Αναπαραστάσεις ομάδων και Άλγεβρες Τελεστών

Μιχάλης Ανούσης

7 Ιουλίου 2015

1. χαρακτήρες

χαρακτήρες

Ορισμός

G ομάδα, (π, H) unitary αναπαράσταση της G. Λέμε χαρακτήρα της π την συνάρτηση $\chi_\pi : G \longrightarrow$, που ορίζεται

$$\chi(x) = \operatorname{tr} \pi(x)$$

Πρόταση

G ομάδα, (π, H) unitary αναπαράσταση της G.

1. $\chi_\pi(e) = d_\pi$
2. $\chi_\pi(x^{-1}) = \overline{\chi_\pi(x)}$
3. $\chi_\pi(yxy^{-1}) = \chi_\pi(x)$
4. *Αν οι π και οι ρ είναι ισοδύναμες, $\chi_\pi(x) = \chi_\rho(x)$.*

Ορίζουμε το ακόλουθο εσωτερικό γινόμενο στον $L^2(G)$:

$$(f|g) = \frac{1}{|G|} \sum_{x \in G} f(x)\overline{g(x)}$$

Πρόταση

G ομάδα, π, ρ unitary irreducible αναπαραστάσεις της G.

1. *Αν οι π και ρ δεν είναι ισοδύναμες, $(\chi_\pi|\chi_\rho) = 0$.*
2. *Αν οι π και ρ είναι ισοδύναμες, $(\chi_\pi|\chi_\rho) = 1$.*

Απόδειξη

Αν οι π και ρ δεν είναι ισοδύναμες έχουμε $\pi(x) = \pi_{ij}(x)$, $\rho(x) = \rho_{kl}(x)$, $\chi_\pi(x) = \sum_i \pi_{ii}(x)$, $\chi_\rho = \sum_i \rho_{kk}(x)$ και

$$(\chi_\pi|\chi_\rho) = \frac{1}{|G|}\sum_{x\in G}\chi_\pi(x)\overline{\chi_\rho(x)}$$

$$= \frac{1}{|G|}\sum_{x\in G}\left(\sum_i \pi_{ii}(x)\right)\left(\overline{\sum_k \rho_{kk}(x)}\right)$$

$$= \frac{1}{|G|}\sum_i\sum_k\left(\sum_{x\in G}\pi_{ii}(x)\overline{\rho_{kk}(x)}\right)$$

$$\frac{1}{|G|}\sum_i\sum_k\left(\sum_{x\in G}\pi_{ii}(x)\rho_{kk}(x^{-1})\right) = 0.$$

Αν οι π και ρ είναι ισοδύναμες έχουμε

$$(\chi_\pi|\chi_\rho) = (\chi_\pi|\chi_\pi) = \frac{1}{|G|}\sum_{x\in G}\chi_\pi(x)\overline{\chi_\pi(x)}$$

$$= \frac{1}{|G|}\sum_{x\in G}\left(\sum_i \pi_{ii}(x)\right)\left(\overline{\sum_j \pi_{jj}(x)}\right)$$

$$= \frac{1}{|G|}\sum_i\sum_j\left(\sum_{x\in G}\pi_{ii}(x)\overline{\pi_{jj}(x)}\right) = \frac{1}{|G|}\sum_i\sum_j\left(\sum_{x\in G}\pi_{ii}(x)\pi_{jj}(x^{-1})\right)$$

$$\frac{1}{|G|}\sum_i\left(\sum_{x\in G}\pi_{ii}(x)\pi_{ii}(x^{-1})\right) = \frac{1}{|G|}\sum_i(|G|/d_\pi) = 1.$$

□

Πόρισμα

G ομάδα, (ρ, H) unitary αναπαράσταση τ.ω.

$$\rho = \pi_1^{n_1} \oplus \pi_2^{n_2} \oplus \ldots \oplus \pi_k^{n_k}$$

με π_i unitary irreducible αναπαραστάσεις μη ισοδύναμες ανά δύο. Τότε

1. $(\chi_{\pi_i} | \chi_\rho) = n_i$.
2. $(\chi_\rho | \chi_\rho) = n_1^2 + n_2^2 + \ldots + n_k^2$.

