ΓΕΩΡΓΙΟΣ Κ. ΕΛΕΥΘΕΡΑΚΗΣ

ΜΟΝΑΔΙΑΙΑ ΙΣΟΔΥΝΑΜΙΑ ΣΕ ΑΒΕΛΙΑΝΕΣ ΑΛΓΕΒΡΕΣ VON NEUMANN ΚΑΙ NESTS

Διπλωματική Εργασία Ειδίκευσης
στα Θεωρητικά Μαθηματικά

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΑΘΗΝΑ 2000

Η εργασία αυτή δεν θα μπορούσε να πραγματοποιηθεί χωρίς την καθοδήγηση και τις πολύτιμες παρεμβάσεις του Καθηγητή κου Α. Κατάβολου. Τον ευχαριστώ λοιπόν τόσο γι' αυτό, όσο και για τα όσα έμαθα κοντά του κατά την διδασκαλία των μεταπτυχιακών μαθημάτων " Άλγεβρες Banach" και " Θεωρία Τελεστών".

Οφείλω επίσης να ευχαριστήσω την σύζυγό μου Β. Σιαφάκα , τόσο για το δύσκολο έργο της δακτυλογράφησης της εργασίας αυτής, όσο και για την κατανόησή της στην προσπάθειά μου, που απαιτούσε πολύωρη απόσπαση από άλλες κοινές υποχρεώσεις.

Αφιερώνεται
στους γονείς μου

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία

εκπονήθηκε στα πλαίσια των σπουδών

για την απόκτηση του

Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης

στα

Θεωρητικά Μαθηματικά

που απονέμει το

Τμήμα Μαθηματικών

του Εθνικού και Καποδιστριακού Πανεπιστημίου Αθηνών

Εγκρίθηκε την 18/1/2000 από Εξεταστική Επιτροπή αποτελούμενη από τους:

Ονοματεπώνυμο	Βαθμίδα	Υπογραφή
Α. ΚΑΤΑΒΟΛΟΣ (Επιβλέπων Καθηγητής)	αναπλ. καθ/τής	
Σ. ΠΙΧΩΡΙΔΗΣ	αναπλ. καθ/τής	
Β. ΦΑΡΜΑΚΗ	αναπλ. καθ/τρια	Φαρμάκη

ΜΟΝΑΔΙΑΙΑ ΙΣΟΔΥΝΑΜΙΑ ΣΕ ΑΒΕΛΙΑΝΕΣ ΑΛΓΕΒΡΕΣ VON NEUMANN ΚΑΙ NESTS

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Στο πρώτο μέρος της εργασίας αυτής, κεφάλαια 1-6, σκοπεύουμε να περιγράψουμε από κοινού, τις μοναδιαίες ισοδυναμίες αβελιανών αλγεβρών von Neumann και nests που δρουν σε διαχωρίσιμους χώρους Χίλμπερτ.

Αν $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$ ($\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2$) είναι αβελιανές άλγεβρες von Neumann (nests) στους χώρους Χίλμπερτ H_1, H_2 αντίστοιχα, τότε λέγονται μοναδιαία ισοδύναμες (ισοδύναμα) αν υπάρχει μοναδιαίος τελεστής (unitary) $U : H_1 \to H_2$ ώστε η συνάρτηση $ad_U : A \to UAU^*$ να απεικονίζει την $\mathcal{M}_1$ (το $\mathcal{N}_1$) επί της $\mathcal{M}_2$ (του $\mathcal{N}_2$).

Είναι εύκολο να διαπιστωθεί ότι αν δύο άλγεβρες von Neumann είναι μοναδιαία ισοδύναμες, είναι $*-$ ισόμορφες. Όμως το αντίστροφο δεν συμβαίνει γενικά. Για παράδειγμα αν θεωρήσουμε στον χώρο Χίλμπερτ $H = l^2(\mathbb{N})$ την πολλαπλασιαστική άλγεβρα $\mathcal{A} = \{M_f / f \in l^\infty(\mathbb{N})\}$, $M_f : H \to H : g \to fg$, τότε ορίζεται η αβελιανή άλγεβρα von Neumann $\mathcal{A}^{(2)} = \left\{ \begin{pmatrix} M_f & 0 \\ 0 & M_f \end{pmatrix} / f \in l^\infty(\mathbb{N}) \right\}$ που δρα στον χώρο $H^2 \equiv H \oplus H$.

Μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι η απεικόνιση $\mathcal{A}^{(2)} \to \mathcal{A} : (M_f)^{(2)} \to M_f$ είναι $*-$ ισομορφισμός. Όμως οι άλγεβρες $\mathcal{A}, \mathcal{A}^{(2)}$ δεν μπορεί να είναι μοναδιαία ισοδύναμες διότι αν υπήρχε μοναδιαίος $U : H \to H^2$ ώστε $U\mathcal{A}U^* = \mathcal{A}^{(2)}$ τότε θα υπήρχε $f \in l^\infty(\mathbb{N})$ ώστε $UM_{e_1}U^* = M_f^{(2)}$, οπότε $2 \cdot rankM_f = rankM_{e_1} = 1$. Άτοπο.

Επίσης μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι κάθε μοναδιαία ισοδυναμία μεταξύ δύο nests $\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2$ επάγει έναν "ισομορφισμό διάταξης", δηλαδή μία 1-1, επί απεικόνιση $\mathcal{N}_1 \to \mathcal{N}_2 : N \to UNU^*$ για την οποία $N \le M \Leftrightarrow UNU^* \le UMU^*$.

Όμως το αντίστροφο δεν συμβαίνει γενικά (παράδειγμα 5.3.2.).

Για την από κοινού αντιμετώπιση των μοναδιαίων ισοδυναμιών σε αβελιανές άλγεβρες von Neumann και nests χρησιμοποιούμε ως "εργαλεία" ότι:

1. Για κάθε αβελιανή άλγεβρα von Neumann $\mathcal{M}$ υπάρχει nest $\mathcal{N}$ που την παράγει : $\mathcal{N}'' = \mathcal{M}$ (πρόταση 2.11.). Ιδιαίτερα αν η $\mathcal{M}$ είναι μεγιστική αυτοσυζυγής αβελιανή άλγεβρα von Neumann (masa), τότε το $\mathcal{N}$ μπορεί να επιλεγεί ώστε να είναι μεγιστικό (πρόταση 4.2.).

2. Για κάθε nest $\mathcal{N}$ υπάρχει αυτοσυζυγής τελεστής Α του οποίου το φασματικό nest είναι το $\mathcal{N}$ και άρα λόγω του φασματικού θεωρήματος παράγουν την ίδια

άλγεβρα von Neumann (πρόταση 3.9.). Μπορούμε λοιπόν να συμπεράνουμε ότι για κάθε αβελιανή άλγεβρα von Neumann $\mathcal{M}$ υπάρχει αυτοσυζυγής τελεστής A που την παράγει : $\{A\}'' = \mathcal{M}$.

Για τις μοναδιαίες ισοδυναμίες των masas έχουμε τα εξής αποτελέσματα που παρουσιάζονται στο κεφάλαιο 4.

- Κάθε masa $\mathcal{M} = \{A\}''$ είναι μοναδιαία ισοδύναμη με την πολλαπλασιαστική άλγεβρα $\mathcal{M}_\mu$ του χώρου $L^2(\mu)$ όπου μ Borel μέτρο ισοδύναμο προς το φασματικό μέτρο του A. (θεώρημα 4.3.).

- Μπορούμε να πούμε περισσότερα.Αν $\mathcal{M} = \mathcal{N}''$, όπου $\mathcal{N}$ μεγιστικό nest ,τότε η masa $\mathcal{M}$ είναι μοναδιαία ισοδύναμη με την άλγεβρα $\mathcal{M}_\lambda \oplus \mathcal{M}_{l^\infty(k)}$ που δρα στον χώρο $L^2(\lambda) \oplus l^2(S_k)$ όπου λ το μέτρο Lebesgue στην Borel σ- άλγεβρα του [0,1] και S_k σύνολο με πλήθος στοιχείων ίσο με το πλήθος k των ατόμων του $\mathcal{N}$ (θεώρημα 4.3.).

- Αποδεικνύουμε ακόμα ότι κάθε $*-$ ισομορφισμός μεταξύ masas είναι μοναδιαία ισοδυναμία (Πρόταση 4.5.).

Για τα nests χωρίς πολλαπλότητα (δηλαδή για τα nests που παράγουν masa) βγάζουμε τα εξής συμπεράσματα:

- Αν $\mathcal{N}$ nest χωρίς πολλαπλότητα, υπάρχει ομοιομορφική εμφύτευση $\Phi : \mathcal{N} \to [0,1]$ που διατηρεί την διάταξη ώστε αν $\Phi(\mathcal{N}) = X$ και $[0,1] \setminus X = \bigcup_n (l_n, r_n)$, όπου (l_n, r_n) ξένα ανά δύο διαστήματα, τότε οι προβολές $\Phi^{-1}(r_n) - \Phi^{-1}(l_n)$, $n \in \mathbb{N}$, είναι τα άτομα του $\mathcal{N}$ και το $\mathcal{N}$ είναι μοναδιαία ισοδύναμο με το nest $\mathcal{M} = \{M_s / 0 \le s \le 1\}$ όπου $M_s : L^2(\mu) \to L^2(\mu) : f \to f \cdot \chi_{[0,s]}$, και μ το Borel μέτρο στο [0,1] που ορίζεται από την σχέση :

$$\mu(S) = \lambda(S \cap X) + \sum_n (r_n - l_n)\delta_{\{r_n\}}(S) \quad (4.4.2.).$$

Άμεσα από το τελευταίο απορρέει ότι όλα τα συνεχή nests χωρίς πολλαπλότητα είναι μοναδιαία ισοδύναμα με το nest του Volterra στον χώρο $(L^2[0,1], \lambda)$ (5.4.).

- Σημειώνουμε ότι για κάθε συμπαγές υποσύνολο X του [0,1] με $0,1 \in X$, αν $[0,1] \setminus X = \bigcup_n (l_n, r_n)$ όπου (l_n, r_n) ξένα ανά δύο διαστήματα, αντιστοιχεί το nest χωρίς πολλαπλότητα $\mathcal{M}$ που περιγράψαμε προηγούμενα, του οποίου τα άτομα είναι οι προβολές $(M_{r_n} - M_{l_n})_{n \in \mathbb{N}}$ (3.7.4.).

- Αν θεωρήσουμε τώρα συμπαγή υποσύνολα του [0,1], X, Y με $0,1 \in X \cap Y$ και τα αντίστοιχα nests , τότε αυτά είναι μοναδιαία ισοδύναμα, αν και μόνο αν υπάρχει απολύτως συνεχής ομοιομορφισμός f του $[0,1]$ που διατηρεί την διάταξη, ώστε $f(X)=Y$.

Αυτό αποτελεί και το κριτήριο για να είναι δύο nests χωρίς πολλαπλότητα μοναδιαία ισοδύναμα (θεώρημα 5.8.).

Στο κεφάλαιο 6 ασχολούμαστε με την γενική περίπτωση των αβελιανών αλγεβρών von Neumann και nests.

Αναπτύσσουμε τα εξής αποτελέσματα:

- Κάθε αβελιανή άλγεβρα von Neumann $\mathcal{M} = \{A\}''$ είναι $*-$ ισόμορφη με την πολλαπλασιαστική άλγεβρα $\mathcal{M}_\mu$ για κάθε Borel μέτρο μ ισοδύναμο προς το φασματικό μέτρο του A (πρόταση 6.1.).
- Στο θεώρημα 6.12. έχουμε μία πλήρη ταξινόμηση όλων των αβελιανών αλγεβρών von Neumann που δρούν σε διαχωρίσιμους χώρους Χίλμπερτ. Συγκεκριμένα δείχνουμε ότι για την άλγεβρα $\mathcal{M} = \{A\}''$ και για κάθε Borel μέτρο μ ισοδύναμο προς το φασματικό μέτρο του τελεστού A, υπάρχει $\mu-$ σχεδόν μοναδική Borel διαμέριση $\{\Omega_\infty, \Omega_1, \Omega_2, \ldots\}$ του $\sigma(A)$, ώστε η άλγεβρα $\mathcal{M}$ να είναι μοναδιαία ισοδύναμη με την άλγεβρα $\left(\mathcal{M}_{\mu|\Omega_\infty}\right)^{(\infty)} \oplus \sum_{n=1}^{\infty} \oplus \left(\mathcal{M}_{\mu|\Omega_n}\right)^{(n)}$ που δρα στον χώρο Χίλμπερτ $\left(L^2\left(\mu|\Omega_\infty\right)\right)^{(\infty)} \oplus \sum_{n=1}^{\infty} \oplus \left(L^{(2)}\left(\mu|\Omega_n\right)\right)^{(n)}$.
- Βάσει του προηγουμένου, για κάθε αβελιανή άλγεβρα von Neumann $\mathcal{M}$,αν Α αυτοσυζυγής τελεστής ώστε $\mathcal{M} = \{A\}''$ και δοθέντος ενός μέτρου ισοδύναμου προς το φασματικό μέτρο του Α ορίζεται η συνάρτηση πολλαπλότητας $m = \infty \cdot \chi_{\Omega_\infty} + \sum_{n=1}^{\infty} n\chi_{\Omega_n}$ που καθορίζει βέβαια την "διάσπαση" της $\mathcal{M}$ σε ευθέα αθροίσματα της προηγούμενης μορφής.

