Αναπαραστάσεις ομάδων και Άλγεβρες Τελεστών

Μιχάλης Ανούσης

8 Ιουλίου 2015

1. τοπολογικές ομάδες
2. συμπαγείς ομάδες
3. $C^*(G)$
4. primitive ideals

τοπολογικές ομάδες

Ορισμός

Μια ομάδα G λέγεται τοπολογική ομάδα αν είναι εφοδιασμένη με μια τοπολογία τ.ω. οι

$$(x, y) \mapsto xy$$

και

$$x \mapsto x^{-1}$$

να είναι συνεχείς.

Παραδείγματα

- $(\mathbb{R}, +)$, $(\mathbb{R}^*, \cdot)$, $(\mathbb{R}^*_+, \cdot)$
- $(\mathbb{T}, \cdot)$, $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$

Οι παρακάτω ομάδες πινάκων με την σχετική τοπολογία.

Παραδείγματα

- $GL(n,\mathbb{R}) = \{A : n \times n \text{ πίνακας},\ \det A \neq 0\}$
- $SL(n,\mathbb{R}) = \{A : A \in GL(n,\mathbb{R}),\ \det A = 1\}$
- $O(n,\mathbb{R}) = \{A : A \in GL(n,\mathbb{R}),\ A^t A = I\}$
- $GL(n,\mathbb{C}) = \{A : n \times n \text{ πίνακας},\ \det A \neq 0\}$
- $U(n) = \{A : A \in GL(n,\mathbb{C}),\ A^* A = I\}$
- $SU(n) = \{A : A \in U(n),\ \det A = I\}$
- Η ομάδα του Heisenberg

Πρόταση

G τοπικά συμπαγής τοπολογική ομάδα. Τότε η G έχει ένα αριστερά αναλλοίωτο μέτρο. Το μέτρο αυτό είναι μοναδικό up to a scalar. Λέγεται μέτρο Haar και θα συμβολίζεται μ.

Ορισμός

H χώρος Hilbert και G τοπολογική ομάδα. Μια unitary αναπαράσταση π της G είναι μια απεικόνιση $G \to B(H)$ τέτοια ώστε:

1. $x \to \pi(x)$ είναι ομομορφισμός ομάδων
2. $\pi(x)^*\pi(x) = \pi(x)\pi(x)^* = I, \quad \forall x \in G.$
3. Για κάθε $v \in H$ η απεικόνιση $x \mapsto \pi(x)v$ είναι συνεχής.

Ορισμός

(π, H) unitary αναπαράσταση της G. Ένας κλειστός διανυσματικός υπόχωρος V του H λέγεται αναλλοίωτος αν

$$\pi(x)v \in V, \; \forall v \in V, \; \forall x \in G$$

V αναλλοίωτος, τότε $V^\perp$ αναλλοίωτος.

Ορισμός

(π, H) unitary αναπαράσταση της G. Η π λέγεται irreducible αν οι μόνοι αναλλοίωτοι υπόχωροι είναι ο H και ο $\{0\}$.

Ορισμός

G ομάδα (π, H) unitary αναπαράσταση της G. Αν V αναλλοίωτος υπόχωρος του H, τότε ο περιορισμός $\pi_V(x)$ του $\pi(x)$ στον V, ορίζει ένα στοιχείο του $B(V)$. Η $g \to \pi_V(x)$ είναι μια απεικόνιση $G \to B(V)$ και λέγεται υποαναπαράσταση της π.

Ορισμός

(π_1, H_1), (π_2, H_2) αναπαραστάσεις της G. Η απεικόνιση $x \to (\pi_1 \oplus \pi_2)(x) : G \to B(H_1 \oplus H_2)$ που ορίζεται $(\pi_1 \oplus \pi_2)(x)(v_1 + v_2) = \pi_1(x)v_1 + \pi_2(x)v_2$ λέγεται ευθύ άθροισμα των π_1, π_2.

Ορισμός

(π_1, H_1), (π_2, H_2) αναπαραστάσεις της G. Λέγονται ισοδύναμες αν υπάρχει $U : H_1 \to H_2$ ισομετρία επί, τέτοια ώστε

$$U\pi_1(x) = \pi_2(x)U$$

$\forall x \in G$.

Η ισοδυναμία αναπαραστάσεων είναι σχέση ισοδυναμίας.

