Αναπαραστάσεις ομάδων και ΄Αλγεβρες Τελεστών

Μιχάλης Ανούσης

6 Ιουλίου 2015

1. Ομάδες
2. πεπερασμένες ομάδες
3. Schur

ομάδες

Παραδείγματα

- $(\mathbb{Z}, +)$
- $(\mathbb{Z}_n, +)$
- $(\mathbb{R}, +)$, $(\mathbb{R}^*, \cdot)$, $(\mathbb{R}^*_+, \cdot)$
- $(\mathbb{T}, \cdot)$, $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$
- $S_n = \{\phi : \mathbb{N}_n \to \mathbb{N}_n,\ 1-1 \text{ και επί}\}$, όπου $\mathbb{N}_n = \{1, 2, ..., n\}$, με πράξη την σύνθεση.
- $D_n =< a, b > \text{τ.ω.} a^2 = b^n = 1, aba = b^{-1}$.
- $S_\infty = \{\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ 1-1 \text{ και επί} : \exists\ k_\phi \text{ τ.ω.} \phi(n) = n, \forall n \geq k_\phi\}$
- $D_\infty =< a, b > \text{τ.ω.} a^2 = 1, aba^{-1} = b^{-1}$.

Παραδείγματα

Οι παρακάτω είναι ομάδες πινάκων με πράξη τον πολλαπλασιασμό πινάκων

- $GL(n,\mathbb{R}) = \{A : n \times n \text{ πίνακας},\ \det A \neq 0\}$
- $SL(n,\mathbb{R}) = \{A : A \in GL(n,\mathbb{R}),\ \det A = 1\}$
- $O(n,\mathbb{R}) = \{A : A \in GL(n,\mathbb{R}),\ A^t A = I\}$
- $GL(n,\mathbb{C}) = \{A : n \times n \text{ πίνακας},\ \det A \neq 0\}$
- $U(n) = \{A : A \in GL(n,\mathbb{C}),\ A^* A = I\}$
- $SU(n) = \{A : A \in U(n),\ \det A = I\}$

Παραδείγματα

- $H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : x, y, z \in \mathbb{R} \right\}$
- $H_d = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : x, y, z \in \mathbb{Z} \right\}$
- $SL(n, \mathbb{Z}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a, b, c, d \in \mathbb{Z},\ ad - bc = 1 \right\}$
- F_n η ελεύθερη ομάδα με n γεννήτορες.

πεπερασμένες ομάδες

Ορισμός

H χώρος Hilbert πεπερασμένης διάστασης και G ομάδα. Μια unitary αναπαράσταση π της G είναι μια απεικόνιση $G \to B(H)$ τέτοια ώστε:

1. $x \to \pi(x)$ είναι ομομορφισμός ομάδων
2. $\pi(x)^*\pi(x) = \pi(x)\pi(x)^* = I, \;\; \forall x \in G.$

Ορισμός

(π, H) unitary αναπαράσταση της G. Ένας διανυσματικός υπόχωρος V του H λέγεται αναλλοίωτος αν

$$\pi(x)v \in V, \; \forall v \in V, \; \forall x \in G$$

V αναλλοίωτος, τότε $V^{\perp}$ αναλλοίωτος.

Ορισμός

(π, H) unitary αναπαράσταση της G. Η π λέγεται irreducible αν οι μόνοι αναλλοίωτοι υπόχωροι είναι ο H και ο $\{0\}$.

Ορισμός

G ομάδα, (π, H) unitary αναπαράσταση της G. Αν V αναλλοίωτος υπόχωρος του H, τότε ο περιορισμός $\pi_V(g)$ του $\pi(g)$ στον V, ορίζει ένα στοιχείο του $B(V)$. Η $g \to \pi_V(g)$ είναι μια απεικόνιση $G \to B(V)$ και λέγεται υποαναπαράσταση της π.

Ορισμός

(π_1, H_1), (π_2, H_2) αναπαραστάσεις της G. Η απεικόνιση $x \to (\pi_1 \oplus \pi_2)(x) : G \to B(H_1 \oplus H_2)$ που ορίζεται $(\pi_1 \oplus \pi_2)(x)(v_1 + v_2) = \pi_1(x)v_1 + \pi_2(x)v_2$ λέγεται ευθύ άθροισμα των π_1, π_2.

G ομάδα, (π, H) unitary αναπαράσταση της G. Αν V αναλλοίωτος υπόχωρος του H, τότε ο περιορισμός π_V της π στον V και ο περιορισμός $\pi_{V^\perp}$ της π στον $V^\perp$ είναι υποαναπαραστάσεις της G, και $\pi = \pi_V \oplus \pi_{V^\perp}$.

Πρόταση

(π, H) unitary αναπαράσταση της G. Τότε η π είναι ευθύ άθροισμα από irreducible αναπαραστάσεις.