Εύκολα πια (πρόταση 6.14.) απορρέει το συμπέρασμα ότι δύο αυτοσυζυγείς τελεστές A, B είναι μοναδιαία ισοδύναμοι (υπάρχει μοναδιαίος τελεστής U ώστε $UAU^* = B$) αν και μόνο αν αυτοί έχουν το ίδιο φάσμα, ισοδύναμα φασματικά μέτρα και την ίδια συνάρτηση πολλαπλότητας.

- Τέλος παρουσιάζεται ένα κριτήριο για το πότε δύο nests είναι μοναδιαία ισοδύναμα (πόρισμα 6.16). Από το κριτήριο αυτό συμπεραίνουμε ότι δύο συνεχή nests είναι μοναδιαία ισοδύναμα αν και μόνο αν οι παραγόμενες άλγεβρες έχουν την ίδια συνάρτηση πολλαπλότητας.

Σημειώνουμε εδώ ότι από το θεώρημα ομοιότητας (similarity theorem), βλέπε στο [2] ,δύο συνεχή nests $\mathcal{N}_1$, $\mathcal{N}_2$ είναι πάντα όμοια (similar) .Δηλαδή υπάρχει αντιστρέψιμος τελεστής S ώστε $S\mathcal{N}_1 S^{-1} = \mathcal{N}_2$.

Το δεύτερο μέρος (κεφάλαιο 7) στηρίζεται σε εργασία των Α. Κατάβολου και Μ. Ανούση και αναφέρεται στις συνθήκες κάτω από τις οποίες η προσθετική ομάδα των πραγματικών αριθμών δρα SOT - συνεχώς και μοναδιαία πάνω σε nest (ορισμός 7.1.).

- Αποδεικνύεται (θεώρημα 7.8.) ότι η δράση πάνω σε nest $\mathcal{N}$, χώρου Χίλμπερτ H, είναι SOT συνεχής μοναδιαία και μεταβατική (7.1.) αν και μόνο αν υπάρχει μοναδιαίος τελεστής $W : H \to L^2(\mathbb{R}, K)$, ώστε $W\mathcal{N}\, W^* = \mathcal{N}_v$ όπου $\mathcal{N}_v$ το nest του Volterra στον χώρο $L^2(\mathbb{R}, K)$. Επιπλέον η δράση αυτή επάγεται από την μονοπαραμετρική ομάδα $\{W^* U_o(t) W\}_{t\in\mathbb{R}}$, όπου $\{U_o(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ η ομάδα μετατόπισης στον $L^2(\mathbb{R}, K)$, ενώ το $\mathcal{N}$ είναι συνεχές nest και η άλγεβρα $\mathcal{N}''$ είναι ομοιόμορφης πολλαπλότητας $dim K$.

- Σαν συνέπεια του προηγούμενου αποτελέσματος προκύπτει ότι δύο SOT συνεχείς μονοπαραμετρικές ομάδες $\{U(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$, $\{V(s)\}_{s\in\mathbb{R}}$ ικανοποιούν τις σχέσεις Weyl :

$$V(s)U(t) = e^{ist}U(t)V(s)$$

αν και μόνο αν η $\{U(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ δρα με μετατόπιση ,δηλαδή $U(t)E_\lambda U(t)^* = E_{\lambda+t}$, πάνω στο φασματικό nest $\{O, E_\lambda, \lambda \in \mathbb{R}, I\}$ της $\{V(s)\}_{s\in\mathbb{R}}$. Το τελευταίο μας προσφέρει και μία νέα απόδειξη του θεωρήματος Stone - von Neumann.

1. ΑΒΕΛΙΑΝΕΣ ΑΛΓΕΒΡΕΣ VON NEUMANN.

Σε αυτή την παράγραφο δίνουμε την έννοια της αβελιανής άλγεβρας von Neumann και παρουσιάζουμε συνοπτικά ορισμένες ιδιότητες που σχετίζονται με αυτήν, με κριτήριο τις ανάγκες που έχει η εργασία μας.

1.1. Άλγεβρες von Neumann.

Στην άλγεβρα των τελεστών $B(H)$ χώρου Χίλμπερτ H ορίζουμε την <u>ισχυρή τοπολογία τελεστών</u> (SOT) και την <u>ασθενή τοπολογία τελεστών</u> (WOT) ως εξής:

Η SOT τοπολογία έχει ως βάση περιοχών του $T_o \in B(H)$ την οικογένεια $\{V(T_o, x_1, \dots, x_m, \varepsilon) / x_1, \dots, x_m \in H, \quad m \in \mathbb{N} \quad \varepsilon > 0\}$, όπου $V(T_o, x_1, \dots, x_m, \varepsilon) = \{T \in B(H) / \|(T - T_o)x_i\| < \varepsilon \ \text{για κάθε} \ i = 1, 2, \dots, m\}$. Ως προς την SOT τοπολογία, ένα δίκτυο (T_i) συγκλίνει στον τελεστή T_o, αν $\|T_i x - T_o x\| \to 0$ για κάθε $x \in H$

Η WOT τοπολογία έχει ως βάση περιοχών τον $T_o \in B(H)$ την οικογένεια $\{W(T_o, x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_m, \varepsilon) / x_1, \dots, x_m, \ y_1, \dots, y_m \in H, \quad m \in \mathbb{N}, \quad \varepsilon > 0\}$, όπου $W(T_o, x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_m, \varepsilon) = \{T \in B(H) / | <(T - T_o)x_i, y_i> | < \varepsilon \ \text{για κάθε} \ i = 1, 2, \dots, m\}$

Ως προς την WOT τοπολογία, ένα δίκτυο (T_i) συγκλίνει στον τελεστή (T_o) αν $\langle T_i x, y\rangle \to \langle T_o x, y\rangle$ για κάθε $x, y \in H$.

Είναι προφανές ότι η WOT τοπολογία είναι ασθενέστερη της SOT.

Αποδεικνύεται ότι μοναδιαία σφαίρα $(B(H))_1$ του $B(H)$ είναι WOT - συμπαγής. Ιδιαίτερα αν ο Η είναι διαχωρίσιμος η WOT τοπολογία στην $(B(H))_1$ είναι μετρικοποιήσιμη (βλέπε στο [4] πρόταση 11.4.).

Αν $\mathcal{S} \subseteq B(H)$ ορίζουμε $\mathcal{S}' = \{T \in B(H) / TS = ST \ \text{για κάθε} \ S \in \mathcal{S}\}$. Είναι εύκολο να διαπιστωθεί ότι η $\mathcal{S}'$ είναι SOT - κλειστή άλγεβρα με μονάδα.

Ως άλγεβρα <u>von Neumann</u> σε χώρο Χίλμπερτ Η ορίζεται να είναι ένα αυτοσυζυγές υποσύνολο $\mathcal{M}$ του $B(H)$, ώστε $\mathcal{M} = \mathcal{M}''$.

Κάθε άλγεβρα von Neumann είναι C^* - άλγεβρα με μονάδα. ([4]. 11.2.).

<u>Θεώρημα von Neumann</u> : Αν $\mathcal{M}$ αυτοσυζυγής υπάλγεβρα της $B(H)$ που περιέχει τον ταυτοτικό τελεστή, τότε: $\mathcal{M}'' = \mathcal{M}^{-SOT} = \mathcal{M}^{-WOT}$. ([4] , 11.6.).
Συμπεραίνουμε ότι μια αυτοσυζυγής άλγεβρα με μονάδα , είναι von Neumann αν είναι SOT ή WOT κλειστή.

Αποδεικνύεται ότι αν η $\mathcal{M}$ είναι άλγεβρα von Neumann που δρα σε διαχωρίσιμο χώρο H, τότε υπάρχει αριθμήσιμη οικογένεια $\mathcal{E}$ από προβολές της $\mathcal{M}$, ώστε $\mathcal{M} = \mathcal{E}'' = [\mathcal{E}]^{-SOT}$ (για την απόδειξη βλέπε στο [4], πόρισμα 11.11.).

1.2. Αβελιανές άλγεβρες von Neumann .

Μία αβελιανή άλγεβρα von Neumann που δεν περιέχεται σε άλλη ονομάζεται μεγιστική αβελιανή αυτοσυζυγής άλγεβρα (= **masa**).
Σε κάθε σ - πεπερασμένο χώρο μέτρου (X, μ) η πολλαπλασιαστική άλγεβρα $\mathcal{M}_\mu = \{M_f \,/\, f \in L^\infty(X,\mu)\}$, όπου $M_f : L^2(x,\mu) \to L^2(x,\mu) : g \to fg$, είναι masa ([4], πρόταση 11.1.).

Έστω $\mathcal{M}$ άλγεβρα von Neumann που δρα στο χώρο H και ξ∈H. Λέμε ότι το ξ **διαχωρίζει** την $\mathcal{M}$, ή αλλιώς το ξ είναι **διαχωρίζον διάνυσμα** για την $\mathcal{M}$, αν ισχύει η ισοδυναμία $M\xi \neq 0 \Leftrightarrow M \neq 0$ για κάθε $M \in \mathcal{M}$.

Λέμε ότι το ξ είναι **κυκλικό διάνυσμα** για την $\mathcal{M}$ αν ο χώρος $\mathcal{M}\xi$ είναι πυκνός στον H.

Αποδεικνύεται ότι κάθε αβελιανή άλγεβρα von Neumann $\mathcal{M}$ που δρα σε διαχωρίσιμο χώρο H, έχει διαχωρίζον διάνυσμα. Ιδιαίτερα αν η $\mathcal{M}$ είναι masa , το προηγούμενο διάνυσμα είναι κυκλικό γι' αυτήν. Ισχύει όμως και το αντίστροφο, αν η αβελιανή άλγεβρα von Neumann $\mathcal{M}$ έχει κυκλικό διάνυσμα , τότε είναι masa (βλέπε στο [4], 11.17.).

1.3. Παραγόμενες αβελιανές άλγεβρες von Neumann .

Χωρίς απόδειξη παρουσιάζουμε κάποιες κατασκευές αλγεβρών von Neumann από δεδομένες άλλες.

1.3.1. Αν $\mathcal{M}$ αβελιανή άλγεβρα von Neumann που δρά στον χώρο H και P προβολή που ανήκει στην $\mathcal{M}'$ τότε η άλγεβρα $\mathcal{M}|_{P(H)} = \{A|_{P(H)} \,/\, A \in \mathcal{M}\}$ είναι επίσης αβελιανή άλγεβρα **von Neumann** που δρα στον χώρο $P(H)$.

Αν επιπλέον η $\mathcal{M}$ είναι masa , τότε και η $\mathcal{M}|_{P(H)}$ είναι masa. Πράγματι, έστω $T \in \left(\mathcal{M}|_{P(H)}\right)'$. Θέτουμε $T_1 = T \oplus O \in B(H)$, δηλαδή $T_1 = \begin{pmatrix} T & O \\ O & O \end{pmatrix}$. Αν $\mathcal{M}_o = \mathcal{M}|_{P(H)}$, $\mathcal{M}_1 = \mathcal{M}|_{P^\perp(H)}$ τότε για κάθε $M \in \mathcal{M}$ έχουμε $M = \begin{pmatrix} M|_{P(H)} & O \\ O & M|_{P^\perp(H)} \end{pmatrix}$

και άρα : $T_1 M = \begin{pmatrix} TM|_{P(H)} & O \\ O & O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M|_{P(H)}T & O \\ O & O \end{pmatrix} = MT_1$.

Συνεπώς $T_1 \in \mathcal{M}'$ και αφού η $\mathcal{M}$ είναι masa $T_1 \in \mathcal{M}$ από το οποίο προκύπτει ότι $T \in \mathcal{M}|_{P(H)}$. Δείξαμε ότι $\left(\mathcal{M}|_{P(H)}\right)' \subseteq \mathcal{M}|_{P(H)}$ και επειδή η $\mathcal{M}|_{P(H)}$ είναι αβελιανή άλγεβρα von Neumann έχουμε ότι $\left(\mathcal{M}|_{P(H)}\right)' = \mathcal{M}|_{P(H)}$.

1.3.2. Έστω I σύνολο δεικτών, $\mathcal{M}_i, i \in I$ αβελιανή άλγεβρα von Neumann που δρα στον χώρο $H_i, i \in I$. Τότε η άλγεβρα $\bigoplus_{i\in I} \mathcal{M}_i = \left\{ \bigoplus_{i\in I} A_i \,/\, A_i \in \mathcal{M}_i,\ i \in I \right\}$ είναι επίσης αβελιανή άλγεβρα von Neumann που δρα στο χώρο $\bigoplus_{i\in I} H_i$ και ονομάζεται ευθύ άθροισμα των αλγεβρών $\mathcal{M}_i$. (βλέπε στο [9] σελ. 336).