Πόρισμα

G ομάδα, ρ unitary αναπαράσταση. Τότε η ρ είναι irreducible αν και μόνον αν $(\chi_\rho | \chi_\rho) = 1$.

Πόρισμα

G ομάδα, π, ρ unitary αναπαραστάσεις. Τότε οι π και ρ είναι ισοδύναμες αν και μόνον αν $\chi_\pi = \chi_\rho$.

Απόδειξη

$$\pi = \pi_1^{n_1} \oplus \pi_2^{n_2} \oplus \ldots \oplus \pi_k^{n_k}$$

$$\rho = \pi_1^{m_1} \oplus \pi_2^{m_2} \oplus \ldots \oplus \pi_k^{m_k}$$

με π_i unitary irreducible αναπαραστάσεις μη ισοδύναμες ανά δύο. Τότε

$$n_i = (\chi_\pi | \chi_{\pi_i}) = (\chi_\rho | \chi_{\pi_i}) = m_i.$$

$\square$

Πρόταση

G ομάδα, π unitary irreducible αναπαράσταση. Τότε η π είναι υποαναπαράσταση της λ με πολλαπλότητα d_π.

Απόδειξη

$\chi_\lambda(x) = \sum_{y \in G} \langle \lambda(x) e_y, e_y \rangle = \sum_{y \in G} \langle e_{xy}, e_y \rangle$.
Άρα $\chi_\lambda(x) = 0$ αν $x \neq e$ και $\chi_\lambda(x) = |G|$ αν $x = e$.
Έχουμε

$$(\chi_\lambda | \chi_\pi) = \frac{1}{|G|} \sum_{x \in G} \chi_\lambda(x) \overline{\chi_\pi(x)} = \frac{1}{|G|} \chi_\lambda(e) \overline{\chi_\pi(e)} = d_\pi .$$

□

Πόρισμα

G έχει πεπερασμένο πλήθος unitary irreducible αναπαράστάσεων $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_k$. *Επιπλέον*

$$|G| = d_{\pi_1}^2 + d_{\pi_2}^2 + \ldots + d_{\pi_k}^2$$

Ποιό είναι το k;
Συμβολίζουμε $H(G)$ τον χώρο των class functions.

$$H(G) = \{f : G \to G : f(yxy^{-1}) = f(x), \forall x, y \in G\}$$

Οι χαρακτήρες ανήκουν στον $H(G)$.

Πρόταση

$\dim H(G) = c$, *όπου c το πλήθος των κλάσεων συζυγίας της G.*

Πρόταση

$\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_k$ οι unitary irreducible αναπαραστάσεις της G και $\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_k$ οι αντίστοιχοι χαρακτήρες. Τότε οι $\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_k$ αποτελούν βάση του $H(G)$.

Λήμμα

$f \in H(G)$, π unitary irreducible αναπαράσταση. Τότε $\pi(f) \in \{\pi(x) : x \in G\}'$. Αν π irreducible τότε

$$\pi(f) = \frac{(\chi_\pi|\bar{f})|G|}{d_\pi} I$$

Απόδειξη της Πρότασης

$$(\chi_\pi|\bar{f}) = 0 \Rightarrow \pi(f) = 0$$

για κάθε $\pi \in \hat{G}$. Άρα $\lambda(f) = 0$. Έχουμε

$$\lambda(f)e_e = 0 \Rightarrow \sum_{x \in G} f(x)\lambda(x)e_e \Rightarrow \sum_{x \in G} f(x)e_x = 0 \Rightarrow f = 0.$$

$\square$

Πόρισμα

G αβελιανή, $|\hat{G}| = |G|$.

1. Να υπολογιστεί το $\hat{G}$.
2. Να μελετηθεί η λ.
3. Για $f \in L^1(G)$ να βρεθεί η f απο τα $\pi(f)$.