Ορισμός

$(\pi_1, H_1), (\pi_2, H_2)$ αναπαραστάσεις της G. Λέγονται ισοδύναμες αν υπάρχει $U : H_1 \to H_2$ ισομετρία επί, τέτοια ώστε

$$U\pi_1(x) = \pi_2(x)U$$

$\forall x \in G$.

Η ισοδυναμία αναπαραστάσεων είναι σχέση ισοδυναμίας.

Ορισμός

$\hat{G}$ το σύνολο των κλάσεων ισοδυναμίας των unitary irreducible αναπαραστάσεων της G.

- Η τετριμμένη
- $L^2(G)$ ο χώρος Hilbert με εσωτερικό γινόμενο

$$\langle f, g \rangle = \sum f(x)\overline{g(x)}.$$

Η αναπαράσταση λ που ορίζεται

$$\lambda(y)f(x) = f(y^{-1}x)$$

λέγεται αριστερή κανονική αναπαράσταση της G.
Αν $e_x : G \to G$ που ορίζεται $e_x(y) = 1$ αν $x = y$ και $e_x(y) = 0$ αν $x \neq y$ τότε $\lambda(y)e_x = e_{yx}$.

- $\mathbb{Z}_2$ στο $\mathbb{C}^2$: ορίζουμε
$$\pi(1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$
- $\mathbb{Z}_4$ στο $\mathbb{C}^2$: ορίζουμε
$$\pi(1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$
- D_4 στο $\mathbb{C}^2$: ορίζουμε
$$\pi(a) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \pi(b) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- $\mathbb{Z}_n$, ορίζουμε για $k = 0, 1, 2, ...n - 1$
  $\pi_k : \mathbb{Z}_n \to \mathbb{C}$

$$\pi_k(m) = e^{2\pi i \frac{km}{n}}$$

- S πεπερασμένο σύνολο στο οποίο δρα η G. $\mathbb{C}(S)$ δ.χ. πάνω στο $\mathbb{C}$ με βάση $(e_s)_{s\in S}$. Ορίζουμε

$$\left\langle \sum \lambda_s e_s, \sum \mu_s e_s \right\rangle = \sum \lambda_s \overline{\mu_s}.$$

$$\pi(x)e_s = e_{xs}$$

ʹΑλγεβρα ομάδας

Ένας δ.χ. V πάνω στο $\mathbb{C}$ λέγεται άλγεβρα αν είναι εφοδιασμένος με μια πράξη $\cdot$ τ.ω. για κάθε $a, b, c \in V$, για κάθε $\lambda \in \mathbb{C}$

$$a(b+c) = ab + ac, \ (b+c)a = ba + ca$$

$$a(bc) = (ab)c$$

$$(\lambda a)b = a(\lambda b) = \lambda(ab)$$

Λέγεται άλγεβρα με μονάδα αν υπάρχει ενα στοιχείο $e \in V$ τ.ω.

$$ea = ae = a$$

για κάθε $a \in V$.

Παραδείγματα: Η άλγεβρα των τετραγωνικών πινάκων, η άλγεβρα των γραμμικών μετασχηματισμών ενός δ.χ.

Άλγεβρα ομάδας

$L^1(G) = \{f : G \to \mathbb{C}\}$ με την κατά σημείο πρόσθεση και γινόμενο την συνέλιξη

$$f * g(x) = \sum_{y \in G} f(xy^{-1}) g(y)$$

και ενέλιξη $f^*(x) = \overline{f(x^{-1})}$.
Η $L^1(G)$ με την πράξη και την ενέλιξη λέγεται άλγεβρα της ομάδας G.
Το στοιχείο e_e που ορίζεται $e_e(y) = 1$ αν $e = y$ και $e_e(y) = 0$ αν $e \neq y$ είναι μονάδα της $L^1(G)$.

Πρόταση

(π, H) αναπαράσταση της G. Τότε η $f \mapsto \pi(f) = \sum_{x \in G} f(x)\pi(x)$ ικανοποιεί

1. $\pi : L^1(G) \to B(H)$ *είναι γραμμική.*
2. $\pi(f * g) = \pi(f)\pi(g)$
3. $\pi(f^*) = \pi(f)^*$
4. $\pi(e_e) = I$

Αντίστροφα: Αν $\phi : L^1(G) \to B(H)$ ικανοποιεί τις συνθήκες της πρότασης, τότε υπάρχει μια unitary αναπαράσταση π της G τ.ω. $\phi(f) = \pi(f)$

Προβλήματα Θεωρίας Αναπαραστάσεων

1. Να υπολογιστεί το $\hat{G}$.
2. Να μελετηθεί η λ.
3. Για $f \in L^1(G)$ να βρεθεί η f απο τα $\pi(f)$.

