leqslant, m)$ με την προδιάταξη του X.

Πόρισμα 2.22. *Ο σύνδεσμος υποχώρων $\mathcal{L}(X, \leqslant, m)$ είναι ολικά διατεταγμένος αν, και μόνο αν, η $\leqslant$ επάγει μια ολική προδιάταξη στο συμπλήρωμα ενός συνόλου μέτρου 0.*

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε αρχικά ότι η μερική διάταξη του $\mathcal{L}(X, \leqslant, m)$ είναι ολική.
Θεωρούμε μια ακολουθία $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ στον $L(X, \leqslant)$, ώστε η $(P_{E_n})_n$ είναι SOT-πυκνή στον $\mathcal{L}(X, \leqslant, m)$ [9].
Για κάθε $n \in \mathbb{N}$, θέτουμε $F_n = \bigcup\{E_k : P_{E_k} \leqslant P_{E_n}\}$.
Παρατηρούμε ότι κάθε F_n είναι αύξον υποσύνολο του X, διότι τα E_n είναι αύξοντα.
Επομένως $F_n \in L(X, \leqslant) \quad \forall n \in \mathbb{N}$.
Επίσης, η ακολουθία $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ είναι ολικά διατεταγμένη (με την σχέση του περιέχεσθαι).
Πράγματι: για κάθε n, $m \in \mathbb{N}$ με $n \neq m$, από την υπόθεση έχουμε ότι $P_{E_n} \leqslant P_{E_m}$ ή $P_{E_m} \leqslant P_{E_n}$.
Τότε έχουμε αντίστοιχα ότι $F_n \subseteq F_m$ ή $F_m \subseteq F_n$, από τον ορισμό των F_n.
Παρατηρούμε ακόμα ότι $P_{E_n} = P_{F_n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$, αφού:

$$P_{F_n} = P_{\cup\{E_k : P_{E_k} \leqslant P_{E_n}\}} = \vee\{P_{E_k} : P_{E_k} \leqslant P_{E_n}\} \leqslant P_{E_n}\,,$$

αλλά και $P_{E_n} \leqslant P_{F_n}$, διότι $E_n \subseteq F_n$.
Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι η $(P_{F_n})_n$ είναι SOT-πυκνή στον $\mathcal{L}(X, \leqslant, m)$, και συνεπώς παράγει τον $\mathcal{L}(X, \leqslant, m)$ ως σύνδεσμο υποχώρων.
Άρα, από το προηγούμενο Θεώρημα, υπάρχει $N \in \mathcal{B}(X)$ με $m(N) = 0$, ώστε

$$\forall x,\, y \notin \mathbb{N},\; x \leqslant y \Leftrightarrow x \leqslant_1 y, \tag{2.8}$$

όπου $\leqslant_1$ είναι η standard προδιάταξη:

$$x \leqslant_1 y \Leftrightarrow \chi_{F_n}(x) \leqslant \chi_{F_n}(y) \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Ισχυριζόμαστε τώρα ότι η $\leqslant_1$ είναι ολική προδιάταξη στον X.
Πράγματι: αν υποθέσουμε ότι $x \nleqslant_1 y$ και $y \nleqslant_1 x$ για κάποια x, $y \in X$, τότε από τον ορισμό της

[9] επειδή ο $\big(B\big(L^2(X,m)\big)_1, SOT\big)$ είναι διαχωρίσιμος μετρικός χώρος, ο υπόχωρος $\mathcal{L}(X, \leqslant, m)$ είναι SOT-διαχωρίσιμος.

$\leqslant_1$ υπάρχουν n, $m \in \mathbb{N}$, ώστε τα F_n, F_m διαχωρίζουν τα x, y. Αυτό όμως έρχεται σε αντίφαση με το γεγονός ότι η $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ είναι ολικά διατεταγμένη.
Άρα από την (2.8) προκύπτει ότι η $\leqslant$ είναι ολική στο N^c.

Αντίστροφα, έστω ότι υπάρχει σύνολο N όπως παραπάνω.
Για κάθε E, $F \in L(X, \leqslant)$, πρέπει να δείξουμε ότι:$P_E \leqslant P_F$ ή $P_F \leqslant P_E$.
Αυτό ισοδυναμεί με $P_{E\cap F} = P_E\, P_F = P_E$ ή $P_{E\cap F} = P_F$, δηλαδή με:

$$m(F \setminus E) = 0 \text{ ή } m(E \setminus F) = 0.$$

Υποθέτουμε αντίθετα ότι $m(E \setminus F) > 0$ και $m(F \setminus E) > 0$.
Εφ' όσον $m(N) = 0$, έχουμε ότι:

$$m((E \setminus F) \setminus N) = m(E \setminus F) > 0,$$

και συνεπώς υπάρχει $x \in (E \setminus F) \setminus N$.
Όμοια, υπάρχει $y \in (F \setminus E) \setminus N$.
Εφ' όσον x, $y \notin N$ και η $\leqslant$ είναι ολική στο N^c, θα έχουμε ότι: $x \leqslant y$ ή $y \leqslant x$.
Αλλά αν $x \leqslant y$, τότε, αφού $x \in E$ και το E είναι αύξον, έπεται ότι $y \in E$, άτοπο.
Ομοίως και αν $y \leqslant x$.
Συνεπώς, $m(E \setminus F) = 0$ ή $m(F \setminus E) = 0$, απ' όπου έχουμε το ζητούμενο.

□

Πόρισμα 2.23. *Ο $\mathcal{L}(X, \leqslant, m)$ είναι συμπληρωματικός σύνδεσμος αν, και μόνο αν, η $\leqslant$ επάγει μια σχέση ισοδυναμίας στο συμπλήρωμα ενός συνόλου μέτρου 0.*

Απόδειξη. Έστω ότι ο $\mathcal{L}(X, \leqslant, m)$ είναι συμπληρωματικός σύνδεσμος.
Παρατηρούμε ότι ο σύνδεσμος υποχώρων $\{P_B : B \in \mathcal{B}(X)\}$ αποτελεί άλγεβρα Boole[10] (δηλαδή είναι ένας επιμεριστικός, συμπληρωματικός σύνδεσμος), οπότε κάθε προβολή P_B έχει μοναδικό συμπληρωματικό στοιχείο, την προβολή P_{B^c}.
Αφού λοιπόν ο $\mathcal{L}(X, \leqslant, m)$ είναι συμπληρωματικός υποσύνδεσμος του $\{P_B : B \in \mathcal{B}(X)\}$, έπεται ότι $P_{E^c} \in \mathcal{L}(X, \leqslant, m) \quad \forall\, E \in L(X, \leqslant, m)$.
Έστω τώρα $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ ακολουθία στον $L(X, \leqslant)$, ώστε η $(P_{E_n})_n$ είναι SOT-πυκνή στον $\mathcal{L}(X, \leqslant, m)$.
Θεωρούμε την ακολουθία $\mathcal{E} = \{E_1, E_1^c, E_2, E_2^c, ...\}$ και την standard διάταξη:

$$x \leqslant_1 y \Leftrightarrow \chi_E(x) \leqslant \chi_E(y) \quad \forall\, E \in \mathcal{E}.$$

Η $\leqslant_1$ είναι σχέση ισοδυναμίας στον X, διότι:

$$\begin{aligned} x \leqslant_1 y \quad &\Leftrightarrow \quad \chi_{E_n}(x) \leqslant \chi_{E_n}(y) \quad \text{και} \;\; \chi_{E_n^c}(x) \leqslant \chi_{E_n^c}(y) \;\; \forall\, n \in \mathbb{N} \\ &\Leftrightarrow \quad \chi_{E_n^c}(y) \leqslant \chi_{E_n^c}(x) \quad \text{και} \;\; \chi_{E_n}(y) \leqslant \chi_{E_n}(x) \;\; \forall\, n \in \mathbb{N} \\ &\Leftrightarrow \quad y \leqslant_1 x \end{aligned}$$

[10]λόγω των σχέσεων $P_A \vee P_B = P_{A\cap B}$, κι εφ' όσον η σ-άλγεβρα $\mathcal{B}(X)$ είναι σύνδεσμος ως προς τις πράξεις $\cup$ και $\cap$.

Επίσης, η ακολουθία $\{P_E : E \in \mathcal{E}\}$ είναι SOT-πυκνή στον $\mathcal{L}(X, \leqslant, m)$, και άρα παράγει τον $\mathcal{L}(X, \leqslant, m)$ ως σύνδεσμο υποχώρων.
Άρα σύμφωνα με το θεώρημα 2.20, υπάρχει $N \in \mathcal{B}(X)$ με $m(N) = 0$, ώστε οι $\leqslant$, $\leqslant_1$ να ταυτίζονται στο N^c, και επομένως η $\leqslant$ είναι σχέση ισοδυναμίας στο N^c.

Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι υπάρχει σύνολο N όπως προηγουμένως, και έστω $E \in L(X, \leqslant)$.
Πρέπει να δείξουμε ότι $P_{E^c} \in \mathcal{L}(X, \leqslant, m)$.
Παρατηρούμε ότι $E^c \in L_m(X, \leqslant)$.
Πράγματι: έστω $x, y \notin N$, με $x \leqslant y$ και $x \in E^c$. Τότε και $y \leqslant x$ από την υπόθεση, και εφ' όσον το E είναι αύξον και $x \notin E$, έπεται ότι και $y \notin E$, δηλαδή το ζητούμενο.
Επομένως, σύμφωνα με το θεώρημα 2.14, υπάρχει $A \in L(X, \leqslant)$ ώστε $m(A \vartriangle E^c) = 0$, απ' όπου έπεται ότι $P_{E^c} = P_A \in \mathcal{L}(X, \leqslant, m)$. □

Πρόταση 2.24. *Έστω H_1, H_2 δύο χώροι Hilbert και $U : H_1 \to H_2$ ένας ορθομοναδιαίος τελεστής. Τότε:*
(i) για κάθε μεταθετικό σύνδεσμο υποχώρων $\mathcal{L}$ στον $\mathcal{B}(H_1)$, το σύνολο $U\mathcal{L}U^{-1}$ είναι ένας μεταθετικός σύνδεσμος υποχώρων στον $\mathcal{B}(H_2)$.
(ii) για κάθε μεταθετική οικογένεια προβολών $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{B}(H_1)$ ισχύει: $\mathcal{L}(U\mathcal{P}U^{-1}) = U\mathcal{L}(\mathcal{P})U^{-1}$.

Απόδειξη. Είναι σαφές ότι το $U\mathcal{L}U^{-1}$ είναι ένα μεταθετικό σύνολο προβολών του $\mathcal{B}(H_2)$, που περιέχει τον μηδενικό και τον ταυτοτικό τελεστή (από τις αντίστοιχες ιδιότητες του $\mathcal{L}$).
Δείχνουμε ότι το $U\mathcal{L}U^{-1}$ είναι σύνδεσμος.
Έστω P, $Q \in \mathcal{L}$.
Θα δείξουμε ότι το $supremum$ και το $infimum$ των προβολών UPU^{-1}, UQU^{-1} ανήκουν στο $U\mathcal{L}U^{-1}$.
Πράγματι, λόγω της μεταθετικότητας[11] κι εφ' όσον $P \vee Q$, $P \wedge Q \in \mathcal{L}$, έχουμε ότι:

$$\begin{aligned}(UPU^{-1}) \vee (UQU^{-1}) &= UPU^{-1} + UQU^{-1} - (UPU^{-1})(UQU^{-1}) \\ &= U(P + Q - PQ)U^{-1} = U(P \vee Q)U^{-1}\end{aligned}$$

και $(UPU^{-1}) \wedge (UQU^{-1}) = (UPU^{-1})(UQU^{-1}) = UPQU^{-1} = U(P \wedge Q)U^{-1}$.
Οι προηγούμενες σχέσεις αποδεικνύουν το ζητούμενο.

Μένει να δείξουμε ότι ο $U\mathcal{L}U^{-1}$ είναι SOT-κλειστός στον $\mathcal{B}(H_2)$.
Έστω $(P_i)_{i \in I}$ δίκτυο στον $\mathcal{L}$ και P μια προβολή του $\mathcal{B}(H_2)$, ώστε $UP_iU^{-1} \xrightarrow{SOT} P$.
Θα δείξουμε ότι $P \in U\mathcal{L}U^{-1}$.
Για κάθε $x \in H_1$ έχουμε ότι:

$$\begin{aligned}||P_i x - U^{-1}PUx||_1 &= ||U^{-1}(UP_iU^{-1})Ux - U^{-1}PUx||_1 \\ &= ||U^{-1}(UP_iU^{-1} - P)Ux||_1 \\ &\leqslant ||(UP_iU^{-1} - P)Ux||_2\end{aligned}$$

όπου $||(UP_iU^{-1}) - P)Ux||_2 \to 0$ διότι $UP_iU^{-1} \xrightarrow{SOT} P$.
Επομένως $P_i \xrightarrow{SOT} U^{-1}PU$, κι εφ' όσον ο $\mathcal{L}$ είναι SOT-κλειστός, συμπεραίνουμε ότι $U^{-1}PU \in \mathcal{L}$,

[11] θυμίζουμε ότι αν δύο προβολές P, Q μετατίθενται, τότε $P \wedge Q = PQ$ και $P \vee Q = P + Q - PQ$

άρα $P \in U\mathcal{L}U^{-1}$.

(ii) Από την σχέση $U\mathcal{P}U^{-1} \subseteq U\mathcal{L}(\mathcal{P})U^{-1}$ έχουμε άμεσα ότι:

$$\mathcal{L}(U\mathcal{P}U^{-1}) \subseteq U\mathcal{L}(\mathcal{P})U^{-1},$$

αφού από το (i) το σύνολο $U\mathcal{L}(\mathcal{P})U^{-1}$ είναι σύνδεσμος υποχώρων (μάλιστα μεταθετικός, διότι η $\mathcal{P}$ είναι μεταθετική).
Για την αντίστροφη σχέση, αρκεί να παρατηρήσουμε ότι κάθε $P \in \mathcal{P}$ γράφεται: $P = U^{-1}(UPU^{-1})U$, όπου προφανώς $UPU^{-1} \in \mathcal{L}(U\mathcal{P}U^{-1})$.
Επομένως, $\mathcal{P} \subseteq U^{-1}\mathcal{L}(U\mathcal{P}U^{-1})U$, απ' όπου έχουμε το ζητούμενο. □

Παρατήρηση 2.25. *Η προηγούμενη Πρόταση ισχύει και χωρίς την υπόθεση της μεταθετικότητας. Πράγματι: για το (i) αρκεί να παρατηρήσουμε ότι ισχύει η σχέση:*

$$UP(M)U^{-1} = P(U(M)),$$

όπου M κλειστός υπόχωρος του H_1 και $P(M)$, $P(U(M))$ οι προβολές στους $M, U(M)$ αντίστοιχα. Άρα, αν $P = P(M)$, $Q = P(N)$ είναι δύο προβολές στον $\mathcal{L}$, τότε:

$$(UPU^{-1}) \wedge (UQU^{-1}) = P(U(M \cap N)) = UP(M \cap N)U^{-1} = U(P \wedge Q)U^{-1}$$

*και $(UPU^{-1}) \vee (UQU^{-1}) = P(U(\overline{M+N})) = UP(\overline{M+N})U^{-1} = U(P \vee Q)U^{-1}$.
Η απόδειξη του (ii) είναι όμοια.*

Ορισμός 2.26. *Δύο προδιατεταγμένοι χώροι σ-πεπερασμένου μέτρου $(X, \leqslant_X, m)$, $(\Psi, \leqslant_\Psi, n)$ θα λέγονται ισόμορφοι, αν υπάρχουν $M \in \mathcal{B}(X)$, $N \in \mathcal{B}(\Psi)$, με $m(N) = n(N) = 0$, και ένας order-ισομορφισμός $\phi : M^c \to N^c$, ώστε τα $\phi_* m$, n επάγουν ισοδύναμα μέτρα στο N^c (δηλαδή, για κάθε $B \in \mathcal{B}(N^c)$ ισχύει: $\phi_* m(B) = m\big(\phi^{-1}(B)\big) = 0 \Leftrightarrow n(B) = 0$).*

Θεώρημα 2.27. *Έστω $(X, \leqslant_X, m)$, $(\Psi, \leqslant_\Psi, n)$ δύο standard προδιατεταγμένοι χώροι σ-πεπερασμένου μέτρου. Αν οι $(X, \leqslant_X, m)$, $(\Psi, \leqslant_\Psi, n)$ είναι ισόμορφοι, τότε οι επαγόμενοι σύνδεσμοι υποχώρων $\mathcal{L}(X, \leqslant_X, m)$ και $\mathcal{L}(\Psi, \leqslant_\Psi, n)$ είναι ορθομοναδιαία ισοδύναμοι, δηλαδή υπάρχει ένας ορθομοναδιαίος τελεστής $U : L^2(X, m) \to L^2(\Psi, n)$, ώστε:*

$$U\mathcal{L}(X, \leqslant_X, m)U^{-1} = \mathcal{L}(\Psi, \leqslant_\Psi, n)$$

Αποδεικνύουμε πρώτα το εξής:

Λήμμα 2.28. *Έστω $(X, \leqslant, m)$ ένας standard προδιατεταγμένος χώρος σ-πεπερασμένου μέτρου, και $A \in \mathcal{B}(X)$ με $m(A^c) = 0$.
Αν $\leqslant_0$ είναι ο περιορισμός της προδιάταξης του X στο A και m_0 ο περιορισμός του m στο A, τότε οι σύνδεσμοι υποχώρων $\mathcal{L}(X, \leqslant, m)$, $\mathcal{L}(A, \leqslant_0, m_0)$ είναι ορθομοναδιαία ισοδύναμοι.*

Απόδειξη. Είναι σαφές ότι ο $(A, \leqslant_0, m_0)$ είναι ένας standard προδιατεταγμένος χώρος σ-πεπερασμένου μέτρου.
Έστω $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ ακολουθία στον $L(X, \leqslant)$ ώστε:

$$\forall\, x,\, y \in X,\;\; x \leqslant y \;\;\Leftrightarrow\;\; \chi_{E_n}(x) \leqslant \chi_{E_n}(y) \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Τότε είναι προφανές ότι για την ακολουθία $\{E_n \cap A\}_{n=1}^{\infty}$ ισχύουν τα εξής;

$$E_n \cap A \in L(A, \leqslant_0) \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

και $\forall\, x,\, y \in A,\;\; x \leqslant_0 y \;\;\Leftrightarrow\;\; \chi_{E_n\cap A}(x) \leqslant \chi_{E_n\cap A}(y) \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$.
Σύμφωνα με την παρατήρηση (2.21) έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} &\mathcal{L}(X, \leqslant, m) = \mathcal{L}((P_{E_n})_n) \\ \text{και} \quad &\mathcal{L}(X, \leqslant_0, m_0) = \mathcal{L}((P_{E_n\cap A})_n) \end{aligned}$$

(όπου οι $P_{E_n\cap A}$ θεωρούνται ως προβολές του $\mathcal{B}(L^2(A, m_0))$.
Ορίζουμε

$$\begin{array}{rccc} V: & L^2(X, m) & \rightarrow & L^2(A, m_0) \\ & f & \mapsto & f|_A \end{array}$$

δηλαδή $(Vf)(x) = f(x)$ m_0-σχεδόν $\forall\, x \in A$.
Εφ' όσον $m(A^c) = 0$ και τα m, m_0 ταυτίζονται στην σ-άλγεβρα $\mathcal{B}(A)$, για κάθε $f \in L^2(X, m)$ έχουμε ότι:

$$\int\limits_X |f(x)|^2 dm(x) = \int\limits_A |f(x)|^2 dm(x) = \int\limits_A |\, f|_A(x)|^2 dm_0(x)$$

Επομένως, ο V είναι ένας καλά ορισμένος γραμμικός τελεστής, μάλιστα ισομετρία.
Επίσης, είναι σαφές ότι ο V είναι επί (κάθε $g \in L^2(A, m_0)$ επεκτείνεται σε μια μοναδική, m-σχεδόν παντού, συνάρτηση $\bar{g} \in L^2(X, m)$, θέτοντας $\bar{g}|_{A^c} = 0$).
Έπεται λοιπόν ότι ο V είναι ορθομοναδιαίος.

Ισχυριζόμαστε τώρα ότι $V\mathcal{L}(X, \leqslant, m)V^{-1} = \mathcal{L}(A, \leqslant_0, m_0)$.
Παρατηρούμε ότι για κάθε $E \in \mathcal{B}(X)$, ισχύει: $VP_EV^{-1} = P_{E\cap A}$.
Πράγματι, για κάθε $f \in L^2(X, m)$ ισχύει:

$$(VP_E)f = V(f\chi_E) = f\,|_A \cdot \chi_{E\cap A} = (P_{E\cap A}V)f$$

Τώρα, χρησιμοποιώντας την Πρόταση 2.24 βλέπουμε ότι:

$$\begin{aligned} V\mathcal{L}(X, \leqslant, m)V^{-1} &= \mathcal{L}(\{VP_{E_n}V^{-1} :\, n \in \mathbb{N}\}) \\ &= \mathcal{L}(\{VP_{E_n\cap A} :\, n \in \mathbb{N}\}) = \mathcal{L}(A, \leqslant_0, m_0) \end{aligned}$$

□

Απόδειξη του Θεωρήματος 2.27. Σύμφωνα με το προηγούμενο Λήμμα, αρκεί να δείξουμε ότι οι σύνδεσμοι υποχώρων $\mathcal{L}(M^c, \leqslant_{M^c}, m_0)$ και $\mathcal{L}(N^c, \leqslant_{N^c}, n_0)$ είναι ορθομοναδιαία ισοδύναμοι. Ισοδύναμα, αλλάζοντας τον συμβολισμό, αρκεί να αποδείξουμε την ορθομοναδιαία ισοδυναμία

των $\mathcal{L}(X, \leqslant_{\mathrm{X}}, m)$, $\mathcal{L}(\Psi, \leqslant_{\Psi}, n)$, θεωρώντας ότι $M = N = \emptyset$ και ότι υπάρχει order-ισομορφισμός $\phi : X \to \Psi$, ώστε τα μέτρα $\phi_* m$ και n να έχουν τα ίδια σύνολα μέτρου 0.
Έστω $w = \frac{d\phi_* m}{dn}$ η παράγωγος Radon-Nikodym του $\phi_* m$ ως προς n.(Η w παίρνει τιμές στο $[0, \infty)$, αφού το n είναι σ-πεπερασμένο, βλ. θεώρημα 1.5)
Ορίζουμε τον τελεστή:

$$\begin{array}{rlcl} \mathcal{U}: & L^2(X, m) & \longrightarrow & L^2(\Psi, n) \\ & f & \longmapsto & w^{1/2}(f \circ \phi^{-1}) \end{array}$$

δηλαδή $(\mathcal{U}f)(y) = w(y)^{1/2} f\big(\phi^{-1}(y)\big)$ n-σχεδόν $\forall\, y \in \Psi$.
Από τα Θεωρήματα 1.4, 1.11, για κάθε $f \in L^2(X, m)$ έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} \int\limits_{\Psi} \left|w^{1/2}(f \circ \phi^{-1})\right|^2 dn &= \int\limits_{\Psi} w(|f|^2 \circ \phi^{-1})\, dn = \int\limits_{\Psi} |f|^2 \circ \phi^{-1} d\phi_* m \\ &= \int\limits_{\phi^{-1}(\Psi)} (|f|^2 \circ \phi^{-1}) \circ \phi\, dm = \int\limits_{X} |f|^2 dm \end{aligned}$$

Η τελευταία δείχνει ότι ο $\mathcal{U}$ είναι καλά ορισμένος, μάλιστα ισομετρία.
Επιπλέον, χρησιμοποιώντας τα ίδια Θεωρήματα, εύκολα βλέπουμε ότι για κάθε $g \in L^2(\Psi, n)$, η συνάρτηση $f = (g w^{-1/2}) \circ \phi$ ανήκει στον $L^2(X, m)$ και ικανοποιεί $\mathcal{U}f = g$, δηλαδή ο $\mathcal{U}$ είναι επί. Συνεπώς ο $\mathcal{U}$ είναι ορθομοναδιαίος.

Έστω τώρα $h \in L^\infty(X, m)$, οπότε υπάρχει $a > 0$ ώστε

$$m(\{x \in X : |h(x)| > a\}) = 0.$$

Από τον ορισμό του $\phi_* m$ έχουμε:

$$\begin{aligned} \phi_* m(\{y \in \Psi : |(h \circ \phi^{-1})(y)| > a\}) &= m\big(\phi^{-1}(\{y \in \Psi : |(h \circ \phi^{-1})(y)| > a\})\big) \\ &= m(\{x \in X : |h(x)| > a\}) = 0, \end{aligned}$$

και άρα $n(\{y \in \Psi : |(h \circ \phi^{-1})(y)| > a\})) = 0$, αφού τα μέτρα $\phi_* m$, n είναι ισοδύναμα.
Συμπεραίνουμε ότι $h \circ \phi^{-1} \in L^\infty(\Psi, n)$.
Επιπλέον, για κάθε $f \in L^2(X, m)$ ισχύει:

$$\begin{aligned} (\mathcal{U}M_h)(f) &= \mathcal{U}(fh) = w^{1/2}\big((fh) \circ \phi^{-1}\big) = w^{1/2}(f \circ \phi^{-1})(h \circ \phi^{-1}) \\ &= M_{h \circ \phi^{-1}}\big(w^{1/2}(f \circ \phi^{-1})\big) = \big(M_{h \circ \phi^{-1}}\mathcal{U}\big)(f), \end{aligned}$$

και επομένως $\mathcal{U}M_h\mathcal{U}^{-1} = M_{h \circ \phi^{-1}} \quad \forall\, h \in L^\infty(X, m)$.
Ιδιαιτέρως, για κάθε $E \in \mathcal{B}(X)$ ισχύει:

$$\mathcal{U}P_E\mathcal{U}^{-1} = M_{\chi_E \circ \phi^{-1}} = M_{\chi_{\phi(E)}} = P_{\phi(E)}.$$

Τώρα, από την πρόταση 2.6, έχουμε ότι $E \in L(X, \leqslant_{\mathrm{X}}) \Leftrightarrow \phi(E) \in L(\Psi, \leqslant_{\Psi})$, γιατί ο ϕ είναι order-ισομορφισμός.
Άρα,

$$\begin{aligned} \mathcal{U}\mathcal{L}(X, \leqslant_{\mathrm{X}}, m)\mathcal{U}^{-1} &= \{\mathcal{U}P_E\mathcal{U}^{-1} : E \in L(X, \leqslant_{\mathrm{X}})\} = \{P_{\phi(E)} : E \in L(X, \leqslant_{\mathrm{X}})\} \\ &= \{P_F : F \in L(\Psi, \leqslant_{\Psi})\} = \mathcal{L}(\Psi, \leqslant_{\Psi}, n), \end{aligned}$$

και αυτό αποδεικνύει το ζητούμενο.

Θα αποδείξουμε τώρα ότι κάθε μεταθετικός σύνδεσμος υποχώρων που δρα σ' έναν διαχωρίσιμο χώρο Hilbert, είναι της μορφής $\mathcal{L}(X, \leqslant, m)$, όπου η τριάδα $(X, \leqslant, m)$ "είναι" ένας κατάλληλος standard προδιατεταγμένος χώρος μέτρου.
Χρειαζόμαστε πρώτα το εξής Λήμμα:

Λήμμα 2.29. *Κάθε μεταθετικός σύνδεσμος υποχώρων περιέχεται σε μια μεγιστική μεταθετική άλγεβρα von Neumann.*

Απόδειξη. Έστω $\mathcal{L}$ ένας μεταθετικός σύνδεσμος υποχώρων.
Θα εφαρμόσουμε το Λήμμα του Zorn στην οικογένεια $\mathcal{E}$ όλων των μεταθετικών αλγεβρών von Neumann που περιέχουν τον $\mathcal{L}$ (με μερική διάταξη την σχέση του περιέχεσθαι).
Η $\mathcal{E}$ είναι μη κενή, αφού προφανώς περιέχει την άλγεβρα von Neumann $\mathcal{L}''$ που παράγεται από τον $\mathcal{L}$.
Έστω $\{R_i : \ i \in I\}$ ένα ολικά διατεταγμένο υποσύνολο της $\mathcal{E}$.
Παρατηρούμε καταρχήν ότι το σύνολο $\bigcup\limits_{i\in I} R_i$ είναι μια μεταθετική άλγεβρα, αφού κάθε R_i είναι μεταθετική άλγεβρα και η $\{R_i : \ i \in I\}$ είναι αλυσίδα στην $\mathcal{E}$.
Επίσης, η άλγεβρα $\bigcup\limits_{i\in I} R_i$ είναι αυτοσυζυγής και περιέχει τον $\mathcal{L}$, εφ' όσον κάθε R_i ικανοποιεί τις ίδιες ιδιότητες.
Θέτουμε $R_0 = \overline{\bigcup\limits_{i\in I} R_i}^{SOT}$.
Από το Θεώρημα $2^{ου}$ Μεταθέτη (βλ.Θεώρ. 1.42), έχουμε ότι:

$$R_0 = \overline{\bigcup_{i\in I} R_i}^{SOT} = \overline{\bigcup_{i\in I} R_i}^{WOT} = (\bigcup_{i\in I} R_i)''$$

Ισχυριζόμαστε πρώτα ότι R_0 είναι αυτοσυζυγής.
Έστω $T \in R_0$.
Τότε υπάρχει ένα δίκτυο $(T_j)_{j\in J}$ στην $\bigcup\limits_{i\in I} R_i$, με $T_j \overset{WOT}{\to} T$.
Εφ' όσον η ενέλιξη είναι WOT-WOT συνεχής, έπεται ότι $T_j^* \overset{WOT}{\to} T^*$.
Αφού τώρα η $\bigcup\limits_{i\in I} R_i$ είναι αυτοσυζυγής, συμπεραίνουμε ότι $T^* \in R_0$, δηλαδή η R_0 είναι αυτοσυζυγής.
Επομένως η R_0 είναι μια SOT-κλειστή, αυτοσυζυγής άλγεβρα που περιέχει τον ταυτοτικό τελεστή, άρα είναι μια άλγεβρα von Neumann.
Από την άλλη, αφού $R_0 = (\bigcup\limits_{i\in I} R_i)''$ και η $\bigcup\limits_{i\in I} R_i$ είναι μεταθετική, έπεται ότι και η R_0 είναι μεταθετική.
Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι $R_0 \in \mathcal{E}$ και μάλιστα η R_0 είναι άνω φράγμα της αλυσίδας $\{R_i : i \in I\}$ στην $\mathcal{E}$. Άρα, από το Λήμμα του Zorn, η $\mathcal{E}$ έχει μεγιστικό στοιχείο, και η απόδειξη είναι πλήρης.
□

Θεώρημα 2.30. *Έστω H διαχωρίσιμος χώρος Hilbert και $\mathcal{L}$ ένας μεταθετικός σύνδεσμος υποχώρων που δρα στον H.*

Τότε υπάρχουν ένας συμπαγής μετρικός χώρος X, μια κλειστή προδιάταξη $\leqslant$ στον X, και ένα μέτρο Borel πιθανότητας m στον X, ώστε οι σύνδεσμοι υποχώρων $\mathcal{L}$ και $\mathcal{L}(X, \leqslant, m)$ είναι ορθομοναδιαία ισοδύναμοι.

Απόδειξη. Έστω R μια μεγιστική μεταθετική άλγεβρα von Neumann που περιέχει τον $\mathcal{L}$ (σύμφωνα με το προηγούμενο Λήμμα).
Θεωρούμε δύο ακολουθίες προβολών $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}, \{Q_n\}_{n=1}^{\infty}$, ώστε η $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$ είναι SOT-πυκνή στον $\mathcal{L}$ και η $\{Q_n\}_{n=1}^{\infty}$ είναι SOT-πυκνή στο σύνολο $Proj(R)$ των προβολών της R.
Υποθέτουμε επιπλέον ότι η $\{Q_n\}_{n=1}^{\infty}$ περιέχει τον ταυτοτικό τελεστή I.
Έστω $\mathcal{A}$ η C^*-άλγεβρα που παράγεται από τις προβολές $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{Q_m\}_{m=1}^{\infty}$.
Παρατηρούμε ότι η $\mathcal{A}$ ικανοποιεί τα εξής:
(1) Είναι μεταθετική, αφού παράγεται από ένα μεταθετικό σύνολο, και περιέχει τον I
(2) Είναι διαχωρίσιμη στην τοπολογία της νόρμας: αυτό προκύπτει από το γεγονός ότι η $\mathcal{A}$ είναι η $||\cdot||$-κλειστή θήκη της άλγεβρας που παράγεται από τις $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{Q_m\}_{m=1}^{\infty}$, όπου η άλγεβρα αυτή είναι προφανώς διαχωρίσιμη.
(3) Η $\mathcal{A}$ είναι SOT-πυκνή στην R:
Πράγματι: έστω $T \in R$.
Αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ και $\{x_1, x_2, ..., x_n\} \subseteq H$, υπάρχει $A \in \mathcal{A}$ ώστε:

$$||Ax_i - Tx_i|| < \varepsilon \quad \forall\, i = 1, 2, ..., n.$$

Επειδή $R = \overline{[Proj(R)]}$ (βλ. Πρόταση 1.43), υπάρχουν $S_1, ..., S_k \in Proj(R)$ και $a_1, ..., a_k \in \mathbb{C}$ ώστε:

$$||T - \sum_{j=1}^{k} a_j S_j|| < \frac{\varepsilon}{2 \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} ||x_i||} \tag{2.9}$$

Αφού $\overline{\{Q_n : n \in \mathbb{N}\}}^{SOT} = Proj(R)$, για κάθε $j = 1, 2, ..., k$ υπάρχει $n_j \in \mathbb{N}$ ώστε:

$$||Q_{n_j} x_i - S_j x_i|| < \frac{\varepsilon}{2k \max\limits_{1 \leqslant j \leqslant k} |a_j|} \quad \forall\, i = 1, 2, ..., n \tag{2.10}$$

Θέτουμε $S = \sum\limits_{j=1}^{k} a_j S_j$ και $A = \sum\limits_{j=1}^{k} a_j Q_{n_j}$.
Τότε, προφανώς $A \in \mathcal{A}$ και λόγω της (2.10), για κάθε $i = 1, 2, ..., n$ θα ισχύει:

$$\begin{aligned} ||Ax_i - Sx_i|| &= ||\sum_{j=1}^{k} a_j (Q_{n_j} x_i - S_j x_i)|| \\ &= \sum_{j=1}^{k} |a_j| \cdot ||(Q_{n_j} x_i - S_j x_i)|| \\ &< \sum_{j=1}^{k} |a_j| \cdot \frac{\varepsilon}{2k \max\limits_{1 \leqslant j \leqslant k} |a_j|} \end{aligned}$$

$$\leqslant \sum_{j=1}^{k} \cdot \frac{\varepsilon}{2k} = \frac{\varepsilon}{2} \tag{2.11}$$

Από τις (2.9) και (2.11) έπεται τελικά ότι:

$$\begin{aligned} ||Ax_i - Tx_i|| &\leqslant ||Ax_i - Sx_i|| + ||Sx_i - Tx_i|| \\ &\leqslant ||Ax_i - Sx_i|| + ||S - T|| \cdot ||x_i|| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2 \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} ||x_i||} \cdot ||x_i|| \\ &\leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

1^o βήμα : κατασκευή του X.
Έστω X το φάσμα της $\mathcal{A}$, δηλαδή το σύνολο όλων των γραμμικών και πολλαπλασιαστικών μορφών της $\mathcal{A}$. Επειδή η $\mathcal{A}$ είναι μεταθετική C^*-άλγεβρα με μονάδα, το σύνολο X, με την w^*-τοπολογία, είναι ένας συμπαγής χώρος Hausdorff.
Επιπλέον, υπάρχει ένας ισομετρικός $*$-ισομορφισμός $\mathcal{G} : \mathcal{A} \to C(X)$.
Αφού τώρα η $\mathcal{A}$ είναι $||\cdot||$-διαχωρίσιμη, έπεται ότι ο $C(X)$ είναι $||\cdot||_\infty$-διαχωρίσιμος, και άρα ο X μετρικοποιείται[12].
Τελικά λοιπόν ο X είναι ένας συμπαγής μετρικός χώρος.

2^o βήμα : κατασκευή της προδιάταξης $\leqslant$.
Αφού η απεικόνιση $\mathcal{G}$ διατηρεί τον πολλαπλασιασμό, για κάθε προβολή P στην $\mathcal{A}$ θα ισχύει:

$$\big(\mathcal{G}(P)\big)^2 = \mathcal{G}(P^2) = \mathcal{G}(P),$$

απ' όπου έπεται ότι η συνάρτηση $\mathcal{G}(P)$ παίρνει τιμές στο $\{0,1\}$. Συνεπώς, θα υπάρχει ένα ανοικτό και κλειστό υποσύνολο E του X, ώστε $\mathcal{G}(P) = \chi_E$[13].
Ιδιαιτέρως, θα υπάρχει μια ακολουθία $\{E_n\}_{n=1}^\infty$ ανοικτών και κλειστών υποσυνόλων του X, ώστε:

$$\mathcal{G}(P_n) = \chi_{E_n} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

Για κάθε x, $y \in X$ ορίζουμε:

$$x \leqslant y \;\Leftrightarrow\; \chi_{E_n}(x) \leqslant \chi_{E_n}(y) \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

Είναι σαφές ότι η σχέση $\leqslant$ ορίζει μια standard προδιάταξη στον X.
Θα δείξουμε επιπλέον ότι η προδιάταξη αυτή είναι κλειστή, δηλαδή ότι το γράφημα της $\mathcal{G}$ είναι κλειστό υποσύνολο του $X \times X$.
Έχουμε:

$$\begin{aligned} G^c &= \{(x,y) \in X \times X : y \nleqslant x\} \\ &= \{(x,y) \in X \times X : \exists\, n \in \mathbb{N} \text{ ώστε } y \in E_n \text{ και } x \notin E_n\} \\ &= \bigcup_{n=1}^{\infty} (E_n^c \times E_n) \end{aligned}$$

Εφ' όσον τώρα κάθε E_n είναι ανοικτό και κλειστό υποσύνολο του X, συμπεραίνουμε ότι το G^c είναι ανοικτό στον $X \times X$, και άρα η προδιάταξη $\leqslant$ είναι πράγματι κλειστή.

[12] αν X συμπαγής χώρος Hausdorff, τότε ο $C(X)$ είναι διαχωρίσιμος αν, και μόνο αν, ο X είναι μετρικοποιήσιμος

[13] η χαρακτηριστική συνάρτηση ενός συνόλου είναι συνεχής αν, και μόνο αν, το σύνολο αυτό είναι ανοικτό και κλειστό ταυτόχρονα

3^o βήμα : κατασκευή του μέτρου m.
Αφού η R είναι μεγιστική μεταθετική άλγεβρα von Neumann, υπάρχει $\xi \in R$, με $||\xi|| = 1$, ώστε ο υπόχωρος $R\xi$ είναι πυκνός στον H (βλ. Πρότ. 1.44).
Ορίζουμε το γραμμικό συναρτησοειδές $I : C(X) \to \mathbb{C}$, με $I(f) = \langle \mathcal{G}^{-1}(f)\,\xi, \xi \rangle, \quad f \in C(X)$.
Παρατηρούμε ότι το I είναι θετικό, διότι: αν $f \in C(X)$, $f \geqslant 0$, τότε ο τελεστής $\mathcal{G}^{-1}(f) \in \mathcal{A}$ είναι θετικός, αφού η απεικόνιση $\mathcal{G}$ διατηρεί τα θετικά στοιχεία, και συνεπώς $\langle \mathcal{G}^{-1}(f)\,\xi, \xi \rangle \geqslant 0$.
Αφού τώρα ο X είναι συμπαγής χώρος Hausdorff, το Θεώρημα Αναπαράστασης του Riesz μας εξασφαλίζει ότι υπάρχει ένα μοναδικό (κανονικό) μέτρο Borel m στον X, ώστε:

$$\left\langle \mathcal{G}^{-1}(f)\,\xi, \xi \right\rangle = \int_X f(x)\,dm(x) \quad \forall f \in C(X)$$

Επιπλέον, αν στην προηγούμενη σχέση θεωρήσουμε ως f την σταθερή συνάρτηση $\mathbf{1}$, τότε βρίσκουμε ότι:

$$m(X) = \langle I\xi, \xi \rangle = ||\xi||^2 = 1,$$

δηλαδή το m είναι μέτρο πιθανότητας.

4^o βήμα : κατασκευή ενός ορθομοναδιαίου τελεστή $U : L^2(X, m) \to H$.
Ορίζουμε πρώτα την γραμμική απεικόνιση $U_0 : C(X) \to \mathcal{A}\xi$ με $U_0(f) = \mathcal{G}^{-1}(f)\xi, \quad f \in C(X)$.
Από το επί της $\mathcal{G}^{-1}$, έχουμε προφανώς ότι και η U_0 είναι επί. Επίσης, αφού η $\mathcal{G}$ διατηρεί την ενέλιξη και τον πολλαπλασιασμό, για κάθε $f \in C(X)$ θα ισχύει:

$$\begin{aligned} ||U_o f||^2 &= \langle \mathcal{G}^{-1}(f)\,\xi, \mathcal{G}^{-1}(f)\,\xi \rangle \\ &= \left\langle \mathcal{G}^{-1}(f)\,\xi, (\mathcal{G}^{-1}(\overline{f}))^*\,\xi \right\rangle \\ &= \langle \mathcal{G}^{-1}(|f|^2)\xi, \xi \rangle \\ &= \int_X |f(x)|^2 dm(x) = ||f||_2^2, \end{aligned}$$

δηλαδή η U_0 απεικονίζει ισομετρικά τον $(C(X), ||\cdot||_2$ στον H. Εφ' όσον ο $C(X)$ είναι πυκνός υπόχωρος του $L^2(X, m)$, ο U_0 επεκτείνεται μοναδικά σ' έναν ορθομοναδιαίο τελεστή

$$U : L^2(X, m) \to \overline{\mathcal{A}\xi}^{||\cdot||}$$

Ισχυριζόμαστε ότι $\overline{\mathcal{A}\xi}^{||\cdot||} = H$.
Έστω $x \in H$ και $\varepsilon > 0$.
Αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχει $A \in \mathcal{A}$ ώστε $||A\xi - x|| < \varepsilon$.
Επειδή $\overline{R\xi}^{||\cdot||} = H$, υπάρχει $T \in R$ ώστε $||T\xi - x|| < \frac{\varepsilon}{2}$, κι αφού $\overline{A}^{SOT} = R$, υπάρχει $A \in \mathcal{A}$ ώστε $||A\xi - T\xi|| < \frac{\varepsilon}{2}$.
Έπεται ότι $||A\,\xi - x|| \leqslant ||A\,\xi - T\,\xi|| + ||T\,\xi - x|| < \varepsilon$.