1.3.3. Έστω $\mathcal{M}$ αβελιανή άλγεβρα von Neumann που δρα στον χώρο H και $n \in \{\infty, 1, 2, \ldots\}$ πληθικός αριθμός. Τότε ορίζεται η επίσης αβελιανή άλγεβρα von Neumann $\mathcal{M}^{(n)} = \left\{ A^{(n)} / A \in \mathcal{M} \right\}$ που δρα στο χώρο $H^{(n)}$. Είναι εύκολο να διαπιστωθεί ότι η απεικόνιση $\mathcal{M}^{(n)} \to \mathcal{M} : A^{(n)} \to A$ *είναι ισομετρικός* $*$-ισομορφισμός.

1.3.4. Έστω $\xi \in H$ διαχωρίζον διάνυσμα για την αβελιανή άλγεβρα von Neumann $\mathcal{M}$ και P η προβολή στον χώρο $\overline{\mathcal{M}\xi}$. Τότε η άλγεβρα $\mathcal{M}|_{P(H)}$ είναι masa, ενώ η απεικόνιση $\mathcal{M} \to \mathcal{M}|_{P(H)} : A \to A|_{P(H)}$ είναι $*$-ισομορφισμός (βλέπε στο [4] , απόδειξη του 11.14.).

1.3.5. Αν S μεταθετικό σύνολο τελεστών, P προβολή που ανήκει στην άλγεβρα S', τότε: $\left\{ S|_{P(H)} \right\}'' = \{S''\}|_{P(H)}$. Πράγματι παρατηρούμε ότι $S|_{P(H)} \subseteq \{S''\}|_{P(H)}$ και άρα $\left\{ S|_{P(H)} \right\}'' \subseteq \{S''\}|_{P(H)}$.

Έστω $S \in S''$, τότε υπάρχει δίκτυο $(A_i) \subseteq [S] : A_i \xrightarrow{SOT} S \Rightarrow$
$\Rightarrow A_i\big|_{P(H)} \xrightarrow{SOT} S\big|_{P(H)}$ και άρα : $S|_{P(H)} \in \left([S]|_{P(H)} \right)'' = \left(\left[S|_{P(H)} \right] \right)'' =$
$= \left\{ S|_{P(H)} \right\}''$. Συμπεραίνουμε ότι: $\left\{ S''|_{P(H)} \right\} \subseteq \left\{ S|_{P(H)} \right\}''$.

1.4. Προβολές και φασματικά μέτρα.

1.4.1. Έστω $(L, \leq)$ μερικά διατεταγμένο σύνολο και $X = \{ x_i \,/\, i \in I \} \subseteq L$.
Ένα στοιχείο z_o του L ονομάζεται ελάχιστο άνω φράγμα του X, αν :
$x_i \leq z_o$ για κάθε $i \in I$ και για κάθε $z \in L$, ώστε $x_i \leq z$ για κάθε $i \in I$ *είναι* $z_o \leq z$.

Συμβολίζουμε $z_o = \vee \{x_i / i \in I\}$ ή $z_o = \underset{i\in I}{\vee} x_i$. Ένα στοιχείο y_o του L ονομάζεται μέγιστο κάτω φράγμα του X, αν $y_o \leq x_i$ για κάθε $i \in I$ και για κάθε $y \in L$, ώστε $y \leq x_i$ για κάθε $i \in I$ είναι $y \leq y_o$. Συμβολίζουμε $y_o = \wedge\{x_i / i \in I\}$ ή $y_o = \underset{i\in I}{\wedge} x_i$.

Ιδιαίτερα συμβολίζουμε $x \vee y = \vee\{x,y\}$, $x \wedge y = \wedge\{x,y\}$. Αν για κάθε $x, y \in L$ υπάρχουν τα $x \vee y$, $x \wedge y$ το L ονομάζεται **σύνδεσμος**. Αν για κάθε υποσύνολο $\{x_i / i \in I\}$ του L υπάρχουν τα $\underset{i\in I}{\vee} x_i$, $\underset{i\in I}{\wedge} x_i$, το L ονομάζεται **πλήρης σύνδεσμος**.

1.4.2. Στο σύνολο των προβολών χώρου Χίλμπερτ H ορίζεται σχέση μερικής διάταξης ως εξής : αν P, Q προβολές που αντιστοιχούν στους κλειστούς υποχώρους $P(H)$, $Q(H)$ τότε $P \leq Q \Leftrightarrow P(H) \subseteq Q(H)$. Αποδεικνύεται ότι το σύνολο των προβολών με την σχέση $(\leq)$ γίνεται πλήρης σύνδεσμος.

Μάλιστα αν $\{Y_\alpha\}_{\alpha\in A}$ οικογένεια κλειστών υποχώρων του Η και $\{E_\alpha\}_{\alpha\in A}$ οι αντίστοιχες προβολές σ' αυτούς τότε $\underset{\alpha\in A}{\wedge} E_\alpha$ είναι η προβολή στον χώρο $\underset{\alpha\in A}{\cap} Y_a$ και $\underset{\alpha\in A}{\vee} E_a$ είναι η προβολή στον χώρο $\overline{[\underset{\alpha\in A}{\cup} Y_a]}$.

Για τις πράξεις "∨" , "∧" ισχύουν οι ακόλουθες ιδιότητες (βλέπε στο [9] παρ.2.5.).

(i) $\underset{\alpha\in A}{\vee}(I - E_\alpha) = I - \underset{\alpha\in A}{\wedge} E_\alpha$, $\underset{\alpha\in A}{\wedge}(I - E_\alpha) = I - \underset{\alpha\in A}{\vee} E_\alpha$.

(ii) Αν E, F είναι προβολές που μετατίθενται και αντιστοιχούν στους κλειστούς υποχώρους Y, Z, τότε ισχύουν :

- $E \vee F = E + F - EF$
- $E \wedge F = EF$
- $EF = 0 \Leftrightarrow Y \perp Z$.

(iii) Αν $\{E_\alpha\}_{\alpha\in A}$ αύξον (φθίνον) δίκτυο προβολών και $E = \underset{\alpha\in A}{\vee} E_\alpha$ $\left(E = \underset{\alpha\in A}{\wedge} E_a\right)$ τότε $E = SOT\text{-}lim\, E_a$.

(iv) Αν $\{E_\alpha\}_{\alpha\in A}$ οικογένεια καθέτων ανά δύο προβολών και $E = \underset{\alpha\in A}{\vee} E_a$, τότε
$$E = SOT\text{-}lim\left\{ \underset{\alpha\in J}{\Sigma} E_a / J \text{ πεπερασμένο υποσύνολο του } A \right\}.$$

(v) Αν E προβολή που αντιστοιχεί στον χώρο Y και $\{y_a\}_{\alpha\in A}$ ορθοκανονική βάση του Y, τότε:
$$E(x) = \| \; \| - lim\left\{ \underset{\alpha\in J}{\Sigma} < x, y_\alpha > y_\alpha \,/\, J \text{ πεπερασμένο υποσύνολο του } A\right\}$$ για κάθε x.

(Για τα προηγούμενα βλέπε στο [9] παρ. 2.5.).

1.4.3. Έστω $(X, \mathcal{A})$ μετρήσιμος χώρος και H χώρος Χίλμπερτ . Μία οικογένεια τελεστών $\{E(\Omega) / \Omega \in \mathcal{A}\}$ του H ονομάζεται <u>φασματικό μέτρο</u> αν ισχύουν:

(i) $E[\Omega]^* = E[\Omega]$

(ii) $E[\Omega_1 \cap \Omega_2] = E[\Omega_1] \circ E[\Omega_2]$

(iii) $E(\emptyset) = 0, \quad E[X] = I$

(iv) Για κάθε $x,y \in H$ η απεικόνιση $\mu_{x,y} : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ όπου $\mu_{x,y}(\Omega) = \langle E[\Omega]x, y\rangle$ είναι σ - προσθετική.

Συνέπεια των (i), (ii) είναι ότι η οικογένεια $\{E(\Omega)\}$ είναι οικογένεια προβολών.

Αν X μετρικός χώρος και μ σ-πεπερασμένο μέτρο Borel στο X, τότε εύκολα ελέγχεται πως η οικογένεια $\{M_{\chi_\Omega} / \Omega$ *Borel υποσύνολο του* $X\}$ είναι φασματικό μέτρο με τιμές στην πολλαπλασιαστική άλγεβρα $\mathcal{M}_\mu \subseteq B(L^2(X, \mu))$.

1.4.4. Για κάθε φασματικό μέτρο μπορούμε να ορίσουμε "ολοκλήρωμα" με τον ακόλουθο τρόπο:

Θεωρούμε στον μετρήσιμο χώρο $(X, \mathcal{A})$ το φασματικό μέτρο $\{E[\Omega] / \Omega \in \mathcal{A}\}$ με τιμές στους φραγμένους τελεστές χώρου Χίλμπερτ H.

Ορίζουμε την απεικόνιση Θ_o από το σύνολο των απλών μετρήσιμων συναρτήσεων στην $B(H)$: $\Theta_o(\Sigma\lambda_i \chi_{\Omega_i}) = \Sigma\lambda_i E[\Omega_i]$ που είναι $*-$ μορφισμός.

Λόγω της πυκνότητας των απλών συναρτήσεων στο χώρο των φραγμένων μετρήσιμων συναρτήσεων $L^\infty(X, \mathbb{C})$ η Θ_o επεκτείνεται σε $*-$ μορφισμό Θ από τον $L^\infty(X, \mathbb{C})$ στην άλγεβρα $B(H)$.

Αν $f \in L^\infty(X, \mathbb{C})$ συμβολίζουμε $\Theta(f) = \int f dE$. Μπορούμε να ελέγξουμε ότι ισχύουν: $\left\|\int f dE\right\| \leq \|f\|_\infty$ και $\left\langle \int f dE(x), y \right\rangle = \int f d\mu_{x,y}$ για κάθε $f \in L^\infty(X, \mathbb{C})$ και για κάθε $x, y \in H$. (βλέπε στο [4], 10.3.).

1.4.5. Έστω X σύνολο, Δ οικογένεια υποσυνόλων του X κλειστή ως προς τις πεπερασμένες τομές και $\mathcal{A} = \sigma(\Delta)$ η παραγόμενη σ-άλγεβρα. Αν E_1, E_2 φασματικά μέτρα σε χώρο Χίλμπερτ H που ορίζονται στην $\mathcal{A}$ και παίρνουν τις ίδιες τιμές πάνω στην Δ, τότε ταυτίζονται.

Απόδειξη:

Για κάθε $x \in H$, ορίζονται τα θετικά μέτρα $\mu^1_{x,x}(\Omega) = \langle E_1[\Omega]x, x\rangle$,

$\mu_{x,x}^{2}(\Omega)=\langle E_2[\Omega]x,x\rangle$. Τα μέτρα αυτά συμπίπτουν πάνω στην Δ, ενώ $\mu_{x,x}^{1}(X)=\|x\|^2=\mu_{x,x}^{2}(X)$. Επομένως συμπίπτουν παντού (βλέπε στο [6] πρόταση 2.8)

1.4.6. Έστω X,Y μετρικοί χώροι, $E[\cdot]$ φασματικό μέτρο που ορίζεται στα Borel υποσύνολα του X και $\Phi: Y \to X$ ομοιομορφισμός. Τότε εύκολα διαπιστώνεται πως η οικογένεια $\{E[\Phi(\Omega)]/\Omega \text{ Borel υποσύνολο του } Y\}$ είναι φασματικό μέτρο στην Borel σ- άλγεβρα του Y.

Αν $f: Y \to \mathbb{C}$ φραγμένη Borel μετρήσιμη συνάρτηση και $E_1[\Omega]=$ $=E[\Phi(\Omega)]$, τότε $\int f dE_1=\int f\circ\Phi^{-1}dE$. (Αυτό απορρέει από το θεώρημα 7.6. στο [6]).

1.5. Φασματικό θεώρημα φυσιολογικού τελεστού.

Οι αποδείξεις για τα επόμενα μπορούν να βρεθούν στο [4].

1.5.1. Φασματικό θεώρημα : Αν A φυσιολογικός τελεστής με φάσμα $\sigma(A)$ που δρα σε διαχωρίσιμο χώρο Χίλμπερτ Η, τότε υπάρχει μοναδικό φασματικό μέτρο $\{E_A[\Omega]/\Omega \text{ Borel υποσύνολο του } \sigma(A)\}$ με τιμές στην $B(H)$ ώστε $A=\int f_1 dE_A$ όπου $f_1(z)=z$ για κάθε $z\in\sigma(A)$.

Αποδεικνύεται ότι $\{A\}'=\{E_A[\Omega]/\Omega \text{ Borel υποσύνολο του } \sigma(A)\}'$. Το φασματικό μέτρο $E_A[\cdot]$ λέγεται φασματικό μέτρο του τελεστή A ή φασματικό μέτρο της άλγεβρας $\{A\}''$.