Παραδείγματα

- $\mathbb{Z}_n$
  $\mathbb{Z}_n$, ορίζουμε για $k = 0, 1, 2, ...n - 1$
  $\pi_k : \mathbb{Z}_n \to \mathbb{C}$

$$\pi_k(m) = e^{2\pi i \frac{km}{n}}$$

$$\widehat{\mathbb{Z}_n} = \{\pi_k : k = 0, 1, 2, ...n - 1\}$$

$$\lambda = \sum_{k=0}^{n-1} \oplus \pi_k$$

Παραδείγματα

Ορίζουμε

$$\hat{f}(k) = \sum_{m \in \mathbb{Z}_n} f(m)\pi_k(-m)$$

$$\rho_m : \hat{G} \to \mathbb{C}, \rho_m(\pi_k) = e^{2\pi i \frac{mk}{n}}$$

Έχουμε

$$\sum_{\pi_k \in \widehat{\mathbb{Z}_n}} \hat{f}(k)\rho_{m_0}(\pi_k) = \sum_{k \in \widehat{\mathbb{Z}_n}} \left(\sum_{m \in \mathbb{Z}_n} f(m)\pi_k(-m) \right) \rho_{m_0}(\pi_k)$$

$$= \sum_{m \in \mathbb{Z}_n} f(m) \left(\sum_{\pi_k \in \widehat{\mathbb{Z}_n}} \pi_k(-m)\rho_{m_0}(\pi_k) \right)$$

Παραδείγματα

$$= \sum_{m \in \mathbb{Z}_n} f(m) \left(\sum_{\pi_k \in \widehat{\mathbb{Z}_n}} e^{2\pi i \frac{(m_0 - m)k}{n}} \right) = n f(m_0).$$

Άρα

$$\frac{1}{|\mathbb{Z}_n|} \sum_{\pi_k \in \widehat{\mathbb{Z}_n}} \hat{f}(k) \rho_{m_0}(k) = f(m_0).$$

Κάθε σημείο του $\widehat{\mathbb{Z}_n}$ έχει μάζα

$$\frac{1}{|\mathbb{Z}_n|}.$$

(Μέτρο Plancherel).

Παρατήρηση

Αν G αβελιανή, τότε $\hat{G}$ αβελιανή ομάδα με πράξη τον κατά σημείο πολλαπλασιασμό. Αν $x \in G$, τότε η $\rho_x : \hat{G} \to \mathbb{C}$, που ορίζεται

$$\rho_x(\pi) = \pi(x)$$

είναι unitary irreducible αναπαράσταση της $\hat{G}$.
Κάθε unitary irreducible αναπαράσταση της $\hat{G}$ είναι της μορφής ρ_x για κάποιο $x \in G$. ΄Αρα $\hat{\hat{G}} = G$ (Pontryagin duality).

Παραδείγματα

- D_4

$$\pi_0(a) = \pi_0(b) = 1$$

$$\pi_1(a) = -1, \pi_1(b) = 1$$

$$\pi_2(a) = 1, \pi_2(b) = -1$$

$$\pi_3(a) = -1, \pi_3(b) = -1$$

$$\pi_4(a) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \pi_4(b) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

character table

D_4	χ_0	χ_1	χ_2	χ_3	χ_4
e	1	1	1	1	2
b	1	1	-1	-1	0
b^2	1	1	1	1	-2
b^3	1	1	-1	-1	0
a	1	-1	1	-1	0
ba	1	-1	-1	1	0
b^2a	1	-1	1	-1	0
b^3a	1	-1	-1	1	0

young tableux

Young diagram, Young tableau, standard Young tableau, normal Young tableau

Τα standard Young tableau για την S_3 είναι:

1. $$\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 3 \\ \hline \end{array}$$

2. $$\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline 3 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1} \end{array}$$

3. $$\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 3 \\ \hline 2 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1} \end{array}$$

4. $$\begin{array}{|c|}\hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline 3 \\ \hline \end{array}$$

T standard Young tableau

Row subgroup P_T, Column subgroup Q_T

$$A_T = \sum_{x \in P_T} e_x$$

$$B_T = \sum_{x \in Q_T} \operatorname{sgn}(x) e_x$$

$$C_T = A_T B_T$$

Ο χώρος $L^1(G)C_T$ λέγεται Specht module. Η αριστερή δράση της S_n είναι μια unitary irreducible αναπαράσταση της S_n και κάθε unitary irreducible αναπαράσταση της S_n είναι αυτής της μορφής για ένα μοναδικό Young diagram.