Ορίσαμε λοιπόν έναν ορθομοναδιαίο τελεστή $U : L^2(X, m) \to H$, με

$$U(f) = \mathcal{G}^{-1}(f)\,\xi \quad \forall f \in C(X)$$

Μένει να δείξουμε ότι $U\mathcal{L}(X, \leqslant, m)U^{-1} = \mathcal{L}$.
Παρατηρούμε καταρχήν ότι για κάθε $f \in C(X)$ ισχύει: $U\,M_f\,U^{-1} = G^{-1}(f)$ [14].

[14] αφού ο X είναι συμπαγής, έχουμε ότι $C(X) \subseteq L^\infty(X, m)$, και άρα $\forall f \in C(X)$ ορίζεται ο πολλαπλασιαστικός τελεστής M_f

Πράγματι: για κάθε $g \in C(X)$ έχουμε:

$$\begin{aligned}(U\,M_f\,)\,g &= U(fg) = \mathcal{G}^{-1}(fg)\,\xi \\ &= \mathcal{G}^{-1}(f)\,\mathcal{G}^{-1}(g)\,\xi = \mathcal{G}^{-1}(f)\,Ug\end{aligned}$$

Επομένως, οι τελεστές $U\,M_f$ και $\mathcal{G}^{-1}(f)\,U$ ταυτίζονται στον πυκνό υπόχωρο $C(X)$ του $L^2(X,m)$, άρα είναι ίσοι, απ' όπου έχουμε το ζητούμενο.
Τώρα, από τον ορισμό της προδιάταξης $\leqslant$, έχουμε ότι ο σύνδεσμος υποχώρων $\mathcal{L}(X,\leqslant,m)$ παράγεται από τις προβολές P_{E_n}.
Από αυτό και την προηγούμενη παρατήρηση έπεται ότι ο $U\mathcal{L}(X,\leqslant,m)\,U^{-1}$ είναι ο σύνδεσμος υποχώρων που παράγεται από τις προβολές:

$$UM_{\chi_{E_n}}U^{-1} = \mathcal{G}^{-1}(\chi_{E_n}) = P_n, \quad n \in \mathbb{N}$$

Από την άλλη όμως, ο σύνδεσμος υποχώρων που παράγεται από την ακολουθία $\{P_n\}_{n\in\mathbb{N}}^{\infty}$ είναι ακριβώς ο $\mathcal{L}$, διότι η $\{P_n\}_{n\in\mathbb{N}}^{\infty}$ είναι SOT-πυκνή στον $\mathcal{L}$.
Συμπεραίνουμε τελικά ότι: $U\mathcal{L}(X,\leqslant,m)\,U^{-1} = \mathcal{L}$.

□

2.3 Το Θεώρημα Μηδενικού Συνόλου

Στην παρούσα ενότητα θα εισάγουμε την έννοια του περιθωριακά μηδενικού συνόλου, και θα αποδείξουμε το Θεώρημα Μηδενικού Συνόλου (Θεώρ. 2.36).
Το Θεώρημα αυτό θα χρησιμοποιηθεί κατά ουσιώδη τρόπο στα επόμενα, ειδικότερα στο να αποδείξουμε ότι ο σύνδεσμος υποχώρων $\mathcal{L}(X,\leqslant,m)$ είναι ανακλαστικός (βλ. Κεφ. 3).

Ορισμός 2.31. *Έστω (X,m), (Ψ,n) δύο χώροι μέτρου. Ένα υποσύνολο S του $X\times\Psi$ θα λέγεται περιθωριακά μηδενικό, αν υπάρχουν $M\in\mathcal{B}(X)$, $N\in\mathcal{B}(\Psi)$, ώστε:*

$$(i)\ m(M) = n(N) = 0$$

$$(ii)\ S \subseteq (M\times\Psi)\cup(X\times N)$$

Είναι εύκολο να δούμε ότι η οικογένεια των περιθωριακά μηδενικών υποσυνόλων του $X\times\Psi$ αποτελεί ένα σ-ιδεώδες, με την έννοια ότι: περιέχει το $\emptyset$, είναι κλειστή ως προς αριθμήσιμες ενώσεις, και ακόμα, κάθε υποσύνολο ενός περιθωριακά μηδενικού συνόλου είναι επίσης περιθωριακά μηδενικό.

Ορισμός 2.32. *Έστω (X,m), (Ψ,n) δύο χώροι μέτρου και σ ένα πεπερασμένο, θετικό μέτρο Borel στον $X\times\Psi$.*[15] *Τότε, το σ επάγει δύο μέτρα Borel σ_X,σ_Ψ στους X,Ψ αντίστοιχα, μέσω των σχέσεων:*

$$\sigma_X(E) = \sigma(E\times\Psi),\ E\in\mathcal{B}(X)$$

[15] ο $X\times\Psi$ θα θεωρείται πάντα εφοδιασμένος με την σ-άλγεβρα γινόμενο, δηλαδή την σ-άλγεβρα που παράγεται από τα μετρήσιμα ορθογώνια $A\times B,\ A\in\mathcal{B}(X), B\in\mathcal{B}(\Psi)$.

και

$$\sigma_{\Psi}(F) = \sigma(X \times F),\ F \in \mathcal{B}(\Psi).$$

Τα σ_X, σ_Ψ θα ονομάζονται περιθωριακά μέτρα του σ.

Η επόμενη πρόταση μας δίνει μια περιγραφή των μέτρων Borel στον $X \times \Psi$ που μηδενίζουν τα περιθωριακά μηδενικά σύνολα Borel.

Πρόταση 2.33. *Έστω $(X, m), (\Psi, n)$ χώροι μέτρου και σ ένα πεπερασμένο, θετικό μέτρο Borel στον $X \times \Psi$. Τότε, $\sigma(S) = 0$ για κάθε περιθωριακά μηδενικό σύνολο $S \in \mathcal{B}(X \times \Psi)$ αν, και μόνο αν, $\sigma_X \ll m$ και $\sigma_\Psi \ll n$.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε πρώτα ότι το σ μηδενίζει κάθε περιθωριακά μηδενικό Borel υποσύνολο του $X \times \Psi$.
Έστω $M \in \mathcal{B}(X)$ με $m(M) = 0$. Τότε, προφανώς το $M \times \Psi$ είναι περιθωριακά μηδενικό, άρα από την υπόθεση

$$\sigma_X(M) = \sigma(M \times \Psi) = 0$$

Επομένως $\sigma_X \ll m$.
Ομοίως αποδεικνύουμε και ότι $\sigma_\Psi \ll n$.

Αντίστροφα, έστω ότι $\sigma_X \ll m$ και $\sigma_\Psi \ll n$.
Θεωρούμε $S \in \mathcal{B}(X \times \Psi)$ περιθωριακά μηδενικό, οπότε υπάρχουν $M \in \mathcal{B}(X)$, $N \in \mathcal{B}(\Psi)$ με $m(M) = n(N) = 0$, ώστε $S \subseteq (M \times \Psi) \cup (X \times N)$.
Τότε $\sigma_X(M) = \sigma_\Psi(N) = 0$, και άρα:

$$\sigma(S) \leqslant \sigma(M \times \Psi) + \sigma(X \times N) = \sigma_X(M) + \sigma_\Psi(N) = 0.$$

$\square$

Έστω τώρα X ένας συμπαγής χώρος Hausdorff και $C_{\mathbb{R}}(X)$ ο χώρος Banach όλων των πραγματικών, συνεχών συναρτήσεων επί του X. Ο $C_{\mathbb{R}}(X)$ εφοδιάζεται με την συνήθη μερική διάταξη:

$$f \leqslant g \Leftrightarrow f(x) \leqslant g(x)\ \ \forall x \in X$$

Έστω επίσης S ένας γραμμικός υπόχωρος του $C_{\mathbb{R}}(X)$ που περιέχει την σταθερή συνάρτηση $\mathbf{1}$, και $\phi : S \to \mathbb{R}$ ένα φραγμένο γραμμικό συναρτησοειδές, με $\|\phi\| = \phi(\mathbf{1}) = 1$.
Από το Θεώρημα Hahn-Banach, το ϕ επεκτείνεται σ' ένα φραγμένο γραμμικό συναρτησοειδές $\overline{\phi} : C_{\mathbb{R}}(X) \to \mathbb{R}$, με $\|\overline{\phi}\| = \|\phi\| = 1$.
Παρατηρούμε μάλιστα ότι το $\overline{\phi}$ είναι θετικό.
Πράγματι: έστω $f \in C_{\mathbb{R}}(X)$, $f \geqslant 0$, οπότε $0 \leqslant f \leqslant ||f||_\infty$.
Τότε, για $\lambda = \frac{1}{2}||f||_\infty$ έχουμε ότι $-\lambda \leqslant f - \lambda\mathbf{1} \leqslant \lambda$, και συνεπώς, αφού $||\overline{\phi}|| = 1$ και $\overline{\phi}(\mathbf{1}) = 1$, θα ισχύει:

$$|\overline{\phi}(f) - \lambda| = |\overline{\phi}(f - \lambda\mathbf{1})| \leqslant ||f - \lambda\mathbf{1}||_\infty \leqslant \lambda$$

Από την τελευταία έπεται ότι $\overline{\phi}(f) \geqslant 0$.
Επομένως, από το Θεώρημα Αναπαράστασης του Riesz, υπάρχει ένα μοναδικό κανονικό μέτρο Borel μ στον X, ώστε:

$$\overline{\phi}(f) = \int\limits_X f(x)d\mu(x) \quad \forall\, f \in C_{\mathbb{R}}(X),$$

οπότε

$$\phi(f) = \int\limits_X f(x)d\mu(x) \quad \forall\, f \in S.$$

Ιδιαιτέρως το μ είναι μέτρο πιθανότητας , αφού $\phi(\mathbf{1}) = 1$.
Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι το σύνολο $\mathrm{Ext}(\phi)$ όλων των Hahn-Banach επεκτάσεων του ϕ στον $C_{\mathbb{R}}(X)$, ταυτίζεται με το σύνολο των κανονικών μέτρων Borel πιθανότητας μ στον X, που ικανοποιούν την σχέση:

$$\phi(f) = \int\limits_X f(x)d\mu(x) \quad \forall\, f \in S.$$

Λήμμα 2.34. *Έστω X συμπαγής χώρος Hausdorff, S ένας γραμμικός υπόχωρος του $C_{\mathbb{R}}(X)$ που περιέχει την σταθερή συνάρτηση $\mathbf{1}$, και $\phi : S \to \mathbb{R}$ ένα φραγμένο γραμμικό συναρτησοειδές με $\|\phi\| = \phi(\mathbf{1}) = 1$. Τότε, για καθε $u \in C_{\mathbb{R}}(X)$ ισχύει:*

$$\sup\{\overline{\phi}(u) : \overline{\phi} \in \mathrm{Ext}(\phi)\} = \inf\{\phi(f) : f \in S,\ f \geqslant u\}.$$

Απόδειξη. Θέτουμε $a = \inf\{\phi(f) : f \in S,\ f \geqslant u\}$.
Εφ' όσον το $\overline{\phi}$ είναι θετικό, για κάθε $\overline{\phi} \in \mathrm{Ext}(\phi)$ και $f \in S$ με $f \geqslant u$, έχουμε ότι:

$$\overline{\phi}(u) \leqslant \overline{\phi}(f) = \phi(f),$$

απ' όπου

$$\sup\{\overline{\phi}(u) : \overline{\phi} \in \mathrm{Ext}(\phi)\} \leqslant a \tag{2.12}$$

Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι υπάρχει $\overline{\phi_0} \in \mathrm{Ext}(\phi)$, ώστε $\overline{\phi_0}(u) = a$ (οπότε στην (2.12) θα έχουμε ισότητα).
Θεωρούμε τον γραμμικό υπόχωρο $S + \mathbb{R}u$ του $C_{\mathbb{R}}(X)$, και ορίζουμε το γραμμικό συναρτησοειδές $\phi_0 : S + \mathbb{R}u \to \mathbb{R}$ με $\phi_0(f + tu) = \phi(f) + ta, \quad f \in S,\, t \in \mathbb{R}$.
Είναι σαφές ότι το ϕ_0 ικανοποιεί τα εξής:

$$\phi_0|_S = \phi \quad \text{και } \phi_0(u) = a.$$

Ισχυριζόμαστε επίσης ότι το ϕ_0 είναι φραγμένο με $\|\phi_0\| = 1$.
Έστω $f \in S$ και $t > 0$, ώστε $\|f + tu\|_\infty \leqslant 1$. Τότε, $f + tu \leqslant \mathbf{1}$, απ' όπου $u \leqslant \frac{1}{t}(\mathbf{1} - f)$.
Παρατηρούμε τώρα ότι $\frac{1}{t}(\mathbf{1} - f) \in S$, διότι $\mathbf{1}, f \in S$. Άρα, από τον ορισμό του a, έχουμε ότι:

$$a \leqslant \phi\Big(\frac{1}{t}(\mathbf{1} - f)\Big)$$

απ' όπου προκύπτει ότι:

$$\phi_0(f + tu) = \phi(f) + ta \leqslant 1 \tag{2.13}$$

Από την άλλη, λόγω της (2.12), για κάθε $\overline{\phi} \in \mathrm{Ext}(\phi)$ έχουμε:

$$\begin{aligned} \phi_0(f+tu) &= \phi(f)+ta \geqslant \phi(f)+t\overline{\phi}(u) \\ &= \overline{\phi}(f+tu) \geqslant -|\overline{\phi}(f+tu)| \\ &\geqslant -||\overline{\phi}|| \cdot ||f+tu||_\infty \geqslant -1 \end{aligned} \tag{2.14}$$

Από τις σχέσεις (2.13) και (2.14) έχουμε λοιπόν ότι:

$$|\phi_0(f+tu)| \leqslant 1 \;\; \forall\, f \in S, \forall\, t>0 \text{ με } \|f+tu\|_\infty \leqslant 1,$$

και άρα, αντικαθιστώντας την f με $-f$ και για $t=-\lambda$, $\lambda<0$, εύκολα διαπιστώνουμε ότι:

$$|\phi_0(f+tu)| \leqslant 1 \;\; \forall\, f+tu \in S+\mathbb{R}u, \text{ με } \|f+tu\|_\infty \leqslant 1.$$

Έπεται ότι $\|\phi_0\| \leqslant 1$, και εφ' όσον $\phi_0(\mathbf{1}) = \phi(\mathbf{1}) = 1$, τελικά $\|\phi_0\| = 1$.
Επίσης το συναρτησοειδές ϕ_0 είναι θετικό: αν $f \in S$ και $t \in \mathbb{R}$ με $f+tu \geqslant 0$, τότε, για κάθε $\overline{\phi} \in \mathrm{Ext}(\phi)$ σύμφωνα με την (2.14) θα ισχύει:

$$\phi_0(f+tu) \geqslant \overline{\phi}(f+tu) \geqslant 0,$$

διότι το $\overline{\phi}$ είναι θετικό.
Άρα, το ϕ_0 επεκτείνεται σ' ένα φραγμένο γραμμικό συναρτησοειδές: $\overline{\phi_0} : C_{\mathbb{R}}(X) \to \mathbb{R}$, με $\|\overline{\phi_0}\| = \|\phi_0\| = 1$.
Τότε, $\overline{\phi_0}(u) = \phi_0(u) = a$, εφ' όσον $\overline{\phi_0}|_S = \phi_0|_S = \phi$, και $\overline{\phi_0} \in \mathrm{Ext}(\phi)$. Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη του λήμματος. □

Θεώρημα 2.35. *Έστω X, Ψ συμπαγείς χώροι Hausdorff και m, n κανονικά μέτρα Borel πιθανότητας στους X, Ψ αντίστοιχα. Έστω επίσης K ένα κλειστό υποσύνολο του $X \times \Psi$, τέτοιο, ώστε $\sigma(K) = 0$ για κάθε κανονικό μέτρο Borel πιθανότητας σ στον $X \times \Psi$, με $\sigma_X = m$ και $\sigma_\Psi = n$. Τότε το K είναι περιθωριακά μηδενικό.*

Απόδειξη. Θέτουμε $\mathcal{F} = \{u \in C_{\mathbb{R}}(X \times \Psi) : u \geqslant \chi_K\}$.
Το $\mathcal{F}$ είναι ένα προδιατεταγμένο σύνολο, ως προς την σχέση:

$$u_1 \prec u_2 \;\Leftrightarrow\; u_1 \geqslant u_2, \quad u_1,\, u_2 \in \mathcal{F}$$

Μάλιστα είναι άνω κατευθυνόμενο , αφού για κάθε $u_1, u_2 \in \mathcal{F}$, η συνάρτηση $u_3 = \min\{u_1, u_2\}$ ανήκει στο $\mathcal{F}$ και προφανώς ικανοποιεί: $u_1 \prec u_3$ και $u_2 \prec u_3$.
Επομένως, για καθε κανονικό μέτρο Borel πιθανότητας σ στον $X \times \Psi$, ορίζεται το δίκτυο $\{p_\sigma(u) : u \in \mathcal{F}\}$, όπου

$$p_\sigma(u) = \int_{X\times\Psi} u(x,y)\, d\sigma(x,y) \quad \forall\, u \in \mathcal{F}.$$

<u>Ισχυρισμός 1</u> : $\lim_{u\in\mathcal{F}} \int_{X\times\Psi} u(x,y)\, d\sigma(x,y) = \sigma(K)$

Από την μονοτονία του ολοκληρώματος, το δίκτυο $\{p_\sigma(u) : u \in \mathcal{F}\}$ είναι φθίνον, και συνεπώς υπάρχει το $\lim\limits_{u\in\mathcal{F}} p_\sigma(u)$.

Επίσης, για κάθε $u \in \mathcal{F}$ έχουμε ότι $\int\limits_{X\times\Psi} u(x,y)\,d\sigma(x,y) \geqslant \int\limits_{X\times\Psi} \chi_K(x,y)\,d\sigma(x,y) = \sigma(K)$, και συνεπώς αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $u_0 \in \mathcal{F}$ ώστε:

$$\text{αν } u_0 \prec u \iff u \leqslant u_0, \text{ τότε } p_\sigma(u) = \int\limits_{X\times\Psi} u(x,y)\,d\sigma(x,y) < \sigma(K) + \varepsilon.$$

Έστω λοιπόν $\varepsilon > 0$.

Από την εξωτερική κανονικότητα του σ, υπάρχει ένα ανοικτό υποσύνολο G του $X\times\Psi$, με $G \supseteq K$ και $\sigma(G) < \sigma(K) + \varepsilon$.

Τώρα, επειδή τα σύνολα K, G^c είναι κλειστά και ξένα, από το Λήμμα του Urysohn μπορούμε να βρούμε μια συνεχή συνάρτηση $u_0 : X\times\Psi \to [0,1]$, ώστε $u_0|_K = 1$ και $u_0|_{G^c} = 0$.

Τότε προφανώς $\chi_K \leqslant u_0 \leqslant \chi_G$, οπότε $u_0 \in \mathcal{F}$ και επιπλέον, για κάθε $u \in \mathcal{F}$ με $u \leqslant u_0$, ισχύει:

$$\int\limits_{X\times\Psi} u(x,y)\,d\sigma(x,y) \leqslant \int\limits_{X\times\Psi} u_0(x,y)\,d\sigma(x,y) \leqslant \int\limits_{X\times\Psi} \chi_G(x,y)\,d\sigma(x,y) = \sigma(G) < \sigma(K) + \varepsilon,$$

και αυτό αποδεικνύει τον ισχυρισμό.

Θέτουμε: $S = \{h \in C_{\mathbb{R}}(X\times\Psi) : h(x,y) = f(x) + g(y),\ \ f \in C_{\mathbb{R}}(X),\, g \in C_{\mathbb{R}}(\Psi)\}$

Το S είναι ένας γραμμικός υπόχωρος του $C_{\mathbb{R}}(X\times\Psi)$, που προφανώς περιέχει την σταθερή συνάρτηση $\mathbf{1}$.

Ορίζουμε στον S το γραμμικό συναρτησοειδές:

$$\phi(h) = \int\limits_{X\times\Psi} h(x,y)\,d(m\times n)(x,y) \overset{16}{=} \int\limits_X f(x)\,dm(x) + \int\limits_\Psi g(y)\,dn(y), \quad h \in S$$

και παρατηρούμε ότι το ϕ είναι φραγμένο, με $\|\phi\| = 1$.

Πράγματι: επειδή το $m\times n$ είναι μέτρο πιθανότητας, έχουμε ότι:

$$|\phi(h)| \leqslant \int\limits_{X\times\Psi} |h(x,y)|\,d(m\times n)(x,y) \leqslant ||h||_\infty \quad \forall\, h \in S.$$

Άρα $||\phi|| \leqslant 1$, κι εφ' όσον $\phi(\mathbf{1}) = 1$, έπεται ότι $||\phi|| = 1$.

Έστω τώρα $\sigma \in \mathrm{Ext}(\phi)$, όπου το σ ταυτίζεται[17] με ένα κανονικό μέτρο Borel πιθανότητας στον $X\times\Psi$, που ικανοποιεί:

$$\phi(h) = \int\limits_{X\times\Psi} h(x,y)\,d\sigma(x,y) \quad \forall\, h \in S,$$

δηλαδή

$$\int\limits_X f(x)\,dm(x) + \int\limits_\Psi g(y)\,dn(y) = \int\limits_{X\times\Psi} \big(f(x) + g(y)\big)\,d\sigma(x,y) \quad \forall\, f \in C_{\mathbb{R}}(X), \forall\, g \in C_{\mathbb{R}}(\Psi) \quad (2.15)$$

[16] από το Θεώρημα Fubini

[17] βλ. σχόλια πριν το Λήμμα 2.34

Από την (2.15) για $g = \mathbf{0}$ έχουμε ότι:

$$\int_X f(x)\,dm(x) = \int_{X\times\Psi} f(x)\,d\sigma(x,y) \quad \forall\, f \in C_{\mathbb{R}}(X),$$

δηλαδή:

$$\int_X f(x)\,dm(x) = \int_X f(x)\,d\sigma_{_X}(x) \quad \forall\, f \in C_{\mathbb{R}}(X). \tag{2.16}$$

Ισχυρισμός 2 : $\sigma_{_X} = m$ και $\sigma_{_\Psi} = n$.
Αποδεικνύουμε καταρχήν ότι το μέτρο $\sigma_{_X}$ είναι κανονικό.
Από την εξωτερική κανονικότητα του σ έχουμε:

$$\begin{aligned}
\sigma_{_X}(A) &= \sigma(A\times\Psi) = \inf\{\sigma(G) : G \text{ ανοικτό στον } X\times\Psi,\ A\times\Psi \subseteq G\}\\
&= \inf\{\sigma(U\times\Psi) : U \text{ ανοικτό στον } X,\ A\times\Psi \subseteq U\times\Psi\}\\
&= \inf\{\sigma_{_X}(U) : U \text{ ανοικτό στον } X,\ A \subseteq U\}, \quad \forall\, A \in \mathcal{B}(X).
\end{aligned}$$

Επίσης, αφού ο X είναι συμπαγής χώρος Hausdorff, τα συμπαγή υποσύνολα του X είναι ακριβώς τα κλειστά υποσύνολά του. Επομένως, για κάθε $A \in \mathcal{B}(X)$, λόγω και της εξωτερικής κανονικότητας του $\sigma_{_X}$, θα ισχύει:

$$\begin{aligned}
\sup\{\sigma_{_X}(K) : K \text{ συμπαγές στον } X,\ K \subseteq A\} &= \sup\{1-\sigma_{_X}(K^c) : K^c \text{ ανοικτό στον } X,\ A^c \subseteq K^c\}\\
&= 1-\inf\{\sigma_{_X}(U) : U \text{ ανοικτό στον } X,\ A^c \subseteq U\}\\
&= 1-\sigma_{_X}(A^c) = \sigma_{_X}(A).
\end{aligned}$$

Τέλος, είναι προφανές ότι $\sigma_{_X}(K) < \infty$, για κάθε $K \subseteq X$ συμπαγές (αφού $\sigma_{_X}$ μέτρο πιθανότητας).
Πράγματι λοιπόν το $\sigma_{_X}$ είναι κανονικό.
Από την σχέση (2.16) και την μοναδικότητα στο Θεώρημα Αναπαράστασης του Riesz, έπεται ότι $\sigma_x = m$.
Όμοια προκύπτει και ότι $\sigma_{_\Psi} = n$

Επομένως, από την υπόθεση έχουμε ότι:

$$\sigma(K) = 0 \quad \forall\, \sigma \in \mathrm{Ext}(\phi),$$

και από τον ισχυρισμό συμπεραίνουμε ότι:

$$\lim_{u\in\mathcal{F}} \int_{X\times\Psi} u(x,y)\,d\sigma(x,y) = 0 \quad \forall\, \sigma \in \mathrm{Ext}(\phi). \tag{2.17}$$

Τώρα, για κάθε $u \in \mathcal{F}$ ορίζουμε: $p_u : \mathrm{Ext}(\phi) \to \mathbb{R}$ με $p_u(\sigma) = \int_{X\times\Psi} u(x,y)\,d\sigma(x,y)$.

Παρατηρούμε τα εξής:
(i) κάθε p_u είναι w^*-συνεχής συνάρτηση, διότι: αν $(\sigma_{_\lambda})_{_{\lambda\in\Lambda}}$ δίκτυο στο $\mathrm{Ext}(\phi)$ και $\sigma \in \mathrm{Ext}(\phi)$, τότε

$$\begin{aligned}
&\sigma_{_\lambda} \xrightarrow{w^*} \sigma \Leftrightarrow I_{\sigma_{_\lambda}} \xrightarrow{w^*} I_\sigma\\
\Leftrightarrow\ &\int_{X\times\Psi} h(x,y)\,d\sigma_{_\lambda}(x,y) = I_{\sigma_{_\lambda}}(h) \to I_\sigma(h) = \int_{X\times\Psi} h(x,y)\,d\sigma(x,y)
\end{aligned}$$

για κάθε $h \in C_{\mathbb{R}}(X \times \Psi)$.
Άρα, ιδιαιτέρως:

$$\sigma_\lambda \xrightarrow{w^*} \sigma \Rightarrow p_u(\sigma_\lambda) = \int\limits_{X\times\Psi} u(x,y)\, d\sigma_\lambda(x,y) \to \int\limits_{X\times\Psi} u(x,y)\, d\sigma(x,y) = p_u(\sigma)$$

(ii) αν $u_1, u_2 \in \mathcal{F}$ με $u_1 \leqslant u_2$, τότε $p_{u_1} \leqslant p_{u_2}$
(iii) από την (2.17), $p_u(\sigma) \to 0 \quad \forall\, \sigma \in \mathrm{Ext}(\phi)$.
Σύμφωνα λοιπόν με τα παραπάνω, το $(p_u)_{u\in\mathcal{F}}$ είναι ένα αύξον δίκτυο w^*-συνεχών συναρτήσεων, που συγκλίνει κατά σημείο στην σταθερή συνάρτηση $\mathbf{0}$.
Αφού το σύνολο $\mathrm{Ext}(\phi)$ είναι w^*-συμπαγές, από το θεώρημα Dini έπεται ότι το δίκτυο $(p_u)_{u\in\mathcal{F}}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο 0, δηλαδή:

$$\sup_{\sigma\in\mathrm{Ext}(\phi)} p_u(\sigma) = \sup_{\sigma\in\mathrm{Ext}(\phi)} \int\limits_{X\times\Psi} u(x,y)\, d\sigma(x,y) \to 0.$$

Άρα, επαγωγικά μπορούμε να κατασκευάσουμε μια ακολουθία $(u_n)_n$ στο $\mathcal{F}$, ώστε:

$$\sup\{ \int\limits_{X\times\Psi} u_n(x,y)\, d\sigma(x,y) : \sigma \in \mathrm{Ext}(\phi)\} \leqslant \frac{1}{2^{n+1}}\ \forall\, n = 1,2,\dots .$$

Τώρα, εφαρμόζοντας το προηγούμενο Λήμμα, βρίσκουμε μια ακολουθία $(h_n)_n$ στον υπόχωρο S, ώστε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ να ισχύουν:

$$h_n \geqslant u_n \ \text{ και } \ \phi(h_n) \leqslant \frac{1}{2^n}.$$

Για κάθε $n \in \mathbb{N}$, υπάρχουν $f_n \in C_{\mathbb{R}}(X)$, $g_n \in C_{\mathbb{R}}(\Psi)$ ώστε

$$h_n(x,y) = f_n(x) + g_n(y)\ \forall\, (x,y) \in X \times \Psi$$

Μάλιστα, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, αφού η h_n είναι θετική ($h_n \geqslant u_n \geqslant \chi_K \geqslant 0$) μπορούμε να επιλέξουμε τις f_n, g_n να είναι και αυτές θετικές.
Πράγματι: υποθέτουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας, ότι $\min\limits_{x\in X} f_n(x) = 0$, (όπου το minimum υπάρχει γιατί η f_n είναι συνεχής και ο X είναι συμπαγής), διαφορετικά αντικαθιστούμε την f_n με την $f_n' = f_n - \min f_n$. Τότε βέβαια $f_n \geqslant 0$.
Από την άλλη, αν θεωρήσουμε $x_0 \in X$ ώστε $f_n(x_0) = 0$, τότε, για κάθε $y \in \Psi$ θα ισχύει:

$$g_n(y) = h_n(x_0, y) \geqslant 0,$$

δηλαδή και $g_n \geqslant 0$.
Έχουμε συνεπώς ότι:

$$f_n(x) + g_n(y) \geqslant u_n(x,y) \geqslant \chi_K(x,y) \quad \forall\, x, y \in X, \tag{2.18}$$

$f_n \geqslant 0$, $g_n \geqslant 0$ και

$$\int\limits_X f_n(x)\, dm(x) + \int\limits_\Psi g_n(y)\, dn(y) = \phi(h_n) \leqslant \frac{1}{2^n}, \tag{2.19}$$

$\forall\, n = 1, 2, \dots$.

Θέτουμε: $A_n = [f_n \geqslant \frac{1}{2}]$ και $M_n = \bigcup\limits_{i=n}^{\infty} A_i,\ n = 1, 2, \dots$.

Προφανώς $A_n, M_n \in \mathcal{B}(X)\ \forall\, n = 1, 2, \dots$ (διότι κάθε f_n είναι Borel μετρήσιμη).

Επίσης, παρατηρούμε ότι:

$$\int\limits_{A_n} f_n(x)\, dm(x) \geqslant \frac{1}{2} m(A_n),$$

απ' όπου

$$\begin{aligned} m(A_n) &\leqslant \quad 2\int\limits_{A_n} f_n(x)\, dm(x) \leqslant 2\int\limits_{X} f_n(x)\, dm(x) \\ &\overset{g_n \geqslant 0}{\leqslant} \quad 2\Big(\int\limits_{X} f_n(x)\, dm(x) + \int\limits_{\Psi} g_n(y)\, dn(y)\Big) \overset{(2.19)}{\leqslant} \frac{1}{2^{n-1}} \end{aligned}$$

Έτσι, $m(M_n) \leqslant \sum\limits_{i=n}^{\infty} m(A_i) \leqslant \sum\limits_{i=n}^{\infty} \frac{1}{2^{i-1}} = \frac{1}{2^{n-2}}$

Ομοίως, για τα αντίστοιχα Borel υποσύνολα $B_n = [g_n \geqslant \frac{1}{2}]$ και $N_n = \bigcup\limits_{i=n}^{\infty} B_i$ του Ψ, έχουμε ότι:

$$n(B_n) \leqslant \frac{1}{2^{n-1}} \ \text{ και } \ n(N_n) \leqslant \frac{1}{2^{n-2}} \quad \forall\, n = 1, 2, \dots .$$

Τώρα, από την (2.18) και τον ορισμό των A_n, B_n, παρατηρούμε ότι: αν $x \notin A_n$ και $y \notin B_n$, τότε: $\chi_{_K}(x, y) \leqslant f_n(x) + g_n(y) < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$, και άρα $(x, y) \notin K$.

Έπεται ότι $K \subseteq (A_n \times \Psi) \cup (X \times B_n)\ \forall\, n = 1, 2, \dots$, και εφ' όσον $A_n \subseteq M_n$, $B_n \subseteq N_n$, συμπεραίνουμε ότι:

$$K \subseteq (M_n \times \Psi) \cup (X \times N_n) \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

απ' όπου:

$$K \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} \big((M_n \times \Psi) \cup (X \times N_n)\big). \tag{2.20}$$

Θέτουμε $M = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} M_n \in \mathcal{B}(X)$, $N = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} N_n \in \mathcal{B}(\Psi)$.

Ισχυριζόμαστε ότι: $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \big((M_n \times \Psi) \cup (X \times N_n)\big) = (M \times \Psi) \cup (X \times N)$.

Καταρχήν καθένα από τα σύνολα $M \times \Psi = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} (M_n \times \Psi)$, $X \times N = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} (X \times N_n)$ περιέχεται στην τομή $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \big((M_n \times \Psi) \cup (X \times N_n)\big)$, άρα και

$$(M \times \Psi) \cup (X \times N) \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} \big((M_n \times \Psi) \cup (X \times N_n)\big)$$

Τώρα, ο αντίστροφος εγκλεισμός έπεται από το γεγονός ότι οι ακολουθίες $(M_n)_n$, $(N_n)_n$ είναι φθίνουσες.

Πράγματι:

Έστω $(x, y) \in X \times \Psi$ τέτοια ώστε $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $x \in M_n$ ή $y \in N_n$.

Πρέπει να δείξουμε ότι $x \in M_n\ \forall\, n \in \mathbb{N}$ ή $y \in N_n\ \ \forall\, n \in \mathbb{N}$.

Αν αυτό δεν συμβαίνει, τότε υπάρχουν n_1, $n_2 \in \mathbb{N}$ ώστε $x \notin M_{n_1}$ και $y \notin N_{n_2}$.
Αν όμως $n_1 < n_2$, τότε $N_{n_2} \supseteq N_{n_1}$, και συνεπώς $y \notin N_{n_1}$.
Έχουμε δηλαδή ότι $x \notin M_{n_1}$ και $y \notin N_{n_1}$, άτοπο.
Από την σχέση (2.20) λοιπόν, προκύπτει ότι:

$$K \subseteq (M \times \Psi) \cup (X \times N).$$

Αλλά $m(M) = 0$, διότι $m(M) \leqslant m(M_n) \leqslant \frac{1}{2^{n-2}}$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$, ομοίως και $n(N) = 0$.
Συμπεραίνουμε τελικά ότι το K είναι περιθωριακά μηδενικό. □

Θεώρημα 2.36. *(Θεώρημα μηδενικού συνόλου)*
Έστω X, Ψ standard χώροι Borel και μ, ν δύο σ-πεπερασμένα μέτρα στους X, Ψ αντίστοιχα. Θέτουμε:

$$\begin{aligned}\mathcal{A} \;=\; \{\sigma : & \;\sigma \text{ μέτρο Borel πιθανότητας στον } X \times \Psi, \text{ με}\\ & \sigma_X \leqslant c \cdot \mu \text{ και } \sigma_\Psi \leqslant c \cdot \nu, \text{ για κάποια θετική σταθερά } c\}.\end{aligned}$$

Έστω επίσης $S \subseteq X \times \Psi$ της μορφής $S = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} S_n$, όπου κάθε S_n ανήκει στην άλγεβρα Boole που παράγεται από τα μετρήσιμα ορθογώνια του $X \times \Psi$.
Αν $\sigma(S) = 0$ $\forall\, \sigma \in \mathcal{A}$, τότε το S είναι περιθωριακά μηδενικό.

Απόδειξη. Καταρχήν, θα αντικαταστήσουμε τα σ-πεπερασμένα μέτρα μ, ν, με ισοδύναμα μέτρα πιθανότητας m, n.
Αφού το μ είναι σ-πεπερασμένο, μπορούμε να βρούμε μια αύξουσα ακολουθία $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ Borel υποσυνόλων του X, ώστε:

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \text{ και } 0 < \mu(A_n) < \infty \;\; \forall\, n \in \mathbb{N},$$

Θέτουμε: $f = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n \mu(A_n)} \chi_{A_n}$.
Για κάθε $x \in X$ έχουμε:

$$f(x) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n \mu(A_n)} \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n \mu(A_1)} = \frac{1}{\mu(A_1)} < \infty,$$

Συνεπώς η f είναι μια καλά ορισμένη Borel μετρήσιμη συνάρτηση, και αν $c_1 = \frac{1}{\mu(A_1)}$, τότε $f(x) \leqslant c_1 \quad \forall\, x \in X$.
Επίσης, αν $x \in X$ και $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $x \in A_{n_0}$, τότε:

$$f(x) = \sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{1}{2^n \mu(A_n)} \geqslant \frac{1}{2^{n_0} \mu(A_{n_0})} > 0.$$

Από την άλλη, από το θεώρημα Beppo-Levi έχουμε ότι:

$$\int_X f \, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n \mu(A_n)} \int_X \chi_{A_n} \, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1$$

Από τα προηγούμενα, η συνολο-συνάρτηση

$$m(A) = \int_A f \, d\mu, \quad A \in \mathcal{B}(X)$$

ορίζει ένα μέτρο Borel πιθανότητας στον X, κι εφ' όσον $0 < f(x) \leqslant c_1 \ \forall x \in X$, είναι φανερό ότι: $\mu \ll m \leqslant c_1 \cdot \mu$.
Με τον ίδιο τρόπο, βρίσκουμε ένα μέτρο Borel πιθανότητας n στον Ψ και μια σταθερά $c_2 \geqslant 0$, ώστε $\nu \ll n \leqslant c_2 \cdot \nu$, οπότε για $c = \max\{c_1, c_2\}$ έχουμε το ζητούμενο.

Θέτουμε:

$$\mathcal{A}_0 = \{\sigma : \sigma \text{ μέτρο Borel πιθανότητας στον } X \times \Psi, \text{ με } \sigma_{_X} = m \text{ και } \sigma_{_\Psi} = n\}$$

Η $\mathcal{A}_0$ είναι βέβαια μή κενή, αφού περιέχει το μέτρο γινόμενο $m \times n$.
Επιπλέον, $\mathcal{A}_0 \subseteq \mathcal{A}$ διότι $m \leqslant c \cdot \mu$ και $n \leqslant c \cdot \nu$, και συνεπώς, από την υπόθεση έχουμε ότι:

$$\sigma(S) = 0 \ \forall \sigma \in \mathcal{A}_0.$$

Τώρα, για καθε $n \in \mathbb{N}$, αφού το S_n ανήκει στην άλγεβρα Boole που παράγεται από τα μετρήσιμα ορθογώνια, το S_n^c γράφεται ως πεπερασμένη ένωση μετρήσιμων ορθογωνίων.
Έπεται ότι το $S^c = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} S_n^c$ μπορεί να γραφεί ως αριθμήσιμη ένωση μετρήσιμων ορθογωνίων, έστω:

$$S^c = \bigcup_{n=1}^{\infty} (E_n \times F_n),$$

όπου $E_n \in \mathcal{B}(X)$, $F_n \in \mathcal{B}(\Psi) \ \forall n = 1, 2, \dots$.
Επιλέγουμε ακολουθία $(A_n)_n$ στην $\mathcal{B}(X)$ τέτοια, ώστε να παράγει την $\mathcal{B}(X)$ και να διαχωρίζει τα σημεία του X (βλ. πρόταση 1.21).
Θεωρούμε και μια ακολουθία $(B_n)_n$ στην $\mathcal{B}(\Psi)$ με τις αντίστοιχες ιδιότητες.
Ορίζουμε $f : X \to \mathbf{2}^{\mathbb{N}}$ και $g : \Psi \to \mathbf{2}^{\mathbb{N}}$, με :

$$f(x) = \big(\chi_{_{A_1}}(x), \chi_{_{E_1}}(x), \chi_{_{A_2}}(x), \chi_{_{E_2}}(x), \dots\big), \ x \in X$$

και

$$g(y) = \big(\chi_{_{B_1}}(y), \chi_{_{F_1}}(y), \chi_{_{B_2}}(y), \chi_{_{F_2}}(y), \dots\big), \ y \in \Psi.$$

Σύμφωνα με την απόδειξη του Λήμματος 2.8, οι προηγούμενες συναρτήσεις είναι $1-1$, Borel μετρήσιμες, και οι $f : X \to f(X)$, $g : \Psi \to g(\Psi)$ είναι Borel ισομορφισμοί.
Έπεται ότι η απεικόνιση γινόμενο

$$f \times g : X \times \Psi \to f(X) \times g(\Psi) \subseteq \mathbf{2}^{\mathbb{N}} \times \mathbf{2}^{\mathbb{N}} : (x, y) \longmapsto (f(x), g(y))$$

είναι επίσης Borel ισομορφισμός.
Επίσης, θεωρούμε το εξής υποσύνολο του $\mathbf{2}^{\mathbb{N}} \times \mathbf{2}^{\mathbb{N}}$:

$$K = \{(\xi, \psi) \in \mathbf{2}^{\mathbb{N}} \times \mathbf{2}^{\mathbb{N}} : \forall n \in \mathbb{N}, \, \xi_{2n} = 0 \text{ ή } \psi_{2n} = 0\},$$

και ισχυριζόμαστε ότι το K είναι κλειστό.