1.5.2. Έστω $C^*(A)$ η C^* - άλγεβρα που παράγεται από τον φυσιολογικό τελεστή A. Τότε ορίζεται ο **συναρτησιακός λογισμός** :

$$C(\sigma(A),\|\cdot\|_\infty) \to (C^*(A),\|\cdot\|)$$

$$f \to f(A) \quad \text{ως εξής :}$$

Σε κάθε πολυώνυμο $p(z,\bar{z})=\sum_{k,m} a_k b_m z^k \bar{z}^m$ αντιστοιχούμε τον τελεστή $p(A,A^*)=\sum_{k,m} a_k b_m A^k A^{*m}$. Παίρνοντας $\|\cdot\|_\infty$ όρια πολυωνύμων επεκτείνουμε στον $C(\sigma(A))$. Αποδεικνύονται ότι ο συναρτησιακός λογισμός είναι ισομετρικός $*-$ισομορφισμός και ότι $f(A)=\int f\, d_{E_A}$ για κάθε $f\in C(\sigma(A))$.

1.5.3. Ο συναρτησιακός λογισμός : $C(\sigma(A))\to C^*(A): f\to\int f dE_A$, μπορεί να επεκταθεί σε $*-$μορφισμό $L^\infty(\sigma(A),\mathbb{C})\to\{A\}'': f\to\int f dE_A$.

1.5.4. Αν A: φυσιολογικός και U: μοναδιαίος τελεστής, $B=UAU^*$ τότε το φασματικό μέτρο του B είναι : $\{UE_A[\Omega]U^* / \Omega \text{ Borel υποσύνολο του } \sigma(A)\}$.

Απόδειξη:

Παρατηρούμε ότι ο B είναι επίσης φυσιολογικός τελεστής αφού :

$BB^* = UAU^*UA^*U^* = UAA^*U^* = UA^*AU^* = UA^*U^*UAU^* = B^*B$.

Επίσης $\sigma(A) = \sigma(B)$, αφού $\lambda I - B = U(\lambda I - A)U^*$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{C}$.

Η οικογένεια $E[\cdot] = UE_A[\cdot]U^*$ ελέγχεται εύκολα πως είναι φασματικό μέτρο.

Παρατηρούμε ότι: $\int \chi_\Omega \, dE = U \int \chi_\Omega \, dE_A \, U^*$ για κάθε Borel Ω υποσύνολο του $\sigma(A)$. Επομένως παίρνοντας $\| \; \|_\infty$ όρια απλών συναρτήσεων, έχουμε ότι : $\int f dE = U \int f dE_A U^*$ για κάθε $f \in C(\sigma(A))$.

Θεωρούμε την συνάρτηση $f_1(z) = z$, $z \in \sigma(A)$ για την οποία έχουμε :

$\int f_1 dE = U \int f_1 dE_A^* U^* = UAU^* = B$.

Από την μοναδικότητα του φασματικού μέτρου συμπεραίνουμε ότι το $E[\cdot]$ είναι φασματικό μέτρο του B.

* Στο υπόλοιπο της εργασίας, όλοι οι χώροι Χίλμπερτ που αναφερόμαστε, θεωρούνται διαχωρίσιμοι.

2. Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΟΥ NEST.

2.1. Ορισμός.

Έστω H χώρος Χίλμπερτ. Μία αλυσίδα προβολών του H που περιέχει τις O, I ονομάζεται **nest** αν είναι πλήρης σύνδεσμος (1.4.1.).

Με άλλα λόγια ένα υποσύνολο $\mathcal{N}$ του συνόλου των προβολών του H που περιέχει τις προβολές O, I είναι nest αν είναι ολικά διατεταγμένο και για κάθε οικογένεια $\{P_i : i \in I\} \subseteq \mathcal{N}$ ισχύουν: $\bigvee_{i\in I} P_i \in \mathcal{N}$ και $\bigwedge_{i\in I} P_i \in \mathcal{N}$.

Στο εξής για δεδομένο nest $\mathcal{N}$, αν $N, M \in \mathcal{N}$ με $N \leq M$ συμβολίζουμε:

$$(N, M) = \{S \in \mathcal{N} : N < S < M\}$$

$$[N, M] = \{S \in \mathcal{N} : N \leq S \leq M\}$$

και ανάλογα τα $(N,M]$, $[N,M)$.

2.2. Παρατήρηση

Αν $\mathcal{N}$ nest στον χώρο Χίλπερτ Η, τότε και η οικογένεια προβολών $\mathcal{M} = \{I - N / N \in \mathcal{N}\}$ είναι επίσης nest στον Η.

Πράγματι για κάθε $N, M \in \mathcal{N}$ έχουμε $N \leq M \Leftrightarrow I - N \geq I - M$, επόμενα το $\mathcal{M}$ είναι ολικά διατεταγμένο σύνολο στο οποίο ανήκουν οι προβολές O, I.

Ενώ για κάθε υποοικογένεια $\{N_i / i \in I\}$ του N έχουμε $\bigvee_{i\in I}(I - N_i) = I - \bigwedge_{i\in I} N_i$, $\bigwedge_{i\in I}(I - N_i) = I - \bigvee_{i\in I} N_i$. Παρατηρούμε ότι το $\mathcal{M}$ είναι κλειστό στις πράξεις $\wedge, \vee$ και συνεπώς είναι πλήρης σύνδεσμος.

2.3. Παραδείγματα.

α) Έστω μ μη ατομικό μέτρο πιθανότητας ορισμένο στα Borel υποσύνολα του $[0,1]$, ώστε $supp(\mu) = [0,1]$.

Αν $\mathcal{N} = \{M_t / 0 \leq t \leq 1\}$ όπου $M_t = M_{\chi_{[0,t]}}$ η οικογένεια προβολών στον χώρο Χίλμπερτ $L^2(\mu)$, τότε το $\mathcal{N}$ είναι nest και η άλγεβρα $\mathcal{N}''$ ισούται με την πολλαπλασιαστική άλγεβρα $\mathcal{M}_\mu$.

Απόδειξη:

Ισχυρισμός: Η γραμμική θήκη των κλιμακωτών συναρτήσεων είναι πυκνή στον $(L^2[0,1], \nu)$, όπου ν πεπερασμένο μέτρο Borel στο $[0,1]$. Αρκεί να δείξουμε ότι είναι πυκνή στο σύνολο $C[0,1]$ των συνεχών συναρτήσεων. (Βλέπε στο [6] πρόταση 11.26.).

Έστω $\varepsilon > 0$ και $f \in C[0,1]$. Τότε η f είναι ομοιόμορφα συνεχής, άρα υπάρχει $\delta > 0$ ώστε για κάθε χ, ψ με $|x-\psi| < \delta$ να είναι $|f(x)-f(\psi)| < \varepsilon$.

Θεωρούμε διαμέριση $P = \{t_o = 0 < t_1 < \ldots < t_n = 1\}$ λεπτότητας μικρότερης του δ.

Αν $M_i = \sup\limits_{t_{i-1} \le t \le t_i} f(t)$, i = 1,2, … , n και $g = \sum\limits_{i=1}^{n} M_i \, \chi_{[t_{i-1},\, t_i]}$ έχουμε ότι

$|f(x) - g(x)| < \varepsilon$ για κάθε $x \in [0,1]$. Επομένως $\|g-f\|_2^2 = \int |g(x) - f(x)|^2 \, d\nu(x) \le$ $\le \varepsilon^2 \cdot \nu([0,1])$ και άρα ο ισχυρισμός ισχύει.

Από τον ισχυρισμό έχουμε ότι αν $f_1(t) = 1$ για κάθε $t \in [0,1]$ $\overline{[M_t(f_1) / 0 \le t \le 1]} = \overline{[\chi_{[0,\,t]} / 0 \le t \le 1]} = L^2[0,1]$ και επομένως η άλγεβρα $\mathcal{N}''$ είναι masa αφού η συνάρτηση f_1 είναι κυκλικό διάνυσμα γι' αυτήν.

Επίσης επειδή η $\mathcal{N}''$ περιέχεται στην masa $\mathcal{M}_\mu$ έχουμε ότι $\mathcal{N}'' = \mathcal{M}_\mu$.

Θα δείξουμε ότι το $\mathcal{N}$ είναι nest. Είναι προφανές ότι πρόκειται για ολικά διατεταγμένη οικογένεια προβολών και επομένως αφού η f_1 είναι κυκλικό διάνυσμα έχουμε:

$$\mathrm{M}_t < \mathrm{M}_s \Leftrightarrow \langle \mathrm{M}_t(f_1), f_1 \rangle < \langle \mathrm{M}_s(f_1), f_1 \rangle \Leftrightarrow \mu[0,t] < \mu[0,s] \Leftrightarrow t < s .$$

Το $\mathcal{N}$ είναι πλήρης σύνδεσμος: Αν $(M_t)_{t \in A}$, $A \subseteq [0,1]$ έχουμε ότι $\vee \{M_t / t \in A\} = M_{\sup A}$ και $\wedge \{M_t / t \in A\} = M_{\inf A}$ που είναι προβολές που ανήκουν στο $\mathcal{N}$.

<u>Παρατήρηση</u>: Λόγω της ταύτισης των αλγεβρών $\mathcal{N}''$, $\mathcal{M}_\mu$ μπορούμε να συμπεράνουμε ότι για κάθε $f \in L^\infty(\mu)$, υπάρχει δίκτυο από γραμμικούς συνδυασμούς στοιχείων του $\mathcal{N}$, δηλαδή δίκτυο από κλιμακωτές συναρτήσεις $(g_i)_i$ ώστε $M_{g_i} \xrightarrow{SOT} M_f$.

<u>Σημείωση</u>: Στο προηγούμενο παράδειγμα όταν το μέτρο είναι το μέτρο **Lebesgue** στην Borel σ- άλγεβρα του [0,1], το nest $\mathcal{N}$ ονομάζεται nest του **Volterra**.

β) Έστω (P_n) αύξουσα ακολουθία προβολών σε χώρο Χίλμπερτ H, ώστε $\dim P_n < \infty$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $\overline{\cup P_n(H)} = H$, δηλαδή ισοδύναμα $\bigvee\limits_{n \in \mathbb{N}} P_n = I$. Τότε η οικογένεια $\mathcal{N}_1 = \{P_n / n \in \mathbb{N}\} \cup \{O, I\}$ είναι nest.

Πράγματι αν $M \subseteq \mathbb{N}$ τότε: $\bigwedge\limits_{n \in M} P_n = P_{\min M} \in \mathcal{N}_1$. Αν το M είναι πεπερασμένο σύνολο έχουμε: $\bigvee\limits_{n \in M} P_n = P_{max M}$ και αν το M είναι άπειρο, τότε: $\bigvee\limits_{n \in M} P_n(x) = \lim\limits_{n \in M} P_n(x) = \lim\limits_{n \in \mathbb{N}} P_n(x) = x$ και συνεπώς $\bigvee\limits_{n \in M} P_n = I$.

γ) Έστω $\{q_n / n \in \mathbb{N}\}$ μία αρίθμηση των ρητών του $(0,1]$. Τότε ορίζουμε το Borel μέτρο πιθανότητας $\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \delta_{\{q_n\}}$.

Θεωρούμε τον χώρο Χίλμπερτ $(L^2(0,1],\mu)$, στον οποίο ορίζεται η οικογένεια προβολών: $\mathcal{N}_2 = \left\{Q_t^- = M_{\chi(0,t)}, Q_t^+ = M_{\chi(0,t]},\ 0 \le t \le 1\right\}$. Θα δείξουμε ότι το $\mathcal{N}_2$ είναι nest.

Παρατηρούμε ότι: $Q_t^+ < Q_s^+ \Leftrightarrow t < s$ και $Q_t^+ = Q_s^+ \Leftrightarrow t = s$.

$Q_t^- < Q_s^- \Leftrightarrow t < s$ και $Q_t^- = Q_s^- \Leftrightarrow t = s$.

$Q_t^- < Q_s^+ \Leftrightarrow t < s$ ή $t = s \in Q \cap (0,\ 1]$.

$Q_t^- = Q_s^+ \Leftrightarrow s = t \in (0,1] \setminus Q$.

$Q_t^+ < Q_s^- \Leftrightarrow t < s$.

Επομένως το $\mathcal{N}_2$ είναι μία ολικά διατεταγμένη οικογένεια προβολών στον $L^2(\mu)$.
Έστω η οικογένεια $\{Q_{t_i}^+ / i \in I\}$ θα δείξουμε ότι: $\vee_{i\in I} Q_{t_i}^+ \in \mathcal{N}_2$. Υποθέτουμε ότι: $sup\{t_i: i \in I\} = t_o$.
Αν $t_o \in \{t_i / i \in I\}$ είναι προφανές ότι $\vee_{i\in I} Q_{t_i}^+ = Q_{t_o}^+$. Έστω ότι $t_o \notin \{t_i : i \in I\}$.
Τότε για κάθε $i \in I$ $Q_{t_i}^+ < Q_{t_o}^-$ και άρα $\vee_{i\in I} Q_{t_i}^+ \le Q_{t_o}^-$. Ενώ αν $Q_{t_i}^+ \le Q_s^+$ για κάθε i , τότε $t_i \le s$ για κάθε i και άρα $t_o \le s \Rightarrow Q_{t_o}^- \le Q_s^+$. Ανάλογα αν $Q_{t_i}^+ \le Q_s^-$ για κάθε i τότε $t_i \le s$ για κάθε i και άρα $t_o \le s \Rightarrow Q_{t_o}^- \le Q_s^-$. Επομένως $\vee_{i\in I} Q_{t_i}^+ = Q_{t_o}^-$.