Schur

Πρόταση

G ομάδα, (π_1, H_1), (π_2, H_2) irreducible αναπαραστάσεις της G, και $A : H_1 \to H_2$ τ.ω.

$$A\pi_1(x) = \pi_2(x)A$$

για κάθε $x \in G$. Τότε

1. *Αν οι π_1, π_2 δεν είναι ισοδύναμες, $A = 0$.*
2. *Αν $\pi_1 = \pi_2$, $A = \lambda I$.*

Απόδειξη Αν π irreducible και $A\pi(x) = \pi(x)A$, τότε αν λ είναι ιδιοτιμή του A, ο χώρος των ιδιοδιανυσμάτων για την λ είναι αναλλοίωτος, άρα ίσος με H. ʼΑρα $A = \lambda I$.
Έστω A τ.ω.

$$A\pi_1(x) = \pi_2(x)A.$$

Τότε A^*A ικανοποιεί $A^*A\pi_1(x) = \pi_1(x)A^*A$ και άρα είναι πολλαπλάσιο του I. Αν δεν είναι 0, τότε αν $A = U|A|$ έχουμε

$$U\pi_1(x) = \pi_2(x)U$$

και οι π_1, π_2 είναι ισοδύναμες. $\square$

Πρόταση

G ομάδα, (π, H) αναπαράσταση της G. Τότε τα ε.ε.ι.

1. *$A \in B(H)$, $A\pi(x) = \pi(x)A$ για κάθε $x \in G$, τότε $A = \lambda I$.*
2. *π irreducible*

Απόδειξη Αν π οχι irreducible η προβολή σε έναν αναλλοίωτο υπόχωρο ικανοποιεί $A\pi(x) = \pi(x)A$. □

Παρατήρηση

$\{\pi(x) : x \in G\}'$ είναι αυτοσυζυγής άλγεβρα και

$$\{\pi(x) : x \in G\}' = \mathbb{C}I \Leftrightarrow \pi \text{ irreducible}$$

Πρόταση

G αβελιανή ομάδα, (π, H) irreducible αναπαράσταση της G. Τότε $\dim H = 1$.

Πρόταση

G ομάδα, (π, H_1), (ρ, H_2) irreducible αναπαραστάσεις της G. Τότε

1. *Αν οι π, ρ δεν είναι ισοδύναμες,*

$$\sum_{x \in G} \pi_{ij}(x)\rho_{kl}(x^{-1}) = 0.$$

2. $$\sum_{x \in G} \pi_{ij}(x)\pi_{kl}(x^{-1}) = \delta_{il}\delta_{kj}|G|/d_\pi$$

όπου d_π είναι η διάσταση του χώρου της αναπαράστασης π.

Απόδειξη

Έστω $A \in B(H_2, H_1)$ και

$$A_G = \sum_{x \in G} \pi(x) A \rho(x^{-1}).$$

Έχουμε

$$\pi(y) A_G = \sum_{x \in G} \pi(yx) A \rho(x^{-1}) = \sum_{x \in G} \pi(x) A \rho(x^{-1}) \rho(y) = A_G \rho(y).$$

Άρα $A_G = 0$. Αν A ο πίνακας που έχει 0 σε κάθε θέση εκτός από την jk όπου έχει 1, παίρνουμε $(A_G)_{il} = 0$ και

$$\sum_{x \in G} \pi_{ij}(x) \rho_{kl}(x^{-1}) = 0.$$

Έστω $A \in B(H_1)$ και

$$A_G = \sum_{x \in G} \pi(x) A \pi(x^{-1}).$$

Έχουμε

$$\pi(y) A_G = \sum_{x \in G} \pi(yx) A \pi(x^{-1}) = \sum_{x \in G} \pi(x) A \pi(x^{-1}) \pi(y) = A_G \pi(y).$$

΄Αρα $A_G = \lambda I$.
Αν A ο πίνακας που έχει 0 σε κάθε θέση εκτός από την jk όπου έχει 1 και $i \neq l$, τότε $(A_G)_{il} = 0$ και άρα
$\sum_{x \in G} \pi_{ij}(x) \pi_{kl}(x^{-1}) = 0$ αν $i \neq l$.
Αν A ο πίνακας που έχει 0 σε κάθε θέση εκτός από την jk όπου έχει 1 και $j \neq k$ παίρνουμε

$$\mathrm{tr}(A_G) = \sum_{x \in G} \mathrm{tr}\, \pi(x) A \pi(x^{-1}) = \sum_{x \in G} \mathrm{tr}\, A = 0.$$

Άρα επειδή ο A_G είναι διαγώνιος, $(A_G)_{ii} = 0$, δηλαδή $\sum_{x \in G} \pi_{ij}(x)\pi_{ki}(x^{-1}) = 0$ αν $j \neq k$.
Τέλος αν A ο πίνακας που έχει 0 σε κάθε θέση εκτός από την jj όπου έχει 1 έχουμε

$$\mathrm{tr}(A_G) = \sum_{x \in G} \mathrm{tr}\, \pi(x) A \pi(x^{-1}) = \sum_{x \in G} \mathrm{tr}\, A = |G|$$

και άρα επειδή ο A_G είναι διαγώνιος, $(A_G)_{ii} = |G|/d_\pi$, δηλαδή $\sum_{x \in G} \pi_{ij}(x)\pi_{ji}(x^{-1}) = |G|/d_\pi$.

□