Έστω $\{(\xi_k, \psi_k) : k = 1, 2, ...\}$ μια ακολουθία στο K και $(\xi, \psi) \in \mathbf{2}^{\mathbb{N}} \times \mathbf{2}^{\mathbb{N}}$, ώστε $(\xi_k, \psi_k) \to (\xi, \psi)$ στην τοπολογία γινόμενο του $\mathbf{2}^{\mathbb{N}} \times \mathbf{2}^{\mathbb{N}}$. Τότε οι ακολουθίες $(\xi_k)_k$, $(\psi_k)_k$ συγκλίνουν αντίστοιχα στα ξ, ψ ως προς την καρτεσιανή τοπολογία του $\mathbf{2}^{\mathbb{N}}$, δηλαδή:

$$\xi_k(n) \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} \xi(n) \text{ και } \psi_k(n) \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} \psi(n) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Αλλά, εφ' όσον $(\xi_k, \psi_k) \in K$, $\forall n \in \mathbb{N}$ έχουμε ότι $\xi_k(2n) = 0$ ή $\psi_k(2n) = 0$, οπότε αντίστοιχα $\xi(2n) = 0$ ή $\psi(2n) = 0$, δηλαδή $(\xi, \psi) \in K$.

Παρατηρούμε επίσης ότι $(f \times g)(S) = K \cap \big(f(x) \times g(\psi)\big)$.

Πράγματι, επειδή $S = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} (E_n \times F_n)^c = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} (E_n^c \times \Psi) \cup (X \times F_n^c)$, έχουμε:

$$\begin{aligned}
(f \times g)(S) &= \{\big(f(x), g(y)\big) \quad : \quad \forall n \in \mathbb{N}, x \in E_n^c \text{ ή } y \in F_n^c\} \\
&= \{\big(f(x), g(y)\big) \quad : \quad \forall n \in \mathbb{N}, \text{ η 2n-συντεταγμένη της ακολουθίας } f(x) \\
&\qquad\qquad \text{είναι 0 ή η 2n-συντεταγμένη της } g(y) \text{ είναι } 0\} \\
&= K \bigcap \big(f(x), g(y)\big)
\end{aligned}$$

Σκοπός μας τώρα είναι να χρησιμοποιήσουμε το προηγούμενο Θεώρημα για τον συμπαγή χώρο Hausdorff $\mathbf{2}^{\mathbb{N}} \times \mathbf{2}^{\mathbb{N}}$ και το κλειστό υποσύνολό του K.

Χρειαζόμαστε καταρχήν δύο μέτρα πιθανότητας στον $\mathbf{2}^{\mathbb{N}}$ (τα οποία θα είναι βέβαια κανονικά, αφού ο $\mathbf{2}^{\mathbb{N}}$ είναι Πολωνικός χώρος).

Θεωρούμε λοιπόν τα μέτρα f_*m, g_*n που επάγονται στον $\mathbf{2}^{\mathbb{N}}$ από τις f, g αντίστοιχα, δηλαδή:

$$f_*m(C) = m\big(f^{-1}(C)\big) \text{ και } g_*n(C) = n\big(g^{-1}(C)\big), \ \forall C \in \mathcal{B}(\mathbf{2}^{\mathbb{N}}).$$

Τα μέτρα αυτά είναι μέτρα πιθανότητας, αφού:

$$f_*m(\mathbf{2}^{\mathbb{N}}) = m(X) = 1 \text{ και } g_*n(\mathbf{2}^{\mathbb{N}}) = n(\Psi) = 1.$$

Έστω τώρα σ ένα (κανονικό) μέτρο Borel πιθανότητας στον $\mathbf{2}^{\mathbb{N}} \times \mathbf{2}^{\mathbb{N}}$, με $\sigma_1 = f_*m$ και $\sigma_2 = g_*n$.

Έχουμε:

$$\sigma\big(f(X) \times \mathbf{2}^{\mathbb{N}}\big) = \sigma_1\big(f(X)\big) = f_*m\big(f(X)\big) = m(X) = 1,$$

ομοίως και

$$\sigma\big(\mathbf{2}^{\mathbb{N}} \times g(\Psi)\big) = 1.$$

Θεωρούμε το μέτρο $\rho = (f \times g)_*^{-1}\sigma$ στον $X \times \Psi$, δηλαδή:

$$\rho(\Omega) = \sigma\big((f \times g)(\Omega)\big) \ \forall \Omega \in \mathcal{B}(X \times \Psi)$$

Ισχυριζόμαστε ότι $\rho \in \mathcal{A}_0$.

Καταρχήν, $\rho(X \times \Psi) = \sigma\big(f(X) \times g(\Psi)\big) = 1$, αφού, από τις προηγούμενες σχέσεις, το σ είναι συγκεντρωμένο στα $f(X) \times \mathbf{2}^{\mathbb{N}}$, $\mathbf{2}^{\mathbb{N}} \times g(\Psi)$, άρα και στο

$$\big(f(X) \times \mathbf{2}^{\mathbb{N}}\big) \bigcap \big(\mathbf{2}^{\mathbb{N}} \times g(\Psi)\big) = f(X) \times g(\Psi).$$

Άρα το ρ είναι μέτρο πιθανότητας.

Δείχνουμε τώρα ότι $\rho_{X} = m$.

Για κάθε $A \in \mathcal{B}(X)$ έχουμε:

$$\rho_{X}(A) = \rho(A \times \Psi) = \sigma\big(f(A) \times g(\Psi)\big) \tag{2.21}$$

Παρατηρούμε ότι: $f(A) \times g(\Psi) \subseteq f(A) \times \mathbf{2}^{\mathbb{N}}$ και

$$\sigma\big((f(A) \times \mathbf{2}^{\mathbb{N}}) \setminus (f(A) \times g(\Psi))\big) = \sigma\big(f(A) \times g(\Psi)^c\big) \leqslant \sigma(\mathbf{2}^{\mathbb{N}} \times g(\Psi)^c\big)$$

Αλλά $\sigma\big(\mathbf{2}^{\mathbb{N}} \times g(\Psi)^c\big) = 0$, εφ' όσον $\sigma\big(\mathbf{2}^{\mathbb{N}} \times g(\Psi)\big) = 1$. Έπεται λοιπόν ότι

$$\sigma\big((f(A) \times \mathbf{2}^{\mathbb{N}}) \setminus (f(A) \times g(\Psi))\big) = 0,$$

και συνεπώς από την (2.21):

$$\begin{aligned} \rho_X(A) &= \sigma\big(f(A) \times \mathbf{2}^{\mathbb{N}}\big) = \sigma_1\big(f(A)\big) = f_*m\big(f(A)\big) \\ &= m(A) \qquad \forall\, A \in \mathcal{B}(X) \end{aligned}$$

Όμοια έχουμε και ότι $\rho_\Psi = n$.
Άρα πράγματι $\rho \in \mathcal{A}_0$, και επομένως $\rho(S) = 0$, από την υπόθεση.
Όμως:

$$\begin{aligned} \rho(S) &= \sigma\big((f \times g)(S)\big) = \sigma\big(K \cap (f(X) \times g(\Psi))\big) \\ &= \sigma(K) + \sigma\big(f(X) \times g(\Psi)\big) - \sigma\big(K \cup (f(X) \times g(\Psi))\big), \end{aligned}$$

όπου

$$1 \geqslant \sigma\big(K \cup (f(X) \times g(\Psi))\big) \geqslant \sigma\big(f(X) \times g(\Psi)\big) = 1.$$

Άρα, ισχύει η ισότητα $\sigma(K) = \rho(S) = 0$.
Δείξαμε λοιπόν ότι το K έχει μέτρο μηδέν, ως προς κάθε μέτρο Borel πιθανότητας στον $\mathbf{2}^{\mathbb{N}} \times \mathbf{2}^{\mathbb{N}}$, με περιθωριακά μέτρα f_*m και g_*n.
Από το θεώρημα 2.35, έπεται ότι το K είναι περιθωριακά μηδενικό, δηλαδή:

$$\exists\, M, N \in \mathcal{B}(\mathbf{2}^{\mathbb{N}}),\ \text{με}\ f_*m(M) = g_*n(N) = 0,$$

ώστε:

$$K \subseteq (M \times \mathbf{2}^{\mathbb{N}}) \cup (\mathbf{2}^{\mathbb{N}} \times N).$$

Εφ' όσον $(f \times g)(S) = K \cap \big(f(X) \times g(\Psi)\big)$, από την τελευταία έπεται ότι:

$$\begin{aligned} S &= (f \times g)^{-1}(K) \subseteq (f \times g)^{-1}(M \times \mathbf{2}^{\mathbb{N}}) \cup (f \times g)^{-1}(\mathbf{2}^{\mathbb{N}} \times N) \\ &= \big(f^{-1}(M) \times \Psi\big) \cup \big(X \times g^{-1}(N)\big) \end{aligned}$$

Παρατηρώντας ότι $m\big(f^{-1}(M)\big) = f_*m(M) = 0$ και $n\big(g^{-1}N)\big) = g_*n(N) = 0$, συμπεραίνουμε ότι $\mu\big(f^{-1}(M)\big) = \nu\big(g^{-1}(N)\big) = 0$ (διότι $\mu \ll m$, $\nu \ll n$), απ' όπου προκύπτει το ζητούμενο.

$\square$

Κεφάλαιο 3

Ανακλαστικοί Σύνδεσμοι Υποχώρων

Στο κεφάλαιο αυτό, στόχος μας είναι να αποδείξουμε ότι κάθε μεταθετικός σύνδεσμος υποχώρων $\mathcal{L}$ που δρα σ' έναν διαχωρίσιμο χώρο Hilbert, είναι ανακλαστικός (reflexive), δηλαδή $\mathcal{L} = latalg\mathcal{L}$.
Το συμπέρασμα αυτό θα αποδειχθεί πρώτα για τον σύνδεσμο υποχώρων $\mathcal{L}(X, \leqslant, m)$, όπου $(X, \leqslant, m)$ είναι ένας standard προδιατεταγμένος χώρος σ-πεπερασμένου μέτρου.
Αρχικά θα ορίσουμε μια ειδική κλάση μέτρων Borel στον χώρο γινόμενο $X \times X$, για έναν standard χώρο σ-πεπερασμένου μέτρου (X, m).
Σε κάθε μέτρο μ αυτής της κλάσης θα αντιστοιχίσουμε έναν μοναδικό τελεστή T_μ του χώρου Hilbert $L^2(X, m)$, που θα τον ονομάσουμε ψευδο-ολοκληρωτικό τελεστή.
Στην περίπτωση όπου ο (X, m) είναι εφοδιασμένος και με μια standard προδιάταξη $\leqslant$, θα περιοριστούμε σ' εκείνα τα μέτρα της προηγούμενης κλάσης, που είναι συγκεντρωμένα στο γράφημα της $\leqslant$.
Θα αποδείξουμε μάλιστα ότι η επαγόμενη κλάση των αντίστοιχων ψευδο-ολοκληρωτικών τελεστών είναι μια άλγεβρα.
Η ultraweakly-κλειστή θήκη αυτής της άλγεβρας τελεστών, που θα την συμβολίσουμε με $\mathcal{A}_{min}(X, \leqslant, m)$, θα μας οδηγήσει στα ζητούμενα συμπεράσματα.
Σημειώνουμε ότι οι ιδιότητες της άλγεβρας $\mathcal{A}_{min}(X, \leqslant, m)$ θα αποδειχθούν ιδιαίτερα κρίσιμες και στο 4^o κεφάλαιο.

3.1 Ψευδο-ολοκληρωτικοί Τελεστές

Θυμίζουμε ότι ένας τελεστής $T \in B\big(L^2(X, m)\big)$, όπου (X, m) είναι ένας χώρος σ-πεπερασμένου μέτρου, λέγεται ολοκληρωτικός με πυρήνα μια μετρήσιμη συνάρτηση $K \in L^2(X \times X, m \times m)$, αν για κάθε $f \in L^2(X, m)$ ισχύει:

$$(Tf)(x) = \int_X f(y)K(x, y)dm(y) \qquad m\text{-σχεδόν } \forall\, x \in X.$$

Στην παρούσα ενότητα θα εισάγουμε μια ευρύτερη κλάση τελεστών στον $B\big(L^2(X, m)\big)$, που δεν θα έχουν ως πυρήνα μια συνάρτηση, αλλά μια κατάλληλη οικογένεια μέτρων.
Στα επόμενα, ο X θα είναι πάντα ένας standard χώρος Borel και το m ένα σ-πεπερασμένο μέτρο Borel στον X.

Θεωρούμε το σύνολο $A(X \times X, m)$ όλων των μιγαδικών μέτρων Borel μ στον $X \times X$, για τα οποία υπάρχει σταθερά $c \geqslant 0$ ώστε:

$$|\mu|_1(A) \leqslant c \cdot m(A) \text{ και } |\mu|_2(A) \leqslant c \cdot m(A) \quad \forall A \in \mathcal{B}(X),$$

όπου $|\mu|_1$, $|\mu|_2$ είναι τα περιθωριακά μέτρα της κύμανσης $|\mu|$ του μ.

Για κάθε $\mu \in A(X \times X, m)$, ορίζουμε ως $||\mu||$ την μικρότερη σταθερά $c \geqslant 0$, για την οποία ικανοποιούνται οι προηγούμενες ανισότητες.

Πρόταση 3.1. *Το σύνολο $A(X \times X, m)$ είναι ένας γραμμικός υπόχωρος του χώρου όλων των μιγαδικών μέτρων Borel που ορίζονται στον $X \times X$, και η απεικόνιση $\mu \mapsto ||\mu||$ ορίζει μια νόρμα στον $A(X \times X, m)$.*

Απόδειξη. Έστω $\mu, \nu \in A(X \times X, m)$ και $\lambda \in \mathbb{C}$.
Για κάθε $S \in \mathcal{B}(X \times X)$ ισχύουν οι προφανείς ανισότητες:

$$|\mu + \nu|(S) \leqslant |\mu|(S) + |\nu|(S) \quad \text{και} \quad |\lambda\mu|(S) = |\lambda| \cdot |\mu|(S).$$

Έπεται ότι για κάθε $A \in \mathcal{B}(X)$ έχουμε:

$$\begin{aligned} |\mu + \nu|_1(A) &= |\mu + \nu|(A \times X) \leqslant |\mu|(A \times X) + |\nu|(A \times X) \\ &= |\mu|_1(A) + |\nu|_1(A) \leqslant (\|\mu\| + \|\nu\|)m(A) \end{aligned}$$

και

$$|\lambda\mu|_1(A) = |\lambda\mu|(A \times X) = |\lambda| \cdot |\mu|_1(A) \leqslant (|\lambda| \cdot \|\mu\|)m(A).$$

Ομοίως προκύπτουν οι ίδιες ανισότητες και για τα μέτρα $|\mu + \nu|_2$, $|\lambda\mu|_2$.
Τα προηγούμενα δείχνουν ακριβώς ότι $\mu + \nu$, $\lambda\mu \in A(X \times X, m)$.

Μένει να δείξουμε ότι η $\mu \to \|\mu\|$ είναι μια νόρμα στον γραμμικό χώρο $A(X \times X, m)$.
Καταρχήν, για $\mu = 0$ είναι προφανές ότι $\|\mu\| = 0$.
Αντίστροφα, αν $\|\mu\| = 0$, τότε $|\mu|_1(A) \leqslant \|\mu\| \cdot m(A) = 0$, δηλαδή $|\mu|_1(A) = 0 \quad A \in \mathcal{B}(X)$.
Συνεπώς, για κάθε μετρήσιμο ορθογώνιο $A \times B$ του $X \times X$ θα ισχύει:

$$|\mu|(A \times B) \leqslant |\mu|(A \times X) = |\mu|_1(A) = 0,$$

και άρα $|\mu| = 0$.
Έπεται ότι $|\mu(S)| \leqslant |\mu|(S) = 0 \quad \forall\, S \in \mathcal{B}(X \times X)$, δηλαδή $\mu = 0$.

Δείχνουμε τώρα ότι $\|\lambda\mu\| = |\lambda| \cdot \|\mu\|$, για $\lambda \neq 0$.
Από τις ανισότητες $|\lambda\mu|_i(A) \leqslant (|\lambda| \cdot \|\mu\|)m(A)$, $A \in \mathcal{B}(X)$, $i = 1, 2$, έχουμε άμεσα ότι

$$\|\lambda\mu\| \leqslant |\lambda| \cdot \|\mu\|.$$

Από την άλλη, για κάθε $A \in \mathcal{B}(X)$ έχουμε:

$$|\mu|_i(A) = \frac{1}{|\lambda|}|\lambda\mu|_i(A) \leqslant \big(\frac{1}{|\lambda|}\|\lambda\mu\|\big)m(A), \quad i = 1, 2$$

απ' όπου

$$\|\mu\| \leqslant \frac{1}{|\lambda|}\|\lambda\mu\| \Leftrightarrow \|\lambda\mu\| \geqslant |\lambda| \cdot \|\mu\|,$$

δηλαδή τελικά ισχύει η ισότητα.

Τέλος, οι ανισότητες $|\mu+\nu|_i(A) \leqslant (\|\mu\|+\|\nu\|)m(A),\ A \in \mathcal{B}(X),\ i=1,2,$ μας εξασφαλίζουν ότι $||\mu+\nu|| \leqslant \|\mu\|+\|\nu\|$.

□

Για την απόδειξη του επόμενου Λήμματος, θα χρειαστούμε το εξής Θεώρημα (βλ. [8]).

Θεώρημα 3.2. *(Dunford-Pettis) Έστω Ψ διαχωρίσιμος χώρος Banach, (X,m) σ-πεπερασμένος χώρος μέτρου και $T : L^1(X,m) \to \Psi^*$ ένας φραγμένος γραμμικός τελεστής. Τότε υπάρχει μια (m-σχεδόν παντού μοναδική) απεικόνιση $B : X \to \Psi^*$ ώστε:*
(i) η B είναι Borel μετρήσιμη, με την έννοια ότι: για κάθε $y \in \Psi$ η απεικόνιση $x \mapsto B(x)y$ είναι Borel μετρήσιμη
(ii) $||B(x)||_{\Psi^*} = ||T||$ m-σχεδόν $\forall\, x \in X$
(iii) για κάθε $f \in L^1(X,m)$ ισχύει:

$$(Tf)y = \int\limits_X B(x)y \cdot f(x)dm(x) \quad \forall\, y \in \Psi.$$

Λήμμα 3.3. *Έστω X συμπαγής μετρικός χώρος και μ ένα πεπερασμένο, θετικό μέτρο Borel στον $X \times X$.*
Τότε υπάρχουν οικογένειες $\{\mu^x : x \in X\}$, $\{\mu_y : y \in X\}$ μέτρων Borel πιθανότητας στον X, ώστε:
(i) $\forall\ E \in \mathcal{B}(X)$, οι συναρτήσεις $x \mapsto \mu^x(E)$, $y \mapsto \mu_y(E)$ είναι Borel μετρήσιμες.
(ii) $\forall\ S \in \mathcal{B}(X \times X)$ ισχύει:

$$\mu(S) = \int\limits_X \Big(\int\limits_X \chi_S(x,y)d\mu^x(y)\Big)d\mu_1(x) = \int\limits_X \Big(\int\limits_X \chi_S(x,y)d\mu_y(x)\Big)d\mu_2(y)$$

όπου μ_1, μ_2 τα περιθωριακά μέτρα του μ.

Απόδειξη. Λόγω συμμετρίας, θα αποδείξουμε μόνο τις ιδιότητες της οικογένειας $\{\mu^x : x \in X\}$. Θεωρούμε τον διαχωρίσιμο χώρο Banach $C(X \times X)^*$ και ορίζουμε:

$$T : L^1(X,\mu_1) \to C(X \times X)^*,$$

$$(Tf)g = \int\limits_{X \times X} g(x,y)f(x)d\mu(x,y), \quad f \in L^1(X,\mu_1),\ g \in C(X \times X)$$

Αν $f \in L^1(X,\mu_1)$, η απεικόνιση Tf που ορίζεται από την προηγούμενη σχέση είναι προφανώς γραμμική και ικανοποιεί την ανισότητα:

$$\begin{aligned}|(Tf)g| &\leqslant \int_{X\times X} |g(x,y)|\cdot|f(x)|d\mu(x,y)\\ &\leqslant ||g||_\infty \cdot \int_{X\times X} |f(x)|d\mu(x,y)\\ &= ||g||_\infty \cdot \int_X |f(x)|d\mu_1(x) = ||f||_1\cdot||g||_\infty\end{aligned}$$

Επομένως $Tf \in C(X\times X)^*$, και άρα ο T είναι ένας καλά ορισμένος γραμμικός τελεστής.
Από την προηγούμενη ανισότητα έχουμε επιπλέον ότι:

$$||Tf||_{C(X\times X)^*} \leqslant ||f||_1 \quad \forall f\in L^1(X,\mu_1),$$

απ' όπου έπεται ότι ο T είναι φραγμένος, με $||T||\leqslant 1$.
Θα δείξουμε μάλιστα ότι $||T|| = 1$.
Έστω $f\in L^1(X,\mu_1)$.
Παρατηρούμε καταρχήν ότι:

$$||f||_1 = \sup\{|\int_X h(x)f(x)\,d\mu_1(x)| :\ h\in C(X),\ ||h||_\infty \leqslant 1\} \tag{3.1}$$

Πράγματι: για κάθε $h\in C(X)$ με $||h||_\infty\leqslant 1$, είναι σαφές ότι:

$$|\int_X h(x)f(x)\,d\mu_1(x)| \leqslant ||f||_1,$$

απ' όπου $\sup\{|\int_X h(x)f(x)\,d\mu_1(x)| :\ h\in C(X),\ ||h||_\infty\leqslant 1\}\leqslant ||f||_1$.
Από την άλλη, υπάρχει μια μετρήσιμη συνάρτηση $u:\ X\to\mathbb{C}$ ώστε $|u(x)|=1$ μ_1-σχεδόν για κάθε $x\in X$ και $f = u\cdot|f|$.
Θεωρούμε μια ακολουθία $(h_n)_n$ στον $C(X)$ με $||h_n||_\infty\leqslant 1$ και $h_n\to\overline{u}$ μ_1-σχεδόν παντού.
Τότε, από το Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλησης του Lebesgue (κι εφ' όσον το μ_1 είναι πεπερασμένο) έπεται ότι:

$$\int_X h_n(x)f(x)\,d\mu_1(x) \to \int_X \overline{u}(x)f(x)\,d\mu_1(x) = \int_X |f(x)|\,d\mu_1(x) = ||f||_1$$

και άρα η (3.1) ισχύει.
Επομένως, για κάθε $\varepsilon>0$ υπάρχει $h\in C(X)$ με $||h||_\infty\leqslant 1$, ώστε;

$$|\int_X h(x)f(x)\,d\mu_1(x)| \geqslant ||f||_1 - \varepsilon.$$

Θέτουμε $g(x,y) = h(x)$, οπότε $g\in C(X\times X)$ και $||g||_\infty\leqslant 1$.
Τότε, αφού $||T||\leqslant 1$, θα έχουμε ότι:

$$\begin{aligned}||f||_1 &\geqslant ||Tf||_{C(X\times X)^*} \geqslant |(Tf)g| = |\int_{X\times X} h(x)f(x)\,d\mu(x,y)|\\ &= |\int_X h(x)f(x)\,d\mu_1(x)| \geqslant ||f||_1 - \varepsilon\end{aligned}$$

Εφ' όσον το ε είναι τυχόν, συμπεραίνουμε ότι $||Tf||_{C(X\times X)^*} = ||f||_1 \quad \forall f \in L^1(X,\mu_1)$, άρα πράγματι $||T|| = 1$.

Τώρα, σύμφωνα με το Θεώρημα Dunford-Pettis, υπάρχει μια απεικόνιση $B: X \to C(X\times X)^*$ ώστε:
(i) η B είναι Borel μετρήσιμη
(ii) $||B(x)||_{C(X\times X)^*} = ||T|| = 1 \quad \mu_1$-σχεδόν $\forall x \in X$
(iii) για κάθε $f \in L^1(X,\mu_1)$ και $g \in C(X\times X)$ ισχύει:

$$\int\limits_{X\times X} g(x,y)f(x)d\mu(x,y) = \int\limits_X B(x)g\cdot f(x)d\mu_1(x) \tag{3.2}$$

Από το Θεώρημα Αναπαράστασης του Riesz, για κάθε $t\in X$ το συναρτησοειδές $B(t)\in C(X\times X)^*$ αντιστοιχεί σε ένα μοναδικό κανονικό μέτρο Borel ν^t στον $X\times X$, ώστε:

$$B(t)g = \int\limits_{X\times X} g(x,y)d\nu^t(x,y) \quad \forall g \in C(X\times X).$$

Τότε η (3.2) γράφεται:

$$\int\limits_{X\times X} g(x,y)f(x)d\mu(x,y) = \int\limits_X \Big(\int\limits_{X\times X} g(x,y)d\nu^t(x,y)\Big)f(t)d\mu_1(t) \tag{3.3}$$

για κάθε $f\in L^1(X,\mu_1)$, $g\in C(X\times X)$.
Έστω $g(x,y) > 0$ και $f(x) > 0$ μ_1-σχεδόν για κάθε $x \in X$.
Τότε $g(x,y)f(x) > 0$ μ-σχεδόν για κάθε $(x,y)\in X\times X$ [1], και άρα από την (3.3) θα ισχύει:

$$\int\limits_X \Big(\int\limits_{X\times X} g(x,y)d\nu^t(x,y)\Big)f(t)d\mu_1(t) \geqslant 0,$$

απ' όπου έπεται ότι:

$$\int\limits_{X\times X} g(x,y)d\nu^t(x,y) \geqslant 0 \ \mu_1\text{-σχεδόν } \forall t\in X.$$

Εφ' όσον η g είναι τυχαία γνήσια θετική συνάρτηση, συμπεραίνουμε ότι μ_1-σχεδόν για κάθε $t\in X$, το μέτρο ν^t είναι θετικό.
Επιπλέον:

$$\nu^t(X\times X) = ||\nu^t|| = ||B(t)||_{C(X\times X)^*} = ||T|| = 1 \ \ \mu_1\text{-σχεδόν } \forall t\in X, \tag{3.4}$$

όπου η 2^η ισότητα ισχύει από το Θεώρημα Αναπαράστασης του Riesz.
Δείξαμε λοιπόν ότι μ_1-σχεδόν για κάθε $t\in X$, το μέτρο ν^t είναι μέτρο πιθανότητας.

Έστω τώρα $\varepsilon > 0$ και D μια ανοικτή σφαίρα στον X ακτίνας ε.

[1] υπάρχει $N\in\mathcal{B}(X)$ με $\mu_1(N)=0$, ώστε $f(x)>0 \quad \forall x\notin N$. Τότε $g(x,y)f(x)>0 \quad \forall (x,y)\in N^c\times X$, όπου $\mu\big(((N^c\times X)^c\big) = \mu(N\times X) = \mu_1(N) = 0$

ΙσχυρισμόςI : $\mathrm{supp}(\nu^t) \subseteq \pi_1^{-1}(D)$ μ_1-σχεδόν για κάθε $t \in D$.
Θεωρούμε $f \in L^1(X, \mu_1)$ και $g \in C(X \times X)$ μη αρνητικές συναρτήσεις, ώστε:

$$\mathrm{supp}\, f \subseteq D \text{ και } g\,|_{\pi_1^{-1}(D)} = 0.$$

Τότε $f(x) = 0 \quad \forall\, x \notin D$ και $g(x, y) = 0 \quad \forall\, (x, y) \in D \times X$, οπότε $g(x, y) f(x) = 0$ (μ-σχεδόν) $\forall\, (x, y) \in X \times X$.
Άρα από την (3.3) θα ισχύει:

$$\int_X \Big(\int_{X \times X} g(x, y) d\nu^t(x, y) \Big) f(t) d\mu_1(t) = 0.$$

Αφού η f επελέγη αυθαίρετα με $\mathrm{supp}\, f \subseteq D$, συμπεραίνουμε ότι:

$$\int_{X \times X} g(x, y) d\nu^t(x, y) = 0 \ \ \mu_1\text{-σχεδόν } \forall\, t \in D.$$

Επιλέγουμε μια ακολουθία $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ $|| \cdot ||_\infty$-πυκνή στον υπόχωρο $\{g \in C(X \times X) : g\,|_{\pi_1^{-1}(D)} = 0\}$.
Σύμφωνα με τα προηγούμενα, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει $N_n \in \mathcal{B}(X)$ με $\mu_1(N_n) = 0$, ώστε:

$$\text{αν } t \in D \setminus N_n \text{ τότε } \int_{X \times X} g_n(x, y) d\nu^t(x, y) = 0.$$

Θέτουμε $N = \bigcup_{n=1}^{\infty} N_n$, οπότε $\mu_1(N) = 0$. Αν $g \in C(X \times X)$ με $g\,|_{\pi_1^{-1}(D)} = 0$, και $(g_{k_n})_{n \in \mathbb{N}}$ είναι μια υπακολουθία της $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ που συγκλίνει ομοιόμορφα στην g, τότε για κάθε $t \in D \setminus N$ θα ισχύει:

$$\int_{X \times X} g(x, y) d\nu^t(x, y) = \lim_n \int_{X \times X} g_{k_n}(x, y) d\nu^t(x, y) = 0$$

Δείξαμε λοιπόν ότι για κάθε $g \in C(X \times X)$ με $g\,|_{\pi_1^{-1}(D)} = 0$ και για κάθε $t \in D \setminus N$ ισχύει:

$$\int_{X \times X} g(x, y) d\nu^t(x, y) = 0 \tag{3.5}$$

Έστω τώρα $t \in D \setminus N$.
Θα δείξουμε ότι κάθε ανοικτό υποσύνολο U του $X \times X$ με $U \cap \pi_1^{-1}(D) = \emptyset$ είναι ν^t-μηδενικό, και αυτό αποδεικνύει τον ισχυρισμό I.
Υποθέτουμε αντίθετα ότι υπάρχει ένα τέτοιο σύνολο U με $\nu^t(U) > 0$.
Από την εσωτερική κανονικότητα του ν^t, υπάρχει συμπαγές υποσύνολο K του U με $\nu^t(K) > 0$.
Αφού τα K, U^c είναι κλειστά και ξένα, από το Λήμμα του Urysohn μπορούμε να βρούμε μια συνεχή συνάρτηση $g : X \times X \to [0, 1]$ ώστε $g\,|_K = 1$ και $g\,|_{U^c} = 0$.
Εφ' όσον $\pi_1^{-1}(D) \subseteq U^c$, έχουμε ότι $g\,|_{\pi_1^{-1}(D)} = 0$, και άρα $\int_{X \times X} g(x, y) d\nu^t(x, y) = 0$ από την (3.5) (και αφού $t \in D \setminus N$).
Από την άλλη όμως,

$$\begin{aligned} \int_{X \times X} g(x, y) d\nu^t(x, y) &= \int_U g(x, y) d\nu^t(x, y) \\ &\geqslant \int_K g(x, y) d\nu^t(x, y) = \nu^t(K) > 0 \end{aligned}$$

άτοπο.
Άρα πράγματι $\nu^t(U) = 0$ και ο ισχυρισμός απεδείχθη.

<u>ΙσχυρισμόςII</u> : υπάρχει $N \in \mathcal{B}(X)$ με $\mu_1(N) = 0$, ώστε αν $t \notin N$, τότε $\text{supp}(\nu^t) \subseteq \pi_1^{-1}(\{t\})$.
Επειδή ο X είναι συμπαγής μετρικός χώρος, μπορούμε να βρούμε μια αριθμήσιμη οικογένεια $\{D_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ανοικτών σφαιρών του X, με την εξής ιδιότητα:

$$\forall \varepsilon > 0, \text{η υποοικογένεια } \{D_n : diam(D_n) < \varepsilon\} \text{ καλύπτει τον } X$$ [2]

Από τον ισχυρισμό I, υπάρχει μια ακολουθία $(N_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μ_1-μηδενικών υποσυνόλων του X, ώστε: για κάθε $n \in \mathbb{N}$, αν $t \in D_n \setminus N_n$, τότε $\text{supp}(\nu^t) \subseteq \pi_1^{-1}(D_n)$.
Θέτουμε $N = \bigcup_{n=1}^{\infty} N_n$, οπότε $\mu_1(N) = 0$.
Έστω $t \notin N$, και U ένα ανοικτό υποσύνολο του $X \times X$, με $U \cap \pi_1^{-1}(\{t\}) = \emptyset$.
Από την κατάσκευή της $\{D_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε $t \in D_n$ και $\pi_1^{-1}(D_n) \cap U = \emptyset$ [3]
Αλλά $\text{supp}(\nu^t) \subseteq \pi_1^{-1}(D_n)$, αφού $t \in D_n \setminus N$, και άρα $\nu^t(U) = 0$.
Επομένως $\text{supp}(\nu^t) \subseteq \pi_1^{-1}(\{t\}) \quad \forall t \notin N$.

Για κάθε $t \in N$ θεωρούμε το μέτρο:

$$\mu^t(E) = \nu^t(X \times E),\ E \in \mathcal{B}(X)$$

(δηλαδή μ^t είναι το $2^{\text{ο}}$ περιθωριακό μέτρο του ν^t),
για το οποίο παρατηρούμε ότι $\mu^t(X) = \nu^t(X \times X) = 1$, από την (3.4).
Λόγω του ισχυρισμού (II), για κάθε $g \in C(X \times X)$ έχουμε:

$$\begin{aligned}\int_{X\times X} g(x,y)d\nu^t(x,y) &= \int_{\pi_1^{-1}(\{t\})} g(x,y)d\nu^t(x,y) \\ &= \int_{X\times X} g(x,y)\chi_{\pi_1^{-1}(\{t\})}(x,y)d\nu^t(x,y)\end{aligned}$$

Αν $x \neq t$, τότε η ολοκληρωτέα συνάρτηση μηδενίζεται, ενώ για $x = t$ η ολοκληρωτέα ισούται με $g(t,y)$. Άρα η προηγούμενη ισότητα γράφεται:

$$\int_{X\times X} g(x,y)d\nu^t(x,y) = \int_{X\times X} g(t,y)d\nu^t(x,y) = \int_X g(t,y)d\mu^t(y) \quad \forall g \in C(X \times X) \tag{3.6}$$

Αποδεικνύουμε τώρα τα (i) και (ii) του Λήμματος.

(i) Αν $E \in \mathcal{B}(X)$, θα δείξουμε ότι η συνάρτηση $t \mapsto \mu^t(E)$ είναι Borel μετρήσιμη.

[2] αφού ο X είναι διαχωρίσιμος, υπάρχει ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ πυκνή στον X. Θα δείξουμε ότι η οικογένεια όλων των ανοικτών σφαιρών $S(x_n, \frac{1}{m})$, $n, m \in \mathbb{N}$, έχει την ζητούμενη ιδιότητα. Πράγματι: έστω $\varepsilon > 0$. Επιλέγουμε $m_0 \in \mathbb{N}$ με $\frac{1}{m_0} < \frac{\varepsilon}{2}$. Τότε, για κάθε $m \geqslant m_0$ και $n \in \mathbb{N}$ έχουμε ότι: $diam\big(S(x_n, \frac{1}{m})\big) \leqslant \frac{2}{m} < \varepsilon$ και επιπλέον $X = \cup\{S(x_n, \frac{1}{m}) : n \in \mathbb{N}, m \geqslant m_0\}$, από τον ορισμό της $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$

[3] έστω $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}dist(t, \pi(U))$. Αφού $X = \cup\{D_n : diam(D_n) < \varepsilon\}$, υπάρχει D_n ώστε $t \in D_n$ και $diam(D_n) < \varepsilon$. Αλλά τότε $D_n \cap \pi(U) = \emptyset$, και άρα $\pi_1^{-1}(D_n) \cap U = \emptyset$

Θα κάνουμε χρήση του ακόλουθου Λήμματος από την Θεωρία Μέτρου (βλ. [6], Πρ. 8.17).

Λήμμα: *Έστω Ψ μετρικός χώρος, ρ ένα πεπερασμένο μέτρο Borel στον Ψ και $f : \Psi \to \mathbb{R}$ Borel μετρήσιμη συνάρτηση. Τότε υπάρχει ακολουθία συνεχών συναρτήσεων $g_n : \Psi \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, ώστε $\sup\limits_{y\in\Psi} |g_n(y)| \leqslant \sup\limits_{y\in\Psi} |f(y)|$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$ και $g_n \to f$ κατά σημείο (ρ-σχεδόν παντού.)*
Από την μετρησιμότητα της απεικόνισης B, έχουμε ότι για κάθε $g \in C(X \times X)$ η συνάρτηση

$$t \mapsto B(t)g = \int\limits_{X\times X} g(x,y) d\nu^t(x,y)$$

είναι Borel μετρήσιμη.
Έστω $S \in \mathcal{B}(X \times X)$.
Εφαρμόζοντας το προηγούμενο Λήμμα για την συνάρτηση χ_S, τον μετρικό χώρο $X \times X$ και το μέτρο ν^t, βρίσκουμε μια ακολουθία συνεχών συναρτήσεων $g_n : X \times X \to \mathbb{R}$ ώστε

$$|g_n(x,y)| \leqslant \sup_{x,y\in X} |g_n(x,y)| \leqslant 1 \quad \forall\, n \in \mathbb{N}, \forall\, (x,y) \in X \times X$$

και $g_n \to \chi_S$ ν^t-σχεδόν παντού.
Τότε, από το Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης του Lebesgue (εφ' όσον η σταθερή συνάρτηση $\mathbf{1}$ είναι ν^t-ολοκληρώσιμη, γιατί το ν^t είναι πεπερασμένο μέτρο), έχουμε ότι:

$$\nu^t(S) = \int\limits_{X\times X} \chi_S(x,y) d\nu^t(x,y) = \lim_n \int\limits_{X\times X} g_n(x,y) d\nu^t(x,y)$$

Άρα για κάθε $S \in \mathcal{B}(X \times X)$, η συνάρτηση $t \mapsto \nu^t(S)$ είναι Borel μετρήσιμη, ως το κατά σημείο όριο μιας ακολουθίας Borel μετρήσιμων συναρτήσεων.
Έπεται ότι και η συνάρτηση $t \mapsto \mu^t(E) = \nu^t(E \times X)$ είναι Borel μετρήσιμη.

(ii) Θα δείξουμε ότι $\mu(S) = \int\limits_X \int\limits_X \chi_S(x,y) d\mu^x(y) d\mu_1(x) \quad \forall\, S \in \mathcal{B}(X \times X)$.
Έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} \int\limits_{X\times X} g(x,y) f(x) d\mu(x,y) &\overset{(3.3)}{=} \int\limits_X \Big(\int\limits_{X\times X} g(x,y) d\nu^t(x,y) \Big) f(t) d\mu_1(t) \\ &= \int\limits_X \Big(\int\limits_X g(t,y) d\mu^t(y) \Big) f(t) d\mu_1(t) \quad \forall\, f \in L^1(X,\mu_1), \forall\, g \in C(X \times X) \end{aligned}$$

απ' όπου, θέτοντας $f = \mathbf{1}$, προκύπτει ότι:

$$\int\limits_{X\times X} g(x,y) d\mu(x,y) = \int\limits_X \Big(\int\limits_X g(t,y) d\mu^t(y) \Big) d\mu_1(t) \quad \forall\, g \in C(X \times X) \tag{3.7}$$

Αρκεί να δείξουμε ότι η (3.7) ισχύει και αν η g είναι η χαρακτηριστική συνάρτηση ενός Borel υποσυνόλου του $X \times X$.
Έστω λοιπόν $S \in \mathcal{B}(X \times X)$ και $g_n : X \times X \to \mathbb{R}$ συνεχείς συναρτήσεις όπως στην απόδειξη

του (i), με $g_n \mapsto \chi_S$ μ-σχεδόν παντού.
Έχουμε τότε:

$$\mu(S) = \int\limits_{X\times X} \chi_S(x,y)d\mu(x,y) = \lim_n \int\limits_{X\times X} g_n(x,y)d\mu(x,y)$$

$$\overset{3.7}{=} \lim_n \int\limits_X \big(\int\limits_X g(x,y)d\mu^x(y)\big)d\mu_1(x) \tag{3.8}$$

Για κάθε $x \in X$ θέτουμε $\omega_n(y) = g_n(x,y),\ \omega(y) = \chi_S(x,y)$.
Από τις ιδιότητες της $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ έχουμε ότι $|\omega_n| \leqslant 1$ και $\omega_n \to \omega$ κατά σημείο (μ^x-σχεδόν παντού).
Άρα, από το Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης και εφ' όσον το μέτρο μ^x είναι πεπερασμένο, έχουμε ότι:

$$\lim_n \int\limits_X \omega_n(y)d\mu^x(y) = \int\limits_X \omega(y)d\mu^x(y)$$

Επομένως, αν $\phi_n(x) = \int\limits_X \omega_n(y)d\mu^x(y)$ και $\phi(x) = \int\limits_X \omega(y)d\mu^x(y)$, έχουμε ότι $\phi_n \to \phi$ κατά σημείο (μ_1-σχεδόν παντού), και ακόμα $|\phi_n(x)| \leqslant \int\limits_X |\omega_n(y)|d\mu^x(y) \leqslant \mu^x(X) = 1 \quad \forall\, x \in X,\, n \in \mathbb{N}$.
Άρα, από το Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης και πάλι (και αφού το μ_1 είναι πεπερασμένο),

$$\lim_n \int\limits_X \phi_n(x)d\mu_1(x) = \int\limits_X \phi(x)d\mu_1(x)$$

δηλαδή:

$$\lim_n \int\limits_X \big(\int\limits_X g_n(x,y)d\mu^x(y)\big)d\mu_1(x) = \int\limits_X \big(\int\limits_X \chi_S(x,y)d\mu^x(y)\big)d\mu_1(x)$$

Από την (3.8)έπεται τώρα ότι:

$$\mu(S) = \int\limits_X \big(\int\limits_X \chi_S(x,y)d\mu^x(y)\big)d\mu_1(x).$$

$\square$

Σύμφωνα με το (ii) του προηγούμενου Λήμματος, για κάθε $S \in \mathcal{B}(X\times X)$ ισχύει:

$$\int\limits_{X\times X} \chi_S(x,y)\, d\mu(x,y) = \int\limits_X \big(\int\limits_X \chi_S(x,y)\, d\mu^x(y)\big)\, d\mu_1(x)$$

Λόγω της γραμμικότητας του ολοκληρώματος, συμπεραίνουμε ότι:

$$\int\limits_{X\times X} f(x,y)d\mu(x,y) = \int\limits_X \big(\int\limits_X f(x,y)d\mu^x(y)\big)d\mu_1(x) \tag{3.9}$$

για κάθε απλή, μετρήσιμη συνάρτηση $f : X\times X \to \mathbb{R}$.
Θα αποδείξουμε ότι η (3.9) ισχύει επιπλέον στις εξής περιπτώσεις:

1. αν f είναι μια μη αρνητική, μετρήσιμη συνάρτηση

2. αν f είναι μια ολοκληρώσιμη (ως προς μ) συνάρτηση, με μιγαδικές τιμές.