Έστω η οικογένεια $\{Q_{s_j}^- / j \in J\}$ θα δείξουμε ότι : $\vee Q_{s_j}^- \in \mathcal{N}_2$.
Υποθέτουμε ότι: $sup\{s_j / j \in J\} = s_o$. Αν $s_o \in \{s_j / j \in J\}$ είναι προφανές ότι $\vee Q_{s_j}^- = Q_{s_o}^-$.
Έστω ότι $s_o \notin \{s_j / j \in J\}$. Τότε για κάθε $j \in J$ ισχύει $Q_{s_j}^- < Q_{s_o}^-$ και άρα $\vee_{j\in J} Q_{s_j}^- \le Q_{s_o}^-$, ενώ αν $Q_{s_j}^- \le Q_t^+$ για κάθε j, τότε $s_j \le t$ για κάθε j και άρα $s_o \le t \Rightarrow Q_{s_o}^- \le Q_t^+$.
Ανάλογα αν $Q_{s_j}^- \le Q_t^-$ για κάθε j, *τότε* $s_j \le t$ για κάθε j και άρα $s_o \le t \Rightarrow Q_{s_o}^- \le Q_t^-$. Επομένως $\vee_{j\in J} Q_{s_j}^- = Q_{s_o}^-$.

Έστω τώρα $\{Q_{t_i}^+,\ Q_{s_j}^- \ /\ i \in I,\ j \in J\}$ οικογένεια προβολών. Τότε $\vee_{i,j}\left\{Q_{t_i}^+, Q_{s_j}^- / i \in I,\ j \in J\right\} = \left(\vee_{i\in I} Q_{t_i}^+\right) \vee \left(\vee_{j\in J} Q_{s_j}^-\right)$ ανήκει στο $\mathcal{N}_2$ από τα προηγούμενα .

Ανάλογα αποδεικνύεται ότι $\wedge_{i,j} \left\{Q_{t_i}^+, Q_{s_j}^- / i \in I,\ j \in J\right\} \in \mathcal{N}_2$.

2.4. Ορισμοί.

Έστω $\mathcal{N}$ nest και $N \in \mathcal{N}$ τότε :

α) Ορίζουμε $N_- = \vee \{ M \in \mathcal{N} / M < N \}$. Επειδή το $\mathcal{N}$ είναι πλήρης σύνδεσμος, έχουμε ότι $N_- \in \mathcal{N}$.

β) Αν $N_- \neq N$ τότε η προβολή $N - N_-$ ονομάζεται **άτομο** του nest.

Παρατηρούμε ότι δύο διαφορετικά άτομα είναι κάθετα μεταξύ τους, αφού αν M, $N \in \mathcal{N}$: $M \neq N$ είναι $(M - M_-)\cdot(N - N_-) = 0$. Επομένως το πολύ αριθμήσιμο πλήθος ατόμων μπορεί να έχει ένα nest σε διαχωρίσιμο χώρο. Επίσης ένα ατομο ανήκει στο nest αν και μόνο αν $N_- = 0$. Πράγματι αν $N_- \neq 0$, τότε $N - N_- < N$. Αν το $N - N_-$ ήταν στοιχείο του nest, θα προέκυπτε ότι $N - N_- \leq N_-$, τότε όμως $N = (N - N_-) + N_- \leq N_-$. Άτοπο.

γ) Αν το nest δεν έχει άτομα ονομάζεται **συνεχές** nest.

δ) Αν τα άτομα παράγουν τον χώρο που δρα το nest, δηλαδή $\vee \{N - N_- / N \in \mathcal{N}\} = I$, τότε το nest ονομάζεται **ατομικό**.

2.5. Παραδείγματα.

α) Το nest στο παράδειγμα 2.3.α. είναι συνεχές διότι, αν $M_t \in \mathcal{N}$ τότε:
$(M_t)_- = \vee \{M_s / M_s < M_t\} = \vee \{M_s / s < t\} = M_{\sup\{s/s<t\}} = M_t$.

β) Στο nest του παραδείγματος 2.3.β οι προβολές $P_n - P_{n-1}$ είναι άτομα. Ενώ το ίδιο το nest είναι ατομικό, αφού $\vee \{P_n - P_{n-1} / n \in \mathbb{N}\} = I$.

γ) Στο παράδειγμα 2.3.γ είναι $(Q_t^+)_- = Q_t^-$, $(Q_t^-)_- = Q_t^-$ για κάθε $t \in (0,1]$. Ενώ $Q_t^- \neq Q_t^+$ αν και μόνο αν t ρητός του $(0,1]$. Συνεπώς τα άτομα του nest είναι ακριβώς οι προβολές $\left\{Q_t^+ - Q_t^- / t \in (0,1] \cap Q\right\}$.

2.6. Ορισμός: Ένα nest $\mathcal{N}$ ονομάζεται **μεγιστικό** αν δεν περιέχεται σε άλλο nest. Από το λήμμα του ZORN για δεδομένο nest μπορούμε να έχουμε μεγιστικό nest που το περιέχει.

2.7. Πρόταση: Έστω $\mathcal{N}$ nest σε χώρο Χίλμπερτ Η.

α) Αν το $\mathcal{N}$ είναι συνεχές nest είναι μεγιστικό.

β) Αν το $\mathcal{N}$ περιέχει άτομα, τότε είναι μεγιστικό αν και μόνο αν τα άτομά του είναι μονοδιάστατα.

Απόδειξη:

α) Έστω P προβολή συγκρίσιμη με κάθε στοιχείο του $\mathcal{N}$.
Θέτουμε $\mathcal{N}_o=\{N\in\mathcal{N} \;/ N\leq P\}$, $N_o=\vee\mathcal{N}_o$, $\mathcal{N}_1=\{N\in\mathcal{N} \;/ N\geq P\}$, $N_1=\wedge\mathcal{N}_1$.
Προφανώς : N_o, $N_1\in\mathcal{N}$ και $N_o\leq P\leq N_1$. Για κάθε $M\in\mathcal{N}$ έχουμε $M\in\mathcal{N}_o$ και άρα $M\leq N_o$ ή $M\in\mathcal{N}_1$ και άρα $M\geq N_1$.
Επόμενα αν $M\in\mathcal{N}$ με $M<N_1$, τότε $M\leq N_o$ και συνεπώς $(N_1)_-\leq N_o$.
Όμως επειδή το nest είναι συνεχές έχουμε ότι : $(N_1)_-=N_1$. Άρα
$N_1\leq N_o\leq P\leq N_1$ από το οποίο προκύπτει ότι $N_1=P\in\mathcal{N}$.

β) Είναι προφανές ότι αν το $\mathcal{N}$ περιέχει άτομα και είναι μεγιστικό αυτά είναι μονοδιάστατα. Έστω τώρα $\mathcal{N}$ nest με μονοδιάστατα άτομα και P προβολή συγκρίσιμη με κάθε στοιχείο του $\mathcal{N}$.
Ορίζοντας τα N_o, N_1 όπως και στο (α) έχουμε όπως πριν ότι : $N_o\leq P\leq N_1$ και $(N_1)_-\leq N_o$.
Αν $N_o=N_1$ τότε $P=N_1\in\mathcal{N}$.
Αν $N_o<N_1$ τότε $(N_1)_-=N_o$ και επομένως $\dim(N_1-N_o)=1$. Οπότε $P=N_o$ ή $P=N_1$.
Τελικά το nest δεν μπορεί να επεκταθεί σε μεγαλύτερο.

2.8. Παραδείγματα.

α) Το nest στο 2.3.β. είναι μεγιστικό αν και μόνο αν $\dim P_n=n$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$.

β) Το nest στο παράδειγμα 2.3.γ. είναι μεγιστικό. Πράγματι όπως είδαμε στο 2.5.γ. τα άτομά του είναι οι προβολές: $Q_t^+-Q_t^-=M_{\chi_{\{t\}}}\neq 0,\, t\in Q\cap(0,1]$, όπου
$M_{\chi_{\{t\}}}:L^2(\mu)\to L^2(\mu)$ ώστε: $f\to f(t)\cdot\chi_{\{t\}}$.

Επομένως $M_{\chi_{\{t\}}}(L^2(\mu))=[\,\chi_{\{t\}}\,]$ και άρα οι προβολές $Q_t^+-Q_t^-$ είναι μονοδιάστατες για κάθε ρητό $t\in(0,1]$. Επίσης είναι και ατομικό αφού: $\overline{[\chi_{q_n}/n\in\mathbb{N}]}=L^2(\mu)$

2.9. Λήμμα: Αν $(P_i)_{i\in I}$ οικογένεια προβολών μίας αβελιανής άλγεβρας $V-N$, τότε υπάρχει ακολουθία $\{i_n/n\in\mathbb{N}\}\subseteq I$, ώστε $\vee_{i\in I}P_i=\vee_{n=1}^{\infty}P_{i_n}$ $\left(\wedge_{i\in I}P_i=\wedge_{n=1}^{\infty}P_{i_n}\right)$. Αν επιπλέον οι προβολές ανήκουν σε nest, τότε υπάρχει αύξουσα (φθίνουσα) υπακολουθία $(P_{i_{n_m}})$, ώστε $\vee_{i\in I}P_i=\vee_{m=1}^{\infty}P_{i_{n_m}}$ $\left(\wedge_{i\in I}P_i=\wedge_{m=1}^{\infty}P_{i_{n_m}}\right)$.

Απόδειξη :

Για κάθε $F \subseteq I$ θέτουμε $Q_F = \vee_{i \in F} P_i$. Είναι φανερό ότι:
$\vee_{i \in I} P_i = \vee \{Q_F / F$ πεπερασμένο υποσύνολο του $I\}$.

Έστω x διαχωρίζον διάνυσμα της άλγεβρας που ανήκουν οι προβολές, τότε για κάθε $k \in \mathbb{N}$, υπάρχει $F_k \subseteq I$ πεπερασμένο, ώστε $\left\| \vee_{i \in I} P_i(x) - Q_{F_k}(x) \right\| < \frac{1}{k}$.

Θέτουμε $F = \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k$, τότε $Q_{F_k} \leq Q_F \leq \vee_{i \in I} P_i$ και συνεπώς έχουμε $\left\| \vee_{i \in I} P_i(x) - Q_F(x) \right\| < \frac{1}{k}$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Επειδή το x είναι διαχωρίζον διάνυσμα έχουμε ότι: $Q_F = \vee_{i \in I} P_i$.

Έστω $F = \{i_n / n \in \mathbb{N}\}$, τότε $Q_F = \vee_{n=1}^{\infty} P_{i_n}$ και άρα $\vee_{i \in I} P_i = \vee_{n=1}^{\infty} P_{i_n}$.

Ανάλογα αποδεικνύεται ότι υπάρχει ακολουθία (P_{i_n}) ώστε $\wedge_{i \in I} P_i = \wedge_{n=1}^{\infty} P_{i_n}$.

Έστω $(P_i)_{i \in I}$ προβολές σε nest $\mathcal{N}$, τότε για κάθε m, $\vee_{n=1}^{m} P_{i_n} = P_{i_{n_m}}$ για $i_{n_m} \in \{i_1, \ldots, i_m\}$. Η ακολουθία $(P_{i_{n_m}})$ είναι αύξουσα και ισχύει $\vee_{m=1}^{\infty} P_{i_{n_m}} = \vee_{m=1}^{\infty} \vee_{n=1}^{m} P_{i_n} = \vee_{n=1}^{\infty} P_{i_n} = \vee_{i \in I} P_i$.

Ανάλογα μπορούμε να βρούμε φθίνουσα υπακολουθία $(P_{i_{n_m}})$, ώστε : $\wedge_{i \in I} P_i = \wedge_{m=1}^{\infty} P_{i_{n_m}}$.

2.10. Πρόταση: Έστω $\mathcal{N}$ nest σε χώρο Χίλμπερτ Η.

α) Αν P προβολή της άλγεβρας $\mathcal{N}'$, τότε η οικογένεια $\mathcal{N}|_P = \left\{ N|_{P(H)} / N \in \mathcal{N} \right\}$ είναι nest που δρα στον χώρο $P(H)$.

β) Αν $Q = \vee \{N - N_- / N \in \mathcal{N}\}$, τότε το $\mathcal{N}|_{I-Q}$ είναι συνεχές nest ενώ το $\mathcal{N}|_Q$ είναι ατομικό nest, του οποίου τα άτομα είναι τα $N|_{Q(H)} - N_-|_{Q(H)}$ όπου $N - N_-$ άτομο του $\mathcal{N}$.