Ορισμός

$\hat{G}$ το σύνολο των κλάσεων ισοδυναμίας των unitary irreducible αναπαραστάσεων της G.

- Η τετριμμένη
- $L^2(G)$ ο χώρος Hilbert με εσωτερικό γινόμενο

$$\langle f, g\rangle = \int_G f(x)\overline{g(x)}d\mu(x).$$

Η αναπαράσταση λ που ορίζεται

$$\lambda(y)f(x) = f(y^{-1}x)$$

λέγεται αριστερή κανονική αναπαράσταση της G.

Άλγεβρα ομάδας

$L^1(G) = \{f : G \to \mathbb{C}\}$ με την κατά σημείο πρόσθεση και γινόμενο την συνέλιξη

$$f * g(x) = \int_{y \in G} f(xy^{-1})g(y)d\mu(y)$$

και ενέλιξη $f^*(x) = \overline{f(x^{-1})}$.
Η $L^1(G)$ με την πράξη και την ενέλιξη λέγεται άλγεβρα της ομάδας G.

Πρόταση

(π, H) αναπαράσταση της G. Τότε η $f \mapsto \pi(f) = \int_G f(x)\pi(x)d\mu(x)$ ικανοποιεί

1. $\pi : L^1(G) \to B(H)$ *είναι γραμμική.*
2. $\pi(f * g) = \pi(f)\pi(g)$
3. $\pi(f^*) = \pi(f)^*$
4. $\overline{\pi(L^1(G))H} = H$

Αντίστροφα: Αν $\phi : L^1(G) \to B(H)$ ικανοποιεί τις συνθήκες της πρότασης, τότε υπάρχει μια unitary αναπαράσταση π της G τ.ω. $\phi(f) = \pi(f)$

Πρόταση

G ομάδα, (π, H) αναπαράσταση της G. Τότε τα ε.ε.ι.

1. $A \in B(H)$, $A\pi(x) = \pi(x)A$ *για κάθε* $x \in G$, *τότε* $A = \lambda I$.
2. π *irreducible*

Παρατήρηση

$\{\pi(x) : x \in G\}'$ *είναι αυτοσυζυγής άλγεβρα και*

$$\{\pi(x) : x \in G\}' = \mathbb{C}I \Leftrightarrow \pi \text{ irreducible}$$

- $\mathbb{R}$, στο $\mathbb{C}$: ορίζουμε
  Για $\lambda \in \mathbb{R}$
  $$\pi_\lambda(x) = e^{i\lambda x}$$
  $\hat{\mathbb{R}} = \{\pi_\lambda : \lambda \in \mathbb{R}\}$.
- $\mathbb{T}$, στο $\mathbb{C}$: ορίζουμε
  Για $n \in \mathbb{Z}$
  $$\pi_n(x) = e^{inx}$$
  $\hat{\mathbb{T}} = \{\pi_n : n \in \mathbb{Z}\}$.

συμπαγείς ομάδες

- V_n: ομογενή πολυώνυμα βαθμού n δύο μιγαδικών μεταβλητών. Αν $\phi_k(z_1, z_2) = z_1^k z_2^{n-k}$, τα ϕ_k για $k = 0, 1, \dots, n$ αποτελούν βάση του V_n.
  Ορίζουμε
  $$\left\langle \sum a_k \phi_k, \sum b_k \phi_k \right\rangle = \sum k!(n-k)! a_k \overline{b_k}.$$
  $SU(2)$, στο V_n:
  Αν
  $$x = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$
  $$(\pi_n(x)f)(z_1, z_2) = f(az_1 + cz_2, bz_1 + dz_2).$$
  $$\widehat{SU(2)} = \{\pi_n : n = 0, 1, 2, \dots\}$$

Πρόταση

G συμπαγής ομάδα. Τότε η $\left\{\sqrt{d_\pi}\pi_{ij} : \pi \in \hat{G}, 1 \leq i, j \leq d_\pi\right\}$ είναι ορθοκανονική βάση του $L^2(G)$.

Πρόταση

G συμπαγής ομάδα. Τότε

$$\lambda = \sum_{\pi \in \hat{G}} \oplus d_\pi \pi$$

$$f \in L^2(G)$$

$$\hat{f}(\pi) = \int_G f(x)\pi(x^{-1})d\mu(x)$$

$$f(x) = \sum_{\pi \in \hat{G}} d_\pi \operatorname{tr}(\hat{f}(\pi)\pi(x))$$

($L^2(G)$ σύγκλιση)
Μέτρο Plancherel του π είναι d_π.