<u>1η Περίπτωση :</u>
Έστω $f : X \times X \to [0, \infty)$ μετρήσιμη συνάρτηση. Θεωρούμε μια αύξουσα ακολουθία $s_n : X \times X \to [0, \infty)$ απλών, μετρήσιμων συναρτήσεων, με $s_n \to f$ κατά σημείο.
Για κάθε $x \in X$, θέτουμε:

$$t_n(y) = s_n(x, y),\ n \in \mathbb{N} \text{ και } f_1(y) = f(x, y)$$

Από τον ορισμό της $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$, έχουμε ότι η $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι μια αύξουσα ακολουθία μη αρνητικών, απλών, μετρήσιμων συναρτήσεων, που συγκλίνει κατά σημείο στην f_1.
Άρα, από το Θεώρημα Μονότονης Σύγκλισης του Lebesgue θα ισχύει:

$$\lim_n \int\limits_X t_n(y) d\mu^x(y) = \int\limits_X f_1(y) d\mu^x(y) \quad \forall x \in X \tag{3.10}$$

Επίσης θέτουμε:

$$g_n(x) = \int\limits_X t_n(y) d\mu^x(y),\ n \in \mathbb{N} \quad \text{και} \quad g(x) = \int\limits_X f_1(y) d\mu^x(y)$$

Προφανώς g_n, $g \geqslant 0$.
Αφού η $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι αύξουσα (και το μέτρο μ^x είναι πεπερασμένο), από την μονοτονία του ολοκληρώματος έχουμε ότι η $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι αύξουσα.
Επιπλέον, $g_n \to g$ από την (3.10).
Άρα, από το Θεώρημα Μονότονης Σύγκλησης θα ισχύει:

$$\int\limits_X \Big(\int\limits_X f(x, y) d\mu^x(y) \Big) d\mu_1(x) = \int\limits_X g(x) d\mu_1(x) = \lim_n \int\limits_X g_n(x) d\mu_1(x) \tag{3.11}$$

Αλλά, χρησιμοποιώντας την (3.9) και το Θεώρημα Μονότονης Σύγκλησης για την ακολουθία $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$, έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} \lim_n \int\limits_X g_n(x) d\mu_1(x) &= \lim_n \int\limits_X \Big(\int\limits_X s_n(x, y) d\mu^x(y) \Big) d\mu_1(x) \\ &= \lim_n \int\limits_{X \times X} s_n(x, y) d\mu(x, y) \\ &= \int\limits_{X \times X} f(x, y) d\mu(x, y) \end{aligned}$$

Συνεπώς από την (3.11) έπεται ότι:

$$\int\limits_{X \times X} f(x, y) d\mu(x, y) = \int\limits_X \Big(\int\limits_X f(x, y) d\mu^x(y) \Big) d\mu_1(x)$$

για κάθε μετρήσιμη συνάρτηση $f : X \times X \to [0, +\infty)$.

Παρατήρηση : Ιδιαιτέρως, αν $f : X \times X \to [0, +\infty)$ είναι μια μ-ολοκληρώσιμη συνάρτηση, τότε από την προηγούμενη ισότητα έχουμε ότι η (μη αρνητική) συνάρτηση

$$x \mapsto \int\limits_X f(x,y) d\mu^x(y)$$

είναι ολοκληρώσιμη ως προς μ_1, και συνεπώς:

$$\int\limits_X f(x,y) d\mu^x(y) < \infty \ \ \mu_1\text{-σχεδόν } \ \forall\, x \in X.$$

Επομένως, η συνάρτηση $y \mapsto f(x,y)$ είναι μ^x-ολοκληρώσιμη, μ_1-σχεδόν $\forall\, x \in X$.

2η Περίπτωση :
Έστω $f : X \times X \to \mathbb{R}$ μια ολοκληρώσιμη ως προς μ συνάρτηση.
Γράφουμε $f = f^+ - f^-$, όπου οι συναρτήσεις f^+, f^- είναι μη αρνητικές, ολοκληρώσιμες ως προς μ.
Άρα, σύμφωνα με τα προηγούμενα και την 1η περίπτωση, θα ισχύει:

$$\begin{aligned}
\int\limits_{X\times X} f(x,y)\, d\mu(x,y) &= \int\limits_{X\times X} f^+(x,y)\, d\mu(x,y) - \int\limits_{X\times X} f^-(x,y)\, d\mu(x,y) \\
&= \int\limits_X \Big(\int\limits_X f^+(x,y) d\mu^x(y) \Big) d\mu_1(x) - \int\limits_X \Big(\int\limits_X f^-(x,y) d\mu^x(y) \Big) d\mu_1(x) \\
&= \int\limits_X \Big(\int\limits_X f^+(x,y) d\mu^x(y) - \int\limits_X f^-(x,y) d\mu^x(y) \Big) d\mu_1(x) \\
&= \int\limits_X \Big(\int\limits_X (f^+(x,y) - f^-(x,y)) d\mu^x(y) \Big) d\mu_1(x) \\
&= \int\limits_X \Big(\int\limits_X f(x,y) d\mu^x(y) \Big) d\mu_1(x)
\end{aligned}$$

3η Περίπτωση : Έστω $f \in L^1(X \times X, \mu)$.
Η f γράφεται: $f = u + iv$, όπου u, v πραγματικές συναρτήσεις, ολοκληρώσιμες ως προς μ.
Από την 2η περίπτωση (και με συλλογισμούς ανάλογους της προηγούμενης παρατήρησης), έχουμε

ότι:

$$\begin{aligned}
\int\limits_{X\times X} f(x,y)\,d\mu(x,y) &= \int\limits_{X\times X} u(x,y)\,d\mu(x,y) + i\int\limits_{X\times X} v(x,y)\,d\mu(x,y)\\
&= \int\limits_X \big(\int\limits_X u(x,y)d\mu^x(y)\big)d\mu_1(x) + i\int\limits_X \big(\int\limits_X v(x,y)d\mu^x(y)\big)d\mu_1(x)\\
&= \int\limits_X \big(\int\limits_X u(x,y)d\mu^x(y) + i\int\limits_X v(x,y)d\mu^x(y)\big)d\mu_1(x)\\
&= \int\limits_X \big(\int\limits_X (u(x,y)+iv(x,y))d\mu^x(y)\big)d\mu_1(x)\\
&= \int\limits_X \big(\int\limits_X f(x,y)d\mu^x(y)\big)d\mu_1(x)
\end{aligned}$$

Αποδείξαμε λοιπόν το εξής:

Πόρισμα 3.4. *Έστω X, μ, μ^x, μ_y όπως στο προηγούμενο Λήμμα. Τότε για κάθε μετρήσιμη συνάρτηση $f : X\times X \to [0,+\infty)$ ή $f\in L^1(X\times X,\mu)$, ισχύει:*

$$\int\limits_{X\times X} f(x,y)\,d\mu(x,y) = \int\limits_X \big(\int\limits_X f(x,y)d\mu^x(y)\big)d\mu_1(x) = \int\limits_X \big(\int\limits_X f(x,y)d\mu_y(x)\big)d\mu_2(y)$$

Στο εξής, γράφοντας:

$$d\mu(x,y) = d\mu^x(y)d\mu_1(x) = d\mu_y(x)d\mu_2(y)$$

θα εννούμε πάντα τις ισότητες του προηγούμενου Πορίσματος ή αντίστοιχες ισότητες που προκύπτουν από άλλα (θετικά) μέτρα.

Πρόταση 3.5. *Για κάθε $\mu\in A(X\times X,m)$ υπάρχουν οικογένειες $\{\mu^x : x\in X\}$, $\{\mu_y : y\in X\}$ μιγαδικών μέτρων Borel στον X, ώστε:*
(I) $|\mu^x|(X)\leqslant \|\mu\|$ *και* $|\mu_y|(X)\leqslant\|\mu\| \quad \forall\, x,y\in X$
(II) $\forall\, E\in\mathcal{B}(X)$, *οι συναρτήσεις* $x\mapsto\mu^x(E)$, $y\mapsto\mu_y(E)$ *είναι Borel μετρήσιμες*
(III) $\mu(S) = \int\limits_X\big(\int\limits_X \chi_S(x,y)d\mu^x(y)\big)dm(x) = \int\limits_X\big(\int\limits_X \chi_S(x,y)d\mu_y(x))\big)dm(y) \quad \forall\, S\in\mathcal{B}(X\times X)$
(IV) $d|\mu|(dx,dy) = d|\mu^x|(y)\cdot dm(x) = d|\mu_y|(x)\cdot dm(y)$
Επιπλέον, αν $\{\nu^x : x\in X\}$, $\{\nu_y :\ y\in X\}$ είναι δύο άλλες οικογένειες μέτρων που ικανοποιούν τα (II) και (III), τότε:

$$\mu^x = \nu^x \;\; m\text{-σχεδόν}\ \forall\, x\in X \;\text{ και }\; \mu_y = \nu_y \;\; m\text{-σχεδόν}\ \forall\, y\in X.$$

Απόδειξη. Λόγω συμμετρίας, αρκεί να αποδείξουμε μόνο το μέρος της Πρότασης που αφορά τα μέτρα μ^x.
Εφαρμόζοντας το Λήμμα 3.3 για το πεπερασμένο, θετικό μέτρο $\sigma = |\mu|$, βρίσκουμε μια οικογένεια $\{\sigma^x :\ x\in X\}$ μέτρων Borel πιθανότητας στον X, ώστε:

$$\forall\, E\in\mathcal{B}(X) \text{ η συνάρτηση } x\mapsto\sigma^x(E) \text{ είναι Borel μετρήσιμη, και}$$

$$d\sigma(x,y) = d\sigma^x(y)d\sigma_1(x) \tag{3.12}$$

Αφού $\mu \in A(X \times X, m)$, έχουμε ότι $\sigma_1 = |\mu|_1 \leqslant \|\mu\| \cdot m$, οπότε $\sigma_1 \ll m$.
Άρα από το Θεώρημα Radon-Nikodym (βλ. Θεώρ. 1.5) υπάρχει η παράγωγος Radon-Nikodym $\omega = \frac{d\sigma_1}{dm} : X \to [0, +\infty)$, η οποία είναι ολοκληρώσιμη ως προς m και ικανοποιεί:

$$d\sigma_1(x) = \omega(x)dm(x) \tag{3.13}$$

Επιπλέον, από την ανισότητα $\sigma_1 \ll \|\mu\| \cdot m$ προκύπτει[4] ότι:

$$\omega(x) \leqslant \|\mu\| \quad m\text{-σχεδόν } \forall\, x \in X$$

Μάλιστα, μπορούμε να επιλέξουμε την ω έτσι, ώστε[5]:

$$\omega(x) \leqslant \|\mu\| \quad \forall\, x \in X$$

Επίσης, εφ' όσον $\mu \ll |\mu| = \sigma$, υπάρχει η παράγωγος Radon-Nikodym $u = \frac{d\mu}{d\sigma} : \ X \times X \to \mathbb{C}$, η οποία είναι ολοκληρώσιμη ως προς σ και ικανοποιεί τις σχέσεις:

$$\mu(S) = \int_S u(x,y)d\sigma(x,y) \quad \forall\, S \in \mathcal{B}(X \times X) \tag{3.14}$$

και

$$|u(x,y)| = 1 \quad \forall\, (x,y) \in X \times X$$

Για κάθε $x \in X$, θέτουμε:

$$\mu^x(A) = \omega(x) \int\limits_A u(x,y)\, d\sigma^x(y) \tag{3.15}$$

Παρατηρούμε ότι για κάθε $A \in \mathcal{B}(X)$ και $x \in X$, η συνάρτηση $y \mapsto \chi_A(y)u(x,y)$ είναι σ^x-ολοκληρώσιμη, αφού

$$\int\limits_X |\chi_A(y)u(x,y)|\ d\sigma^x(y) = \sigma^x(A) < \infty$$

Επομένως το μ^x είναι ένα καλά ορισμένο μιγαδικό μέτρο Borel στον X.)
Δείχνουμε τώρα ότι η οικογένεια $\{\mu^x : \ x \in X\}$ έχει τις ζητούμενες ιδιότητες.

(I) Έστω $x \in X$. Για κάθε $A \in \mathcal{B}(X)$ έχουμε:

$$|\mu^x(A)| \leqslant \omega(x) \int\limits_A |u(x,y)|\ d\sigma^x(y) = \omega(x)\sigma^x(A) \leqslant \|\mu\| \cdot \sigma^x(A)$$

[4]Πράγματι: έχουμε ότι $\int\limits_A \omega(x)dm(x) \leqslant \|\mu\|\, m(A) \quad \forall\, A \in \mathcal{B}(X)$. Εφαρμόζοντας τη σχέση αυτή για την ακολουθία $A_n = [\omega \geqslant \|\mu\| + \frac{1}{n}], n = 1, 2, ...,$ βρίσκουμε ότι $\big(\|\mu\| + \frac{1}{n}\big)m(A_n) \leqslant \|\mu\|\, m(A_n)$ $\forall\, n = 1, 2, ...,$ απ' όπου $m(A_n) = 0\ \forall\, n = 1, 2, ...$.
Τώρα, παρατηρώντας ότι $[\,\omega > \|\mu\|\,] = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$, συμπεραίνουμε ότι $m\big([\,\omega > \|\mu\|\,]\big) = 0$, δηλαδή $\omega \leqslant \|\mu\|$ m-σ.π.

[5]Αν $N = [\,\omega > \|\mu\|\,]$, όπου βέβαια $m(N) = 0$, θέτουμε: $\omega_1(x) = \begin{cases} \omega(x), & x \notin N \\ \|\mu\|, & x \in N \end{cases}$
Η συνάρτηση ω_1 είναι Borel μετρήσιμη, διότι:
$\omega_1(x) = \omega(x)\chi_{N^c}(x) + \|\mu\|\, \chi_N(x)\,)$
και m-σχεδόν παντού ίση με την ω, εφ' όσον $[\,\omega \neq \omega_1\,] \subseteq N$. Επίσης, $\omega_1(x) \leqslant \|\mu\| \quad \forall x \in X$. Τέλος $\sigma_1(A) = \int\limits_A \omega(x)m(dx) = \int\limits_A \omega_1(x)m(dx) \quad \forall\, A \in \mathcal{B}(X)$

Έπεται [6] ότι $|\mu^x|(A) \leqslant \|\mu\| \cdot \sigma^x(A) \quad \forall\, A \in \mathcal{B}(X)$, και άρα $|\mu^x|(X) \leqslant \|\mu\|$, αφού το σ^x είναι μέτρο Borel πιθανότητας.

(II) Δείχνουμε ότι για κάθε $A \in \mathcal{B}(X)$, η συνάρτηση:

$$x \mapsto \mu^x(A) = \omega(x) \cdot \int\limits_A u(x,y)\, d\sigma^x(y)$$

είναι Borel μετρήσιμη.
Άρκεί βέβαια να δείξουμε ότι η $x \mapsto \int\limits_A u(x,y)\, d\sigma^x(y)$ είναι Borel μετρήσιμη, και μάλιστα αρκεί να θεωρήσουμε την περίπτωση όπου η u είναι η χαρακτηριστική συνάρτηση κάποιου Borel υποσυνόλου του $X \times X$.
Έστω λοιπόν $S \in \mathcal{B}(X \times X)$, και $f_S(x) = \int\limits_A \chi_S(x,y)\, d\sigma^x(y)$.
Η f_S γράφεται: $f_S(x) = \int\limits_X \chi_A(x,y)\chi_{S^x}(y)\, d\sigma^x(y) = \sigma^x(A \cap S^x)$.
Παρατηρούμε ότι αν $S = E \times F$, όπου $E,\ F \in \mathcal{B}(X)$, τότε:

$$S^x = \begin{cases} F, & \text{αν } x \in E \\ \emptyset, & \text{αν } x \notin E \end{cases}$$

οπότε

$$f_S(x) = \begin{cases} \sigma^x(A \cap F), & \text{αν } x \in E \\ 0, & \text{αν } x \notin E \end{cases}$$

δηλαδή $f_S(x) = \sigma^x(A \cap F) \cdot \chi_E(x)$.
Έπεται ότι η f_S είναι Borel μετρήσιμη, αφού η $x \mapsto \sigma^x(A \cap F)$ είναι Borel μετρήσιμη.
Θεωρούμε τώρα την οικογένεια:

$$\mathcal{C} = \{S \in \mathcal{B}(X \times X) :\ \text{η } f_S(x) = \sigma^x(A \cap S^x) \text{ είναι Borel μετρήσιμη}\}$$

Από τα προηγούμενα, η $\mathcal{C}$ περιέχει τα μετρήσιμα ορθογώνια του $X \times X$.
Επιπλέον παρατηρούμε τα εξής:
• Αν $S_1,\ S_2 \in \mathcal{C}$ με $S_1 \subseteq S_2$, τότε και $S_2 \setminus S_1 \in \mathcal{C}$.
Πράγματι: επειδή $(S_2 \setminus S_1)^x = S_2^x \setminus S_1^x$, θα έχουμε:

$$f_{S_2 \setminus S_1}(x) = \sigma^x\big(A \cap (S_2 \setminus S_1)^x\big) = \sigma^x(A \cap S_2^x) - \sigma^x(A \cap S_1^x) = f_{S_2}(x) - f_{S_1}(x),$$

όποτε η $f_{S_2 \setminus S_1}$ είναι Borel μετρήσιμη.
• Αν $(S_n)_n$ είναι μια αύξουσα ακολουθία στην $\mathcal{C}$, τότε $S = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} S_n \in \mathcal{C}$.
Πράγματι: εφ' όσον $(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} S_n)^x = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} S_n^x$ και η $(S_n^x)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι επίσης αύξουσα, έχουμε:

$$f_S(x) = \sigma^x\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty}(A \cap S_n^x)\Big) = \lim_n \sigma^x(A \cap S_n^x) = \lim_n f_{S_n}(x),$$

[6]διότι η κύμανση $|\mu^x|$ του μ^x είναι το μικρότερο θετικό μέτρο Borel στον X που ικανοποιεί την ανισότητα:

$$|\mu^x|(A) \leqslant |\mu^x|(A) \quad \forall\, A \in \mathcal{B}(X)$$

και άρα η f_S είναι Borel μετρήσιμη.
Επομένως η $\mathcal{C}$ είναι κλάση Dynkin στον $X \times X$ και περιέχει την (κλειστή ως προς πεπερασμένες τομές) οικογένεια των μετρήσιμων ορθογωνίων του $X \times X$.
Έπεται ότι $\mathcal{C} = \mathcal{B}(X \times X)$, κι αυτόολοκληρώνει την απόδειξη του (II) απεδείχθη.

(III) Για κάθε $S \in \mathcal{B}(X \times X)$ θα δείξουμε ότι:

$$\mu(S) = \int\limits_X \big(\int\limits_X \chi_S(x,y)\, d\mu^x(y)\big)\, dm(x)$$

Από την (3.14) ισχύει:

$$\mu(S) = \int\limits_{X\times X} \chi_S(x,y) u(x,y)\, d\sigma(x,y)$$

Παρατηρούμε ότι $\chi_S \cdot u \in L^1(X \times X, \sigma)$, αφού

$$\int\limits_{X\times X} |\chi_S(x,y)u(x,y)|\, d\sigma(x,y) = \sigma(S) < \infty,$$

και συνεπώς λόγω της (3.12) έχουμε ότι:

$$\mu(S) = \int\limits_X \big(\int\limits_X \chi_S(x,y) u(x,y)\, d\sigma^x(y)\big)\, d\sigma_1(x)$$

Χρησιμοποιώντας τώρα τις σχέσεις (3.13) και 3.15, βρίσκουμε ότι:

$$\begin{aligned}
\mu(S) &= \int\limits_X \big(\omega(x) \int\limits_X \chi_S(x,y) u(x,y)\, d\sigma^x(y)\big)\, dm(x) \\
&= \int\limits_X \big(\omega(x) \int\limits_{S^x} u(x,y)\, d\sigma^x(y)\big)\, dm(x) \\
&= \int\limits_X \mu^x(S^x)\, dm(x) \\
&= \int\limits_X \big(\int\limits_X \chi_S(x,y)\, d\mu^x(y)\big)\, dm(x)
\end{aligned}$$

(IV) Δείχνουμε πρώτα ότι:

$$d\,|\mu^x|\,(y) = \omega(x) d\sigma^x(y) \quad \forall\, x \in X \tag{3.16}$$

Από τον ορισμό του μ^x έχουμε ότι $\mu^x \ll \sigma^x$, συνεπώς υπάρχει η παράγωγος Radon-Nikodym $g = \frac{d\mu^x}{d\sigma^x}$, και ισχύει:

$$g(y) = \omega(x) u(x,y) \quad \sigma^x\text{-σχεδόν } \forall\ y \in X$$

Τότε, (βλ. [6] πρ. 10.29), υπάρχει και η παράγωγος Radon-Nikodym $G = \frac{d|\mu^x|}{d\sigma^x}$, και μάλιστα ισχύει:

$$G(y) = |g(y)| = \omega(x) \quad \sigma^x\text{-σχεδόν } \forall\ y \in X.$$

Επομένως, για κάθε $A \in \mathcal{B}(X)$ έχουμε ότι:

$$|\mu^x|(A) = \int\limits_A \omega(x)\, d\sigma^x(y) = \omega(x)\sigma^x(A),$$

απ' όπου προκύπτει η 3.16.
Συνεπώς, για κάθε $S \in \mathcal{B}(X \times X)$ θα ισχύει:

$$\begin{aligned} |\mu|(S) &\overset{(3.12)}{=} \int\limits_X \Big(\int\limits_X \chi_S(x,y)\, d\sigma^x(y) \Big)\, d\sigma_1(x) \\ &\overset{(3.13)}{=} \int\limits_X \Big(\int\limits_X \chi_S(x,y)\omega(x)\, d\sigma^x(y) \Big)\, dm(x) \\ &\overset{(3.16)}{=} \int\limits_X \Big(\int\limits_X \chi_S(x,y)\, d|\mu^x|(y) \Big)\, dm(x), \end{aligned}$$

απ' όπου έπεται ότι $d|\mu|(x,y) = d|\mu^x|(y)dm(x)$.

Τέλος, υποθέτουμε ότι υπάρχει και μια δεύτερη οικογένεια $\{\nu^x : \ x \in X\}$ μιγαδικών μέτρων Borel στον X, που ικανοποιεί τα (II) και (III).
Θα δείξουμε ότι υπάρχει $N \in \mathcal{B}(X)$ με $m(N) = 0$, ώστε $\mu^x = \nu^x \quad \forall\, x \notin N$.
Επειδή ο X είναι standard χώρος Borel, μπορούμε να βρούμε μια αριθμήσιμη άλγεβρα Boole $\{F_n : \ n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{B}(X)$ που παράγει την Borel δομή του X, δηλαδή:

$$\mathcal{B}(X) = \sigma\big(\{F_n : \ n \in \mathbb{N}\}\big)$$

Θέτουμε $f_n(x) = \mu^x(F_n)$, $g_n(x) = \nu^x(F_n)$, $n \in \mathbb{N}$.
Από το (II) έχουμε ότι οι συναρτήσεις f_n, g_n είναι Borel μετρήσιμες.
Επιπλέον, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $E \in \mathcal{B}(X)$, από το (III) διαπιστώνουμε ότι:

$$\begin{aligned} \mu(E \times F_n) &= \int\limits_{X \times X} \chi_{E \times F_n}(x,y)\, d\mu(x,y) \\ &\overset{(III)}{=} \int\limits_X \Big(\int\limits_X \chi_E(x)\chi_{F_n}(y)\, d\mu^x(y) \Big)\, dm(x) \\ &= \int\limits_X \chi_E(x)\mu^x(F_n)\, dm(x) = \int\limits_E f_n(x)\, dm(x) \end{aligned}$$

ανάλογα και ότι:

$$\mu(E \times F_n) = \int\limits_E g_n(x)\, dm(x)$$

Επομένως, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, ισχύει:

$$\int_E f_n(x) dm(x) = \int\limits_E g_n(x)\, dm(x) \quad \forall\, E \in \mathcal{B}(X),$$

και συνεπώς $f_n = g_n \quad m$-σ.π.
Άρα, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει $N_n \in \mathcal{B}(X)$ με $m(N_n) = 0$, ώστε:

$$\mu^x(F_n) = \nu^x(F_n) \quad \forall\, x \notin N_n.$$

Θέτουμε $N = \bigcup_{n=1}^{\infty} N_n$.
Τότε $m(N) = 0$ και $\forall\, x \notin N$ ισχύει: $\mu^x(F_n) = \nu^x(F_n) \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$.
Εφ' όσον $\mathcal{B}(X) = \sigma(\{F_n :\ n \in \mathbb{N}\})$, έπεται τελικά ότι $\mu^x = \nu^x \quad \forall\, x \notin N$. $\square$

Ορισμός 3.6. *Οι οικογένειες μέτρων $\{\mu^x :\ x \in X\},\ \{\mu_y :\ y \in X\}$ που ορίσαμε στο προηγούμενο Θεώρημα, θα ονομάζονται στο εξής disintegrations του μέτρου $\mu \in A(X \times X, m)$.*

Σκοπός μας τώρα είναι να ορίσουμε έναν πολλαπλασιασμό στον χώρο $A(X \times X, m)$, με τον οποίο θα αποκτήσει την δομή μιας άλγεβρας με νόρμα.
Έστω $\mu,\ \nu \in A(X \times X, m)$.
Επιλέγουμε disintegrations $\{\mu_y :\ y \in X\},\ \{\nu^x :\ x \in X\}$ των μ και ν αντίστοιχα.
Για κάθε $S \in \mathcal{B}(X \times X)$ θεωρούμε την μιγαδική συνάρτηση:

$$h_S(z) = (\mu_z \times \nu^z)(S),$$

όπου $\mu_z \times \nu^z$ είναι το μέτρο γινόμενο των $\mu_z,\ \nu^z$ στον $X \times X$.

Ισχυρισμός 1 : η συνάρτηση h_S είναι Borel μετρήσιμη $\forall\ S \in \mathcal{B}(X \times X)$.
Παρατηρούμε τα εξής:
(i) Αν $S = A \times B$, όπου $A,\ B \in \mathcal{B}(X)$, τότε η $h_S(z) = \mu_z(A)\nu^z(B)$ είναι Borel μετρήσιμη, αφού οι συναρτήσεις $z \mapsto \mu_z(A)$, $z \mapsto \nu^z(B)$ είναι Borel μετρήσιμες (από το (II) της πρ. 3.5).
(ii) Αν $S_1,\ S_2 \in \mathcal{B}(X \times X)$ ώστε $S_1 \subseteq S_2$ και οι $h_{S_1},\ h_{S_2}$ είναι Borel μετρήσιμες, τότε και η $h_{S_2 \setminus S_1} = h_{S_2} - h_{S_1}$ είναι Borel μετρήσιμη.
(iii) Έστω $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ μια αύξουσα ακολουθία Borel υποσυνόλων του $X \times X$, ώστε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ η h_{S_n} είναι Borel μετρήσιμη. Αν $S = \bigcup_{n=1}^{\infty} S_n$, τότε και η h_S είναι Borel μέτρήσιμη.
Πράγματι: θέτουμε $C_1 = S_1$, $C_n = S_n \setminus S_{n-1}$, $n \geqslant 2$. Τότε τα $C_n \in \mathcal{B}(X \times X)$ είναι ξένα ανά δύο, $\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} S_n = S$ και από το (ii) η h_{C_n} είναι Borel μετρήσιμη για κάθε $n \in \mathbb{N}$.
Επομένως θα ισχύει:

$$(\mu_z \times \nu^z)(S) = (\mu_z \times \nu^z)(\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n) = \sum_{n=1}^{\infty} (\mu_z \times \nu^z)(C_n),$$

δηλαδή

$$h_S = h_{\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n},$$

και άρα η h_S είναι Borel μετρήσιμη. Από τα (i), (ii) και (iii) συμπεραίνουμε ότι η οικογένεια

$$\mathcal{E} = \{S \in \mathcal{B}(X \times X) :\ \text{η συνάρτηση } h_S \text{ είναι Borel μετρήσιμη}\}$$

είναι κλάση Dynkin στον $X \times X$ και περιέχει τα μετρήσιμα ορθογώνια του $X \times X$.
Έπεται ότι $\mathcal{E} = \mathcal{B}(X \times X)$, και αυτό αποδεικνύει τον ισχυρισμό.

Ισχυρισμός 2 : η h_S είναι ολοκληρώσιμη ως προς m για κάθε $S \in \mathcal{B}(X \times X)$.
Θεωρούμε την συνάρτηση $\phi(z) = ||\mu|| \cdot |\nu^z|(X)$, $z \in X$.
Τότε έχουμε ότι $0 \leqslant \phi(z) < \infty \quad \forall z \in X$ και η ϕ είναι Borel μετρήσιμη, διότι από την σχέση (3.16) της πρότασης 3.5, προκύπτει ότι:

$$|\nu^z|(X) = \omega(z)\sigma^z(X) \quad \forall z \in X,$$

όπου οι συναρτήσεις ω και $z \mapsto \sigma^z(X)$ είναι Borel μετρήσιμες.
Επιπλέον, $\phi \in L^1(X, m)$, εφ' όσον:

$$\begin{aligned}
\int_X \phi(x)\, dm(x) &= ||\mu|| \cdot \int_X |\nu^x|(X)\, dm(x) \\
&= ||\mu|| \cdot \int_X \Big(\int_X \chi_{X \times X}(x, y)\, d|\nu^x|(y) \Big)\, dm(x) \\
&\overset{IV}{=} ||\mu|| \cdot \int_{X \times X} \chi_{X \times X}(x, y)\, d|\nu|(x, y) \\
&= ||\mu|| \cdot |\nu|(X \times X) < +\infty
\end{aligned}$$

Τώρα από το Θεώρημα Fubini και το (I) της Πρότασης 3.5 έχουμε:

$$\begin{aligned}
|h_S(z)| &= |(\mu_z \times \nu^z)(S)| \\
&= \Big| \int_{X \times X} \chi_S(x, y)\, d(\mu_z \times \nu^z)(x, y) \Big| \\
&= \Big| \int_X \Big(\int_X \chi_S(x, y)\, d\mu_z(x) \Big)\, d\nu^z(y) \Big| \\
&\overset{7}{\leqslant} \int_X \Big(\int_X \chi_S(x, y)\, d|\mu_z|(x) \Big)\, d|\nu^z|(y) \\
&= \int_{X \times X} \chi_S(x, y)\, d(|\mu_z| \times |\nu^z|)(x, y) \\
&= (|\mu_z| \times |\nu^z|)(S) \\
&\leqslant (|\mu_z| \times |\nu^z|)(X \times X) \\
&= |\mu_z|(X) \cdot |\nu^z|(X) \\
&\overset{(I)}{\leqslant} ||\mu|| \cdot |\nu^z|(X) = \phi(z)
\end{aligned}$$

Δείξαμε λοιπόν ότι:

$$|h_S(z)| \leqslant \phi(z) \quad \forall z \in X \tag{3.17}$$

Συνεπώς, αφού $\phi \in L^1(X, m)$, έπεται ότι και $h_S \in L^1(X, m) \quad \forall\, S \in \mathcal{B}(X \times X)$.

Ορίζουμε:

$$(\mu * \nu)(S) := \int_X (\mu_z \times \nu^z)(S)\, dm(z), \quad S \in \mathcal{B}(X \times X)$$

[7] λόγω της γνωστής ανισότητας $|\int_X f d\mu| \leqslant \int_X |f| d|\mu|$, όπου μ μιγαδικό μέτρο και f ολοκληρώσιμη ως προς $|\mu|$

Πρόταση 3.7. *Η σύνολο-συνάρτηση $\mu * \nu$ ορίζει ένα μιγαδικό μέτρο Borel στον $X \times X$, το οποίο είναι ανεξάρτητο από την επιλογή των disintegrations για τα μ, ν.*

Απόδειξη. Προφανώς $(\mu * \nu)(\emptyset) = 0$.
Έστω $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία ξένων ανά δύο Borel υποσυνόλων του $X \times X$.
Έχουμε:

$$\begin{aligned} (\mu * \nu)(\bigcup_{n=1}^{\infty} S_n) &= \int_X (\mu_z \times \nu^z)(\bigcup_{n=1}^{\infty} S_n)\, dm(z) \\ &= \int_X \sum_{n=1}^{\infty} (\mu_z \times \nu^z)(S_n)\, dm(z) \\ &= \int_X \lim_k g_k(z)\, dm(z), \end{aligned} \tag{3.18}$$

όπου $g_k(z) = \sum_{n=1}^{k} (\mu_z \times \nu^z)(S_n),\ k \in \mathbb{N}$.
Αλλά από την (3.17) έχουμε ότι:

$$|g_k(z)| = |(\mu_z \times \nu^z)(\bigcup_{n=1}^{k} S_n)| \leqslant \phi(z) \quad \forall\, z \in X,\ \forall k \in \mathbb{N},$$

όπου $\phi \in L^1(X, m)$.
Άρα, από την (3.18) και το Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης του Lebesgue έπεται ότι:

$$\begin{aligned} (\mu * \nu)(\bigcup_{n=1}^{\infty} S_n) &= \lim_k \int_X g_k(z)\, dm(z) \\ &= \lim_k \sum_{n=1}^{k} \int_X (\mu_z \times \nu^z)(S_n)\, dm(z) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (\mu * \nu)(S_n) \end{aligned}$$

Δείξαμε επομένως ότι το $\mu * \nu$ είναι ένα μιγαδικό μέτρο στον $X \times X$.
Έστω τώρα $\{\mu_y^1 :\ y \in X\}$, $\{\nu_1^x : x \in X\}$ δύο άλλες disintegrations των μ και ν αντίστοιχα.
Θα δείξουμε ότι:

$$\int_X (\mu_z \times \nu^z)(S)\, dm(z) = \int_X (\mu_z^1 \times \nu_1^z)(S)\, dm(z) \quad \forall\, S \in \mathcal{B}(X \times X)$$

Από την Πρόταση 3.5, υπάρχουν $N_1,\ N_2 \in \mathcal{B}(X)$ με $m(N_1) = m(N_2) = 0$, ώστε:

$$\mu_y = \mu_y^1 \quad \forall\, y \notin N_1 \text{ και } \nu^x = \nu_1^x \quad \forall\, x \notin N_2.$$

Επομένως, θέτοντας $N = N_1 \cup N_2$, έχουμε ότι $m(N) = 0$ και $\forall\, z \notin N$ ισχύουν:

$$\mu_z = \mu_z^1 \text{ και } \nu^z = \nu_1^z.$$

Άρα, $\forall\, S \in \mathcal{B}(X \times X)$, οι συναρτήσεις $z \mapsto (\mu_z \times \nu^z)(S)$ και $z \mapsto (\mu_z^1 \times \nu_1^z)(S)$ είναι m-σ.π. ίσες, απ' όπου προκύπτει το ζητούμενο. □

Πρόταση 3.8. $\mu * \nu \in A(X\times X,m) \quad \forall\, \mu,\, \nu \in A(X\times X,m)$. *Μάλιστα ισχύει:*

$$||\mu * \nu|| \leqslant ||\mu|| \cdot ||\nu||$$

Απόδειξη. Έστω $A \in \mathcal{B}(X)$.
Έχουμε:

$$|\mu * \nu|_1(A) = |\mu * \nu|(A\times X) = sup \sum_{i=1}^{n} |(\mu * \nu)(S_i)|,$$

όπου το supremum λαμβάνεται ως προς κάθε πεπερασμένη, μετρήσιμη διαμέριση $\{S_1,...,S_n\}$ του $A\times X$.
Για κάθε διαμέριση έχουμε:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} |(\mu * \nu)(S_i)| &= \sum_{i=1}^{n} |\int_X (\mu_z \times \nu^z)(S_i)\, dm(z)| \\
&\leqslant \sum_{i=1}^{n} \int_X |(\mu_z \times \nu^z)(S_i)|\, dm(z) \\
&\leqslant \sum_{i=1}^{n} \int_X (|\mu_z| \times |\nu^z|)(S_i)\, dm(z) \\
&= \int_X (|\mu_z| \times |\nu^z|)(\bigcup_{i=1}^{n} S_i)\, dm(z) \\
&= \int_X (|\mu_z| \times |\nu^z|)(A\times X)\, dm(z) \\
&= \int_X |\mu_z|(A)\cdot |\nu^z|(X)\, dm(z) \\
&\overset{(I)}{\leqslant} ||\nu|| \cdot \int_X |\mu_z|(A)\, dm(z) \\
&= ||\nu|| \cdot \int_X \Big(\int_X \chi_A(x)\, d|\mu_z|(x) \Big)\, dm(z) \\
&= ||\nu|| \cdot \int_X \Big(\int_X \chi_{A\times X}(x,z)\, d|\mu_z|(x) \Big)\, dm(z) \\
&\overset{(IV)}{=} ||\nu|| \cdot \int_{X\times X} \chi_{A\times X}(x,z)\, d|\mu|(x,z) \\
&= ||\nu|| \cdot |\mu|(A\times X) = ||\nu|| \cdot |\mu|_1(A) \\
&\leqslant ||\nu|| \cdot ||\mu|| \cdot m(A)
\end{aligned}$$

Έπεται ότι $|\mu * \nu|_1(A) \leqslant ||\mu|| \cdot ||\nu|| \cdot m(A) \quad \forall\, A \in \mathcal{B}(X)$.
Ανάλογα προκύπτει και η ανισότητα:

$$|\mu * \nu|_2(A) \leqslant ||\mu|| \cdot ||\nu|| \cdot m(A) \quad \forall\, A \in \mathcal{B}(X)$$

Συμπεραίνουμε ότι $\mu * \nu \in A(X\times X,m)$ και μάλιστα $||\mu * \nu|| \leqslant ||\mu|| \cdot ||\nu||$.

$\square$

Ερχόμαστε τώρα στον κεντρικό σκοπό αυτής της ενότητας, που είναι ο ορισμός και η μελέτη των ψευδο-ολοκληρωτικών τελεστών. Οι τελεστές αυτοί "κατασκευάζονται" από τα μέτρα $\mu \in A(X \times X, m)$, όπως φαίνεται στο ακόλουθο Θεώρημα.

Θεώρημα 3.9. *Για κάθε $\mu \in A(X \times X, m)$ υπάρχει ένας μοναδικός τελεστής $T_\mu \in B\big(L^2(X,m)\big)$, ώστε:*

$$\langle T_\mu f, g\rangle = \int\limits_{X\times X} f(y)\overline{g(x)}\, d\mu(x,y) \quad \forall\, f,g \in L^2(X,m)$$

και $||T_\mu|| \leqslant ||\mu||$.