Απόδειξη :

α) Επειδή η προβολή P μετατίθεται με κάθε στοιχείο του nest $\mathcal{N}$, τότε η οικογένεια $\mathcal{N}|_P$ είναι οικογένεια προβολών που δρούν στον χώρο $P(H)$. Επίσης επειδή για τυχόντα $N, M \in \mathcal{N}$: $N \leq M$ έχουμε $N|_{P(H)} \leq M|_{P(H)}$ η $\mathcal{N}|_P$ είναι αλυσίδα προβολών στον $P(H)$.

Έστω $\{N_i|_{P(H)} / i \in I\}$ υποοικογένεια της $\mathcal{N}|_P$. Θα αποδείξουμε ότι:

$\bigvee_{i\in I}\left(N_i|_{P(H)}\right) = \left(\bigvee_{i\in I} N_i\right)\Big|_{P(H)}$ και $\bigwedge_{i\in I}\left(N_i|_{P(H)}\right) = \left(\bigwedge_{i\in I} N_i\right)\Big|_{P(H)}$ και άρα αφού οι προβολές $\bigvee_{i\in I} N_i$, $\bigwedge_{i\in I} N_i$ είναι στοιχεία του $\mathcal{N}$, τότε και τα $\bigvee_{i\in I}\left(N_i|_{P(H)}\right)$, $\bigwedge_{i\in I}\left(N_i|_{P(H)}\right)$ είναι στοιχεία του $\mathcal{N}|_P$.

Από το 2.9 υπάρχει αύξουσα ακολουθία $\left(N_{i_n}\right)_{n=1}^{\infty}$ ώστε $\bigvee_{i\in I} N_i = \bigvee_{n=1}^{\infty} N_{i_n}$. Τότε για κάθε $x \in P(H)$ έχουμε: $\left(\bigvee_{i\in I} N_i\right)\Big|_{P(H)}(x) = \left(\bigvee_{n=1}^{\infty} N_{i_n}\right)\Big|_{P(H)}(x) = \left(\bigvee_{n=1}^{\infty} N_{i_n}\right)(x) =$

$$= \lim_n N_{i_n}(x) = \lim_n N_{i_n}\Big|_{P(H)}(x) = \left(\bigvee_{n=1}^{\infty} N_{i_n}\Big|_{P(H)}\right)(x).$$

Επομένως $\left(\bigvee_{i\in I} N_i\right)\Big|_{P(H)} \leq \bigvee_{n=1}^{\infty} N_{i_n}\Big|_{P(H)} \leq \bigvee_{i\in I} N_i\Big|_{P(H)}$. Επίσης για κάθε $i \in I$ έχουμε $N_i|_{P(H)} \leq \left(\bigvee_{i\in I} N_i\right)\Big|_{P(H)}$. Επομένως $\bigvee_{i\in I} N_i\Big|_{P(H)} \leq \left(\bigvee_{i\in I} N_i\right)\Big|_{P(H)}$.

Από τις προηγούμενες ανισότητες έχουμε: $\left(\bigvee_{i\in I} N_i\right)\Big|_{P(H)} = \left(\bigvee_{i\in I} N_i\right)\Big|_{P(H)}$.

Από τις ιδιότητες του συνδέσμου των προβολών και αξιοποιώντας την προηγούμενη απόδειξη, έχουμε :

$$\bigwedge_{i\in I}\left(N_i|_{P(H)}\right) = \bigwedge_{i\in I}\left(I|_{P(H)} - (I - N_i)|_{P(H)}\right) = I|_{P(H)} - \bigvee_{i\in I}\left((I - N_i)|_{P(H)}\right) =$$

$$= I|_{P(H)} - \left(\bigvee_{i\in I}(I - N_i)\right)\Big|_{P(H)} = \left(I - \bigvee_{i\in I}(I - N_i)\right)\Big|_{P(H)} = \left(\bigwedge_{i\in I}(I - (I - N_i))\right)\Big|_{P(H)} =$$

$$= \left(\bigwedge_{i\in I} N_i\right)\Big|_{P(H)}.$$

Όπου στην τρίτη ισότητα χρησιμοποιήσαμε ότι η οικογένεια $\{I-N / N \in \mathcal{N}\}$ είναι nest (2.2.).

β) Επειδή η Q είναι προβολή στην άλγεβρα $\mathcal{N}''$ τα $\mathcal{N}|_{I-Q}$, $\mathcal{N}|_Q$ είναι nests από το (α).

- Θα δείξουμε ότι το $\mathcal{N}\big|_{I-Q}$ είναι συνεχές nest. Έστω ότι υπάρχει $N \in \mathcal{N}$ ώστε $\left(N|_{Q^\perp(H)}\right)_- < N|_{Q^\perp(H)}$. Τότε αν $M|_{Q^\perp(H)} = \left(N|_{Q^\perp(H)}\right)_-$ έχουμε ότι $M<N$ και για κάθε $S: M \leq S \leq N$ ισχύει $M|_{Q^\perp(H)} \leq S|_{Q^\perp(H)} \leq N|_{Q^\perp(H)}$ και συνεπώς $M|_{Q^\perp(H)} = S|_{Q^\perp(H)}$ ή $S|_{Q^\perp(H)} = N|_{Q^\perp(H)}$.

Ισοδύναμα προς το τελευταίο έχουμε ότι για κάθε $S: M \leq S \leq N$ ισχύουν: $S - M \leq Q$ ή $N - S \leq Q$.

Θέτουμε : $A = \{ S \in [M,N] / S - M \leq Q \}$

$B = \{ S \in [M,N] / N - S \leq Q \}$

και τότε φανερά $[M,N] = A \cup B$.

Παρατηρούμε ότι τα A, B είναι ξένα σύνολα διότι αν $S \in A \cap B$, τότε $M|_{Q^\perp(H)} = S|_{Q^\perp(H)} = N|_{Q^\perp(H)}$ που είναι άτοπο.

Θέτουμε $S_A = \vee\{S / S \in A\}$, $S_B = \wedge\{S / S \in B\}$. Τότε ισχύουν :
$S_A \in A$, $S_B \in B$, $A = [M, S_A]$, $B = [S_B, N]$, $(S_B)_- = S_A$.
Πράγματι αφού $S_A \in A$ από το λήμμα 2.9. υπάρχει αύξουσα ακολουθία $(S_n^A) \subseteq A$, ώστε $\bigvee_{n=1}^{\infty} S_n^A = S_A$.
Ανάλογα υπάρχει $(S_n^B) \subseteq B$, φθίνουσα ακολουθία ώστε $\bigwedge_{n=1}^{\infty} S_n^B = S_B$. Τότε :
$S_A(x) - M(x) = \lim_n S_n^A(x) - M(x) = \lim_n \left(S_n^A(x) - M(x)\right) \in Q(H)$ και $N(x) - S_B(x) =$
$= N(x) - \lim_n S_n^B(x) = \lim_n \left(N(x) - S_n^B(x)\right) \in Q(H)$ για κάθε $x \in H$, οπότε:
$S_A - M \leq Q$, $N - S_B \leq Q$ και άρα $S_A \in A$, $S_B \in B$.

Αν $M \leq S \leq S_A$ τότε $S - M \leq S_A - M \leq Q$ και άρα $S \in A$, οπότε $A = [M, S_A]$.
Ανάλογα $B = [S_B, N]$.

Τότε αφού $[M,N] = [M, S_A] \cup [S_B, N]$ και $S_A \neq S_B$ έχουμε ότι $(S_B)_- = S_A$.

Παρατηρούμε ότι: $N - M = (N - S_B) + (S_B - S_A) + (S_A - M)$ και
$N - S_B \leq Q$, $S_A - M \leq Q$. Ενώ $S_B - S_A \leq Q$ αφού το $S_B - S_A$ είναι άτομο.
Συμπεραίνουμε ότι $N - M \leq Q$ από το οποίο $N|_{Q^\perp(H)} = M|_{Q^\perp(H)}$ που είναι άτοπο.

- Θα δείξουμε ότι το $\mathcal{N}|_Q$ έχει άτομα τα : $N|_{Q(H)}-N_-|_{Q(H)}$ όπου $N-N_-$ άτομο του $\mathcal{N}$.

Έστω $N \in \mathcal{N}$ ώστε $\left(N|_{Q(H)}\right)_- < N|_{Q(H)}$ και $M < N : M|_{Q(H)} = \left(N|_{Q(H)}\right)_-$.
Ακολουθώντας την αποδεικτική διαδικασία στην περίπτωση του $\mathcal{N}|_{I-Q}$ έχουμε ότι $[M,N]=[M,S]\cup[T,N]$ ώστε $S \neq T$ και άρα $S = T_-$, ενώ $M|_{Q(H)}= S|_{Q(H)}$ και $T|_{Q(H)}= N|_{Q(H)}$. Επομένως $\left(N|_{Q(H)}\right)_- = T_-|_{Q(H)}$ και $N|_{Q(H)}= T|_{Q(H)}$ όπου $T-T_-$ άτομο του $\mathcal{N}$.

Αντίστροφα, αν $T-T_-$ άτομο του $\mathcal{N}$ τότε για κάθε $S<T$ έχουμε ότι $S|_{Q(H)} \leq T_-|_{Q(H)} \leq T|_{Q(H)}$. Όμως $T_-|_{Q(H)} \neq T|_{Q(H)}$ διότι διαφορετικά θα ήταν $0 \neq T-T_- \leq Q^{\perp}$ που είναι άτοπο.
Επομένως $\left(T|_{Q(H)}\right)_- = T_-|_{Q(H)}$.

Το $\mathcal{N}|_Q$ είναι ατομικό nest:
$\vee\left\{\left(N|_{Q(H)}\right)-\left(N|_{Q(H)}\right)_- / N \in \mathcal{N}\right\}=\vee\left\{N|_{Q(H)} - N_-|_{Q(H)}/N \in \mathcal{N}\right\}=$
$\vee\left\{N - N_-|_{Q(H)}/N \in \mathcal{N}\right\}=\left(\vee\left\{N - N_-/N \in \mathcal{N}\right\}\right)|_{Q(H)}= Q|_{Q(H)} = I|_{Q(H)}$.

2.11. Πρόταση: Έστω $\mathcal{M}$ αβελιανή άλγεβρα $V-N$ που δρα σε χώρο Χίλμπερτ H. Τότε υπάρχει nest $\mathcal{N}$ ώστε $\mathcal{N}''= \mathcal{M}$.

Απόδειξη:

Έστω $\mathcal{P}$ αριθμήσιμη οικογένεια προβολών της $\mathcal{M}$, ώστε $\mathcal{P}''= \mathcal{M}$. Αν $\mathcal{P} = \{P_1, P_2, \ldots\}$, θα κατασκευάσουμε ολικά διατεταγμένα σύνολα προβολών (F_n) ώστε $F_n \subseteq \mathcal{M}$, $\{O,I\}\subseteq F_1 \subseteq F_2 \subseteq \ldots$ και $P_n \in [F_n]$ για κάθε n.

Έστω $F_1 = \{O, P_1, I\}$ και έχουμε κατασκευάσει $F_n = \{E_o = 0 < E_1 < \ldots \ldots < E_m = I\}$ με $P_n \in [F_n]$. Τότε $E_r \leq E_r + (E_{r+1}-E_r)P_{n+1} \leq E_{r+1}$ για $r = 0,1,\ldots,m-1$ διότι $E_{r+1}-E_r \geq (E_{r+1}-E_r)P_{n+1}$ από το οποίο $E_{r+1} \geq \geq (E_{r+1}-E_r)P_{n+1} + E_r$.

Ορίζουμε $F_{n+1} = F_n \cup \{E_r + (E_{r+1}-E_r)P_{n+1} \;/ r = 0,1,\ldots,m-1\}=$
$\{E_o = 0 \leq E_o + (E_1 - E_o)P_{n+1} \leq E_1 \leq E_1 + (E_2 - E_1)P_{n+1} \leq E_2 \leq \ldots \leq E_{m-1} + + (E_m - E_{m-1})P_{n+1} \leq E_m = I\}$.

Τότε η $P_{n+1} = \sum_{r=0}^{m+1}(E_{r+1}-E_r)P_{n+1}$ είναι προβολή που ανήκει στην γραμμική θήκη του $[F_{n+1}]$ αφού $(E_{r+1}-E_r)P_{n+1} = (E_r + (E_{r+1}-E_r)P_{n+r}) - E_r$.

Το σύνολο, $F_\infty = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ είναι ολικά διατεταγμένο, ώστε $\mathcal{P} \subseteq \lfloor F_\infty \rfloor \subseteq \mathcal{M} = \mathcal{P}''$.

Επομένως $\lfloor F_\infty \rfloor'' = \mathcal{M}$ από το οποίο έχουμε ότι $F_\infty'' = \mathcal{M}$.

Από το λήμμα του ZORN υπάρχει ολικά διατεταγμένο σύνολο προβολών της $\mathcal{M}$, έστω $\mathcal{N}$ που περιέχει το F_∞ και επομένως $\mathcal{N}'' = \mathcal{M}$.