$C^*(G)$

Ορισμός

Ορίζουμε στην $L^1(G)$ μια νόρμα.

$$\|f\| = sup_{\pi \in \hat{G}} \|\pi(f)\|.$$

Η $C^*(G)$ είναι η πλήρωση της $L^1(G)$ ως προς αυτή την νόρμα και είναι C^* άλγεβρα.
Λέγεται C^* άλγεβρα της G.

Υπαάρχει $1-1$ και επί αντιστοιχία ανάμεσα στις unitary αναπαραστάσεις της G και τις μη εκφυλισμένες $*$ αναπαραστάσεις της $C^*(G)$.

Ορισμός

Ένα ιδεώδες μιας C^*- άλγεβρας $\mathcal{A}$ λέγεται primitive αν είναι ο πυρήνας μιας irreducible αναπαράστασης της $\mathcal{A}$. $\mathrm{Prim}(\mathcal{A})$ το σύνολο των primitive ιδεωδών.

Θεωρούμε τον χώρο $\mathrm{Prim}(\mathcal{A})$ με την hull-kernel τοπολογία. Αν $U \subseteq \mathrm{Prim}(\mathcal{A})$ τότε

$$\overline{U} = \{I \in \mathrm{Prim}(\mathcal{A}) : I \supseteq \cap_{J \in U} J\}.$$

Ο $\mathrm{Prim}(\mathcal{A})$ είναι T_0.
Συμβολίζουμε $\mathrm{Prim}(G) = \mathrm{Prim}(C^*(G))$.
Ορίζεται μια απεικόνιση $\hat{G} \to \mathrm{Prim}(G)$, $\pi \mapsto \ker \pi$.

Ορισμός

Μια ομάδα G λέγεται type I αν: π αναπαράσταση της G τ.ω. $\pi(G)''$ είναι factor, τότε $\pi(G)''$ είναι factor τύπου I. (ισοδύναμα: π είναι ευθύ άθροισμα μιας irreducible αναπαράστασης)

Πρόταση

G s.c.l.c..Τα ε.ε.ι.

1. *G είναι τύπου I.*
2. $\hat{G} \to \mathrm{Prim}(G)$ *είναι* $1-1$.
3. $(\pi, H) \in \hat{G}$, *τότε η* $\pi(C^*(G))$ *περιέχει όλους τους συμπαγείς τελεστές στον* H.

Πρόταση

1. *G αβελιανή, είναι τύπου I.*
2. *G συμπαγής, είναι τύπου I.*
3. *G διακριτή, είναι τύπου I αν και μόνον αν περιέχει μια κανονική αβελιανή υποομάδα πεπερασμένου δείκτη.*

Παραδείγματα

- Ομάδα του Heisenberg H:
  $\lambda \in \mathbb{R}^*$, ορίζουμε π_λ στον $L^2(\mathbb{R})$:

$$(\pi_\lambda(x, y, z)f)(t) = e^{i\lambda z} e^{-i\lambda yt} f(t - x)$$

  $(s, t) \in \mathbb{R}^2$, ορίζουμε $\pi_{s,t}$ στον $\mathbb{C}$:

$$\pi_{s,t}(x, y, z) = e^{i(sx+ty)}$$

$$\hat{H} = \{\pi_\lambda : \lambda \in \mathbb{R}^*\} \cup \{\pi_{s,t} : (s, t) \in \mathbb{R}^2\}$$

Παραδείγματα

- Διακριτή ομάδα του Heisenberg H_d:

$$u = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

π irreducible αναπαράσταση, τότε $\pi(w) = e^{2\pi i\theta}$.
Αν θ άρρητος, τότε $\pi(u), \pi(v)$ παράγουν την irrational rotation algebra A_θ.
Αν ρ_1, ρ_2 δύο μη ισοδύναμεςαναπαραστάσεις της A_θ, τότε οι $\rho_1\pi$, $\rho_2\pi$ είναι μη ισοδύναμες αναπαραστάσεις της $C^*(G)$ και έχουν ίδιο πυρήνα,

$$\ker \rho_1\pi = \ker \rho_2\pi = \ker \pi.$$