Απόδειξη. Θεωρούμε την απεικόνιση: $\phi:\, L^2(X,m)\times L^2(X,m) \to \mathbb{C}$, με

$$\phi(f,g) = \int\limits_{X\times X} f(y)\overline{g(x)}\, d\mu(x,y), \quad f,\, g \in L^2(X,m).$$

Αποδεικνύουμε πρώτα ότι η ϕ είναι καλά ορισμένη.
Αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε συνάρτηση $(x,y)\mapsto f(y)\overline{g(x)}$ είναι ολοκληρώσιμη ως προς $|\mu|$ (άρα και ως προς μ).
Από την Ανισότητα Cauchy-Schwarz έχουμε:

$$\begin{aligned}
\int\limits_{X\times X} |f(y)\overline{g(x)}|\, d|\mu|(x,y) \;&\leqslant\; \Big(\int\limits_{X\times X} |f(y)|^2\, d|\mu|(x,y)\Big)^{\frac{1}{2}} \cdot \Big(\int\limits_{X\times X} |g(x)|^2\, d|\mu|(x,y)\Big)^{\frac{1}{2}} \\
&\overset{8}{=}\; \Big(\int\limits_{X} |f(y)|^2\, d|\mu|_2(y)\Big)^{\frac{1}{2}} \cdot \Big(\int\limits_{X} |g(x)|^2\, d|\mu|_1(x)\Big)^{\frac{1}{2}} \\
&\overset{9}{\leqslant}\; \Big(||\mu||\cdot\int\limits_{X} |f(y)|^2\, dm(y)\Big)^{\frac{1}{2}} \cdot \Big(||\mu||\cdot\int\limits_{X} |g(x)|^2\, dm(x)\Big)^{\frac{1}{2}} \\
&=\; ||\mu||\cdot\Big(\int\limits_{X} |f(y)|^2\, dm(y)\Big)^{\frac{1}{2}} \cdot \Big(\int\limits_{X} |g(x)|^2 dm(x)\Big)^{\frac{1}{2}}, \qquad (1)
\end{aligned}$$

και συνεπώς $\int\limits_{X\times X} |f(y)\overline{g(x)}\, d|\mu|(x,y) < \infty$.
Επομένως η ϕ είναι καλά ορισμένη.
Παρατηρούμε ακόμα ότι η ϕ είναι sesquilinear μορφή, και μάλιστα φραγμένη με $||\phi|| \leqslant ||\mu||$, αφού από την (1) προκύπτει ότι:

$$|\phi(f,g)| \leqslant \int\limits_{X\times X} |f(y)\overline{g(x)}\, d|\mu|(x,y) \leqslant ||\mu||\cdot||f||\cdot||g||$$

[9]για κάθε θετικό μέτρο ρ σ' έναν χώρο γινόμενο $X\times\Psi$ και κάθε $\mathcal{B}(X)$-μετρήσιμη συνάρτηση $h: X\to\mathbb{C}$, ισχύει : $\int\limits_{X\times\Psi} h(x)\, d\rho(x,y) = \int\limits_X h(x)\, d\rho_1(x)$. Πράγματι: αρκεί να δειχθεί στην περίπτωση $h=\chi_{_A}$, για κάποιο $A\in\mathcal{B}(X)$. Τότε
$\int\limits_{X\times\Psi} \chi_{_A}(x)\, d\rho(x,y) = \int\limits_{X\times\Psi} \chi_{_{A\times\Psi}}(x,y)\, d\rho(x,y) = \rho(A\times\Psi) = \rho_1(A) = \int\limits_X \chi_A(x)\, d\rho_1(x)$
Ομοίως, $\int\limits_{X\times\Psi} h(y)\, d\rho(x,y) = \int\limits_\Psi h(y)\, d\rho_2(y)$ για κάθε $h:\,\Psi\to\mathbb{C},\ \mathcal{B}(\Psi)$-μετρήσιμη.

[9]διότι $|\mu|_i \leqslant ||\mu||\cdot m,\ i=1,2$

Άρα, υπάρχει ένας μοναδικός τελεστής $T_\mu \in B\big(L^2(X,m)\big)$, ώστε:

$$\langle T_\mu f, g\rangle = \phi(f,g) = \int\limits_{X\times X} f(y)\overline{g(x)}\, d\mu(x,y) \quad \forall\, f,\, g \in L^2(X,m)$$

και $||T_\mu|| = ||\phi|| \leqslant ||\mu||$.

$\square$

Η επόμενη Πρόταση μας δίνει μια πιο συγκεκριμένη έκφραση του τελεστή T_μ που ορίσαμε στο προηγούμενο Θεώρημα.

Πρόταση 3.10. *Έστω $\mu \in A(X\times X, m)$, T_μ όπως στο Θεώρημα 3.9 και $\{\mu^x : x \in X\}$ μια disintegration του μ. Τότε, για κάθε $f \in L^2(X,m)$ ισχύει:*

$$(T_\mu f)(x) = \int\limits_X f(y)\, d\mu^x(y) \quad m\text{-σχεδόν } \forall x \in X.$$

Απόδειξη. Ορίζουμε $H : L^2(X,m) \to L^2(X,m)$, με

$$(Hf)(x) = \int\limits_X f(y) d\mu^x(y) \quad m\text{-σχεδόν}\ \forall\, x \in X,\ f \in L^2(X,m).$$

Δείχνουμε καταρχήν ότι η H είναι καλά ορισμένη, δηλαδή ότι για κάθε $f \in L^2(X,m)$, η συνάρτηση $x \mapsto \int\limits_X f(y) d\mu^x(y)$ ανήκει στον $L^2(X,m)$. Έχουμε:

$$\begin{aligned}
\int\limits_X \Big|\int\limits_X f(y)\, d\mu^x(y)\Big|^2 dm(x) &\leqslant \int\limits_X \Big(\int\limits_X |f(y)|\, d|\mu^x|(y)\Big)^2 dm(x) \\
&\overset{10}{\leqslant} \int\limits_X \Big(\int\limits_X |f(y)|^2\, d|\mu^x|(y)\cdot|\mu^x|(X)\Big)\, dm(x) \\
&\overset{(I)}{\leqslant} ||\mu||\cdot \int\limits_X \Big(\int\limits_X |f(y)|^2\, d|\mu^x|(y)\Big)\, dm(x) \\
&\overset{(IV)}{=} ||\mu||\cdot \int\limits_{X\times X} |f(y)|^2\, d|\mu|(x,y) \\
&= ||\mu||\cdot \int\limits_X |f(y)|^2\, d|\mu|_2(y) \\
&\leqslant ||\mu||^2\cdot \int\limits_X |f(y)|^2 dm(y) < \infty
\end{aligned}$$

όπου η τελευταία ανισότητα προκύπτει από την $|\mu|_2 \leqslant ||\mu|| m$.
Επομένως, η απεικόνιση H ορίζει έναν γραμμικό τελεστή, και μάλιστα φραγμένο, καθώς η προηγούμενη ανισότητα γράφεται:

$$||H(f)|| \leqslant ||\mu||\cdot||f|| \quad \forall\, f \in L^2(X,m)$$

[10] από την ανισότητα Cauchy-Schwarz

Έχουμε τώρα να δείξουμε ότι $T_\mu = H$.
Για κάθε A, $B \in \mathcal{B}(X)$ με $m(A) < \infty$, $m(B) < \infty$, έχουμε:

$$\begin{aligned}
\langle T_\mu \chi_A, \chi_B \rangle &= \int\limits_{X\times X} \chi_A(y)\chi_B(x) d\mu(x,y) \\
&= \mu(B \times A) \\
&\overset{(III)}{=} \int\limits_X \Big(\int\limits_X \chi_{B\times A}(x,y)\, d\mu^x(y)\Big) dm(x) \\
&= \int\limits_X \Big(\chi_B(x) \int\limits_X \chi_A(y)\, d\mu^x(y)\Big) dm(x) \\
&= \langle H\chi_A, \chi_B \rangle
\end{aligned}$$

Λόγω γραμμικότητας, συμπεραίνουμε ότι για κάθε f, g απλές συναρτήσεις στον $L^2(X,m)$ ισχύει:

$$\langle T\mu f, g\rangle = \langle Hf, g\rangle$$

Τώρα, εφ' όσον το σύνολο των απλών συναρτήσεων είναι πυκνό στον $L^2(X,m)$, λόγω συνέχειας έχουμε ότι:

$$\langle T\mu f, g\rangle = \langle Hf, g\rangle \quad \forall\, f, g \in L^2(X,m)$$

Άρα $T\mu = H$, απ῾οπου έχουμε το ζητούμενο. □

Ορισμός 3.11. *Για κάθε $\mu \in A(X\times X, m)$ και $\{\mu^x : x \in X\}$ disintegration του μ, ο αντίστοιχος τελεστής T_μ θα λέγεται ψευδο-ολοκληρωτικός τελεστής με πυρήνα την οικογένεια $\{\mu^x : x \in X\}$*

Στα επόμενα, θα προσδιορίσουμε τον συζυγή T_μ^* ενός ψευδο-ολοκληρωτικού τελεστή T_μ, και θα βρούμε μια σχέση για τον T_μ^* ανάλογη αυτής για τον T_μ, της Πρ. 3.10.
Έστω $\phi(x,y) = (y,x)$ η ανάκλαση του $X \times X$.
Η ϕ είναι Borel μετρήσιμη, διότι $\phi^{-1}(A\times B) = B\times A \in \mathcal{B}(X\times X) \quad \forall\, A,\, B \in \mathcal{B}(X)$.
Επομένως, για κάθε μιγαδικό μέτρο μ στον $X \times X$ ορίζεται το μέτρο εικόνα $\phi_*\mu$ του μ ως προς ϕ, μέσω της σχέσης:

$$(\phi_*\mu)(S) = \mu(\phi^{-1}(S)), \quad S \in \mathcal{B}(X\times X)$$

Θέτουμε $\mu^* = \overline{\phi_*\mu}$ (δηλάδή $\mu^*(A\times B) = \overline{\mu(B\times A)} \quad \forall A, B \in \mathcal{B}(X)$).
Ισχυριζόμαστε ότι αν $\mu \in A(X\times X, m)$, τότε και $\mu^* \in A(X\times X, m)$.
Παρατηρούμε καταρχήν ότι για κάθε $S \in \mathcal{B}(X\times X)$ ισχύει:

$$\begin{aligned}
|\mu^*|(S) &= \sup\{\sum_{i=1}^n |\mu(\phi^{-1}(B_i))| : \bigcup_{i=1}^n B_i = S,\ B_i \cap B_j = \emptyset\ \forall i \neq j\} \\
&= \sup\{\sum_{i=1}^n |\mu(S_i)| : \bigcup_{i=1}^n S_i = \phi^{-1}(S),\ S_i \cap S_j = \emptyset\ \forall i \neq j\} \\
&= |\mu|(\phi^{-1}(S))
\end{aligned}$$

Έπεται ότι:

$$|\mu^*|_1(A) = |\mu^*|(A\times X) = |\mu|(X\times A) = |\mu|_2(A) \quad \forall A \in \mathcal{B}(X)$$

Άρα $|\mu^*|_1 = |\mu|_2$ και όμοια $|\mu^*|_2 = |\mu|_1$.
Από τις τελευταίες ισότητες προκύπτει ότι $\mu^* \in A(X\times X, m)$ και μάλιστα $||\mu^*|| = ||\mu||$.

Πρόταση 3.12. *Έστω $\mu \in A(X \times X, m)$ και $\{\mu_y : y \in X\}$ μια disintegration του μ. Τότε:*
(i) $T_\mu^* = T_{\mu^*}$
(ii) $\forall\, g \in L^2(X, m)$ *ισχύει:*

$$\big(T_\mu^* g\big)(y) = \int\limits_X g(x)\, d\overline{\mu_y}(x) \quad m\text{-σχεδόν } \forall\, y \in X.$$

Απόδειξη. (i)Καταρχήν, αφού $\mu^* \in A(X \times X, m)$, ορίζεται ο αντίστοιχος ψευδο-ολοκληρωτικός τελεστής T_{μ^*}, σύμφωνα με το θεώρημα 3.9.
Για κάθε $f, g \in L^2(X, m)$ έχουμε:

$$\begin{aligned}
\langle T_\mu f, g\rangle &= \int\limits_{X\times X} f(y)\overline{g(x)} d\mu(x,y) \\
&= \overline{\int\limits_{X\times X} g(x)\overline{f(y)} d\overline{\mu}(x,y)} \\
&\overset{11}{=} \overline{\int\limits_{X\times X} g(y)\overline{f(x)} d\mu^*(x,y)} \\
&= \overline{\langle T_{\mu^*} g, f\rangle} \\
&= \langle f, T_{\mu^*} g\rangle
\end{aligned}$$

Άρα $T_\mu^* = T_{\mu^*}$.
(ii) Η απόδειξη είναι όμοια μ' αυτήν της Πρότασης 3.10:
αν A, $B \in \mathcal{B}(X)$ με $m(A) < \infty$, $m(B) < \infty$ έχουμε:

$$\begin{aligned}
\big\langle \chi_A, T_\mu^* \chi_B \big\rangle &= \langle T_\mu \chi_A, \chi_B\rangle = \int\limits_{X\times X} \chi_A(y)\chi_B(x)\, d\mu(x,y) \\
&= \int\limits_X \Big(\int\limits_X \chi_A(y)\chi_B(x)\, d\mu_y(x)\Big)\, dm(y) \\
&= \int\limits_X \Big(\chi_A(y) \overline{\int\limits_X \chi_B(x) d\overline{\mu_y}(x)}\Big)\, dm(y) \\
&= \langle \chi_A, \Omega \chi_B\rangle,
\end{aligned}$$

όπου Ω είναι ο τελεστής του $B\big(L^2(X, m)\big)$ που ορίζεται από την σχέση:

$$\big(\Omega g\big)(y) = \int\limits_X g(x)\, d\overline{\mu_y}(x) \quad m\text{-σχεδόν } \forall\ y \in X,\ g \in L^2(X, m).$$

Έπεται ότι $T_\mu^* = \Omega$, και άρα το ζητούμενο. $\square$

[11]διότι, από τον ορισμό του μ^* και το Θεώρημα 1.4, για κάθε συνάρτηση $h : X \times X \to \mathbb{R}$ $\mathcal{B}(X \times X)$-μετρήσιμη ή $h : X \times X \to \mathbb{C}$ ολοκληρώσιμη ως προς μ^*, ισχύει :
$\int\limits_{X\times X} h(x,y) d\mu^*(x,y) = \int\limits_{X\times X} \overline{h(x,y)} d\phi_* \mu(x,y) = \int\limits_{X\times X} \overline{h(x,y)} d\mu(x,y)$

Θεώρημα 3.13. *Για κάθε μ, $\nu \in A(X \times X, m)$ ισχύει: $T_{\mu*\nu} = T_\mu \cdot T_\nu$.*

Απόδειξη. Έστω $\{\mu_y : y \in X\}$, $\{\nu^x : x \in X\}$ disintegrations των μ, ν αντίστοιχα.
Για κάθε A, $B \in \mathcal{B}(X)$ με $m(A) < \infty$, $m(B) < \infty$ έχουμε:

$$\begin{aligned}
\langle T_\mu T_\nu \chi_A, \chi_B \rangle &= \left\langle T_\nu \chi_A, T_\mu^* \chi_B \right\rangle \\
&= \int\limits_X T_\nu \, \chi_A(z) \, \overline{T_\mu^* \chi_B(z)} \, dm(z) \\
&= \int\limits_X \Big(\int\limits_X \chi_A(y) \, d\nu^z(y) \cdot \overline{\int\limits_X \chi_B(x) \, d\overline{\mu_z}(x) \Big)} \, dm(z) \\
&= \int\limits_X \nu^z(A) \mu_z(B) \, dm(z) \\
&= \int\limits_X (\mu_z \times \nu^z)(B \times A) \, dm(z) \\
&= (\mu * \nu)(B \times A) = \int\limits_{X \times X} \chi_B(x) \chi_A(y) \, d(\mu * \nu)(x, y) \\
&= \langle T_{\mu*\nu} \chi_A, \chi_B \rangle
\end{aligned}$$

Συμπεραίνουμε ότι:

$$\langle T_\mu T_\nu f, g \rangle = \langle T_{\mu*\nu} f, g \rangle \,,$$

για κάθε f, g απλές συναρτήσεις στον $L^2(X, m)$, και τελικά για κάθε f, $g \in L^2(X, m)$.
Επομένως $T_\mu T_\nu = T_{\mu*\nu}$. □

Λήμμα 3.14. *Αν μ, $\nu \in A(X \times X, m)$ ώστε $T_\mu = T_\nu$, τότε $\mu = \nu$.*

Απόδειξη. Εφ' όσον $T_\mu = T_\nu$, για κάθε f, $g \in L^2(X, m)$ ισχύει:

$$\int\limits_{X \times X} f(y) \overline{g(x)} \, d\mu(x, y) = \int\limits_{X \times X} f(y) \overline{g(x)} \, d\nu(x, y).$$

Άρα, αν A, B είναι Borel υποσύνολα του X πεπερασμένου μέτρου, τότε από την προηγούμενη ισότητα, για $f = \chi_B$ και $g = \chi_A$ προκύπτει ότι:

$$\mu(A \times B) = \nu(A \times B)$$

Έστω τώρα τυχόν $A \in \mathcal{B}(X)$.
Αφού το m είναι σ-πεπερασμένο, υπάρχει ακολουθία $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ξένων ανά δύο Borel υποσυνόλων του X, ώστε $A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ και $m(A_n) < \infty \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$. Επομένως, χρησιμοποιώντας το προηγούμενο συμπέρασμα για σύνολα πεπερασμένου μέτρου, για κάθε $B \in \mathcal{B}(X)$ με $m(B) < \infty$ θα έχουμε:

$$\mu(A \times B) = \mu\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n \times B) \Big) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n \times B) = \sum_{n=1}^{\infty} \nu(A_n \times B) = \nu\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n \times B) \Big) = \nu(A \times B).$$

Με ανάλογη διαδικασία για το τυχόν $B \in \mathcal{B}(X)$, συμπεραίνουμε τελικά ότι

$$\mu(A \times B) = \nu(A \times B) \quad \forall\, A,\, B \in \mathcal{B}(X),$$

και συνεπώς $\mu = \nu$.

$\square$

Πόρισμα 3.15. *(i) Το σύνολο $\{T_\mu : \mu \in A(X\times X, m)\}$ είναι αυτοσυζυγής υπάλγεβρα της $B\big(L^2(X,m)\big)$.*
(ii) Το σύνολο $A(X\times X, m)$, εφοδιασμένο με την νόρμα $\mu \mapsto ||\mu||$, είναι άλγεβρα με νόρμα. Μάλιστα, η απεικόνιση $\mu \mapsto \mu^*$ ορίζει ενέλιξη στην άλγεβρα αυτή.

Απόδειξη. (i) Για κάθε μ, $\nu \in A(X\times X, m)$ και $\lambda \in \mathbb{C}$ έχουμε:

$$\begin{aligned}
\langle\,(T_\mu + \lambda T_\nu)\, f,\, g\rangle &= \langle T_\mu f, g\rangle + \lambda\,\langle T_\nu\, f,\, g\rangle \\
&= \int\limits_{X\times X} f(y)\overline{g(x)}\, d\mu(x,y) + \lambda \int\limits_{X\times X} f(y)\overline{g(x)}\, d\nu(x,y) \\
&= \int\limits_{X\times X} f(y)\overline{g(x)}\, d(\mu+\lambda\nu)(x,y) \\
&= \langle T_{\mu+\lambda\nu} f, g\rangle\,, \quad f,\, g \in L^2(X,m)
\end{aligned}$$

Επομένως $T_\mu + \lambda T_\nu = T_{\mu+\lambda\nu}$.
Επίσης και $T_{\mu*\nu} = T_\mu\, T_\nu$ (βλ. Θεώρ.3.13)
Οι σχέσεις αυτές δείχνουν ακριβώς ότι το σύνολο $\{T_\mu : \mu \in A(X\times X, m)\}$ είναι άλγεβρα.
Επιπλέον, αφού $T_\mu^* = T_{\mu^*}$, όπου $\mu^* \in A(X\times X, m)$, η προηγούμενη άλγεβρα είναι αυτοσυζυγής.

(ii) Έχουμε ήδη αποδείξει ότι ο $A(X\times X, m)$ είναι χώρος με νόρμα, και μάλιστα η νόρμα του ικανοποιεί την ανισότητα: $||\mu * \nu|| \leqslant ||\mu||\cdot||\nu||$. Άρα, για να δείξουμε ότι ο $A(X\times X, m)$ είναι άλγεβρα, αρκεί να δείξουμε ότι:

$$\begin{aligned}
\mu * (\nu + \xi) &= (\mu * \nu) + (\mu * \xi), \\
(\lambda\mu) * \nu &= \mu * (\lambda\nu) = \lambda\cdot(\mu * \nu), \quad \text{και} \\
\mu * (\nu * \xi) &= (\mu * \nu) * \xi \quad \forall\, \mu,\, \nu,\, \xi \in A(X\times X, m) \text{ και } \lambda \in \mathbb{C}.
\end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας το (i) και τη σχέση $T_{\mu*\nu} = T_\mu\, T_\nu$, έχουμε:

$$\begin{aligned}
T_{\mu*(\nu+\xi)} &= T_\mu\, T_{\nu+\xi} = T_\mu(T_\nu + T_\xi) = T_\mu\, T_\nu + T_\mu\, T_\xi \\
&= T_{\mu*\nu} + T_{\mu*\xi} = T_{(\mu*\nu)+(\mu*\xi)}, \\
\\
T_{(\lambda\mu)*\nu} &= T_{\lambda\mu} T_\nu = \lambda T_\mu T_\nu = T_\mu(\lambda T_\nu) = T_\mu T_{\lambda\nu} = T_{\mu*(\lambda\nu)}, \\
\\
T_{(\lambda\mu)*\nu} &= \lambda T_\mu T_\nu = \lambda T_{\mu*\nu} = T_{\lambda(\mu*\nu)}, \\
\\
T_{\mu*(\nu*\xi)} &= T_\mu T_{\nu*\xi} = T_\mu(T_\nu T_\xi) = (T_\mu T_\nu) T_\xi = T_{\mu*\nu} T_\xi = T_{(\mu*\nu)*\xi}
\end{aligned}$$

Από τις σχέσεις αυτές και το προηγούμενο Λήμμα, προκύπτει το ζητούμενο.
Με ανάλογο τρόπο αποδεικνύουμε και ότι:

$$\begin{aligned}
T_{(\mu+\nu)^*} &= T_{\mu^*+\nu^*} \\
T_{(\lambda\mu)^*} &= T_{\bar{\lambda}\mu^*} \\
T_{(\mu*\nu)^*} &= T_{\nu^* * \mu^*}\,, \\
T_{(\mu^*)^*} &= T_\mu,
\end{aligned}$$

οπότε χρησιμοποιώντας και πάλι το προηγούμενο Λήμμα, συμπεραίνουμε ότι η απεικόνιση $\mu \mapsto \mu^*$ ορίζει μια ενέλιξη στην άλγεβρα $A(X \times X, m)$.

$\square$

Από το Πόρισμα 3.15 και το Λήμμα 3.14, προκύπτει ότι η απεικόνιση

$$A(X \times X, m) \to \{T_\mu : \mu \in A(X \times X, m)\} : \mu \mapsto T_\mu$$

είναι ένας $*$-ισομορφισμός αλγεβρών.
Για κάθε $G \in \mathcal{B}(X \times X)$, ορίζουμε ως $A(G, m)$ το σύνολο όλων των μέτρων $\mu \in A(X \times X, m)$ που είναι συγκεντρωμένα στο G.
Το $A(G, m)$ είναι προφανώς ένας γραμμικός υπόχωρος του $A(X \times X, m)$. Θα ορίσουμε κατάλληλες συνθήκες για το G, ώστε ο υπόχωρος $A(G, m)$ να είναι κλειστός ως προς τον πολλαπλασιασμό του $A(X \times X, m)$, (και άρα υπάλγεβρα της $A(X \times X, m)$).
Για κάθε $G \subseteq X \times X$ θέτουμε:

$$G \circ G := \{(x, y) \in X \times X : \exists\, z \in X \text{ ώστε } (x, z) \in G \text{ και } (z, y) \in G\}$$

Εύκολα βλέπουμε ότι, αν G είναι το γράφημα μιας σχέσης R στον X, τότε:
(i) η R είναι αυτοπαθής $\Leftrightarrow$ το G περιέχει την διαγώνιο Δ του $X \times X$
(ii) η R είναι μεταβατική $\Leftrightarrow$ το G περιέχει το σύνολο $G \circ G$
Επομένως, ένα υποσύνολο G του $X \times X$ είναι το γράφημα μιας προδιάταξης στον X αν, και μόνο αν, $\Delta \subseteq G$ και $G \circ G \subseteq G$.

Πρόταση 3.16. *Έστω $G \in \mathcal{B}(X \times X)$.*
(i) αν $G \circ G \subseteq G$, τότε $A(G, m)$ είναι υπάλγεβρα της $A(X \times X, m)$
(ii) αν επιπλέον $\Delta \subseteq G$ και το μέτρο m είναι πεπερασμένο (και μη μηδενικό), τότε η $A(X \times X, m)$ έχει πολλαπλασιαστική μονάδα νόρμας 1, που ανήκει στην υπάλγεβρα $A(G, m)$, δηλαδή:

$$\exists\, \rho \in A(G, m) \text{ με } ||\rho|| = 1, \text{ ώστε } \rho * \mu = \mu * \rho = \mu \quad \forall\, \mu \in A(X \times X, m).$$

Απόδειξη. (i) Έστω $\mu, \nu \in A(G, m)$ και $\{\mu_y : y \in X\}$, $\{\nu^x : x \in X\}$ disintegration των μ, ν αντίστοιχα.
Πρέπει να δείξουμε ότι το μέτρο $\mu * \nu$ είναι συγκεντρωμένο στο G, δηλαδή ότι:

$$(\mu * \nu)(S) = 0 \quad \forall\, S \in \mathcal{B}(X \times X) \text{ με } S \subseteq G^c.$$

Για κάθε $S \in \mathcal{B}(X \times X)$ έχουμε:

$$\begin{aligned} |(\mu * \nu)(S)| &\leqslant \int_X |(\mu_z \times \nu^z)(S)|\, dm(z) \\ &\leqslant \int_X |\mu_z \times \nu^z|(S)\, dm(z) \\ &\leqslant \int_X (|\mu_z| \times |\nu^z|)(S)\, dm(z) \end{aligned} \tag{3.19}$$

Ισχυρισμός : m-σχεδόν για κάθε $y \in X$, το μέτρο $|\mu_y|$ είναι συγκεντρωμένο στο G^y.
Από την Πρόταση 3.5, για κάθε $S \in \mathcal{B}(X \times X)$ έχουμε:

$$\begin{aligned} |\mu|(S) &= \int_X \int_X \chi_S(x,y)\, d|\mu_y|(x)\, dm(y) \\ &= \int_X \int_X \chi_{S^y}(x)\, d|\mu_y|(x)\, dm(y) \\ &= \int_X |\mu_y|(S^y)\, dm(y) \end{aligned}$$

Από την σχέση αυτή (για $S = (X \times X) \setminus G$) και εφ' όσον το μ, άρα και το $|\mu|$, είναι συγκεντρωμένο στο G, έπεται ότι:

$$\int_X |\mu_y|(X \setminus G^y)\, dm(y) = \int_X |\mu_y|\big((X \times X) \setminus G\big)^y\, dm(y) = |\mu|\big((X \times X) \setminus G\big) = 0$$

Επομένως, $|\mu_y|(X \setminus G^y) = 0$ m-σχεδόν για κάθε $y \in X$, απ' όπου έχουμε το ζητούμενο.

Ανάλογα έχουμε ότι και το $|\nu^x|$ είναι συγκεντρωμένο στο G_x m-σχεδόν $\forall\, x \in X$.
Άρα, υπάρχουν M, $N \in \mathcal{B}(X)$ με $m(M) = m(N) = 0$, ώστε:

$$\forall\, z \notin M \text{ το } |\mu_z| \text{ είναι συγκεντρωμένο στο } G^z$$

$$\text{και } \forall\, z \notin N \text{ το } |\nu^z| \text{ είναι συγκεντρωμένο στο } G_z$$

Τότε, $m(M \cup N) = 0$ και για κάθε $z \notin M \cup N$ ισχύει:

$$\begin{aligned} (|\mu_z| \times |\nu^z|)\big((G^z \times G_z)^c\big) &= (|\mu_z| \times |\nu^z|)\big(((G^z)^c \times X) \cup (X \times (G_z)^c\big) \\ &\leqslant |\mu_z|\big((G^z)^c\big) \cdot |\nu^z|(X) + |\mu_z|(X) \cdot |\nu^z|\big((G_z)^c\big) = 0 \end{aligned}$$

Συμπεραίνουμε ότι το μέτρο γινόμενο $|\mu_z| \times |\nu^z|$ είναι συγκεντρωμένο στο $G^z \times G_z$, m-σχεδόν $\forall\, z \in X$.
Αλλά $G^z \times G_z \subseteq G \circ G$, διότι αν $(x,y) \in G^z \times G_z$, τότε $(x,z) \in G$ και $(z,y) \in G$, οπότε $(x,y) \in G \circ G$ από τον ορισμό του $G \circ G$.
Επομένως, m-σχεδόν για κάθε $z \in X$ το μέτρο $|\mu_z| \times |\nu^z|$ είναι συγκεντρωμένο στο $G \circ G$, και άρα στο G (αφού $G \circ G \subseteq G$), δηλαδή για κάθε $S \in \mathcal{B}(X \times X)$ με $S \subseteq G^c$ έχουμε ότι:

$$(|\mu_z| \times |\nu^z|)(S) = 0 \quad m\text{-σχεδόν } \forall\, z \in X.$$

Τότε από την (3.19) έπεται ότι $(\mu * \nu)(S) = 0$, και άρα πράγματι το $\mu * \nu$ είναι συγκεντρωμένο στο G.

(ii) Υποθέτουμε επιπλέον ότι $\Delta \subseteq G$ και $0 < m(X) < \infty$.
Για κάθε $S \in \mathcal{B}(X \times X)$ θέτουμε:

$$\rho(S) = m\big(\{x \in X : (x,x) \in S\}\big)^{12}.$$

[12] Για κάθε $S \in \mathcal{B}(X \times X)$ το σύνολο: $\Delta(S) = \{x \in X : (x,x) \in S\}$ είναι Borel μετρήσιμο υποσύνολο του X. Πράγματι: επειδή $\Delta(A \times B) = A \cap B \in \mathcal{B}(X) \quad \forall\, A, B \in \mathcal{B}(X)$, έπεται ότι η οικογένεια $\mathcal{C} = \{S \in \mathcal{B}(X \times X) : \Delta(S) \in \mathcal{B}(X)\}$ περιέχει τα μετρήσιμα ορθογώνια του $X \times X$. Επιπλέον οι σχέσεις $\Delta\big((X \times X) \setminus S\big) = X \setminus \Delta(S)$ και $\Delta(\bigcup_{n=1}^{\infty} S_n) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Delta(S_n)$, δείχνουν ότι η $\mathcal{C}$ είναι σ-άλγεβρα στον $X \times X$. Τελικά $\mathcal{C} = \mathcal{B}(X \times X)$, και συνεπώς $\Delta(S) \in \mathcal{B}(X) \quad \forall\, S \in \mathcal{B}(X \times X)$.

Άμεσα διαπιστώνουμε ότι η απεικόνιση ρ ορίζει ένα θετικό μέτρο στον $X \times X$.
Για κάθε $A \in \mathcal{B}(X)$ έχουμε ότι:

$$\rho_1(A) = \rho(A \times X) = m(A) \text{ και } \rho_2(A) = \rho(X \times A) = m(A),$$

δηλαδή $\rho_1 = \rho_2 = m$. Επομένως, $\rho \in A(X \times X, m)$ και μάλιστα $||\rho|| = 1$.
Επίσης, εφ' όσον $\Delta \subseteq G$, θα ισχύει:

$$\rho(G^c) = m(\{x \in X : (x,x) \notin G\}) = m(\emptyset) = 0.$$

Άρα $\rho \in A(G, m)$.

Τώρα, για κάθε $x \in X$ συμβολίζουμε με δ_x το μέτρο Dirac στο x.
Παρατηρούμε ότι ισχύουν τα εξής:

1. $\forall\, E \in \mathcal{B}(X)$ η απεικόνιση $x \mapsto \delta_x(E) = \chi_{_E}(x)$ είναι Borel μετρήσιμη.

2. $\forall\, S \in \mathcal{B}(X \times X)$ ισχύει:

$$\begin{aligned}
\int\limits_X \int\limits_X \chi_{_S}(x,y)\, d\delta_x(y)\, dm(x) &= \int\limits_X \int\limits_X \chi_{_{S^x}}(y)\, d\delta_x(y)\, dm(x) \\
&= \int\limits_X \chi_{_S}(x,x)\, dm(x) \\
&= m\big(\{x \in X : (x,x) \in S\}\big) \\
&= \rho(S)
\end{aligned}$$

   Ομοίως αποδεικνύεται και ότι:

$$\int\limits_X \int\limits_X \chi_{_S}(x,y)\, d\delta_y(x)\, dm(y) = \rho(S)$$

   Από τα προηγούμενα και την μοναδικότητα της πρότασης 3.5, συμπεραίνουμε ότι για τις disintegrations $\{\rho^x : x \in X\}$, $\{\rho_y : y \in X\}$ του μέτρου ρ ισχύει: $\rho^x = \rho_x = \delta_x$ m-σχεδόν $\forall\, x \in X$.

   Μένει να δείξουμε ότι το μέτρο ρ είναι πολλαπλασιαστική μονάδα της άλγεβρας $A(X \times X, m)$.
   Έστω $\mu \in A(X \times X, m)$ και $\{\mu^x : x \in X\}$ disintegrations του μ.
   Για κάθε A, $B \in \mathcal{B}(X)$ έχουμε:

$$\begin{aligned}
(\rho * \mu)(A \times B) &= \int\limits_X \rho_x(A)\mu^x(B)\, dm(x) = \int\limits_X \delta_x(A)\mu^x(B)\, dm(x) \\
&= \int\limits_A \mu^x(B)\, dm(x) = \int\limits_X \Big(\chi_{_A}(x) \int\limits_X \chi_{_B}(y)\, d\mu^x(y)\Big)\, dm(x) \\
&= \int\limits_X \int\limits_X \chi_{_{A\times B}}(x,y)\, d\mu^x(y)\, dm(x) \\
&= \int\limits_{X\times X} \chi_{_{A\times B}}(x,y)\, d\mu(x,y) = \mu(A \times B)
\end{aligned}$$

Έπεται ότι $\rho * \mu = \mu$.
Ομοίως αποδεικνύουμε και ότι $\mu * \rho = \mu$ και έχουμε το συμπέρασμα. $\square$

Θεώρημα 3.17. *Έστω $(X, \leqslant, m)$ ένας standard προδιατεταγμένος χώρος σ-πεπερασμένου μέτρου και G το γράφημα της προδιάταξης $\leqslant$.*
Τότε η απεικόνιση $A(G,m) \to \{T_\mu : \mu \in A(G,m)\} : \mu \mapsto T_\mu$ είναι ένας ισομορφισμός αλγεβρών, του οποίου η εικόνα περιέχει όλους τους πολλαπλασιαστικούς τελεστές M_f, όπου $f \in L^\infty(X,m) \cap L^1(X,m)$.

Απόδειξη. Το πρώτο συμπέρασμα προκύπτει έχει ήδη αποδειχθεί(βλ. σχόλια μετά το Πόρισμα 3.15 και Πρόταση 3.16).
Μένει να δείξουμε ότι για κάθε $f \in L^\infty(X,m) \cap L^1(X,m)$ υπάρχει $\mu \in A(G,m)$ ώστε $M_f = T_\mu$.
Επειδή $f \in L^1(X,m)$, ορίζεται το μιγαδικό μέτρο:

$$\mu(S) = \int\limits_X \chi_S(x,x) f(x) dm(x), \quad S \in \mathcal{B}(X \times X)$$

και ισχυριζόμαστε ότι $\mu \in A(X \times X, m)$.
Έστω $A \in \mathcal{B}(X)$.
Για κάθε πεπερασμένη, μετρήσιμη διαμέριση $\{S_1, S_2, \ldots, S_n\}$ του $A \times X$, έχουμε:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n |\mu(S_i)| &\leqslant \sum_{i=1}^n \int\limits_X \chi_{S_i}(x,x)|f(x)|dm(x) \\ &= \int\limits_X \chi_{\bigcup\limits_{i=1}^n S_i}(x,x)|f(x)|dm(x) \\ &= \int\limits_X \chi_A(x)|f(x)|dm(x) \\ &\leqslant ||f||_\infty m(A)\end{aligned}$$

Επομένως, θεωρώντας το supremum των προηγούμενων αθροισμάτων ως προς κάθε τέτοια διαμέριση του $A \times X$, προκύπτει ότι:

$$|\mu|_1(A) = |\mu|(A \times X) \leqslant ||f||_\infty m(A)$$

Ομοίως αποδεικνύουμε και ότι $|\mu|_2(A) \leqslant ||f||_\infty m(A) \quad \forall\, A \in \mathcal{B}(X)$.
Επομένως $\mu \in A(X \times X, m)$ (και μάλιστα $||\mu|| \leqslant ||f||_\infty$).
Επιπλέον, το μέτρο μ είναι συγκεντρωμένο στο G, διότι για κάθε μετρήσιμο υποσύνολο S του G^c ισχύει $\chi_S(x,x) = 0 \; \forall\, x \in X$, απ' όπου $\mu(S) = 0$.
Συνεπώς $\mu \in A(G,m)$.
Έστω τώρα $A, B \in \mathcal{B}(X)$ με $m(A), m(B) < \infty$.
Τότε:

$$\begin{aligned}\langle T_\mu \chi_A, \chi_B \rangle &= \int\limits_{X \times X} \chi_A(y)\chi_B(x) d\mu(x,y) \\ &= \mu(B \times A) \\ &= \int\limits_X \chi_A(x)\chi_B(x) f(x) dm(x) \\ &= \langle M_f \chi_A, \chi_B \rangle\end{aligned}$$

Λόγω γραμμικότητας, έπεται ότι: $\langle T_\mu g, h\rangle = \langle M_f g, h\rangle$ για κάθε απλές μετρήσιμες συναρτήσεις g, h στον $L^2(X,m)$, κι εφ' όσον το σύνολο των απλών συναρτήσεων είναι πυκνό στον $L^2(X,m)$, η προηγούμενη ισότητα θα ισχύει τελικά για οποιεσδήποτε $g, h \in L^2(X,m)$.
Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι $T_\mu = M_f$. $\square$

3.2 Κάθε Μεταθετικός Σύνδεσμος Υποχώρων είναι Ανακλαστικός

Στην παρούσα ενότητα θα αποδείξουμε ότι κάθε μεταθετικός σύνδεσμος υποχώρων $\mathcal{L}$ που δρα σ' έναν διαχωρίσιμο χώρο Hilbert, είναι ανακλαστικός, δηλαδή $\mathcal{L} = latalg\mathcal{L}$.
Θα αποδείξουμε πρώτα το αντίστοιχο αποτέλεσμα για τον $\mathcal{L}(X, \leqslant, m)$, όπου $(X, \leqslant, m)$ ένας standard προδιατεταγμένος χώρος σ-πεπερασμένου μέτρου.
Για έναν τέτοιον χώρο $(X, \leqslant, m)$, θεωρούμε την άλγεβρα $\{T_\mu : \mu \in A(G,m)\}$ των ψευδο-ολοκληρωτικών τελεστών, όπου το μέτρο $\mu \in A(X \times X, m)$ είναι συγκεντρωμένο στο γράφημα G της προδιάταξης $\leqslant$.

Ορισμός 3.18. *Ορίζουμε ως $\mathcal{A}_{min}(X, \leqslant, m)$ την w^*-κλειστή θήκη της άλγεβρας* $\{T_\mu : \mu \in A(G,m)\}$.

Από το Θεώρημα (3.17) η $\mathcal{A}_{min}(X, \leqslant, m)$ περιέχει την πολλαπλασιαστική άλγεβρα $\mathcal{M}_m$ του (X,m).

Πρόταση 3.19. *Αν $\mu \in A(X \times X, m)$, τότε:*

$$T_\mu \in alg\mathcal{L}(X, \leqslant, m) \Leftrightarrow \mu \in A(G,m)$$

Απόδειξη. Υποθέτουμε αρχικά ότι $T_\mu \in alg\mathcal{L}(X, \leqslant, m)$ και θα δείξουμε ότι το μ είναι συγκεντρωμένο στο G.
Έστω $E \in L(X, \leqslant)$.
Αφού ο υπόχωρος ImP_E είναι T_μ-αναλλοίωτος, για κάθε f, $g \in L^2(X,m)$, με $f \in ImP_E$ και $g \in ImP_E^\perp = Im(I - P_E)$, θα ισχύει:

$$\langle T_\mu f,\, g\rangle = 0,$$

δηλαδή:

$$\int\limits_{X\times X} f(y)\overline{g(x)}d\mu(x,y) = 0 \quad \forall\, f,\, g \in L^2(X,m) \text{ με } f\,|_{E^c} = 0 \text{ και } g\,|_E = 0$$

Άρα αν A, $B \in \mathcal{B}(X)$ με $A \subseteq E^c$, $B \subseteq E$ και $m(A)$, $m(B) < \infty$, θα ισχύει:

$$\mu(A \times B) = \int\limits_{X\times X} \chi_B(y)\chi_A(x)d\mu(x,y) = 0$$

Έπεται ότι $\mu(S) = 0$ για κάθε μετρήσιμο υποσύνολο S του $E^c \times E$, και συνεπώς έχουμε δείξει ότι:

$$|\mu|(E^c \times E) = 0 \quad \forall\, E \in L(X, \leqslant) \tag{3.20}$$

Τώρα, εφ' όσον η προδιάταξη $\leqslant$ είναι standard, υπάρχει ακολουθία $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στον $L(X,\leqslant)$ ώστε για κάθε x, $y \in X$ να ισχύει:

$$x \leqslant y \Leftrightarrow \chi_{E_n}(x) \leqslant \chi_{E_n}(y) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Τότε $G^c = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty}(E_n^c \times E_n)$ και λόγω της (3.20),

$$|\mu|(G^c) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |\mu|(E_n^c \times E_n) = 0$$

Επομένως η κύμανση $|\mu|$ του μ είναι συγκεντρωμένη στο G, ισοδύναμα το μ είναι συγκεντρωμένο στο G.