Θα δείξουμε ότι το $\mathcal{N}$ είναι nest. Έστω $\{N_i : i \in I\} \subseteq \mathcal{N}$, τότε αν $N \in \mathcal{N}$ έχουμε ή $N \geq N_i$ για κάθε i, οπότε $N \geq \bigvee_{i \in I} N_i$

ή $N < N_{i_o}$ για κάποιο i_o, οπότε $N \leq \bigvee_{i \in I} N_i$.

Επομένως η οικογένεια $\mathcal{N} \cup \left\{ \bigvee_{i \in I} N_i \right\}$ είναι ολικά διατεταγμένη και συνεπώς από την μεγιστικότητα του $\mathcal{N}$ έχουμε ότι: $\bigvee_{i \in I} N_i \in \mathcal{N}$.

Ανάλογα $\bigwedge_{i \in I} N_i \in \mathcal{N}$.

3. ΤΟΠΟΛΟΓΙΑ, ΜΕΤΡΑ ΚΑΙ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ ΣΕ NEST.

3.1. Πρόταση: Έστω $\mathcal{N}$ nest σε διαχωρίσιμο χώρο Χίλμπερτ H. Τότε σ' αυτό συμπίπτουν οι SOT και WOT τοπολογίες και με αυτές το $\mathcal{N}$ γίνεται συμπαγής και μετρικοποιήσιμος χώρος.

Απόδειξη:

Σε διαχωρίσιμο χώρο Χίλμπερτ, είναι γνωστό ότι η μοναδιαία σφαίρα των φραγμένων τελεστών $B(H)_1$ είναι συμπαγής και μετρικοποιήσιμος χώρος στην WOT τοπολογία (1.1.)

Έχουμε άμεσα ότι ο χώρος ($\mathcal{N}$, WOT) είναι μετρικοποιήσιμος ως υποχώρος του ($B(H)_1$,WOT). Θα δείξουμε ότι είναι και συμπαγής.

Εστω $(N_n) \subseteq \mathcal{N}$. Ο αριθμός k ονομάζεται σημείο κορυφής της (N_n) αν $N_k \geq N_m$ για κάθε $m \geq k$.

Αν η (N_n) έχει άπειρο πλήθος κορυφών (k_n) τότε η υπακολουθία (N_{k_n}) είναι φθίνουσα.Αν η (N_n) έχει πεπερασμένο πλήθος κορυφών τότε υπάρχει k_1 ώστε κάθε $k \geq k_1$ να μην είναι σημείο κορυφής.

Αφού k_1 όχι σημείο κορυφής υπάρχει $k_2 > k_1$ ώστε $N_{k_2} \geq N_{k_1}$ Αφού k_2 όχι σημείο κορυφής υπάρχει $k_3 > k_2$ ώστε $N_{k_3} \geq N_{k_2}$.

Συνεχίζοντας επαγωγικά έχουμε αύξουσα υπακολουθία (N_{k_n}).

Αν (N_{k_n}) φθίνουσα υπακολουθία τότε η (N_{k_n}) συγκλίνει στην SOT τοπολογία και αρα και στην ασθενέστερη της WOT, στην προβολή $\bigwedge_{n=1}^{\infty} N_{k_n}$ που ανήκει στο nest, αφού είναι κλειστό στις πράξεις "$\wedge$","$\vee$".

Αν (N_{k_n}) αύξουσα υπακολουθία τότε συγκλίνει SOT και αρα WOT στην προβολή $\bigvee_{n=1}^{\infty} N_{k_n} \in \mathcal{N}$.

Δείξαμε ότι κάθε ακολουθία έχει συγκλίνουσα υπακολουθία και άρα ο χώρος ($\mathcal{N}$, WOT) είναι συμπαγής.

Αν $N_i \xrightarrow{WOT} N$ τότε $\|(N_i - N)x\|^2 = <(N_i - N)x, x> = <N_i x, x> -$
$- <Nx, x> \longrightarrow 0$ για κάθε $x \in H$. Επομένως $N_i \xrightarrow{SOT} N$. Συμπεραίνουμε ότι η ταυτοτική απεικόνιση id: ($\mathcal{N}$, WOT) → ($\mathcal{N}$,SOT) είναι συνεχής και άρα επειδή ο χώρος ($\mathcal{N}$, WOT) είναι συμπαγής οι δύο τοπολογίες συμπίπτουν.

3.2. Τα nests ως ολικά διατεταγμένα σύνολα δέχονται την <u>τοπολογία της διάταξης</u> (βλέπε στο [8], 6.16). Πρόκειται για την τοπολογία που στο nest $\mathcal{N}$ έχει ως βάση τα σύνολα της μορφής : $[O,N), (N,I], (N,M)$ όπου $N, M \in \mathcal{N}$.

3.3. Πρόταση: Έστω $\mathcal{N}$ nest σε διαχωρίσιμο χώρο H. Τότε η SOT και η τοπολογία της διάταξης συμπίπτουν σ'αυτό. Αν $x \in H$ διαχωρίζον διάνυσμα για το $\mathcal{N}$, τότε μία μετρική που τις επάγει είναι: $d(N,M) = \|(N-M)x\|$.

Απόδειξη:

Επειδή το x είναι διαχωρίζον διάνυσμα, εύκολα βλέπουμε ότι η $d(\cdot)$ είναι μετρική στο $\mathcal{N}$.

α) Η SOT με την μετρική τοπολογία ($\mathcal{T}_d$) συμπίπτουν.

Έστω (E_n) ακολουθία στο $\mathcal{N}$. Αν $E_n \xrightarrow{SOT} E$ συμπεραίνουμε ότι $\|(E_n - E)x\| \to 0$ και άρα $d(E_n, E) \to 0$, όταν $n \to \infty$.

Συμπεραίνουμε ότι η ταυτοτική απεικόνιση *id*: ($\mathcal{N}$, SOT) → ($\mathcal{N}$, $\mathcal{T}_d$) είναι συνεχής και άρα επειδή ο χώρος ($\mathcal{N}$, SOT) είναι συμπαγής (3.1.) οι δύο τοπολογίες συμπίπτουν.

β) Η SOT με την τοπολογία της διάταξης ($\mathcal{T}_{ord}$) συμπίπτουν :

Έστω $(E_i)_i$ δίκτυο ώστε : $E_i \xrightarrow{SOT} E$ και $E \in (O,I)$. (Ανάλογα εργάζομαι με $E = 0$ ή $E = I$).

Αν το (E_i) δεν συγκλίνει στην τοπολογία της διάταξης στο E, υπάρχει διάστημα (F,G) ώστε $F < E < G$ και υποδίκτυο $(E_j)_j$, ώστε $E_j \notin (F,G)$ για κάθε j. Τότε για κάθε j θα έχουμε : ή $E_j < F < E$, οπότε $E - E_j > E - F$, ή $E < G < E_j$ οπότε $E_j - E > G - E$.

Συνεπώς για κάθε j θα έχουμε : ή $\|(E - E_j)x\| \geq \|(E - F)x\|$, ή $\|(E_j - E)x\| \geq \|(G - E)x\|$ και άρα $\|(E - E_j)x\| \geq min\{\|(E-F)x\|, \|(G-E)x\|\} > 0$ για κάθε j. Άτοπο διότι $\|(E - E_j)x\| \to 0$.

Μόλις δείξαμε ότι η ταυτοτική απεικόνιση $id : (\mathcal{N}, \text{SOT}) \to (\mathcal{N}, \mathcal{T}_{\text{ord}})$ είναι συνεχής και επειδή ο χώρος $(\mathcal{N}, \text{SOT})$, είναι συμπαγής και οι δύο τοπολογίες συμπίπτουν.

3.4. Πρόταση: Έστω $\mathcal{N}$ nest σε χώρο Χίλμπερτ H. Τότε το $\mathcal{N}$ είναι ομοιομορφικό με κλειστό υποσύνολο ω του $[0,1]$, ώστε $0,1 \in \omega$ μέσω ομοιομορφισμού που διατηρεί την διάταξη.

Απόδειξη :

Έστω x μοναδιαίο διαχωρίζον διάνυσμα της άλγεβρας $\mathcal{N}''$. Ορίζουμε $\Phi_x : \mathcal{N} \to [0,1]$, ώστε $\Phi_x(N) = \langle Nx, x\rangle = \|Nx\|^2$. Τότε η Φ_x είναι συνεχής, διότι αν $N_n \xrightarrow{SOT} N \Rightarrow \|(N_n - N)x\| \to 0 \Rightarrow \Phi_x(N_n) \to \Phi_x(N)$. Επίσης είναι 1-1 διότι: $\Phi_x(N) = \Phi_x(M) \Leftrightarrow \langle (N-M)x, x\rangle = 0 \Leftrightarrow N = M$, αφού το x είναι διαχωρίζον διάνυσμα.

Επομένως αφού το $\mathcal{N}$ είναι συμπαγές σύνολο, η Φ_x είναι ομοιομορφισμός. Παρατηρούμε ότι $\omega = \Phi_x(\mathcal{N})$ είναι συμπαγές υποσύνολο του $[0,1]$ με $0,1 \in \omega$.

Η Φ_x διατηρεί την διάταξη: $N < M \Rightarrow \|Nx\| < \|Mx\| \Rightarrow \Phi_x(N) < \Phi_x(M)$.

3.5. Μέτρα στα nests.

Έστω $\mathcal{N}$ nest και x μοναδιαίο διαχωρίζον διάνυσμα της άλγεβρας $\mathcal{N}''$. Ορίζουμε $h : [0,1] \to [0,1]$, ώστε $h(t) = \Phi_x\left(\vee\{N \in \mathcal{N} / \Phi_x(N) \le t\}\right)$. Η h είναι <u>αύξουσα</u>, αφού αν $t < s$, τότε $\{N \in \mathcal{N} / \Phi_x(N) \le t\} \subseteq \{N \in \mathcal{N} / \Phi_x(N) \le s\}$ και συνεπώς παίρνοντας sup έχουμε $h(t) \le h(s)$.

Επίσης η h είναι <u>δεξιά συνεχής</u>. Πράγματι έστω $t \in [0,1)$ και (t_n) φθίνουσα ακολουθία ώστε $t_n > t$ για κάθε n με $t_n \to t$. Θέτουμε $N_n = \vee\{N / \Phi_x(N) \le t_n\}$. Τότε η (N_n) είναι φθίνουσα ακολουθία στο $\mathcal{N}$ και επομένως $N_n \xrightarrow{SOT} \bigwedge_{n=1}^{\infty} N_n$. Θα δείξουμε ότι $\bigwedge_{n=1}^{\infty} N_n = \vee\{N / \Phi_x(N) \le t\}$. Παρατηρούμε ότι $\vee\{N / \Phi_x(N) \le t\} \le \bigwedge_{n=1}^{\infty} N_n$. Επομένως αν δεν έχουμε ισότητα αφού η SOT τοπολογία συμπίπτει με την τοπολογία της διάταξης στο nest θα υπάρχει διάστημα (G,F) ώστε $G < \vee\{N / \Phi_x(N) \le t\} < F < \bigwedge_{n=1}^{\infty} N_n$.

Τότε όμως $\Phi_x(F) \le t_n$ για κάθε n, επομένως $\Phi_x(F) \le t$ από το οποίο προκύπτει ότι $F \le \vee\{N / \Phi_x(N) \le t\}$ που είναι άτοπο.

Δείξαμε λοιπόν ότι: $\vee\{N/\Phi_x(N)\le t_n\}\xrightarrow{SOT}\vee\{N/\Phi_x(N)\le t\}$ όταν $n\to+\infty$ και άρα από την συνέχεια της Φ_x έχουμε ότι $h(t_n)\to h(t)$.

Επειδή η h είναι αύξουσα και δεξιά συνεχής, τότε ορίζεται μοναδικό μέτρο Borel μ_x στο $[0,1]$ ώστε : $\mu_x(\,(a,b]\,)=h(b)-h(a)$, $\mu_x((a,b))=h(b_-)-h(a)$, $\mu_x(\{a\})=h(a)-h(a_-)$ όπου $h(\theta_-)=\lim_{x\uparrow\theta}h(x)$. (Βλέπε στο [6], θεώρημα 3.19.).).

Παρατηρούμε ότι : $\mu_x(\,(\Phi_x(N),\Phi_x(M)]\,)=\Phi_x(M)-\Phi_x(N)$.

$$\mu_x(\{\Phi_x(N)\})=\ \Phi_x(N)-\Phi_x(N_-).$$

$$\mu_x(\Phi_x(N),\Phi_x(M))=\Phi_x(M_-)-\Phi_x(N).$$

Πράγματι $h(\Phi_x(M))=\Phi_x(\vee\ \{N\in \mathcal{N}\ /\ \Phi_x(N)\le\Phi_x(M)\ )\}=\Phi_x(M)$ ενώ θα δείξουμε ότι $\lim_{t\uparrow\Phi_x(M)}h(t)=\Phi_x(M_-)$ για κάθε $M\in\mathcal{N}$.