Αντίστροφα, αν $\mu \in A(G,m)$ θα δείξουμε ότι $T_\mu \in alg\mathcal{L}(X,\leqslant,m)$.
Έστω $E \in L(X,\leqslant)$ και f, $g \in L^2(X,m)$, με $f\,|_{E^c}= 0$ και $g\,|_E= 0$.
Σύμφωνα με τα προηγούμενα, αρκεί να δείξουμε ότι:

$$\langle T_\mu f,\, g\rangle = \int\limits_{X\times X} f(y)\overline{g(x)}d\mu(x,y) = 0$$

Αν $(x,y) \in (X \times E^c) \cup (E \times X)$, τότε $f(y)\overline{g(x)} = 0$, και συνεπώς:

$$\int\limits_{X\times X} f(y)\overline{g(x)}d\mu(x,y) = \int\limits_{E^c\times E} f(y)\overline{g(x)}d\mu(x,y) \tag{3.21}$$

Επίσης, παρατηρούμε ότι $E^c \times E \subseteq G^c$ [13], κι αφού το μ είναι συγκεντρωμένο στο G, έπεται ότι $\mu(E^c \times E) = 0$.
Άρα από την (3.21),

$$\int\limits_{X\times X} f(y)\overline{g(x)}d\mu(x,y) = 0,$$

δηλαδή το ζητούμενο. □

Θεώρημα 3.20.

$$lat\mathcal{A}_{min}(X,\leqslant,m) = \mathcal{L}(X,\leqslant,m)$$

Απόδειξη.

1. $\underline{\mathcal{L}(X,\leqslant,m) \subseteq lat\mathcal{A}_{min}(X,\leqslant,m)}$
   Έστω $E \in L(X,\leqslant)$ και $T \in \mathcal{A}_{min}(X,\leqslant,m)$.
   Αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε f, $g \in L^2(X,m)$ με $f\,|_{E^c}= 0$ και $g\,|_E= 0$, ισχύει: $\langle Tf,\, g\rangle = 0$.
   Από τον ορισμό της $\mathcal{A}_{min}(X,\leqslant,m)$, υπάρχει δίκτυο $(\mu_i)_{i\in I}$ στην $A(G,m)$ ώστε $T_{\mu_i} \xrightarrow{w^*} T$,

[13]Πράγματι: θεωρούμε $x \notin E$ και $y \in E$. Αν $y \leqslant x$, τότε, αφού το E είναι αύξον, θα έχουμε ότι και $x \in E$, άτοπο. Άρα $y \nleqslant x$, δηλαδή $(x,y) \notin G$.

οπότε και $T_{\mu_i} \xrightarrow{WOT} T$, αφού η WOT-τοπολογία είναι ασθενέστερη της ultraweak.
Έχουμε:

$$\langle Tf,\, g\rangle = \langle (T - T_{\mu_i})f,\, g\rangle + \langle T_{\mu_i}f,\, g\rangle \quad \forall\, i \in I \tag{3.22}$$

Αλλά, αφού $\mu_i \in A(G,m)$, ο υπόχωρος ImP_E είναι T_{μ_i}-αναλλοίωτος από την προηγούμενη πρόταση, και συνεπώς $\langle T_{\mu_i}f,\, g\rangle = 0 \quad \forall\, i \in I$.
Από την άλλη, $\langle (T - T_{\mu_i})f,\, g\rangle \to 0$, διότι $T_{\mu_i} \xrightarrow{WOT} T$.
Άρα, από την (3.22), $\langle Tf,\, g\rangle = 0$.

2. $\underline{lat\mathcal{A}_{min}(X, \leqslant, m) \subseteq \mathcal{L}(X, \leqslant, m)}$:
Έστω P μια προβολή στον σύνδεσμο $lat\mathcal{A}_{min}(X, \leqslant, m)$.
Αρκεί να δείξουμε ότι $P = P_E$ για κάποιο $E \in L(X, \leqslant)$.

Ισχυρισμός(I) : υπάρχει $A \in \mathcal{B}(X)$ ώστε $P = P_A$.
Εφ' όσον ο P είναι προβολή, αρκεί να δείξουμε ότι $P \in \mathcal{M}_m$.
Από την υπόθεση για την P και επειδή η $\mathcal{A}_{min}(X, \leqslant, m)$ περιέχει την $\mathcal{M}_m$, έχουμε ότι η P είναι M_f-αναλλοίωτη για κάθε $f \in L^\infty(X,m)$.
Επομένως $M_fP = PM_fP \quad \forall\, f \in L^\infty(X,m)$, άρα και $PM_f = PM_fP \quad \forall\, f \in L^\infty(X,m)$, αφού ο $L^\infty(X,m)$ είναι αυτοσυζυγής. Άρα $PM_f = M_fP \quad \forall\, f \in L^\infty(X,m)$, απ' όπου $P \in \mathcal{M}_m$, διότι η $\mathcal{M}_m$ είναι masa.

Θέτουμε

$$S = G \cap (A^c \times A) = \{(x,y) \in X \times X \,:\, y \leqslant x,\, y \in A,\, x \notin A\}$$

Θα δείξουμε ότι το A είναι σχεδόν αύξον, αποδεικνύοντας πρώτα ότι το S είναι περιθωριακά μηδενικό.

Ισχυρισμός(II) : αν $\mu \in A(X \times X, m)$ και το μ είναι συγκεντρωμένο στο S, τότε το $\mu = 0$.
Αφού $S \subseteq G$, έχουμε ότι $\mu \in A(G,m)$, και συνεπώς από την υπόθεση ο T_μ αφήνει τον υπόχωρο $ImP = ImP_A$ αναλλοίωτο.
Άρα, όπως στο 1$^{\text{ο}}$ μέρος της απόδειξης της Πρότασης (3.19), βρίσκουμε ότι $|\mu|(A^c \times A) = 0$.
Από την άλλη, επειδή $S \subseteq A^c \times A$, και το μ, άρα και το $|\mu|$, είναι συγκεντρωμένο στο S, θα ισχύει $|\mu|\big((X \times X) \setminus (A^c \times A)\big) = 0$.
Έπεται τελικά ότι $|\mu| = 0$, άρα $\mu = 0$.

Ισχυρισμός(III) : το S είναι περιθωριακά μηδενικό.
Σύμφωνα με το Θεώρημα Μηδενικού Συνόλου (2.36) αρκεί να δείξουμε τα εξής:
$\underline{(i)}$ υπάρχει μια ακολουθία $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στην άλγεβρα Boole που παράγεται από τα μετρήσιμα ορθογώνια του $X \times X$, ώστε: $S = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} S_n$.
$\underline{(ii)}$ για κάθε μέτρο Borel πιθανότητας σ στην $A(X \times X, m)$ ισχύει $\sigma(S) = 0$.

(i) Έστω $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία στον σ-σύνδεσμο $L(X, \leqslant)$, με την ιδιότητα:

$$\forall\, x,\, y \in X, \quad x \leqslant y \;\Leftrightarrow\; \chi_{E_n}(x) \leqslant \chi_{E_n}(y) \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

Τότε:

$$G = \bigcap_{n=1}^{\infty} \big((X \times E_n^c) \cup (E_n \times X)\big),$$

απ' όπου:

$$S = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{\big((X \times E_n^c) \cup (E_n \times X)\big) \cap (A^c \times A)\},$$

και το ζητούμενο προκύπτει θέτοντας $S_n = \big((X \times E_n^c) \cup (E_n \times X)\big) \cap (A^c \times A)$.

(ii) Έστω σ ένα μέτρο Borel πιθανότητας.
Θέτουμε:

$$\mu(C) = \sigma(C \cap S), \quad C \in \mathcal{B}(X \times X),$$

και παρατηρούμε τα εξής:
• το μ είναι θετικό, πεπερασμένο μέτρο
• $\mu \in A(X \times X, m)$ (και μάλιστα $||\mu|| \leqslant ||\sigma||$)
πράγματι: για κάθε $A \in \mathcal{B}(X)$ έχουμε:

$$\mu_1(A) = \mu(A \times X) = \sigma\big((A \times X) \cap S\big) \leqslant \sigma(A \times X) = \sigma_1(A) \leqslant ||\sigma|| \cdot m(A),$$

ομοίως και $\mu_2(A) \leqslant ||\sigma|| \cdot m(A)$.
• $\mu(S^c) = 0$.

Επομένως από τον ισχυρισμό (II), έχουμε ότι $\mu = 0$.
Τότε $\sigma(S) = \mu(X \times X) = 0$ και το (ii) απεδείχθη.

Ισχυρισμός(IV) : το A είναι σχεδόν αύξον
Αφού το S είναι περιθωριακά μηδενικό, υπάρχουν N_1, N_2 m-μηδενικά υποσύνολα του X, ώστε:

$$S \subseteq (N_1 \times X) \cup (X \times N_2)$$

Θέτουμε $N = N_1 \cup N_2$, οπότε $m(N) = 0$, και έστω x, $y \notin N$, με $x \leqslant y$ και $x \in A$.
Θα δείξουμε ότι και $y \in A$, απ' όπου θα συμπεράνουμε ότι το A είναι σχεδόν αύξον.
Αφού x, $y \notin N$, έχουμε ότι $(y, x) \notin (N_1 \times X) \cup (X \times N_2)$, και άρα $(y, x) \notin S = G \cap (A^c \times A)$.
Αλλά $(y, x) \in G$ διότι $x \leqslant y$, και συνεπώς:

$$(y, x) \in (A^c \times A)^c = (A \times X) \cup (X \times A^c)$$

Από την τελευταία κι εφ' όσον $x \in A$, έπεται ότι και $y \in A$, δηλαδή το ζητούμενο.

Τώρα, από τον τελευταίο ισχυρισμό έχουμε ότι $A \in L_m(X, \leqslant)$, όπου $L_m(X, \leqslant) \overset{m}{\sim} L(X, \leqslant)$ από το Θεώρημα 2.14
Επομένως, υπάρχει $E \in L(X, m)$ ώστε $m(A \vartriangle E) = 0$.
Τότε $P = P_A = P_E \in \mathcal{L}(X, \leqslant, m)$ και η απόδειξη είναι πλήρης.

□

Από το προηγούμενο Θεώρημα έχουμε άμεσα το ακόλουθο αποτέλεσμα.

Πόρισμα 3.21. *Ο $\mathcal{L}(X, \leqslant, m)$ είναι ανακλαστικός.*

Θεώρημα 3.22. *Κάθε μεταθετικός σύνδεσμος υποχώρων που δρα σ' έναν διαχωρίσιμο χώρο Hilbert, είναι ανακλαστικός.*

Απόδειξη. Αν $\mathcal{L}$ είναι ένας τέτοιος σύνδεσμος υποχώρων, τότε από το Θεώρημα 2.30 ο $\mathcal{L}$ είναι ορθομοναδιαία ισοδύναμος με τον $\mathcal{L}(X, \leqslant, m)$, όπου $(X, \leqslant, m)$ ένας standard προδιατεταγμένος χώρος σ-πεπερασμένου μέτρου.
Αλλά ο $\mathcal{L}(X, \leqslant, m)$ είναι ανακλαστικός σύμφωνα με το προηγούμενο Πόρισμα, συνεπώς το ίδιο ισχύει και για τον $\mathcal{L}$.

□

Κεφάλαιο 4

Η Minimal Άλγεβρα ενός Προδιατεταγμένου Χώρου Μέτρου

Στο προηγούμενο κεφάλαιο, ορίσαμε την άλγεβρα $\mathcal{A}_{min}(X, \leqslant, m)$ ως την w^*-κλειστή θήκη της άλγεβρας $\{T_\mu : \mu \in A(G,m)\}$, και αποδείξαμε ότι έχει τις εξής δύο ιδιότητες:

1. $M_m \subseteq \mathcal{A}_{min}(X, \leqslant, m)$
2. $lat\mathcal{A}_{min}(X, \leqslant, m) = \mathcal{L}(X, \leqslant, m)$

Σκοπός μας είναι να δείξουμε επιπλέον ότι η $\mathcal{A}_{min}(X, \leqslant, m)$ είναι η μικρότερη (ως προς τη σχέση του περιέχεσθαι) w^*-κλειστή υπάλγεβρα της $B\big(L^2(X,m)\big)$ που ικανοποιεί τις προηγούμενες ιδιότητες (αυτό θα δικαιολογήσει και τον συμβολισμό της).

Σε όλα τα επόμενα, $(X, \leqslant, m)$ θα είναι ένας standard προδιατεταγμένος χώρος σ-πεπερασμένου μέτρου, και K ένας διαχωρίσιμος, απειροδιάστατος χώρος Hilbert.

Ορισμός 4.1. *Μια συνάρτηση $F : X \to K$ θα λέγεται ασθενώς μετρήσιμη, αν για κάθε $u \in K$ η συνάρτηση $x \mapsto \langle F(x), u \rangle_K$ είναι Borel μετρήσιμη, με την συνήθη έννοια.*

Αν $F : X \to K$ είναι ασθενώς μετρήσιμη, παρατηρούμε ότι η συνάρτηση $x \mapsto ||F(x)||_K^2$ είναι Borel μετρήσιμη, διότι, αν $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι μια ορθοκανονική βάση του K, τότε $||F(x)||_K^2 = \sum\limits_{n=1}^{\infty} |\langle F(x), e_n \rangle_K|^2$, όπου για κάθε $n \in \mathbb{N}$ η συνάρτηση $x \mapsto \langle F(x), e_n \rangle_K$ είναι Borel μετρήσιμη.

Ορισμός 4.2. *Ορίζουμε ως $L^2(X,m,K)$ τον χώρο των κλάσεων ισοδυναμίας, modulo ισότητα m-σχεδόν παντού, των ασθενώς μετρήσιμων συναρτήσεων $F : X \to K$ που είναι τετραγωνικά ολοκληρώσιμες, δηλαδή ικανοποιούν:*

$$\int_X ||F(x)||_K^2 dm(x) < \infty.$$

Έστω $F, G \in L^2(X,m,K)$.
Η συνάρτηση $x \mapsto \langle F(x), G(x) \rangle_K$ είναι Borel μετρήσιμη, εφ' όσον γράφεται:

$$\langle F(x), G(x) \rangle_K = \sum_{n=1}^{\infty} \langle F(x), e_n \rangle_K \cdot \overline{\langle G(x), e_n \rangle_K},$$

όπου $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι μια ορθοκανονική βάση του K.
Επιπλέον, η προηγούμενη συνάρτηση είναι ολοκληρώσιμη ως προς m, αφού, αν εφαρμόσουμε δύο φορές την ανισότητα Cauchy-Schwarz, έχουμε ότι:

$$\begin{aligned}\int\limits_X |\langle F(x),\, G(x)\rangle_K| dm(x) &\leqslant \int\limits_X ||F(x)||_K \cdot ||G(x)||_K\, dm(x)\\ &\leqslant \Big(\int\limits_X ||F(x)||_K^2 dm(x)\Big)^{\frac{1}{2}} \cdot \Big(\int\limits_X ||G(x)||_K^2 dm(x)\Big)^{\frac{1}{2}},\end{aligned}$$

όπου τα τελευταία ολοκληρώματα είναι πεπερασμένα, εφ' όσον $F,\, G \in L^2(X, m, K)$.
Επομένως, ορίζεται η απεικόνιση

$$\langle F,\, G\rangle = \int\limits_X \langle F(x),\, G(x)\rangle_K dm(x),$$

και, όπως ακριβώς στην περίπτωση του $L^2(X, m)$, αποδεικνύεται ότι είναι ένα εσωτερικό γινόμενο στον χώρο $L^2(X, m, K)$, με το οποίο ο $L^2(X, m, K)$ γίνεται χώρος Hilbert.
Η επαγόμενη νόρμα είναι: $||F|| = \big(\int\limits_X ||F(x)||_K^2 dm(x)\big)^{\frac{1}{2}}, \quad F \in L^2(X, m, K)$.

Θεωρούμε τώρα τον χώρο Hilbert $K \otimes L^2(X, m)$.
Σύμφωνα με το επόμενο Θεώρημα, ο χώρος αυτός μπορεί να ταυτισθεί με τον $L^2(X, m, K)$.

Θεώρημα 4.3. *Οι χώροι Hilbert $K \otimes L^2(X, m)$ και $L^2(X, m, K)$ είναι ορθομοναδιαία ισοδύναμοι.*

Απόδειξη. Έστω $u \in K$ και $f \in L^2(X, m)$
Ορίζουμε την συνάρτηση $F_{u,f} : X \to K$, με $F_{u,f}(x) = f(x)u \quad \forall\, x \in X$.
Για κάθε $v \in K$, η συνάρτηση $x \mapsto \langle\, F_{u,f}(x),\, v\rangle = f(x)\,\langle\, u,\, v\rangle_K$ είναι προφανώς Borel μετρήσιμη, και συνεπώς η $F_{u,f}$ είναι ασθενώς μετρήσιμη.
Επίσης,

$$\int\limits_X ||F_{u,f}(x)||_K^2\, dm(x) = \int\limits_X ||f(x)\, u||_K^2\, dm(x) = ||u||_K^2 \cdot \int\limits_X |f(x)|^2\, dm(x) < \infty \tag{4.1}$$

Άρα $F_{u,f} \in L^2(X, m, K)$.
Ορίζουμε τώρα την συνάρτηση

$$\begin{aligned} U_0 :\ K \odot\ L^2(X, m) &\ \to\ L^2(X, m, K)\\ u \otimes f &\ \mapsto\ F_{u,f}\end{aligned}$$

και επεκτείνουμε γραμμικά[1].

Ισχυρισμός: ο τελεστής U_0 είναι ισομετρία.
Παρατηρούμε πρώτα τα εξής:
(i) από την σχέση (4.1) προκύπτει ότι:

$$||U_0(u \otimes f)||^2 = ||F_{u,f}||^2 = ||u||_K^2 \cdot ||f||^2,$$

[1]θυμίζουμε ότι με $K \odot\ L^2(X, m)$ συμβολίζουμε το αλγεβρικό τανυστικό γινόμενο των χώρων K, $L^2(X, m)$.

δηλαδή $||F_{u,f}|| = ||u \otimes f||$.
(ii) αν $f,\, g \in L^2(X,m)$ και $u,\, v \in K$ ώστε $u \otimes f \perp v \otimes g$, τότε και $F_{u,f} \perp F_{v,g}$.
Πράγματι:

$$\begin{aligned}\langle F_{u,f},\, F_{v,g}\rangle &= \int\limits_X \langle f(x)u,\, g(x)v\rangle_{_K} dm(x) = \langle u,\, v\rangle_{_K} \cdot \int\limits_X f(x)\overline{g(x)} dm(x)\\ &= \langle u, v\rangle_{_K} \cdot \langle f,\, g\rangle = \langle u \otimes f, v \otimes g\rangle = 0\end{aligned}$$

Δείχνουμε τώρα ότι για κάθε στοιχείο $\sum\limits_{i=1}^{n} u_i \otimes f_i$ του $K \odot L^2(X,m)$, ισχύει:

$$||U_0(\sum_{i=1}^{n} u_i \otimes f_i)|| = ||\sum_{i=1}^{n} u_i \otimes f_i||$$

Εφαρμόζοντας την διαδικασία Gram-Schmidt στο σύνολο $\{f_1, ..., f_n\}$, βρίσκουμε ένα ορθοκανονικό υποσύνολο $\{g_1, ..., g_n\}$ του $L^2(X,m)$, ώστε για κάθε $i = 1, 2, ..., n$ να ισχύει:

$$f_i = \sum_{j=1}^{i} a_{ij} g_j,$$

όπου $a_{ij} \in \mathbb{C}$.
Τότε:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} u_i \otimes f_i &= \sum_{i=1}^{n} u_i \otimes (\sum_{j=1}^{i} a_{ij} g_j) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i} (a_{ij}u_i) \otimes g_j\\ &= \sum_{j=1}^{i}(\sum_{i=1}^{n} a_{ij}u_i) \otimes g_j = \sum_{j=1}^{i} v_j \otimes g_j\end{aligned}$$

όπου $v_j = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ij}u_i \in K$.
Επομένως έχουμε ότι:

$$||U_0(\sum_{i=1}^{n} u_i \otimes f_i)||^2 = ||U_0(\sum_{j=1}^{i} v_j \otimes g_j)||^2 = ||\sum_{j=1}^{i} F_{v_j,g_j}||^2 \tag{4.2}$$

Αλλά, εφ' όσον το σύνολο $\{g_1, g_2, ..., g_n\}$ είναι ορθοκανανικό, τα στοιχεία $v_j \otimes g_j$ είναι κάθετα ανά δύο, οπότε και οι συναρτήσεις F_{v_j,g_j} είναι κάθετες ανά δύο, από την παρατήρηση (ii).
Άρα, εφαρμόζοντας δύο φορές το Πυθαγόρειο Θεώρημα και την παρατήρηση (i), από την (4.2) θα έχουμε:

$$\begin{aligned}||U_0(\sum_{i=1}^{n} u_i \otimes f_i)||^2 &= \sum_{j=1}^{i} ||F_{v_j,g_j}||^2 = \sum_{j=1}^{i} ||v_j \otimes g_j||^2\\ &= ||\sum_{j=1}^{i} v_j \otimes g_j||^2 = ||\sum_{i=1}^{n} u_i \otimes f_i||^2,\end{aligned}$$

Συνεπώς ο U_0 είναι ισομετρία.

Εφόσον το αλγεβρικό τανυστικό γινόμενο $K \odot L^2(X,m)$ είναι πυκνός υπόχωρος του χώρου Hilbert $K \otimes L^2(X,m)$, έπεται ότι ο U_0 επεκτείνεται σε μια ισομετρία

$$U :\, K \otimes L^2(X,m) \to L^2(X,m,K)$$

, και μένει να δείξουμε ότι η U είναι επί.
Έστω $F \in L^2(X, m, K)$.
Επιλέγουμε μια ορθοκανονική βάση $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ του K και για κάθε $n \in \mathbb{N}$ θέτουμε:

$$f_n(x) = \langle\, F(x),\, e_n \rangle_{_K}\,, \quad x \in X$$

.

Αφού η F είναι ασθενώς μετρήσιμη, κάθε f_n είναι Borel μετρήσιμη.
Επίσης, από το Θεώρημα Beppo-Levi έχουμε ότι:

$$\int\limits_X ||F(x)||^2_{_K} dm(x) = \int\limits_X \sum_{n=1}^{\infty} |\,\langle\, F(x),\, e_n \rangle_{_K}\,|^2 dm(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_X |f_n(x)|^2 dm(x), \tag{4.3}$$

και εφ' όσον $\int\limits_X ||F(x)||^2_{_K} dm(x) < \infty$, έπεται ότι $\int\limits_X |f_n(x)|^2 dm(x) < \infty \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$.
Άρα $f_n \in L^2(X, m) \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$.
Θεωρούμε τώρα την ακολουθία $\{e_n \otimes f_n \,:\, n \in \mathbb{N}\}$ του $K \otimes L^2(X, m)$ και ισχυριζόμαστε ότι η σειρά $\sum\limits_{n=1}^{\infty} e_n \otimes f_n$ συγκλίνει στον $K \otimes L^2(X, m)$.
Πράγματι: επειδή η ακολουθία $\{e_n \otimes f_n \,:\, n \in \mathbb{N}\}$ είναι ορθογώνια, αρκεί[2] να δείξουμε ότι:

$$\sum_{n=1}^{\infty} ||e_n \otimes f_n||^2 < \infty$$

Αλλά,

$$\sum_{n=1}^{\infty} ||e_n \otimes f_n||^2 = \sum_{n=1}^{\infty} ||f_n||^2 = \int\limits_X ||F(x)||^2_{_K} dm(x) < \infty \text{ (από την (4.3)).}$$

Τέλος, ισχυριζόμαστε ότι $U(\sum\limits_{n=1}^{\infty} e_n \otimes f_n) = F$.
Επειδή

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) e_n = \sum_{n=1}^{\infty} F_{e_n, f_n}(x) \quad \forall\, x \in X,$$

θα ισχύει $U(\sum\limits_{n=1}^{\infty} e_n \otimes f_n) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} F_{e_n, f_n} = F$, και άρα η U είναι επί.
Δείξαμε συνεπώς ότι ο τελεστής U είναι ορθομοναδιαίος, δηλαδή το ζητούμενο.

□

Σχόλια:

1. Στο εξής, για την εικόνα μέσω της U του στοιχείου $u \otimes f$, δηλαδή για την συνάρτηση $F_{u,f}$, θα χρησιμοποιούμε τον ίδιο συμβολισμό $u \otimes f$, δηλαδή $u \otimes f$ θα είναι η συνάρτηση του $L^2(X, m, K)$:

$$(u \otimes f)(x) = f(x)u, \quad x \in X$$

---

[2] αν $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι μια ορθογώνια ακολουθία σ' έναν χώρο Hilbert H, τότε η σειρά $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ συγκλίνει στον H αν, και μόνο αν, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} ||x_n||^2 < \infty$

και, όπως ήδη δείξαμε, $||u \otimes f|| = ||F_{u,f}|| = ||u||_{_K} \cdot ||f||$

2. Έστω $T \in B\big(L^2(X,m)\big)$ και I_K ο ταυτοτικός τελεστής του K.
Ορίζεται τότε ο τελεστής $I_K \otimes T \in B\big(K \otimes L^2(X,m)\big)$, με

$$(I_K \otimes T)(u \otimes f) = u \otimes Tf \quad u \in K,\ f \in L^2(X,m)$$

Θεωρούμε τον τελεστή $U(I_K \otimes T)U^{-1} : L^2(X,m,K) \to L^2(X,m,K)$, για τον οποίο εύκολα διαπιστώνουμε ότι:

$$\big(U(I_K \otimes T)U^{-1}\big)F_{u,f} = F_{u,Tf},$$

δηλαδή ο $U(I_K \otimes T)U^{-1}$ απεικονίζει κάθε συνάρτηση $u \otimes f$ στην $u \otimes Tf$ (σύμφωνα με όσα είπαμε στο 1^o σχόλιο).
Στο εξής, γράφοντας $I_K \otimes T$ θα εννοούμε πάντα τον τελεστή $U(I_K \otimes T)U^{-1}$, δηλαδή $(I_K \otimes T)(u \otimes f) = u \otimes Tf$, όπου οι $u \otimes f$, και $u \otimes Tf$ θεωρούνται ως συναρτήσεις του $L^2(X,m,K)$.

3. Μέσω της U προκύπτει ότι ο $L^2(X,m,K)$ είναι η κλειστή γραμμική θήκη του συνόλου των συναρτήσεων $u \otimes f$, $u \in K, f \in L^2(X,m)$.
Μάλιστα, στην προηγούμενη απόδειξη (για το επί της U), αποδείξαμε ότι κάθε $F \in L^2(X,m,K)$ γράφεται: $F = \sum\limits_{n=1}^{\infty} e_n \otimes f_n$, όπου $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μια ορθοκανονική βάση του K. Αλλά και αντίστροφα, δείξαμε ότι η σειρά $\sum\limits_{n=1}^{\infty} e_n \otimes f_n$ συγκλίνει αν, και μόνο αν, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} ||f_n||^2 < \infty$, δηλαδή ορίζει μια συνάρτηση στον $L^2(X,m,K)$.

Στην επόμενη πρόταση, θα χρησιμοποιήσουμε τα προηγούμενα συμπεράσματα για να δώσουμε έναν χαρακτηρισμό των w^*-συνεχών γραμμικών μορφών του $B\big(L^2(X,m)\big)$.

Πρόταση 4.4. *Μια γραμμική απεικόνιση $\rho : B\big(L^2(X,m)\big) \to \mathbb{C}$ είναι w^*-συνεχής αν, και μόνο αν, υπάρχουν F, $G \in L^2(X,m,K)$ ώστε*

$$\rho(T) = \langle (I_K \otimes T)F,\, G\rangle \quad \forall T \in B\big(L^2(X,m)\big)$$

Απόδειξη.

1. Δείχνουμε πρώτα ότι για κάθε F, $G \in L^2(X,m,K)$, η $\rho(T) = \langle (I_K \otimes T)F,\, G\rangle$ είναι w^*-συνεχής.
Έστω $(T_i)_{i\in I}$ δίκτυο στον $B\big(L^2(X,m)\big)$ με $T_i \xrightarrow{w^*} \mathbf{0}$.
<u>Ισχυρισμός:</u> $I_K \otimes T_i \xrightarrow{w^*} \mathbf{0}$ στον $B\big(L^2(X,m,K)\big)$.
Θεωρούμε ακολουθίες $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στον $L^2(X,m,K)$ ώστε

$$\sum_{n=1}^{\infty} ||F_n||^2 < \infty \ \text{ και } \ \sum_{n=1}^{\infty} ||G_n||^2 < \infty$$

Αρκεί να δείξουμε ότι $\lim\limits_i \sum\limits_{n=1}^{\infty} \omega_{_{F_n,G_n}}(I_k \otimes T_i) = 0$.
Έστω $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μια ορθοκανονική βάση του K.
Τότε, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχουν ακολουθίες $(f_{n,k})_{k\in\mathbb{N}}$, $(g_{n,k})_{k\in\mathbb{N}}$ στον $L^2(X,m)$, ώστε:

$$F_n = \sum_{k=1}^{\infty} e_k \otimes f_{n,k} \ \text{ και } \ G_n = \sum_{k=1}^{\infty} e_k \otimes g_{n,k}$$

Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $i \in I$ έχουμε:

$$\begin{aligned}
\omega_{_{F_n,G_n}}(I_K \otimes T_i) &= \langle (I_K \otimes T_i)F_n \, , \, G_n \rangle \\
&= \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} \langle (I_K \otimes T_i)(e_k \otimes f_{n,k}) \, , \, e_m \otimes g_{n,m} \rangle \\
&= \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} \langle e_k, e_m \rangle_{_K} \cdot \langle T_i f_{n,k} \, , \, g_{n,m} \rangle
\end{aligned}$$

και εφ' όσον η $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ορθοκανονική,

$$\omega_{_{F_n,G_n}}(I_K \otimes T_i) = \sum_{k=1}^{\infty} \langle T_i f_{n,k} \, , \, g_{n,k} \rangle \, .$$

Επομένως,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \omega_{_{F_n,G_n}}(I_K \otimes T_i) = \sum_{n,k} \omega_{_{f_{n,k},g_{n,k}}}(T_i) \quad \forall\, i \in I \tag{4.4}$$

Τώρα, χρησιμοποιώντας το Πυθαγόρειο Θεώρημα έχουμε ότι:

$$||F_n||^2 = \sum_{k=1}^{\infty} ||e_k \otimes f_{n,k}||^2 = \sum_{k=1}^{\infty} ||f_{n,k}||^2,$$

απ' όπου $\sum\limits_{n,k} ||f_{n,k}||^2 = \sum\limits_{n=1}^{\infty} ||F_n||^2 < \infty$.
Ανάλογα, $\sum\limits_{n,k} ||g_{n,k}||^2 = \sum\limits_{n=1}^{\infty} ||G_n||^2 < \infty$.
Επομένως, αφού $T_i \xrightarrow{w^*} \mathbf{0}$, από την (4.4) έπεται ότι:

$$\lim_i \sum_{n=1}^{\infty} \omega_{_{F_n,G_n}}(I_K \otimes T_i) = \lim_i \sum_{n,k} \omega_{_{f_{n,k},g_{n,k}}}(T_i) = 0,$$

δηλαδή $I_K \otimes T_i \xrightarrow{w^*} \mathbf{0}$ στον $B\big(L^2(X,m,K)\big)$, και ο ισχυρισμός απεδείχθη.

Παρατηρούμε τώρα ότι $\rho = \omega_{_{F,G}} \circ \Omega$, όπου

$$\omega_{_{F,G}}(S) = \langle SF, \, G \rangle \, , \quad S \in B\big(L^2(X,m,K)\big)$$

και

$$\Omega(T) = I_K \otimes T, \quad T \in B\big(L^2(X,m)\big)$$

Αλλά από τον ισχυρισμό, η Ω είναι (w^*, w^*)-συνεχής. Επίσης και η $\omega_{_{F,G}}$ είναι w^*-συνεχής, αφού ανήκει στον προδυικό του $B\big(L^2(X,m,K)\big)$.
Συμπεραίνουμε τελικά ότι η ρ είναι w^*-συνεχής.

2. Αντίστροφα, αν ρ είναι μια w^*-συνεχής γραμμική μορφή του $B\big(L^2(X,m)\big)$, θα δείξουμε ότι:

$$\rho(T) = \langle (I_K \otimes T)F,\, G\rangle \text{ για κάποιες } F,\, G \in L^2(X,m,K).$$

Αφού η ρ είναι w^*-συνεχής, υπάρχουν ακολουθίες $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στον $L^2(X,m)$ με $\sum\limits_{n=1}^{\infty} ||f_n||^2 < \infty$ και $\sum\limits_{n=1}^{\infty} ||g_n||^2 < \infty$, ώστε:

$$\rho(T) = \sum_{n=1}^{\infty} \omega_{f_n,g_n}(T) = \sum_{n=1}^{\infty} \langle Tf_n,\, g_n\rangle \quad \forall T \in B\big(L^2(X,m)\big)$$

Αν $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι μια ορθοκανονική βάση του K, ορίζουμε τις συναρτήσεις

$$F = \sum_{n=1}^{\infty} e_n \otimes f_n, \;\; G = \sum_{n=1}^{\infty} e_n \otimes g_n$$

του $L^2(X,m,K)$.
Τότε, για κάθε $T \in B\big(L^2(X,m)\big)$ έχουμε:

$$\begin{aligned}
\langle (I_K \otimes T)F,\, G\rangle &= \langle (I_K \otimes T)(\sum_{n=1}^{\infty} e_n \otimes f_n)\,,\, \sum_{m=1}^{\infty} e_m \otimes g_m\rangle \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} \langle (I_K \otimes T)(e_n \otimes f_n), e_m \otimes g_m\rangle \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} \langle e_n,\, e_m\rangle_K \cdot \langle Tf_n,\, g_m\rangle \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \langle Tf_n,\, g_n\rangle = \rho(T),
\end{aligned}$$

δηλαδή το ζητούμενο.

□

Λήμμα 4.5. *Έστω $\mathcal{B}$ υπάλγεβρα της $B\big(L^2(X,m)\big)$ που περιέχει τον ταυτοτικό τελεστή, και $T \in B\big(L^2(X,m)\big)$. Τότε:*

$$T \in \overline{\mathcal{B}}^{w^*} \;\Leftrightarrow\; lat(I_K \otimes \mathcal{B}) \subseteq lat(I_K \otimes T)$$

Απόδειξη. Υποθέτουμε καταρχήν ότι $lat(I_K \otimes \mathcal{B}) \subseteq lat(I_K \otimes T)$, και έστω ρ μια w^*-συνεχής γραμμική μορφή του $B\big(L^2(X,m)\big)$, με $\rho|_{\mathcal{B}} = 0$.
Από την προηγούμενη πρόταση, υπάρχουν $F,\, G \in L^2(X,m,K)$ ώστε:

$$\rho(A) = \langle (I_K \otimes A)F,\, G\rangle \quad \forall\, A \in B\big(L^2(X,m)\big)$$

Αφού $\rho|_{\mathcal{B}} = 0$, η συνάρτηση G είναι κάθετη στον υπόχωρο $(I_K \otimes \mathcal{B})F$, άρα και στον κλειστό υπόχωρο

$$S = \overline{(I_K \otimes \mathcal{B})F}^{||\cdot||}$$

Παρατηρούμε ότι ο $(I_K \otimes \mathcal{B})F$ είναι $I_K \otimes \mathcal{B}$-αναλλοίωτος (αφού η $\mathcal{B}$ είναι άλγεβρα), και συνεπώς $S \in lat(I_K \otimes \mathcal{B})$.

Άρα από την υπόθεση, $S \in lat(I_K \otimes T)$.
Τώρα, αφού η $\mathcal{B}$ περιέχει τον ταυτοτικό τελεστή $I_{L^2(X,m)}$, έπεται ότι:

$$F = (I_K \otimes I_{L^2(X,m)})F \in S$$

Επομένως, $(I_K \otimes T)F \in S$.
Αλλά $G \in S^{\perp}$, και συνεπώς:

$$\rho(T) = \langle (I_K \otimes T)F,\, G\rangle = 0$$

Δείξαμε λοιπόν ότι κάθε w^*-συνεχής γραμμική μορφή που μηδενίζει την $\mathcal{B}$, μηδενίζει και τον T.
Από το Θεώρημα Hanh-Banach, συμπεραίνουμε ότι $T \in \overline{\mathcal{B}}^{w^*}$.

Αντίστροφα, έστω ότι $T \in \overline{\mathcal{B}}^{w^*}$.
Θα δείξουμε ότι αν $S \in lat(I_K \otimes \mathcal{B})$, τότε $S \in lat(I_K \otimes T)$.
Έστω P η προβολή πάνω στον υπόχωρο S.
Αφού $T \in \overline{\mathcal{B}}^{w^*}$, υπάρχει δίκτυο $(B_i)_{i\in I}$ στην $\mathcal{B}$ που συγκλίνει υπερασθενώς στον T.
Τότε, επειδή η απεικόνιση $T \mapsto I_K \otimes T$ είναι (w^*, w^*)-συνεχής, θα έχουμε ότι:

$$I_K \otimes B_i \xrightarrow{w^*} I_K \otimes T,$$

άρα και $I_K \otimes B_i \xrightarrow{WOT} I_K \otimes T$, διότι η WOT-τοπολογία είναι ασθενέστερη της ultraweak.
Τώρα, εφ' όσον ο S είναι $I_K \otimes B_i$-αναλλοίωτος για κάθε $i \in I$ και ο πολλαπλασιασμός είναι χωριστά WOT-συνεχής, θα ισχύει:

$$\begin{aligned}(I_K \otimes T)P &= WOT - \lim_i (I_K \otimes B_i)P \\ &= WOT - \lim_i P(I_K \otimes B_i)P \\ &= P(I_K \otimes T)P,\end{aligned}$$

και συνεπώς ο S είναι $I_K \otimes T$-αναλλοίωτος.

□

Η επόμενη Πρόταση μας δίνει μια περιγραφή των τελεστών $I_K \otimes T_\mu$, με μια σχέση αντίστοιχη της:

$$\langle T_\mu f,\, g\rangle = \int\limits_{X\times X} f(y)\overline{g(x)}\, d\mu(x,y), \quad f,\, g \in L^2(X,m) \text{ (βλ. Θεώρημα 3.9)}$$

Πρόταση 4.6. *Έστω $\mu \in A(X\times X, m)$ και $F, G \in L^2(X,m,K)$. Τότε η συνάρτηση $h(x,y) = \langle F(y),\, G(x)\rangle_K$ είναι ολοκληρώσιμη ως προς $|\mu|$ (άρα και ως προς μ), και ισχύει:*

$$\langle (I_K \otimes T_\mu)F,\, G\rangle = \int\limits_{X\times X} \langle F(y),\, G(x)\rangle_K \, d\mu(x,y)$$

Απόδειξη. Από την ανισότητα Cauchy-Schwarz έχουμε:

$$\int\limits_{X\times X} |\, \langle F(y),\, G(x)\rangle_K \,|\; d|\mu|(x,y) \leqslant \int\limits_{X\times X} ||F(y)||_K \cdot ||G(x)||_K \; d|\mu|(x,y)$$

Επίσης, στο Θεώρημα 3.9 αποδείξαμε ότι για κάθε $f,\, g \in L^2(X,m)$ ισχύει:

$$\int\limits_{X\times X} |f(y)g(x)|\ d|\mu|(x,y) \leqslant ||\mu|| \cdot ||f|| \cdot ||g||.$$

Θέτουμε $f(y) = ||F(y)||_{_K}$, $g(x) = ||G(x)||_{_K}$.
Τότε είναι σαφές ότι $f,\, g \in L^2(X,m)$ και $||f|| = ||F||$, $||g|| = ||G||$.
Άρα, από τις προηγούμενες ανισότητες, προκύπτει ότι:

$$\int\limits_{X\times X} |\left\langle F(y),\, G(x)\right\rangle_{_K}|\ d|\mu|(x,y) \leqslant ||\mu|| \cdot ||F|| \cdot ||G||,$$

απ' όπου έπεται ότι η h είναι ολοκληρώσιμη ως προς $|\mu|$.

Για το 2ο μέρος της Πρότασης, θεωρούμε τις sesquilinear μορφές

$$\omega(F,G) = \left\langle (I_K \otimes T_\mu)F,\, G\right\rangle,$$

και

$$\phi(F,G) = \int\limits_{X\times X} \left\langle F(y),\, G(x)\right\rangle_{_K} d\mu(x,y),$$

και αρκεί να δείξουμε ότι $\omega = \phi$.
Παρατηρούμε καταρχήν ότι οι ω, ϕ είναι φραγμένες με $||\omega|| \leqslant ||\mu||$ και $||\phi|| \leqslant ||\mu||$, διότι ισχύουν οι ανισότητες:

$$\begin{aligned} |\omega(F,G)| &\leqslant ||I_K \otimes T_\mu|| \cdot ||F|| \cdot ||G|| = ||T_\mu|| \cdot ||F|| \cdot ||G|| \\ &\leqslant ||\mu|| \cdot ||F|| \cdot ||G|| \end{aligned}$$

και

$$|\phi(F,G)| \leqslant \int\limits_{X\times X} |\left\langle F(y),\, G(x)\right\rangle_{_K}|\ d|\mu|(x,y) \leqslant ||\mu|| \cdot ||F|| \cdot ||G||$$

Τώρα, αφού ο $L^2(X,m,K)$ είναι η κλειστή γραμμική θήκη του συνόλου $\{u \otimes f,\, u \in K,\, f \in L^2(X,m)\}$, και εφ' όσον οι ω, ϕ είναι συνεχείς, αρκεί να δείξουμε ότι οι ω, ϕ ταυτίζονται στο σύνολο αυτό.
Πράγματι, για κάθε $u,\, v \in K$ και $f,\, g \in L^2(X,m)$ έχουμε:

$$\begin{aligned} \omega(u \otimes f, v \otimes g) &= \left\langle u \otimes T_\mu f,\, v \otimes g\right\rangle \\ &= \left\langle u,\, v\right\rangle_{_K} \left\langle T_\mu f,\, g\right\rangle \\ &= \left\langle u,\, v\right\rangle_{_K} \int\limits_{X\times X} f(y)\overline{g(x)} d\mu(x,y) \\ &= \int\limits_{X\times X} \left\langle f(y)u,\, g(x)v\right\rangle_{_K}\ d\mu(x,y) \\ &= \int\limits_{X\times X} \left\langle (u\otimes f)(y),\, (v \otimes g)(x)\right\rangle_{_K}\ d\mu(x,y) \\ &= \phi(u \otimes f,\, v \otimes g) \end{aligned}$$

Άρα $\omega = \phi$, απ' όπου έχουμε το ζητούμενο.

$\square$

Θεωρούμε τώρα την πολλαπλασιαστική άλγεβρα $\mathcal{M}_m$ του (X, m) και την υπάλγεβρα

$$I_K \otimes \mathcal{M}_m = \{I_K \otimes M_f : \, f \in L^\infty(X, m)\}$$

της $B\big(L^2(X, m, K)\big)$.
Η $I_K \otimes \mathcal{M}_m$ είναι μια μεταθετική άλγεβρα von Neumann.
Στα επόμενα, θα προσδιορίσουμε τον μεταθέτη και τους αναλλοίωτους υποχώρους της $I_K \otimes \mathcal{M}_m$.
Για τον σκοπό αυτόν, χρειάζεται να ορίσουμε πρώτα μιας ειδικής μορφής ″πολλαπλασιαστικούς″ τελεστές της $B\big(L^2(X, m, K)\big)$.
Έστω $H : \, X \to B(K)$ μια συνάρτηση που πληροί τις ακόλουθες συνθήκες:

1. η H είναι ουσιωδώς φραγμένη, δηλαδή υπάρχει σταθερά $\beta \geqslant 0$, ώστε:

$$||H(x)||_{B(K)} \leqslant \beta \quad m\text{-σχεδόν} \; \forall \, x \in X$$

2. η H είναι ασθενώς μετρήσιμη, με την έννοια ότι, για κάθε $u, \, v \in K$, η συνάρτηση $x \mapsto \langle H(x)u, \, v\rangle_K$ είναι Borel μετρήσιμη.

Ορίζουμε $L_H : \, L^2(X, m, K) \to L^2(X, m, K)$, με

$$(L_H G)(x) = H(x)G(x) \quad \forall \, G \in L^2(X, m, K).$$

Πρόταση 4.7. *Η απεικόνιση L_H ορίζει έναν φραγμένο γραμμικό τελεστή του $B\big(L^2(X, m, K)\big)$.*

Απόδειξη. Δείχνουμε πρώτα ότι η L_H είναι καλά ορισμένη, δηλαδή ότι

$$L_H G \in L^2(X, m, K) \quad \forall \, G \in L^2(X, m, K)$$

(i) Η $L_H G$ είναι ασθενώς μετρήσιμη:
Έστω $u \in K$.
Αρκεί να δείξουμε ότι η $h(x) = \langle (L_H G)(x), \, u\rangle_K$ είναι Borel μετρήσιμη.
Επιλέγουμε μια ορθοκανονική βάση $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ του K.
Τότε:

$$G(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \langle G(x), \, u_n\rangle_K \, u_n \quad \forall \, x \in X,$$

και συνεπώς η h γράφεται:

$$h(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \langle G(x), \, u_n\rangle_K \cdot \langle H(x) \, u_n, \, u\rangle_K$$

Τώρα, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ οι συναρτήσεις

$$x \mapsto \langle G(x), \, u_n\rangle \, , \; x \mapsto \langle H(x)u_n, \, u\rangle$$

είναι Borel μετρήσιμες, διότι οι G, H είναι ασθενώς μετρήσιμες.
Συνεπώς και η h είναι Borel μετρήσιμη.

(ii) η $L_H G$ είναι τετραγωνικά ολοκληρώσιμη:
Αφού η H είναι ουσιωδώς φραγμένη, υπάρχουν $\beta \geqslant 0$ και $N \in \mathcal{B}(X)$, με $m(N) = 0$, ώστε:

$$||H(x)||_{B(K)} \leqslant \beta \quad \forall x \notin N$$

Τότε:

$$\begin{aligned}
\int_X ||(L_H G)(x)||_K^2 dm(x) &\leqslant \int_X ||H(x)||_{B(K)}^2 \cdot ||G(x)||_K^2 \; dm(x) \\
&= \int_{N^c} ||H(x)||_{B(K)}^2 \cdot ||G(x)||_K^2 \; dm(x) \\
&\leqslant \beta^2 \cdot \int_{N^c} ||G(x)||_K^2 \; dm(x) \\
&\leqslant \beta^2 \cdot \int_X ||G(x)||_K^2 \; dm(x) < \infty
\end{aligned}$$

Επομένως η L_H είναι καλά ορισμένη.
Από την άλλη, η L_H είναι προφανώς γραμμική, και λόγω της τελευταίας ανισότητας έχουμε ότι:

$$||L_H G||_2 \leqslant \beta \cdot ||G||_2 \quad \forall G \in L^2(X, m, K).$$

Συμπεραίνουμε τελικά ότι $L_H \in B\big(L^2(X, m, K)\big)$.

□

Πρόταση 4.8.

$$(I_K \otimes \mathcal{M}_m)' = \{L_H | \, H : X \to B(K) \textit{ ουσιωδώς φραγμένη, ασθενώς μετρήσιμη}\}$$

Απόδειξη. Δείχνουμε πρώτα ότι για κάθε ουσιωδώς φραγμένη, ασθενώς μετρήσιμη συνάρτηση $H : X \to B(K)$, ο επαγόμενος τελεστής L_H ανήκει στον μεταθέτη της $I_K \otimes \mathcal{M}_m$.
Έστω $f \in L^\infty(X, m)$.
Για κάθε $u \in K$ και $g \in L^2(X, m)$, έχουμε:

$$\begin{aligned}
(I_K \otimes M_f)(u \otimes g)(x) &= (u \otimes fg)(x) = f(x)g(x)u \\
&= f(x) \cdot (u \otimes g)(x)
\end{aligned}$$

Επομένως, για κάθε $G \in L^2(X, m, K)$ θα ισχύει:

$$\big((I_K \otimes M_f)G\big)(x) = f(x) \cdot G(x) \tag{4.5}$$

Τότε:

$$\begin{aligned}
\big(L_H(I_K \otimes M_f)G\big)(x) &= H(x)\big((I_K \otimes M_f)G\big)(x) \\
&\overset{(4.5)}{=} H(x)\big(f(x)G(x)\big) \\
&= f(x) \cdot H(x)G(x).
\end{aligned}$$

Από την άλλη,

$$\big((I_K \otimes M_f)L_H G\big)(x) \overset{(4.5)}{=} f(x)\cdot(L_H G)(x) = f(x)\cdot H(x)G(x)$$

Από τις τελευταίες σχέσεις συμπεραίνουμε ότι $L_H(I_K \otimes M_f) = (I_K \otimes M_f)L_H \;\; \forall\, f \in L^\infty(X,m)$ και άρα $L_H \in (I_K \otimes \mathcal{M}_m)^{'}$.

Αντίστροφα, θα δείξουμε ότι:

$$(I_K \otimes \mathcal{M}_m)^{'} \subseteq \{L_H |\, H: X \to B(K) \text{ ουσιωδώς φραγμένη, ασθενώς μετρήσιμη}\}$$

Από το Θεώρημα 1.49 έχουμε ότι:

$$(I_K \otimes \mathcal{M}_m)^{'} = (I_K \otimes \mathcal{M}_m^{'})^{'} = B(K) \otimes \mathcal{M}_m.$$

Επομένως αρκεί να δείξουμε ότι: για κάθε $T \in B(K)$ και $f \in L^\infty(X,m)$ υπάρχει ουσιωδώς φραγμένη και ασθενώς μετρήσιμη συνάρτηση $H: X \to B(K)$, ώστε $T \otimes M_f = L_H$.

Θέτουμε $H(x) = f(x)T$, και παρατηρούμε τα εξής:
• για κάθε $u,\, v \in K$ η συνάρτηση $h(x) = \langle H(x)u,\, v\rangle_K = f(x)\cdot\langle Tu,\, v\rangle_K$ είναι Borel μετρήσιμη, και συνεπώς η H είναι ασθενώς μετρήσιμη.
• $||H(x)|| = |f(x)|\cdot||T|| \leqslant ||f||_\infty \cdot ||T|| \quad m$-σχεδόν $\forall\, x \in X$, οπότε η H είναι ουσιωδώς φραγμένη.

Τέλος, για κάθε $u \in K$ και $g \in L^2(X,m)$ έχουμε ότι:

$$\begin{aligned}
(T \otimes M_f)(u \otimes g)(x) &= (Tu \otimes fg)(x) = f(x)g(x)\cdot Tu \\
&= g(x)\cdot H(x)u = H(x)\big(g(x)u\big) \\
&= H(x)(u \otimes g)(x) = \big(L_H(u \otimes g)\big)(x)
\end{aligned}$$

απ' όπου προκύπτει ότι $T \otimes M_f = L_H$, δηλαδή το ζητούμενο.

□

Έστω $H : X \to Proj(K)$ μια ασθενώς μετρήσιμη συνάρτηση, που παίρνει όμως τιμές στις προβολές του $B(K)$ (και άρα ουσιωδώς φραγμένη).
Τότε, ο αντίστοιχος τελεστής L_H θα είναι προβολή του $B\big(L^2(X,m,K)\big)$.
Αυτό προκύπτει από τις σχέσεις:

$$\begin{aligned}
(L_H^2 G)(x) &= H(x)(L_H G)(x) = \big(H(x)\big)^2 G(x) \\
&= H(x)G(x) = (L_H G)(x)
\end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned}
\langle L_H G,\, F\rangle &= \int_X \langle H(x)G(x),\, F(x)\rangle_K \, dm(x) \\
&= \int_X \langle G(x),\, H(x)F(x)\rangle_K \, dm(x) \\
&= \langle G,\, L_H F\rangle,
\end{aligned}$$

$G, F \in L^2(X, m, K)$.
Αντίστροφα, αν ο τελεστής L_H είναι προβολή, ισχυριζόμαστε ότι μπορούμε τότε να επιλέξουμε την H κατά τέτοιον τρόπο, ώστε ο τελεστής $H(x)$ να είναι προβολή για κάθε $x \in X$.
Εφ' όσον $L_H = L_H^* = L_H^2$, για κάθε $u, v \in K$ και $g \in L^2(X, m)$ έχουμε ότι:

$$\langle L_H(u \otimes g), v \otimes g \rangle = \langle u \otimes g, L_H(v \otimes g) \rangle = \langle L_H^2(u \otimes g), v \otimes g \rangle$$

δηλαδή ισοδύναμα:

$$\begin{aligned}\int_X \langle H(x)u, v \rangle_K |g(x)|^2 dm(x) &= \int_X \langle u, H(x)v \rangle_K |g(x)|^2 dm(x) \\ &= \int_X \langle (H(x))^2 u, v \rangle_K |g(x)|^2 dm(x)\end{aligned}$$

Αν θέσουμε $f_1(x) = \langle H(x)u, v \rangle_K$, $f_2(x) = \langle u, H(x)v \rangle_K$ και $f_3(x) = \langle (H(x))^2 u, v \rangle_K$, $x \in X$, τότε από την ισότητα των προηγούμενων ολοκληρωμάτων προκύπτει ότι:

$$\int_X (f_1(x) - f_2(x)) |g(x)|^2 dm(x) = \int_X (f_2(x) - f_3(x)) |g(x)|^2 dm(x) = 0 \quad \forall g \in L^2(X, m),$$

και άρα:

$$\int_E (f_1(x) - f_2(x)) dm(x) = \int_E (f_2(x) - f_3(x)) dm(x) = 0$$

για κάθε $E \in \mathcal{B}(X)$ με $m(E) < \infty$.
Επομένως, $f_1(x) = f_2(x)$ m-σχεδόν $\forall x \in X$ και $f_2(x) = f_3(x)$ m-σχ. $\forall x \in X$.
Δείξαμε λοιπόν ότι για κάθε $u, v \in K$ ισχύει:

$$\langle H(x)u, v \rangle_K = \langle u, H(x)v \rangle_K = \langle (H(x))^2 u, v \rangle_K \quad m\text{-σχ. } \forall x \in X$$

Θεωρώντας τώρα ως u, v τα στοιχεία μιας ορθοκανονικής βάσης $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ του K, για κάθε $n, m \in \mathbb{N}$ βρίσκουμε ένα m-μηδενικό υποσύνολο $E_{n,m}$ του X, ώστε:

$$\langle H(x)e_n, e_m \rangle_K = \langle e_n, H(x)e_m \rangle_K = \langle (H(x))^2 e_n, e_m \rangle_K \quad \forall x \notin E_{n,m}$$

Τότε για $E = \bigcup\limits_{n,m} E_{n,m}$ έχουμε ότι $m(E) = 0$ και ισχύει:

$$\langle H(x)e_n, e_m \rangle_K = \langle e_n, H(x)e_m \rangle_K = \langle (H(x))^2 e_n, e_m \rangle_K \quad \forall x \notin E, \forall n, m \in \mathbb{N}$$

απ' όπου έπεται ότι:

$$H(x) = H(x)^* = H(x)^2 \quad \forall x \notin E$$

Ορίζοντας $H(x) = \mathbf{0}_{B(K)}$ για κάθε $x \in E$, έχουμε τελικά ότι ο τελεστής $H(x)$ είναι προβολή του $B(K)$ για κάθε $x \in X$.

Μετά από αυτές τις παρατηρήσεις, έχουμε την ακόλουθη Πρόταση.

Πρόταση 4.9.

$$lat(I_K \otimes \mathcal{M}_m) = \{L_p \,|\, P:\, X \to Proj(K) \text{ ασθενώς μετρήσιμη}\}$$

Απόδειξη. Έστω Q προβολή στον $B(L^2(X,m,K))$.
Από την Πρόταση 1.40 κι εφ' όσον η $I_K \otimes \mathcal{M}_m$ ειναι αυτοσυζυγής, έχουμε ότι:

$$Q \in lat(I_K \otimes \mathcal{M}_m) \iff Q \in (I_K \otimes \mathcal{M}_m)'$$

Αλλά από την Πρόταση 4.8 και τις προηγούμενες παρατηρήσεις, έχουμε ότι $Q \in (I_K \otimes \mathcal{M}_m)'$ αν, και μόνο αν, υπάρχει ασθενώς μετρήσιμη συνάρτηση $P: X \to Proj(K)$, ώστε $Q = L_P$.

□

Ορισμός 4.10. *Έστω $(\Psi, \leqslant_{\Psi})$ ένα προδιατεταγμένο σύνολο, και $\Omega: X \to \Psi$ μια συνάρτηση. Η Ω θα λέγεται σχεδόν αύξουσα, αν είναι αύξουσα στο συμπλήρωμα ενός m-μηδενικού συνόλου, με την έννοια ότι υπάρχει $N \in \mathcal{B}(X)$ με $m(N) = 0$, ώστε:*

$$\text{αν } x,\, y \notin N \text{ και } x \leqslant y, \text{ τότε } \Omega(x) \leqslant_{\Psi} \Omega(y).$$

Πρόταση 4.11. *Η WOT-κλειστή (άρα και SOT-κλειστή) κυρτή θήκη του $\mathcal{L}(X, \leqslant, m)$ ταυτίζεται με το σύνολο $\{M_f \mid f: X \to [0,1]$ Borel μετρήσιμη, σχεδόν αύξουσα$\}$.*

Απόδειξη.

1. Έστω $f: X \to [0,1]$ μια Borel μετρήσιμη, σχεδόν αύξουσα συνάρτηση.
Θα δείξουμε ότι $M_f \in \overline{\text{conv}}^{WOT} \mathcal{L}(X, \leqslant, m)$.
Για κάθε $r \geqslant 0$ θέτουμε $E_r = [f \geqslant r] \in \mathcal{B}(X)$.
Παρατηρούμε ότι το E_r είναι σχεδόν αύξον.
Πράγματι: αφού η f είναι σχεδόν αύξουσα, υπάρχει $N \in \mathcal{B}(X)$ με $m(N) = 0$, ώστε:

$$\text{αν } x,\, y \notin N \text{ και } x \leqslant y, \text{ τότε } f(x) \leqslant f(y).$$

Επομένως, για $x,\, y \notin N$, με $x \leqslant y$ και $x \in E_r$, έχουμε ότι: $r \leqslant f(x) \leqslant f(y)$, απ' όπου $y \in E_r$.
Τώρα, από το Θεώρημα 2.14, υπάρχει $A_r \in L(X, \leqslant)$ ώστε $m(A_r \;\triangle\; E_r) = 0$.
Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι $P_{E_r} = P_{A_r} \in \mathcal{L}(X, \leqslant, m) \quad \forall\, r \geqslant 0$.
Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ θέτουμε: $f_n = \frac{1}{n} \sum\limits_{k=0}^{n-1} \chi_{E_{k/n}}$.
Προφανώς $0 \leqslant f_n \leqslant 1$, η f_n είναι Borel μετρήσιμη, και ο αντίστοιχος πολλαπλασιαστικός τελεστής

$$M_{f_n} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} P_{E_{k/n}} \in \text{conv}\, \mathcal{L}(X, \leqslant, m),$$

ανήκει στην κυρτή θήκη του $\mathcal{L}(X, \leqslant, m)$.
Ισχυριζόμαστε επίσης ότι:

$$0 \leqslant f_n - f \leqslant \frac{1}{n} \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \tag{4.6}$$

Έστω $x \in X$.
Αν $f(x) = 1$, τότε και $f_n(x) = 1$ και η (4.6) ισχύει.
Αν $f(x) < 1$, τότε υπάρχει μοναδικό $\kappa \in \{0, 1, ... n-1\}$ ώστε: $\frac{\kappa}{n} \leqslant f(x) < \frac{\kappa+1}{n}$.
Τότε $x \in E_{i/n} \quad \forall\, i = 0, 1, ..., k$, οπότε $f_n(x) = \frac{\kappa+1}{n}$. Επομένως:

$$f_n(x) - \frac{1}{n} = \frac{\kappa}{n} \leqslant f(x) < f_n(x)$$

και η (4.6) ισχύει.

Άρα, $||M_{f_n} - M_f|| = ||f_n - f||_\infty \leqslant \frac{1}{n}$, απ' όπου $||M_{f_n} - M_f|| \to 0$.
Έπεται ότι $M_f \in \overline{\text{conv}}^{||\cdot||}\mathcal{L}(X, \leqslant, m) \subseteq \overline{\text{conv}}^{WOT}\mathcal{L}(X, \leqslant, m)$, δηλαδή το ζητούμενο.

2. Αντίστροφα, θα δείξουμε ότι:

$$\overline{\text{conv}}^{WOT}\mathcal{L}(X, \leqslant, m) \subseteq \{M_f \,|\, f : X \to [0,1] \text{ Borel μετρήσιμη, σχεδόν αύξουσα}\}$$

Έστω C το σύνολο στο 2^o μέλος της προηγούμενης σχέσης.
Εύκολα βλέπουμε ότι το C είναι κυρτό και περιέχει τον $\mathcal{L}(X, \leqslant, m)$ (διότι η χαρακτηριστική συνάρτηση ενός αύξοντος συνόλου είναι αύξουσα).

Ισχυριζόμαστε επιπλέον ότι το C είναι SOT-κλειστό.
Παρατηρούμε ότι:
- το C περιέχεται στην κλειστή μοναδιαία σφαίρα $(\mathcal{M}_m)_1$ της $\mathcal{M}_m$, όπου η $\mathcal{M}_m$ είναι SOT-κλειστή
- η $(\mathcal{M}_m)_1$ με την SOT-τοπολογία είναι μετρικοποιήσιμη, άρα και ο υπόχωρος (C, SOT) είναι μετρικοποιήσιμος.

Άρα, αρκεί να δείξουμε ότι αν $(M_{f_n})_{n\in\mathbb{N}}$ είναι μια ακολουθία στο C που συγκλίνει ως προς την SOT-τοπολογία σ' έναν πολλαπλασιαστικό τελεστή M_f, $f \in L^\infty(X, m)$, τότε η f είναι σχεδόν αύξουσα και παίρνει τιμές στο $[0, 1]$.
Τότε, βρίσκουμε μια υπακολουθία $(f_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ της $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, ώστε $f_{k_n} \to f$ m-σχεδόν παντού, δηλαδή υπάρχει $N \in \mathcal{B}(X)$ με $m(N) = 0$, ώστε $\lim\limits_n f_{k_n}(x) = f(x) \quad \forall\, x \notin N$.
Τώρα, αφού οι f_n είναι σχεδόν αύξουσες, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει $N_n \in \mathcal{B}(X)$ με $m(N_n) = 0$, ώστε:

$$\text{αν } x,\, y \notin N_n \text{ και } x \leqslant y, \text{ τότε } f_n(x) \leqslant f_n(y).$$

Θέτουμε $M = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} N_n$, οπότε $m(M) = 0$, και παρατηρούμε ότι για κάθε $x,\, y \notin M \cup N$, με $x \leqslant y$, ισχύει:

$$f(x) = \lim_n f_{k_n}(x) \leqslant \lim_n f_{k_n}(y) = f(y).$$

Συμπεραίνουμε ότι η f είναι σχεδόν αύξουσα, και μένει να δείξουμε ότι η f παίρνει τιμές στο $[0, 1]$.
Πράγματι, εφ' όσον $0 \leqslant f_n \leqslant 1 \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$, θα έχουμε ότι:

$$0 \leqslant \lim_n f_{k_n}(x) = f(x) \leqslant 1 \quad \forall\, x \notin N,$$

δηλαδή $0 \leqslant f \leqslant 1$ m-σχεδόν παντού, και συνεπώς μπορούμε χωρίς βλάβη να θεωρησούμε ότι $0 \leqslant f \leqslant 1$.

Δείξαμε λοιπόν ότι το C είναι ένα SOT-κλειστό, κυρτό σύνολο που περιέχει τον $\mathcal{L}(X, \leqslant, m)$. Επομένως το C περιέχει και την SOT-κλειστή κυρτή θήκη του $\mathcal{L}(X, \leqslant, m)$, που ταυτίζεται με την WOT-κλειστή κυρτή θήκη του, από την Πρόταση 1.27.

□

Λήμμα 4.12. *Έστω $\mathcal{A}$ υπάλγεβρα της $B\big(L^2(X,m)\big)$ με τις εξής ιδιότητες:*

1. $\mathcal{M}_m \mathcal{A} \mathcal{M}_m \subseteq \mathcal{A}$
2. $lat\mathcal{A} = \mathcal{L}(X, \leqslant, m)$

Έστω επίσης $f \in L^\infty(X,m)$ με $0 \leqslant f \leqslant 1$.
Τότε: η f είναι σχεδόν αύξουσα αν, $TM_fT^* \leqslant M_f$ για κάθε $T \in \mathcal{A}_1$.

Απόδειξη.

1. Υποθέτουμε καταρχήν ότι η f είναι σχεδόν αύξουσα.
   Θέτουμε:

$$C = \{A \in B\big(L^2(X,m)\big) : \mathbf{0} \leqslant A \leqslant I \text{ και } TAT^* \leqslant A \quad \forall T \in \mathcal{A}_1\}$$

Το σύνολο C είναι μη κενό, αφού περιέχει τον ταυτοτικό τελεστή Ι του $B\big(L^2(X,m)\big)$. Πράγματι: προφανώς $0 \leqslant I \leqslant I$ και αν $T \in \mathcal{A}_1$, τότε για κάθε $g \in L^2(X,m)$ έχουμε:

$$\begin{aligned} \langle TT^*g,\, g\rangle &= \langle T^*g,\, T^*g\rangle = ||T^*g||^2 \\ &\leqslant ||T^*||^2 \cdot ||g||^2 \leqslant ||g||^2 = \langle g,\, g\rangle, \end{aligned}$$

δηλαδή $TT^* \leqslant I$.

Παρατηρούμε τα εξής:
(i) το C είναι κυρτό: αν $A_1,\, A_2 \in C$ και $\lambda \in (0,1)$, θα δείξουμε ότι $\lambda A_1 + (1-\lambda)A_2 \in C$.
Πράγματι: έστω $g \in L^2(X,m)$.
Τότε:

$$\langle\big(\lambda A_1 + (1-\lambda)A_2\big)g,\, g\rangle = \lambda\langle A_1 g,\, g\rangle + (1-\lambda)\langle A_2 g,\, g\rangle \geqslant 0$$

και

$$\begin{aligned} \langle\big(\lambda A_1 + (1-\lambda)A_2\big)g,\, g\rangle &= \lambda\langle A_1 g,\, g\rangle + (1-\lambda)\langle A_2 g,\, g\rangle \\ &\leqslant \lambda\langle g,\, g\rangle + (1-\lambda)\langle g,\, g\rangle \\ &= \langle g,\, g\rangle, \end{aligned}$$

και συνεπώς $0 \leqslant \lambda A_1 + (1-\lambda)A_2 \leqslant I$.
Από την άλλη, αν $T \in \mathcal{A}_1$, τότε:

$$\begin{aligned} \langle T(\lambda A_1 + (1-\lambda)A_2)T^*g,\, g\rangle &= \lambda\langle TA_1T^*g,\, g\rangle + (1-\lambda)\langle TAT^*g,\, g\rangle \\ &\leqslant \lambda\langle Ag,\, g\rangle + (1-\lambda)\langle Ag,\, g\rangle = \langle Ag,\, g\rangle \end{aligned}$$

δηλαδή $T(\lambda A_1 + (1-\lambda)A_2)T^* \leqslant A$.
Άρα $\lambda A_1 + (1-\lambda)A_2 \in C$.

(ii) το C είναι WOT-κλειστό:
Έστω $(A_i)_{i\in I}$ δίκτυο στο C και $A \in B\big(L^2(X,m)\big)$, ώστε $A_i \xrightarrow{WOT} A$.
Θα δείξουμε ότι $A \in C$.
Εφ' όσον $A_i \geqslant 0 \quad \forall\, i \in I$, για κάθε $g \in L^2(X,m)$ έχουμε:

$$\langle Ag, g\rangle = \lim_i \langle A_i g, g\rangle \geqslant 0,$$

δηλαδή $A \geqslant 0$.
Όμοια, αφού $I - A_i \xrightarrow{WOT} I - A$, βρίσκουμε και ότι $I - A \geqslant 0$, οπότε τελικά $0 \leqslant A \leqslant I$.
Έστω τώρα $T \in \mathcal{A}_1$.
Εφ' όσον ο πολλαπλασιασμός είναι χωριστά (WOT-WOT) συνεχής, θα έχουμε ότι $TA_iT^* \xrightarrow{WOT} TAT^*$, οπότε:

$$A_i - TA_iT^* \xrightarrow{WOT} A - TAT^*.$$

Αλλά $A_i - TA_iT^* \geqslant 0 \quad \forall\, i \in I$, και συνεπώς

$$A - TAT^* \geqslant 0 \Leftrightarrow TAT^* \leqslant A.$$

Άρα πράγματι $A \in C$.

(iii) το C περιέχει τον $\mathcal{L}(X, \leqslant, m)$:
Είναι σαφές ότι για κάθε προβολή P στον $\mathcal{L}(X, \leqslant, m)$ ισχύει $0 \leqslant P \leqslant I$, και θα δείξουμε ότι $TPT^* \leqslant P$, αν $T \in \mathcal{A}_1$.
Επειδή $\mathcal{L}(X, \leqslant, m) = lat\mathcal{A}$, έχουμε ότι η P είναι T-αναλλοίωτη, άρα:

$$TP = PTP \text{ και } PT^* = PT^*P$$

Επομένως,

$$TPT^* = (TP)(PT^*) = (PTP)(PT^*P) = (PTP)(PTP)^*,$$

και συνεπώς για κάθε $g \in L^2(X,m)$ θα ισχύει:

$$\begin{aligned} \langle TPT^*g,\, g\rangle &= \langle (PTP)(PTP)^*g,\, g\rangle = ||(PTP)^*g||^2 \\ &= ||PT^*Pg||^2 \leqslant ||PT^*||^2 \cdot ||Pg||^2 \\ &\leqslant ||Pg||^2 = \langle Pg,\, g\rangle \end{aligned}$$

Άρα $TPT^* \leqslant P$.

Δείξαμε λοιπόν ότι το C είναι ένα WOT-κλειστό, κυρτό σύνολο που περιέχει τον $\mathcal{L}(X, \leqslant, m)$.
Επομένως το C θα περιέχει και την WOT-κλειστή κυρτή θήκη του $\mathcal{L}(X, \leqslant, m)$, δηλαδή το σύνολο $\{M_f \mid\ f : X \to [0,1] \text{ Borel μετρήσιμη, σχεδόν αύξουσα}\}$.
Άρα $TM_fT^* \leqslant M_f \quad \forall T \in \mathcal{A}_1$.

2. Αντίστροφα αν $TM_fT^* \leqslant M_f \quad \forall T \in \mathcal{A}_1$, θα δείξουμε ότι η f είναι σχεδόν αύξουσα.

Ισχυρισμός (I): $TM_{f^n}T^* \leqslant M_{f^n} \quad \forall T \in \mathcal{A}_1,\ \forall n \in \mathbb{N}$.
Έστω $\varepsilon > 0$.
Θέτουμε $g = (f+\varepsilon)^{\frac{1}{2}}$.
Η g είναι φραγμένη, Borel μετρήσιμη συνάρτηση, συνεπώς ορίζεται ο πολλαπλασιαστικός τελεστής M_g, και είναι θετικός, αφού $g \geqslant 0$.
Επιπλέον ο M_g είναι αντιστρέψιμος.
Πράγματι, επειδή $0 \leqslant f \leqslant 1$ θα έχουμε ότι $0 < \sqrt{\varepsilon} \leqslant g \leqslant \sqrt{1+\varepsilon}$, απ' όπου συμπεραίνουμε ότι η συνάρτηση $\frac{1}{g}$ ορίζεται (m-σχεδόν παντού) και είναι (ουσιωδώς) φραγμένη.
Επίσης, αφού $TT^* \leqslant I$ και $M_{g^2} = M_f + \varepsilon I$, έχουμε:

$$\begin{aligned} TM_{g^2}T^* &= T(M_f+\varepsilon I)T^* = TM_fT^* + \varepsilon TT^* \\ &\leqslant M_f + \varepsilon I = M_{g^2} \end{aligned}$$

Τότε, για κάθε $h \in L^2(X,m)$ θα ισχύει:

$$\begin{aligned} \langle M_{g^{-1}}TM_{g^2}T^*M_{g^{-1}}h,\, h\rangle &= \langle (TM_{g^2}T^*)(M_{g^{-1}}h),\, M_{g^{-1}}h\rangle \\ &\leqslant \langle M_{g^2}M_{g^{-1}}h,\, M_{g^{-1}}h\rangle = \langle h,\, h\rangle, \end{aligned}$$

απ' όπου $M_{g^{-1}}TM_{g^2}T^*M_{g^{-1}} \leqslant I$.
Έπεται ότι:

$$\begin{aligned} ||M_{g^{-1}}TM_g||^2 &= ||M_gT^*M_{g^{-1}}||^2 \\ &= ||(M_gT^*M_{g^{-1}})^*(M_gT^*M_{g^{-1}})|| \\ &= ||M_{g^{-1}}TM_{g^2}T^*M_{g^{-1}}|| \\ &\leqslant 1 \end{aligned}$$

Έχουμε λοιπόν ότι:

$$||M_{g^{-1}}TM_g|| \leqslant 1 \quad \forall T \in \mathcal{A}_1 \tag{4.7}$$

Αλλά $\mathcal{M}_m\mathcal{A}\mathcal{M}_m \subseteq \mathcal{A}$ και συνεπώς, λόγω και της (4.7), έχουμε ότι $M_{g^{-1}}TM_g \in \mathcal{A}_1$.
Άρα, από την (4.7) και πάλι έπεται ότι:

$$||M_{g^{-1}}(M_{g^{-1}}TM_g))M_g|| \leqslant 1 \quad \forall T \in \mathcal{A}_1.$$

δηλαδή $||M_{g^{-2}}TM_{g^2}|| \leqslant 1 \quad \forall T \in \mathcal{A}_1$.
Συνεχίζοντας επαγωγικά, συμπεραίνουμε ότι;

$$||M_{g^{-n}}TM_{g^n}|| \leqslant 1 \quad \forall T \in \mathcal{A}_1.$$

Επομένως,

$$M_{g^{-n}}TM_{g^{2n}}T^*M_{g^{-n}} = (M_{g^{-n}}TM_{g^n})(M_{g^{-n}}TM_{g^n})^* \leqslant I,$$

και συνεπώς για κάθε $h \in L^2(X,m)$ έχουμε:

$$\begin{aligned} \langle TM_{g^{2n}}T^*h,\, h\rangle &= \langle M_{g^n}M_{g^{-n}}TM_{g^{2n}}T^*M_{g^{-n}}M_{g^n}h,\, h\rangle \\ &= \langle (M_{g^{-n}}TM_{g^{2n}}T^*M_{g^{-n}})(M_{g^n}h),\, M_{g^n}h\rangle \\ &\leqslant \langle M_{g^n}h,\, M_{g^n}h\rangle = \langle M_{g^{2n}}h,\, h\rangle, \end{aligned}$$

Άρα, $TM_{g^{2n}}T^* \leqslant M_{g^{2n}}$, δηλαδή:

$$TM_{(f+\varepsilon)^n}T^* \leqslant M_{(f+\varepsilon)^n} \quad \forall T \in \mathcal{A}_1, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Για $\varepsilon \searrow 0$, επειδή $(f+\varepsilon)^n \to f^n$ κατά σημείο, από το Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης έπεται ότι: $M_{(f+\varepsilon)^n} \xrightarrow{WOT} M_{f^n}, \ \forall n \in \mathbb{N}$
Άρα, $TM_{f^n}T^* \leqslant M_{f^n} \ \forall T \in \mathcal{A}_1, \ \forall n \in \mathbb{N}$.

<u>Ισχυρισμός (II) :</u> Για κάθε $t > 0$, ο υπόχωρος

$$S_t = \{g \in L^2(X,m) : \ g = 0 \ \ m\text{-σχεδόν παντού στο σύνολο } [f \leqslant t]\}$$

του $L^2(X,m)$ είναι $\mathcal{A}$-αναλλοίωτος.
Θα δείξουμε ισοδύναμα ότι ο υπόχωρος

$$S_t^{\perp} = \{g \in L^2(X,m) : \ g = 0 \ \ m\text{-σχεδόν παντού στο } [f > t]\}$$

είναι $\mathcal{A}^*$-αναλλοίωτος.
Έστω $g \in S_t^{\perp}$, $g \neq 0$ και $T \in \mathcal{A}$.
Πρέπει να δείξουμε ότι $T^*g = 0$ m-σχεδόν παντού στο $[f > t]$.
Έχουμε:

$$\begin{aligned} ||M_{f^n}T^*g||^2 &= \langle M_{f^n}T^*g, \, M_{f^n}T^*g\rangle \\ &= \langle M_{f^n}T^*g, \, (TM_{f^n})^*g\rangle \\ &= \langle TM_{f^{2n}}T^*g, \, g\rangle \quad \forall n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Από τον ισχυρισμό (I) ισχύει:

$$\begin{aligned} \langle TM_{f^{2n}}T^*g, \, g\rangle &\leqslant \langle M_{f^{2n}}g, \, g\rangle \\ &= \langle M_{f^n}g, \, M_{f^n}g\rangle \\ &= ||M_{f^n}g||^2 = \int_X |f^n(x)g(x)|^2 dm(x) \end{aligned}$$

και από την υπόθεση για την g,

$$\begin{aligned} \int_X |f^n(x)g(x)|^2 dm(x) &= \int_{[f\leqslant t]} f^{2n}(x)|g(x)|^2 dm(x) \\ &\leqslant t^{2n} \cdot \int_{[f\leqslant t]} |g(x)|^2 dm(x) \\ &\leqslant t^{2n} \cdot ||g||^2, \end{aligned}$$

διότι $f^{2n}(x) \leqslant t^{2n} \ \forall x \in [f \leqslant t]$.
Συνδυάζοντας τα προηγούμενα, προκύπτει ότι:

$$||M_{f^n}T^*g||^2 \leqslant t^{2n}||g||^2,$$

δηλαδή:

$$\int_X f^{2n}(x)|(T^*g)(x)|^2 dm(x) \leqslant t^{2n}||g||^2 \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

και άρα:

$$\Big(\int_X \Big(\frac{f(x)}{t}\Big)^{2n} \big|(T^*g)(x)\big|^2 dm(x)\Big)^{\frac{1}{n}} \leqslant ||g||^{\frac{2}{n}} \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \tag{4.8}$$

Θεωρούμε τις μη αρνητικές, Borel μετρήσιμες συναρτήσεις $\phi(x) = (\frac{f(x)}{t})^2$ και $h(x) = |(T^*g)(x)|^2$, καθώς και το θετικό μέτρο:

$$\nu(A) = \int_A h dm, \quad A \in \mathcal{B}(X)$$

Τότε:

$$\int_X \Big(\frac{f(x)}{t}\Big)^{2n} |(T^*g)(x)|^2 dm(x) = \int_X (\phi(x))^n h(x) dm(x) = \int_X \phi^n(x) d\nu(x)$$

και συνεπώς η 4.8 γράφεται:

$$\|\phi\|_n \leqslant \|g\|^{\frac{2}{n}} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

Παίρνοντας όρια στην τελευταία σχέση καθώς $n \to \infty$, προκύπτει ότι[3]: $\|\phi\|_\infty \leqslant 1$, αφού $g \neq \mathbf{0}$ και το μέτρο ν είναι πεπερασμένο ($\nu(X) = \|T^*g\|^2$).
Έπεται ότι $\phi \leqslant 1$ $\nu-$σχεδόν παντού, δηλαδή υπάρχει $N \in \mathcal{B}(X)$ με $\nu(N) = 0$, ώστε $f(x) \leqslant t \;\forall\, x \notin N$, και συνεπώς:

$$[f > t] \subseteq N \tag{4.9}$$

Τώρα, αφού $\nu(N) = \int_X \big|(T^*g)(x)\big|^2 \chi_N(x) dm(x) = 0$, έχουμε ότι

$$\big|(T^*g)(x)\big|^2 \chi_N(x) = 0 \quad m-\text{σχ. } \forall\, x \in X,$$

οπότε υπάρχει $M \in \mathcal{B}(X)$ με $m(M) = 0$, ώστε:

$$\big|(T^*g)(x)\big|^2 \chi_N(x) = 0 \quad \forall\, x \notin M \tag{4.10}$$

Άρα, αν $x \in M^c \cap [f > t] \subseteq M^c \cap N$, τότε από τις 4.9 και 4.10 συμπεραίνουμε ότι $(T^*g)(x) = 0$.
Συνεπώς $T^*g = 0$ $m-$σχεδόν παντού στο $[f > t]$ και ο ισχυρισμός (II) απεδείχθη.

Μένει πλέον να δείξουμε ότι η f είναι σχεδόν αύξουσα.
Έστω $q \in \mathbb{Q}^+$.
Από τον ισχυρισμό (II) έχουμε ότι $S_q \in lat\mathcal{A}$, όπου από την υπόθεση, $lat\mathcal{A} = \mathcal{L}(X, \leqslant, m)$.
Επομένως η προβολή $P(S_q)$ πάνω στον S_q ανήκει στον $\mathcal{L}(X, \leqslant, m)$.
Αλλά από τον ορισμό του S_q έχουμε ότι:

$$P(S_q) = M_{\chi_{[f>q]}}$$

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι για κάθε $q \in \mathbb{Q}^+$ υπάρχει $E_q \in L(X, \leqslant)$ ώστε: $M_{\chi_{[f>q]}} = P_{E_q}$, απ' όπου:

$$m(E_q \vartriangle [f > q]) = 0 \quad \forall\, q \in \mathbb{Q}^+$$

[3] αν $(Z, \mathcal{B}(Z), \rho)$ χώρος πεπερασμένου μέτρου, τότε για κάθε Borel μετρήσιμη συνάρτηση $\omega : Z \to \mathbb{C}$ ισχύει: $\lim\limits_{p\to\infty} \|\omega\|_p = \|\omega\|_\infty$

Θεωρούμε το $m-$μηδενικό σύνολο:

$$N = \bigcup_{q \in \mathbb{Q}^+} (E_q \vartriangle [f > q])$$

Ισχυριζόμαστε ότι αν $x, y \notin N$ και $x \leqslant y$, τότε $f(x) \leqslant f(y)$.
Πράγματι: υποθέτουμε αντίθετα ότι $f(y) < f(x)$, και έστω $q \in \mathbb{Q}^+$ με $f(y) < q < f(x)$. Τότε, εφ' όσον $x \notin N$ και $x \in [f > q]$, θα έχουμε ότι $x \in E_q$, και άρα $y \in E_q$ διότι το E_q είναι αύξον. Αφού τώρα $y \notin N$, συμπεραίνουμε ότι $y \in [f > q]$, άτοπο.
Έπεται ότι η f είναι αύξουσα στο N^c, και η απόδειξη είναι πλήρης.

□

Θεώρημα 4.13. *Έστω $\mathcal{A}$ υπάλγεβρα της $B\big(L^2(X, m)\big)$ με τις εξής ιδιότητες:*

1. $\mathcal{M}_m \subseteq \mathcal{A}$

2. $lat\mathcal{A} = \mathcal{L}(X, \leqslant, m)$

Τότε:

$$lat(I_K \otimes \mathcal{A}) \subseteq \{L_p \mid P : X \to Proj(K) \text{ σχεδόν αύξουσα }\}$$

Απόδειξη. Από την $1^η$ ιδιότητα της $\mathcal{A}$ έχουμε ότι $I_K \otimes \mathcal{M}_m \subseteq I_K \otimes \mathcal{A}$, και συνεπώς $lat(I_K \otimes \mathcal{A}) \subseteq lat(I_K \otimes \mathcal{M}_m)$. Επίσης, από την Πρόταση 4.9 γνωρίζουμε ότι:

$$lat(I_K \otimes \mathcal{M}_m) = \{L_p \mid P : X \to Proj(K)\}$$

Επομένως κάθε στοιχείο του συνόλου $lat(I_K \otimes \mathcal{A})$ είναι της μορφής L_p, για κάποια ασθενώς μετρήσιμη συνάρτηση $P : X \to Proj(K)$.
Έχουμε λοιπόν να δείξουμε ότι αν $L_p \in lat(I_K \otimes \mathcal{A})$, τότε η P είναι σχεδόν αύξουσα.

Αποδεικνύουμε πρώτα τον εξής ισχυρισμό: για κάθε $\xi \in K$ με $\|\xi\|_K = 1$, η συνάρτηση $f(x) = \langle P(x)\xi, \xi\rangle_K = \|P(x)\xi\|_K^2$ είναι σχεδόν αύξουσα.
Παρατηρούμε καταρχήν ότι:

$$0 \leqslant f(x) = \|P(x)\xi\|_K^2 \leqslant \|P(x)\|^2 \|\xi\|_K^2 \leqslant 1 \quad \forall x \in X$$

Επίσης $\mathcal{M}_m \mathcal{A} \mathcal{M}_m \subseteq \mathcal{A}$, διότι η $\mathcal{A}$ είναι άλγεβρα και περιέχει την $\mathcal{M}_m$.
Άρα ικανοποιούνται οι υποθέσεις του Λήμματος 4.12, και σύμφωνα μ'αυτό αρκεί να δείξουμε ότι:

$$TM_fT^* \leqslant M_f \quad \forall T \in \mathcal{A}_1$$

Έστω $g \in L^2(X, m)$ και $T \in \mathcal{A}_1$.

Έχουμε:

$$\begin{aligned}
\langle TM_fT^*g,g\rangle &= \langle M_fT^*g,T^*g\rangle \\
&= \int_X f(x)(T^*g)(x)\overline{(T^*g)(x)}dm(x) \\
&= \int_X \|P(x)\xi\|_K^2 |(T^*g)(x)|^2 dm(x) \\
&= \int_X \|(T^*g)(x)P(x)\xi\|_K^2 dm(x) \\
&= \int_X \|P(x)((T^*g)(x)\xi)\|_K^2 dm(x) \\
&= \int_X \|P(x)(\xi\otimes T^*g)(x))\|_K^2 dm(x) \\
&= \int_X \|P(x)((I_K\otimes T^*)(\xi\otimes g)(x))\|_K^2 dm(x) \\
&= \int_X \|(L_p(I_K\otimes T^*)(\xi\otimes g))(x)\|_K^2 dm(x) \\
&= \|L_p(I_K\otimes T^*)(\xi\otimes g)\|^2 \qquad (4.11)
\end{aligned}$$

Τώρα, αφού ο L_p είναι $I_K\otimes T$-αναλλοίωτος, θα ισχύει: $(I_K\otimes T)L_p = L_p(I_K\otimes T)L_p$, ισοδύναμα $L_p(I_K\otimes T^*) = L_p(I_K\otimes T^*)L_p$.
Επομένως,

$$\begin{aligned}
\|L_p(I_K\otimes T^*)(\xi\otimes g)\|^2 &= \|L_p(I_K\otimes T^*)L_p(\xi\otimes g)\|^2 \\
&\leqslant \|L_p(I_K\otimes T^*)\|^2\|L_p(\xi\otimes g)\|^2 \\
&\leqslant \|L_p\|^2\|\|T\|^2\|L_p(\xi\otimes g)\|^2 \\
&\leqslant \|L_p(\xi\otimes g)\|^2 \\
&= \int_X \|P(x)((\xi\otimes g)(x))\|_K^2 dm(x) \\
&= \int_X \|P(x)\xi\|_K^2 |g(x)|^2 d_m(x) \\
&= \int_X f(x)g(x)\overline{g(x)}d_m(x) \\
&= \langle M_fg,g)\rangle \qquad (4.12)
\end{aligned}$$

Από τις 4.11 και 4.12 προκύπτει τελικά ότι:

$$\langle TM_fT^*g,g\rangle \leqslant \langle M_fg,g\rangle \quad \forall g\in L^2(X,m),$$

και άρα $TM_fT^*\leqslant M_f$, $\forall T\in\mathcal{A}_1$.

Τώρα, επιλέγουμε μία ακολουθία $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $\|\cdot\|_K$-πυκνή στο σύνολο $\{\xi\in K : ||\xi||_K = 1\}$.
Από τα προηγούμενα έχουμε ότι για κάθε $n\in\mathbb{N}$ η συνάρτηση $f_n(x) = \langle P(x)\xi_n,\xi_n\rangle$ είναι σχεδόν αύξουσα.
Επομένως, $\forall\, n\in\mathbb{N}\ \exists\, N_n\in\mathcal{B}(X)$ με $m(N_n)=0$, ώστε:

$$\text{αν } x,y\notin N_n \text{ και } x\leqslant y, \text{ τότε } f_n(x)\leqslant f_n(y)$$

Ισχυριζόμαστε ότι η P είναι αύξουσα στο συμπλήρωμα του m-μηδενικού συνόλου $N = \bigcup_{n=1}^{\infty} N_n$, δηλαδή ότι:

$$\text{αν } x, y \notin N \text{ και } x \leqslant y, \text{ τότε } P(x) \leqslant P(y)$$

Αρκεί να δείξουμε ότι:

$$\langle P(x)\xi, \xi\rangle_{K} \leqslant \langle P(y)\xi, \xi\rangle_{K} \quad \forall\, \xi \in K \text{ με } \|\xi\|_{K} = 1$$

Πράγματι: αν $||\xi||_{K} = 1$, υπάρχει υπακολουθία $(\xi_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ της $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ώστε $||\xi_{k_n} - \xi||_{K} \to 0$.
Τότε, εφ' όσον $f_{k_n}(x) \leqslant f_{k_n}(y) \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$, θα ισχύει:

$$\begin{aligned}
\langle P(x)\xi,\, \xi\rangle_{K} &= \lim_n \langle P(x)\xi_{k_n},\, \xi_{k_n}\rangle_{K} \\
&\leqslant \lim_n \langle P(y)\xi_{k_n},\, \xi_{k_n}\rangle_{K} \\
&= \lim_n \langle P(y)\xi,\, \xi\rangle_{K}
\end{aligned}$$

Επομένως η P είναι σχεδόν αύξουσα. □

Θεώρημα 4.14.

$$lat(I_K \otimes \mathcal{A}_{min}(X, \leqslant, m)) = \{L_p \mid P : X \to Proj(K) \ \textit{σχεδόν αύξουσα}\ \}$$

Απόδειξη. Εφ' όσον $\mathcal{M}_m \subseteq \mathcal{A}_{min}(X, \leqslant, m)$ και $lat\mathcal{A}_{min}(X, \leqslant, m) = \mathcal{L}(X, \leqslant, m)$, από το προηγούμενο Θεώρημα έχουμε άμεσα ότι:

$$lat(I_K \otimes \mathcal{A}_{min}(X, \leqslant, m)) \subseteq \{L_p \mid P : X \to Proj(K) \text{ σχεδόν αύξουσα }\}$$

και μένει να αποδείξουμε τον αντίστροφο εγκλεισμό.

Έστω $P : X \to Proj(K)$ σχεδόν αύξουσα και $T \in \mathcal{A}_{min}(X, \leqslant, m)$.
Θα δείξουμε ότι $(I_K \otimes T)(ImL_p) \subseteq ImL_p$, ισοδύναμα ότι για κάθε $F \in ImL_p$ και $G \in (ImL_p)^{\perp} = KerL_p = Im(I - L_p)$ ισχύει:

$$\langle (I_K \otimes T)F, G\rangle = 0$$

Υποθέτουμε αρχικά ότι $T = T_\mu$ για κάποιο μέτρο $\mu \in A(G, m)$.
Από την Πρόταση 4.6 ισχύει:

$$\langle (I_K \otimes T_\mu)F, G\rangle = \int_{X\times X} \langle F(y), G(x)\rangle_{K} d\mu(x, y) \quad \forall\, F,\, G \in L^2(X, m, K),$$

και συνεπώς πρέπει να δείξουμε ότι:

$$\int_{X\times X} \langle F(y), G(x)\rangle_{K} d\mu(x, y) = 0$$

για κάθε $F,\, G \in L^2(X, m, K)$ με $F = L_pF$ και $G = (I - L_p)G$.
Από την υπόθεση για την P, υπάρχει $N \in \mathcal{B}(X)$ με $m(N) = 0$, ώστε η P είναι αύξουσα στο N^c.
Εφ' όσον το μέτρο μ είναι συγκεντρωμένο στο G, ισχύει:

$$\int_{X\times X} \langle F(y), G(x)\rangle_{K} d\mu(x, y) = \int_{G} \langle F(y), G(x)\rangle_{K} d\mu(x, y)$$

$$= \int\limits_{G\cap(N^c\times N^c)} \langle F(y),G(x)\rangle_K d\mu(x,y) \qquad + \int\limits_{G\cap((N\times X)\cup(X\times N))} \langle F(y),G(x)\rangle_K d\mu(x,y) \tag{4.13}$$

Επειδή $|\mu|_1 \leqslant \|\mu\|\cdot m$, έχουμε ότι:

$$|\mu(N\times X)| \leqslant |\mu|(N\times X) = |\mu|_1(N) \leqslant \|\mu\| m(N) = 0,$$

απ' όπου $\mu(N\times X)=0$.
Όμοια $\mu(X\times N)=0$, οπότε $\mu((N\times X)\cup(X\times N))=0$ και το 2^o ολοκλήρωμα στην 4.13 είναι μηδέν.
Έστω τώρα $(x,y)\in G\cap(N^c\times N^c)$.
Τότε:

$$\begin{aligned}\langle F(y),G(x)\rangle_K &= \langle (L_pF)(y),(I-L_p)G(x)\rangle_K\\ &= \langle P(y)F(y),(I_K-P(x))G(x)\rangle_K\\ &= \langle F(y),P(y)(I_K-P(x))G(x)\rangle_K\\ &= \langle F(y),(P(y)-P(y)P(x))G(x)\rangle_K = 0\end{aligned}$$

διότι $P(y)\leqslant P(x) \iff P(y)P(x)=P(y)$
Επομένως και το 1^o ολοκλήρωμα στην 4.13 θα ισούται με μηδέν.
Έπεται ότι $\int\limits_{X\times X} \langle F(y),G(x)\rangle_K d\mu(x,y)=0$.
Δείξαμε λοιπόν ότι ο L_p είναι $I_K\otimes T_\mu-$αναλλοίωτος $\forall \mu\in A(G,m)$.
Θεωρούμε τώρα τυχαίο τελεστή $T\in\mathcal{A}_{min}(X,\leqslant,m)$.
Τότε υπάρχει δίκτυο $(\mu_i)_{i\in I}$ στην $A(G,m)$ ώστε $T_{\mu_i}\overset{w^*}{\to} T$, απ' όπου $I_K\otimes T_{\mu_i}\overset{WOT}{\to} I_K\otimes T$.
Επίσης από τα προηγούμενα έχουμε ότι:

$$(I_K\otimes T_{\mu_i})L_p = L_p(I_K\otimes T_{\mu_i})L_p \quad \forall\, i\in I$$

Επομένως, χρησιμοποιώντας και το γεγονός ότι ο πολλαπλασιασμός είναι χωριστά $WOT-$συνεχής, θα ισχύει:

$$\begin{aligned}(I_K\otimes T)L_p &= WOT-\lim_i (I_K\otimes T_{\mu_i})L_p\\ &= WOT-\lim_i L_p(I_K\otimes T_{\mu_i})L_p\\ &= L_p(I_K\otimes T)L_p\end{aligned}$$

Έπεται ότι ο L_p είναι $I_K\otimes T-$αναλλοίωτος και η απόδειξη είναι πλήρης.

$\square$

Είμαστε τώρα σε θέση να αποδείξουμε το κεντρικό αποτέλεσμα αυτού του κεφαλαίου: η $\mathcal{A}_{min}(X,\leqslant,m)$ είναι η μικρότερη w^*-κλειστή υπάλγεβρα της $B\big(L^2(X,m)\big)$ που περιέχει την πολλαπλασιαστική άλγεβρα $\mathcal{M}_m$ και έχει τον $\mathcal{L}(X,\leqslant,m)$ ως αναλλοίωτο σύνδεσμο υποχώρων.

Θεώρημα 4.15. *Έστω $\mathcal{A}$ υπάλγεβρα της $B\big(L^2(X,m)\big)$ ώστε:*

1. $\mathcal{M}_m\subseteq\mathcal{A}$

2. $lat\mathcal{A} = \mathcal{L}(X, \leqslant, m)$

3. *η* $\mathcal{A}$ *είναι* w^*-*κλειστή*

Τότε $\mathcal{A}_{min}(X, \leqslant, m) \subseteq \mathcal{A}$.

Απόδειξη. Έστω $T \in \mathcal{A}_{min}(X, \leqslant, m)$.
Από τα δύο προηγούμενα Θεωρήματα, έχουμε ότι:

$$lat(I_K \otimes \mathcal{A}) \subseteq lat(I_K \otimes \mathcal{A}_{min}(X, \leqslant, m))$$

Επομένως,

$$lat(I_K \otimes \mathcal{A}) \subseteq lat(I_K \otimes T),$$

και άρα από το Λήμμα 4.5 έπεται ότι:

$$T \in \bar{\mathcal{A}}^{w^*} = \mathcal{A}$$

□

Ορισμός 4.16. *Αν* $\mathcal{A}$ *είναι μια άλγεβρα τελεστών, ορίζουμε ως διαγώνιο της* $\mathcal{A}$ *την αυτοσυζυγή άλγεβρα:* $diag\mathcal{A} = \mathcal{A} \cap \mathcal{A}^*$.

Στόχος μας είναι να προσδιορίσουμε τη διαγώνιο της $\mathcal{A}_{min}(X, \leqslant, m)$.
Καταρχήν, ας παρατηρήσουμε ότι η $diag\mathcal{A}_{min}(X, \leqslant, m)$ είναι άλγεβρα von Neumann.
Πράγματι: επειδή η $\mathcal{A}_{min}(X, \leqslant, m)$ είναι w^*-κλειστή και η ενέλιξη είναι (w^*, w^*)-συνεχής, έχουμε ότι η $\mathcal{A}_{min}(X, \leqslant, m)^*$ είναι επίσης w^*-κλειστή.
Έπεται ότι η $diag\mathcal{A}_{min}(X, \leqslant, m)$ είναι w^*-κλειστή, άρα άλγεβρα von Neumann (αφού επιπλέον είναι αυτοσυζυγής και περιέχει τον ταυτοτικό τελεστή).
Ορίζουμε μία σχέση $\sim$ στον X ως εξής:

$$\text{αν } x, y \in X, \text{ τότε } x \sim y \iff x \leqslant y \text{ και } y \leqslant x$$

Είναι φανερό ότι η $\sim$ είναι μία σχέση ισοδυναμίας στον X.
Επίσης, εύκολα διαπιστώνουμε ότι για κάθε $E \in \mathcal{B}(X)$, αν το E είναι αύξον ως προς $\leqslant$, τότε τα E και E^c είναι αύξοντα ως προς $\sim$.
Ιδιαιτέρως, αν $E \in L(X, \leqslant)$ τότε $E, E^c \in L(X, \sim)$.
Ισχυριζόμαστε επιπλέον ότι η $\sim$ είναι standard (ως προδιάταξη).
Πράγματι: σύμφωνα με την Πρόταση 2.4 κι εφ' όσον η $\leqslant$ είναι standard, υπάρχει ακολουθία $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ στον $L(X, \leqslant)$ ώστε:

$$\forall\, x, y \in X,\ x \leqslant y \iff \chi_{E_n}(x) \leqslant \chi_{E_n}(y) \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Τότε:

$$x \sim y \iff \chi_{E_n}(x) \leqslant \chi_{E_n}(y) \text{ και } \chi_{E_n{}^c}(x) \leqslant \chi_{E_n{}^c}(y) \quad \forall\, n \in \mathbb{N},$$

και συνεπώς, από την Πρόταση 2.4 και πάλι, έπεται ότι η $\sim$ είναι standard.
Έπεται λοιπόν ότι ο $(X, \sim, m)$ είναι ένας standard προδιατεταγμένος χώρος σ-πεπερασμένου μέτρου, συνεπώς ορίζεται η άλγεβρα $\mathcal{A}_{min}(X, \sim, m)$, η οποία περιέχει την πολλαπλασιαστική άλγεβρα $\mathcal{M}_m$ του (X, m) (από το Θεώρημα 3.17).

Πρόταση 4.17.

1. $\mathcal{A}_{min}(X, \sim, m) \subseteq \mathcal{A}_{min}(X, \leqslant, m)$

2. *η* $\mathcal{A}_{min}(X, \sim, m)$ *είναι άλγεβρα von Neumann.*

Απόδειξη.

1. Έστω G το γράφημα της $\leqslant$ και $\tilde{G} = \{(x, y) \in X \times X : x \leqslant y\}$ (δηλαδή $\tilde{G}$ είναι η εικόνα του G μέσω της ανάκλασης $\phi(x, y) = (y, x)$ του $X \times X$)
Τότε για κάθε $x, y \in X$ ισχύει:
$$x \sim y \iff (x, y) \in G \text{ και } (x,\, y) \in \tilde{G}$$
και συνεπώς η $\sim$ έχει ως γράφημα το σύνολο $G \cap \tilde{G}$.
Έπεται ότι:
$$\mathcal{A}_{min}(X, \sim, m) = \overline{\{T_\mu : \mu \in A(G \cap \tilde{G}, m)\}}^{w^*} \subseteq \overline{\{T_\mu : \mu \in A(G, m)\}}^{w^*} = \mathcal{A}_{min}(X, \leqslant, m)$$

2. Ισχυριζόμαστε καταρχήν ότι η υπάλγεβρα $A(G \cap \tilde{G}, m)$ της $A(X \times X, m)$ είναι αυτοσυζυγής. Αρκεί να δείξουμε ότι αν ένα μέτρο μ στον $X \times X$ είναι συγκεντρωμένο στο $G \cap \tilde{G}$, τότε και το μ^* είναι συγκεντρωμένο στο ίδιο σύνολο, όπου $\mu^*(A \times B) = \overline{\mu(B \times A)}$, $\forall A, B \in \mathcal{B}(X)$.
Έστω $S \in \mathcal{B}(X \times X)$, $S \subseteq (G \cap \tilde{G})^c$.
Έχουμε:
$$\begin{aligned} \overline{\mu^*(S)} &= \overline{\int\limits_{X \times X} \chi_S(x, y) d\mu^*(x, y)} = \overline{\int\limits_{X \times X} \chi_S(y, x) d\bar{\mu}(x, y)} \\ &= \int\limits_{X \times X} (\chi_S \circ \phi)(x, y) d\mu(x, y) = \int\limits_{X \times X} \chi_{\phi^{-1}(S)}(x, y) d\mu(x, y) = \mu(\phi^{-1}(S)) \end{aligned}$$
Αλλά $\mu(\phi^{-1}(S)) = 0$ διότι $\phi^{-1}(S) \subseteq (\phi^{-1}(G \cap \tilde{G}))^c = (G \cap \tilde{G})^c$ και το μέτρο μ είναι συγκεντρωμένο στο $G \cap \tilde{G}$.
Άρα $\mu^*(S) = 0$, απ' όπου έπεται ότι το μ^* είναι συγκεντρωμένο στο $G \cap \tilde{G}$.
Συμπεραίνουμε ότι η άλγεβρα $\{T_\mu : \mu \in A(G \cap \tilde{G}, m)\}$ είναι αυτοσυζυγής (λόγω της σχέσης $T_\mu^* = T_{\mu^*}$).
Επειδή τώρα η ενέλιξη είναι (w^*, w^*)-συνεχής, η $\mathcal{A}_{min}(X, \sim, m)$ θα είναι αυτοσυζυγής.
Έχουμε λοιπόν ότι η $\mathcal{A}_{min}(X, \sim, m)$ είναι μία w^*-κλειστή, αυτοσυζυγής άλγεβρα που περιέχει τον ταυτοτικό τελεστή. Άρα είναι άλγεβρα von Neumann.

□

Θα χρησιμοποιήσουμε τώρα τα προηγούμενα συμπεράσματα για να βρούμε την διαγώνιο της $\mathcal{A}_{min}(X, \leqslant, m)$.

Θεώρημα 4.18.
$$diag \mathcal{A}_{min}(X, \leqslant, m) = \mathcal{L}(X, \leqslant, m)'$$

Απόδειξη. Έστω $T \in diag\mathcal{A}_{min}(X, \leqslant, m)$.
Τότε $T \in \mathcal{A}_{min}(X, \leqslant, m)$ και υπάρχει $A \in \mathcal{A}_{min}(X, \leqslant, m)$ ώστε $T = A^*$.
Αφού $lat\mathcal{A}_{min}(X, \leqslant, m) = \mathcal{L}(X, \leqslant, m)$, οι τελεστές T και A αφήνουν αναλλοίωτη κάθε προβολή $P_E \in \mathcal{L}(X, \leqslant, m)$, άρα:

$$TP_E = P_E T P_E \text{ και } AP_E = P_E A P_E$$

Τότε για κάθε $P_E \in \mathcal{L}(X, \leqslant, m)$ έχουμε ότι:

$$TP_E = P_E T P_E = P_E A^* P_E = (P_E A P_E)^* = (AP_E)^* = P_E A^* = P_E T$$

και επομένως $T \in \mathcal{L}(X, \leqslant, m)'$.
Δείξαμε λοιπόν ότι $diag\mathcal{A}_{min}(X, \leqslant, m) \subseteq \mathcal{L}(X, \leqslant, m)'$.

Για τον αντίστροφο εγκλεισμό, θα αποδείξουμε πρώτα την σχέση:

$$\mathcal{L}(X, \leqslant, m)' \subseteq \mathcal{A}_{min}(X, \sim, m)$$

Αφού η $\mathcal{A}_{min}(X, \sim, m)$ είναι άλγεβρα von Neumann, η προηγούμενη σχέση είναι ισοδύναμη με την

$$(\mathcal{A}_{min}(X, \sim, m))' \subseteq \mathcal{L}(X, \leqslant, m)''$$

Αλλά,

$$Proj\big((\mathcal{A}_{min}(X, \sim, m))'\big) = lat\mathcal{A}_{min}(X, \sim, m) = \mathcal{L}(X, \sim, m)$$

(η 1^{η} ισότητα προκύπτει από το γεγονός ότι η $\mathcal{A}_{min}(X, \sim, m)$ είναι αυτοσυζυγής και η 2^{η} από το Θεώρημα 3.20).
Επομένως, εφ' όσον ο $\mathcal{L}(X, \leqslant, m)''$ είναι άλγεβρα von Neumann, αρκεί να δείξουμε ότι:

$$\mathcal{L}(X, \sim, m) \subseteq \mathcal{L}(X, \leqslant, m)''$$

Σύμφωνα με τα σχόλια που προηγούνται της Πρότασης 4.17, υπάρχει μία ακολουθία $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ στον $L(X, \leqslant)$ ώστε:

$$\forall\, x, y \in X, \quad x \sim y \iff \chi_{E_n}(x) \leqslant \chi_{E_n}(y) \text{ και } \chi_{E_n^c}(x) \leqslant \chi_{E_n^c}(y) \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

όπου $E_n, E_n^c \in L(X, \sim)$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.
Τότε, ο $\mathcal{L}(X, \sim, m)$ παράγεται ως σύνδεσμος υποχώρων από την ακολουθία
$\{P_{E_n} : n \in \mathbb{N}\} \cup \{P_{E_n^c} : n \in \mathbb{N}\}$ (βλ. Παρατήρ. 2.21)
Αφού τώρα $P_{E_n} \in \mathcal{L}(X, \leqslant, m)$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, έχουμε ότι οι προβολές P_{E_n} και $P_{{E_n}^c} = I - P_{E_n}$ ανήκουν στην άλγεβρα von Neumann που παράγεται από τον $\mathcal{L}(X, \leqslant, m)$, δηλαδή στην $\mathcal{L}(X, \leqslant, m)''$.
Έπεται ότι και ο σύνδεσμος υποχώρων που παράγεται από τις προβολές αυτές, δηλαδή ο $\mathcal{L}(X, \sim, m)$, περιέχεται στην $\mathcal{L}(X, \leqslant, m)''$.

Δείξαμε συνεπώς ότι $\mathcal{L}(X, \leqslant, m)' \subseteq \mathcal{A}_{min}(X, \sim, m)$.
Αλλά $\mathcal{A}_{min}(X, \sim, m) \subseteq diag\mathcal{A}_{min}(X, \leqslant, m)$, διότι η $\mathcal{A}_{min}(X, \sim, m)$ είναι αυτοσυζυγής και περιέχεται στην $\mathcal{A}_{min}(X, \leqslant, m)$.
Άρα $\mathcal{L}(X, \leqslant, m)' \subseteq diag\mathcal{A}_{min}(X, \leqslant, m)$ και η απόδειξη είναι πλήρης.

$\square$

Σημειώνουμε ότι από την απόδειξη του προηγούμενου Θεωρήματος προκύπτει ουσιαστικά ότι οι τρεις άλγεβρες von Neumann $\mathcal{A}_{min}(X,\sim,m)$, $diag\mathcal{A}_{min}(X,\leqslant,m)$, $\mathcal{L}(X,\leqslant,m)'$ ταυτίζονται.

Ορισμός 4.19. *Μια άλγεβρα τελεστών $\mathcal{A}$ θα λέγεται pre-reflexive, αν έχει την ίδια διαγώνιο με την άλγεβρα $alglat\mathcal{A}$.*

Παρατήρηση 4.20. *Για κάθε άλγεβρα τελεστών $\mathcal{A}$ ισχύει: $diag(alglat\mathcal{A}) = \big(lat\mathcal{A}\big)'$.*

Πράγματι:
αν $T \in \big(lat\mathcal{A}\big)'$, τότε για κάθε προβολή $P \in lat\mathcal{A}$ έχουμε ότι $TP = PT$, απ' όπου $PTP = P^2T = PT = TP$. Άρα $T \in alglat\mathcal{A}$, δηλαδή $\big(lat\mathcal{A}\big)' \subseteq alglat\mathcal{A}$.
Αφού τώρα η άλγεβρα $\big(lat\mathcal{A}\big)'$ είναι αυτοσυζυγής, από την προηγούμενη σχέση προκύπτει ότι: $\big(lat\mathcal{A}\big)' \subseteq \big(alglat\mathcal{A}\big)^*$, και τελικά

$$\big(lat\mathcal{A}\big)' \subseteq \big(alglat\mathcal{A}\big) \cap \big(alglat\mathcal{A}\big)^* = diag(alglat\mathcal{A}).$$

Αντίστροφα, έστω $T \in diag(alglat\mathcal{A})$, δηλαδή $T \in alglat\mathcal{A}$ και υπάρχει $S \in alglat\mathcal{A}$ με $T = S^*$. Τότε, για κάθε προβολή $P \in lat\mathcal{A}$ έχουμε ότι $TP = PTP$ και $SP = PSP$, απ' όπου προκύπτει ότι: $PT = PS^* = PS^*P = PTP = TP$.
Άρα $T \in \big(lat\mathcal{A}\big)'$, δηλαδή $diag(alglat\mathcal{A}) \subseteq \big(lat\mathcal{A}\big)'$.

Επομένως, μια άλγεβρα τελεστών $\mathcal{A}$ είναι pre-reflexive αν, και μόνο αν,

$$diag\mathcal{A} = diag(alglat\mathcal{A}) = \big(lat\mathcal{A}\big)'.$$

Πόρισμα 4.21. *Η άλγεβρα $\mathcal{A}_{min}(X,\leqslant,m)$ είναι pre-reflexive.*

Απόδειξη. Από το Θεώρημα 3.20 έχουμε ότι $lat\mathcal{A}_{min}(X,\leqslant,m) = \mathcal{L}(X,\leqslant,m)$.
Επομένως, σύμφωνα με το Θεώρημα 4.18 θα ισχύει:

$$diag\mathcal{A}_{min}(X,\leqslant,m) = \mathcal{L}(X,\leqslant,m)' = \big(lat\mathcal{A}_{min}(X,\leqslant,m)\big)',$$

άρα η $\mathcal{A}_{min}(X,\leqslant,m)$ είναι pre-reflexive. □

Στο επόμενο Θεώρημα δίνουμε έναν χαρακτηρισμό των pre-reflexive αλγεβρών.

Θεώρημα 4.22. *Έστω H διαχωρίσιμος χώρος Hilbert και $\mathcal{A}$ μια w^*-κλειστή υπάλγεβρα του $B(H)$, που περιέχει μια μεγιστική μεταθετική άλγεβρα von Neumann.*
Τότε η $\mathcal{A}$ είναι pre-reflexive.

Απόδειξη. Έστω $\mathcal{M}$ μια μεγιστική μεταθετική άλγεβρα von Neumann που περιέχεται στην $\mathcal{A}$. Τότε $lat\mathcal{A} \subseteq Proj\mathcal{M}$.
Πράγματι, για κάθε προβολή $P \in lat\mathcal{A}$ έχουμε ότι $P \in lat\mathcal{M}$ και άρα $P \in \mathcal{M}'$.
Αλλά $\mathcal{M}' = \mathcal{M}$ διότι η $\mathcal{M}$ είναι μεγιστική μεταθετική άλγεβρα, οπότε τελικά $P \in Proj\mathcal{M}$.
Τώρα, μιμούμενοι την απόδειξη του Θεωρήματος 2.30 (θεωρώντας τον $lat\mathcal{A}$ αντί του $\mathcal{L}$ και την $\mathcal{M}$ αντί της $\mathcal{R}$), βρίσκουμε έναν standard προδιατεταγμένο χώρο σ-πεπερασμένου μέτρου $(X, \leqslant, m)$ και έναν ορθομοναδιαίο τελεστή $U : L^2(X, m) \to H$, ώστε

$$lat\mathcal{A} = U\mathcal{L}(X, \leqslant, m)U^{-1}.$$

(ας παρατηρήσουμε ότι ο $lat\mathcal{A}$ είναι σύνδεσμος υποχώρων, γιατί είναι SOT-κλειστός, εφ' όσον ο πολλαπλασιασμός είναι ακολουθιακά SOT-συνεχής.)
Επιπλέον, ισχυριζόμαστε ότι ο U ικανοποιεί την σχέση:

$$\mathcal{M} = U\mathcal{M}_m U^{-1}$$

Όπως στο Θεώρημα 2.30, θεωρούμε μια ακολουθία προβολών $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ που είναι SOT-πυκνή στις προβολές της $\mathcal{M}$, και βρίσκουμε μια ακολουθία $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ Borel υποσυνόλων του X, ώστε $Q_n = UP_{F_n}U^{-1} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$.
Τότε $Q_n \in U\mathcal{M}_m U^{-1} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$, και αφού η $U\mathcal{M}_m U^{-1}$ είναι άλγεβρα von Neumann, θα έχουμε ότι:

$$Proj\mathcal{M} = \overline{\{Q_n : n \in \mathbb{N}\}}^{SOT} \subseteq U\mathcal{M}_m U^{-1},$$

και άρα:

$$\mathcal{M} = \overline{[Proj\mathcal{M}]}^{\|\cdot\|} \subseteq U\mathcal{M}_m U^{-1}.$$

Αλλά η $U\mathcal{M}_m U^{-1}$ είναι μεταθετική άλγεβρα von Neumann, και επομένως τελικά $\mathcal{M} = U\mathcal{M}_m U^{-1}$, λόγω της μεγιστικότητας της $\mathcal{M}$.

Θέτουμε $\mathcal{B} = U^{-1}\mathcal{A}U$.
Η $\mathcal{B}$ είναι μια υπάλγεβρα της $B\big(L^2(X, m)\big)$ με τις εξής ιδότητες:
- είναι w^*-κλειστή, γιατί η $\mathcal{A}$ είναι w^*-κλειστή
- $\mathcal{M}_m = U^{-1}\mathcal{M}U \subseteq U^{-1}\mathcal{A}U = \mathcal{B}$
- $lat\mathcal{B} = lat(U^{-1}\mathcal{A}U) = U^{-1}(lat\mathcal{A})U = \mathcal{L}(X, \leqslant, m)$

Άρα, σύμφωνα με το Θεώρημα 4.15 θα ισχύει: $\mathcal{A}_{min}(X, \leqslant, m) \subseteq \mathcal{B}$, απ' όπου

$$diag\mathcal{A}_{min}(X, \leqslant, m) \subseteq diag\mathcal{B} \tag{4.14}$$

Αλλά αφού η άλγεβρα $\mathcal{A}_{min}(X, \leqslant, m)$ είναι pre-reflexive, έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} diag\mathcal{A}_{min}(X, \leqslant, m) &= diag\big(alglat\mathcal{A}_{min}(X, \leqslant, m)\big) \\ &= diag\big(alg\mathcal{L}(X, \leqslant, m)\big) \\ &= diag\big(alglat\mathcal{B}\big) \end{aligned}$$

Συνεπώς από την (4.14) θα ισχύει $diag\big(alglat\mathcal{B}\big) \subseteq diag\big(\mathcal{B}\big)$, και άρα οι δύο διαγώνιοι ταυτίζονται (εφ' όσον ο αντίστροφος εγκλεισμός είναι προφανής).

Δείξαμε λοιπόν ότι η $\mathcal{B}$ είναι pre-reflexive.
Έπεται ότι και η $\mathcal{A}$ είναι pre-reflexive,διότι:

$$\begin{aligned} diag\mathcal{A} &= diag\big(U\mathcal{B}U^{-1}\big) = U(diag\mathcal{B})U^{-1} \\ &= Udiag\big(alglat\mathcal{B}\big)U^{-1} = diag\big(U(alglat\mathcal{B})U^{-1}\big) \\ &= diag\big(alglat(U\mathcal{B}U^{-1})\big) = diag\big(alglat\mathcal{A}\big) \end{aligned}$$

□

Θεώρημα 4.23. *Έστω $\mathcal{L}$ μεταθετικός σύνδεσμος υποχώρων που δρα σ' έναν διαχωρίσιμο χώρο Hilbert H, και $\mathcal{C}$ η οικογένεια όλων των w^*-κλειστών, pre-reflexive αλγεβρών $\mathcal{A} \subseteq B(H)$, ώστε $lat\mathcal{A} = \mathcal{L}$.*
Τότε η $\mathcal{C}$ έχει ένα ελάχιστο στοιχείο $\mathcal{A}_{min}$, ως προς την σχέση του περιέχεσθαι.

Απόδειξη. Έστω $\mathcal{M}$ μια μεγιστική μεταθετική άλγεβρα von Neumann που περιέχει τον $\mathcal{L}$. Όπως στην απόδειξη του προηγούμενου Θεωρήματος, βρίσκουμε έναν standard προδιατεταγμένο χώρο σ-πεπερασμένου μέτρου $(X, \leqslant, m)$, και έναν ορθομοναδιαίο τελεστή $U : L^2(X, m) \to H$, ώστε:

$$U\mathcal{L}(X, \leqslant, m)U^{-1} = \mathcal{L} \text{ και } U\mathcal{M}_m U^{-1} = \mathcal{M}$$

Θεωρούμε την οικογένεια $\mathcal{C}'$ όλων των w^*-κλειστών, pre-reflexive αλγεβρών $\mathcal{B} \subseteq B\big(L^2(X, m)\big)$, με $lat\mathcal{B} = \mathcal{L}(X, \leqslant, m)$.
Τότε για κάθε άλγεβρα $\mathcal{A} \subseteq B(H)$ ισχύει:

$$\mathcal{A} \in \mathcal{C} \Leftrightarrow U^{-1}\mathcal{A}U \in \mathcal{C}'$$

Πράγματι, αρκεί να παρατηρήσουμε ότι:
• η $\mathcal{A}$ είναι w^*-κλειστή αν, και μόνο αν η $U^{-1}\mathcal{A}U$ είναι w^*-κλειστή
• η $\mathcal{A}$ είναι pre-reflexive αν, και μόνο αν η $U^{-1}\mathcal{A}U$ είναι pre-reflexive, διότι:

$$\begin{aligned} & diag\mathcal{A} = (lat\mathcal{A})' \\ \Leftrightarrow\ & diag(U^{-1}\mathcal{A}U) = U^{-1}(diag\mathcal{A})U = U^{-1}(lat\mathcal{A})'U \\ & = \big(U^{-1}(lat\mathcal{A})U\big)' = (lat(U^{-1}\mathcal{A}U))' \end{aligned}$$

• $lat\mathcal{A} = \mathcal{L} \Leftrightarrow lat(U^{-1}\mathcal{A}U) = U^{-1}(lat\mathcal{A})U = U^{-1}\mathcal{L}U = \mathcal{L}(X, \leqslant, m)$
Επομένως $\mathcal{C}' = \{U^{-1}\mathcal{A}U : \mathcal{A} \in \mathcal{C}\}$ και αρκεί να δείξουμε ότι η $\mathcal{C}'$ έχει ελάχιστο στοιχείο ως προς την σχέση του περιέχεσθαι.
Παρατηρούμε ότι η άλγεβρα $\mathcal{A}_{min}(X, \leqslant, m)$ ανήκει στην $\mathcal{C}'$, διότι είναι pre-reflexive (από το Πόρισμα 4.21) και $lat\mathcal{A}_{min}(X, \leqslant, m) = \mathcal{L}(X, \leqslant, m)$ (από το Θεώρημα 3.20).
Επιπλέον, για κάθε $\mathcal{B} \in \mathcal{C}'$ έχουμε ότι:

$$\mathcal{M}_m \subseteq \mathcal{L}(X, \leqslant, m)' = (lat\mathcal{B})' = diag\mathcal{B} = \mathcal{B} \cap \mathcal{B}^* \subseteq \mathcal{B},$$

διότι η $\mathcal{B}$ είναι pre-reflexive.
Από το Θεώρημα 4.15 έπεται ότι $\mathcal{A}_{min}(X, \leqslant, m) \subseteq \mathcal{B}$.
Συμπεραίνουμε ότι η $\mathcal{A}_{min}(X, \leqslant, m)$ είναι το ελάχιστο στοιχείο της $\mathcal{C}'$, και άρα η $\mathcal{C}$ έχει ως ελάχιστο στοιχείο την άλγεβρα $U^{-1}\mathcal{A}_{min}(X, \leqslant, m)U$.

□

Παρατήρηση 4.24. *Η οικογένεια $\mathcal{C}$ στο προηγούμενο Θεώρημα έχει και ένα μέγιστο στοιχείο, την άλγεβρα $alg\mathcal{L}$.*

Έστω $(T_i)_{i\in I}$ δίκτυο στην $alg\mathcal{L}$ και $T \in B(H)$, με $T_i \xrightarrow{w^*} T$, οπότε και $T_i \xrightarrow{WOT} T$.
Επειδή ο πολλαπλασιασμός είναι χωριστά (WOT,WOT)-συνεχής και εφ' όσον $T_i \in alg\mathcal{L}$, για κάθε προβολή $P \in \mathcal{L}$ έχουμε ότι:

$$TP = WOT\text{-}\lim_i(T_iP) = WOT\text{-}\lim_i(PT_iP) = PTP$$

Άρα $T \in alg\mathcal{L}$, δηλαδή η $alg\mathcal{L}$ είναι w^*-κλειστή.
Επίσης από το Θεώρημα 3.22 έχουμε ότι ο $\mathcal{L}$ είναι ανακλαστικός, δηλαδή $latalg\mathcal{L} = \mathcal{L}$.
Τέλος η $alg\mathcal{L}$ είναι προφανώς ανακλαστική, και άρα pre-reflexive.
Συμπεραίνουμε ότι $alg\mathcal{L} \in \mathcal{C}$, κι εφ' όσον για κάθε $\mathcal{A} \in \mathcal{C}$ ισχύει $\mathcal{A} \subseteq alglat\mathcal{A} = alg\mathcal{L}$, έχουμε ότι πράγματι η $alg\mathcal{L}$ είναι το μέγιστο στοιχείο της $\mathcal{C}$.

Ευρετήριο

Βιβλιογραφία

[1] W.Arveson, *Operator Algebras and Invariant Subspaces*, Ann. of Math. (2), Vol. 100 (1974), 433–532.

[2] W.Arveson, *An Invitation to C^*-Algebras*, Springer-Verlag, New York-Heidelberg, (1976).

[3] D.L.Cohn, *Measure Theory*, Birkhauser, Boston (1980).

[4] K.R.Davidson, *Nest Algebras*, Longman Scientific & Technical, N.Y. (1988).

[5] Α.Κατάβολος, *Εισαγωγή στη Θεωρία Τελεστών*, Πανεπιστήμιο Αθηνών, Αθήνα (2006).

[6] Γ.Κουμουλλής, Σ.Νεγρεπόντης, *Θεωρία Μέτρου*, Συμμετρία, Αθήνα (1991).

[7] Σ.Νεγρεπόντης, Θ.Ζαχαριάδης, Ν.Καλαμίδας, Β.Φαρμάκη, *Γενική Τοπολογία και Συναρτησιακή Ανάλυση*, Συμμετρία, Αθήνα (1997).

[8] N.Dunford, J.T.Schwartz, *Linear Operators I, II, III*, Interscience Publishers, New York (1957, 1963, 1971).