Έστω (t_n) αύξουσα ακολουθία ώστε $t_n<\Phi_x(M)$ και $t_n\to\Phi_x(M)$. Θέτουμε $N_n=\vee\{N/\Phi_x(N)\le t_n\}$ για κάθε n, τότε η (N_n) είναι αύξουσα ακολουθία στο $\mathcal{N}$ και επομένως συγκλίνει SOT στο $\vee_{n=1}^{\infty}N_n$. Αρκεί να δείξουμε ότι: $\vee_{n=1}^{\infty}N_n=M_-$.

Παρατηρούμε ότι: $\{N/\Phi_x(N)\le t_n\}\subseteq\{N/N<M\}$ και άρα παίρνοντας sup στα δύο σύνολα έχουμε ότι $N_n\le M_-$ για κάθε n και συνεπώς $\vee_{n=1}^{\infty}N_n\le M_-$.

Όπως και προηγούμενα αν η ανισότητα είναι γνήσια θα υπάρχει $F\in\mathcal{N}$, ώστε $\vee_{n=1}^{\infty}N_n<F<M_-$.

Από το ότι $N_n<F$ έχουμε: $t_n\le\Phi_x(F)$ για κάθε n και επομένως $\Phi_x(M)\le\Phi_x(F)$ από το οποίο προκύπτει ότι $M\le F$. Άτοπο.

Συμπεραίνουμε ότι $N_n\xrightarrow{SOT}M_-$ και άρα $h(t_n)=\Phi_x(N_n)\to\Phi_x(M_-)$.

Επομένως $\lim_{t\uparrow\Phi_x(M)}h(t)=\Phi_x(M_-)$.

3.6. Σχέση με το Borel μέτρο Lebesgue στο $[0,1]$.

Έστω $\mathcal{N}$ nest, x διαχωρίζον μοναδιαίο διάνυσμα της άλγεβρας $\mathcal{N}''$ και μ_x το μέτρο που περιγράψαμε στο 3.5. Θέτουμε $X=\Phi_x(\mathcal{N})$

Παρατηρούμε ότι: $[0,1]\setminus X=\cup\{\,(\Phi_x(N_-),\Phi_x(N))/\,N-N_-$ άτομο του $\mathcal{N}\}$

Πράγματι αν $t\in[0,1]\setminus X$ και θέσουμε $N=\wedge\{S\in\mathcal{N}/\Phi_x(S)>t\}$, $M=\vee\{S\in\mathcal{N}/\Phi_x(S)<t\}$ τότε $N_-=M$ και συνεπώς $t\in(\Phi_x(N_-),\Phi_x(N))$.

Αντίστροφα αν $\Phi_x(N_-) < t < \Phi_x(N)$ για κάποιο $N - N_-$ άτομο τότε είναι προφανές ότι $t \notin \Phi_x(\mathcal{N})$.

Έστω $(N_n - N_{n-})_{n=1}^{\infty}$ τα άτομα του $\mathcal{N}$ και $\Phi_x(N_n) = r_n$, $\Phi_x(N_{n-}) = l_n$, τότε έχουμε $[0,1] \setminus \Phi_x(\mathcal{N}) = \bigcup_{n=1}^{\infty}(l_n, r_n)$ όπου τα διαστήματα (l_n, r_n) είναι ξένα ανά δύο. Παρατηρούμε επίσης ότι $\mu_x(\{\Phi_x(N_n)\}) = r_n - l_n$, ενώ $supp(\mu_x) \subseteq \Phi_x(\mathcal{N})$, διότι

$$\mu_x([0,1] \setminus X) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_x((\Phi_x(N_{n-}), \Phi_x(N_n))) = \sum_{n=1}^{\infty} (\Phi_x(N_{n-}) - \Phi_x(N_{n-})) = 0.$$

Θα δείξουμε ότι για κάθε Borel σύνολο S του $[0,1]$ ισχύει:

$$\mu_x(S) = \lambda(S \cap X) + \sum_{r_n \in S} (r_n - l_n)$$

όπου λ το μέτρο Lebesgue στο $[0,1]$.

Θεωρούμε το Borel μέτρο στο $[0,1]$: $v(S) = \lambda(S \cap X) + \sum_{n=1}^{\infty} (r_n - l_n) \cdot \delta_{\{r_n\}}(S)$, S Borel υποσύνολο του $[0,1]$, το οποίο είναι μέτρο πιθανότητας αφού $v([0,1]) =$

$$= \lambda(X) + \sum_{n=1}^{\infty} (r_n - l_n) = \lambda(X) + \lambda\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (l_n, r_n)\right) = \lambda\left(X \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} (l_n, r_n)\right) = \lambda[0,1] = 1.$$

Ορίζεται τότε μοναδική συνάρτηση $\widetilde{h}$ ώστε για κάθε $t \in [0,1]$

$$\widetilde{h}(t) = v([0,t]) = \lambda([0,t] \cap X) + \sum_{r_n \leq t} (r_n - l_n) = \lambda([0,t] \cap X) + \lambda\left(\bigcup_{r_n \leq t} (l_n, r_n)\right) =$$

$$= \lambda\left(([0,t] \cap X) \cup \bigcup_{r_n \leq t} (l_n, r_n)\right) \quad (1)$$

(η τελευταία ισότητα ισχύει αφού τα X, (l_n, r_n) είναι ξένα μεταξύ τους).

Όμως $([0,t] \cap X) \cup \bigcup_{r_n \leq t} (l_n, r_n) = \{\Phi_x(N) / \Phi_x(N) \leq t\} \cup \{(\Phi_x(N_{n-}), \Phi_x(N_n)) / \Phi_x(N_n) \leq t\}$ το οποίο είναι προφανώς υποσύνολο του διαστήματος $[0, h(t)]$, $h(t) = \Phi_x(\vee \{N / \Phi_x(N) \leq t\})$ (3.5). Θα δείξουμε ότι συμπίπτει με το $[0, h(t)]$.

Έστω $0 \leq s \leq \Phi_x(\vee \{N / \Phi_x(N) \leq t\}) = h(t)$. Αν $s \in X$ υπάρχει $N : \Phi_x(N) = s$ και τότε $\Phi_x(N) \leq t$, άρα $s \in X \cap [0,t]$.

Αν πάλι $s \notin X$, τότε υπάρχει μοναδικό k, ώστε $s \in (\Phi_x(N_{k-}), \Phi_x(N_k))$ και επομένως $\Phi_x(N_k) < \Phi_x(\vee \{N / \Phi_x(N) \leq t\})$ (διαφορετικά θα είχαμε $N_{k-} < \vee \{N / \Phi_x(N) \leq t\} < N_k$ που είναι άτοπο). Τότε όμως $\Phi_x(N_k) \leq t$ και άρα $s \in \cup \{(\Phi_x(N_{n-}), \Phi_x(N_n)) / \Phi_x(N_n) \leq t\}$. Τελικά έχουμε ότι: $([0,t] \cap X) \cup$

$\underset{r_n \leq t}{\cup}(l_n, r_n) = [0, h(t)]$, και άρα από την (1) προκύπτει ότι $\widetilde{h}(t) = h(t)$. Επομένως τα μέτρα μ_x, ν συμπίπτουν.

3.7. Παρατηρήσεις.

3.7.1. Αν το $\mathcal{N}$ είναι συνεχές nest και x μοναδιαίο διαχωρίζον διάνυσμα για την άλγεβρα $\mathcal{N}''$, τότε το μέτρο μ_x συμπίπτει με το μέτρο Lebesgue στα Borel υποσύνολα του $[0,1]$.

Πράγματι όπως είδαμε στο 3.6.:

$[0,1] \setminus \Phi_x(\mathcal{N}) = \cup\{(\Phi_x(N_-), \Phi_x(N))/N - N_-$ άτομο του nest$\}$. Επομένως $[0,1] \setminus \Phi_x(\mathcal{N}) =$ $= \emptyset \Rightarrow \Phi_x(\mathcal{N}) = [0,1]$ και συνεπώς $\mu_x = \lambda$ πάλι από το 3.6.

3.7.2. Έστω $\mathcal{N}$ nest, x μοναδιαίο διαχωρίζον διάνυσμα της άλγεβρας $\mathcal{N}''$ και $\Phi_x(\mathcal{N})$ $= X$. Τότε αφού το X είναι συμπαγές υποσύνολο του $[0,1]$ με $0,1 \in X$, υπάρχει αριθμήσιμο πλήθος ξένων ανά δύο ανοικτών διανυσμάτων $(l_n, r_n), n \in \mathbb{N}$, ώστε $[0,1] \setminus X = \overset{\infty}{\underset{n=1}{\cup}}(l_n, r_n)$.

Θα δείξουμε ότι τα άτομα του $\mathcal{N}$ είναι τα $\Phi_x^{-1}(r_n) - \Phi_x^{-1}(l_n)$ και μόνον αυτά, και άρα: $supp\ \mu_x = X$, $\mu_x|_{X \setminus \{r_n\}} = \lambda|_{X \setminus \{r_n\}}$, ενώ $\mu_x(\{r_n\}) = (r_n - l_n)$.

Πράγματι αν $\Phi_x^{-1}(r_n) = N_n$, τότε επειδή $\{M / M < N_n\} = \{M / \Phi_x(M) < r_n\} =$ $= \{M / \Phi_x(M) \leq l_n\}$, έχουμε $(N_n)_- = \vee\{M / M < N_n\} = \vee\{M / \Phi_x(M) \leq l_n\} = \Phi_x^{-1}(l_n)$.

Αντίστροφα αν $N_- < N$ για $N \in \mathcal{N}$, τότε $(\Phi_x(N_-), \Phi_x(N)) \subseteq [0,1] \setminus X$ και άρα υπάρχει n ώστε $\Phi_x(N_-) = l_n$, $\Phi_x(N) = r_n$.

3.7.3. Αν τα $\mathcal{N}$, $\mathcal{M}$ είναι nests, x,y μοναδιαία διαχωρίζοντα διανύσματα των αλγεβρών $\mathcal{N}''$, $\mathcal{M}''$ *αντίστοιχα* και $\Phi_x(\mathcal{N}) = X = \Phi_y(\mathcal{M})$, τότε $\mu_x = \mu_y$. Πράγματι $[0,1] \setminus X = \overset{\infty}{\underset{n=1}{\cup}}(l_n, r_n)$ και άρα από την προηγούμενη παρατήρηση και από το 3.6. έχουμε ότι $\mu_x(S) = \lambda(S \cap X) + \sum\limits_{r_n \in S}(r_n - l_n) = \mu_y(S)$ για κάθε Borel υποσύνολο S του X.

3.7.4. Αν X συμπαγές υποσύνολο του $[0,1]$ με $0,1 \in X$ και $[0,1] \setminus X = \overset{\infty}{\underset{n=1}{\cup}}(l_n, r_n)$, όπου $(l_n - r_n)$ ξένα ανά δύο σύνολα, τότε υπάρχει nest $\mathcal{N}$ ώστε η άλγεβρα $\mathcal{N}''$ να είναι masa και μοναδιαίο κυκλικό διάνυσμα x γι' αυτήν ώστε $\Phi_x(\mathcal{N}) = X$. Από την παρατήρηση 3.7.2. τα άτομα του $\mathcal{N}$ είναι τα $\{\Phi_x^{-1}(r_n) - \Phi_x^{-1}(l_n) / n \in \mathbb{N}\}$.

Πράγματι, θεωρούμε το Borel μέτρο πιθανότητας στο $[0,1]$: $\mu(S) =$ $= \lambda(S \cap X) + \sum_{n=1}^{\infty}(r_n - l_n)\delta_{\{r_n\}}(S)$, τον χώρο Χίλμπερτ $(L^2[0,1],\mu)$ και το nest $\mathcal{N} =$ $= \{M_s / 0 \leq s \leq 1\}$ όπου $M_s = M_{\chi_{[0,s]}}$ για κάθε s.

Το διάνυσμα $x(t) = 1$, $t \in [0,1]$ είναι μοναδιαίο και κυκλικό για την άλγεβρα $\mathcal{N}''$ από τον ισχυρισμό 2.3.α.

Έστω $s \in X$ τότε $[0,s] = ([0,s] \cap X) \cup \left([0,s] \cap \bigcup_{n=1}^{\infty}(l_n, r_n)\right)$. Όμως επειδή $s \in X$ μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι $[0,s] \cap \bigcup_{n=1}^{\infty}(l_n, r_n) = \bigcup_{r_n \leq s}(l_n, r_n)$ και άρα $[0,s] = ([0,s] \cap X) \cup \left(\bigcup_{r_n \leq s}(l_n, r_n)\right)$. Τότε έχουμε $s = \lambda([0,s]) = \lambda([0,s] \cap X) +$ $+ \sum_{r_n \leq s}(r_n - l_n) = \mu[0,s] = \| M_s(x) \|^2 = \Phi_x(M_s)$. Επόμενα $X \subseteq \Phi_x(\mathcal{N})$.

Έστω $s \in [0,1]$ θα δείξουμε ότι $\Phi_x(M_s) \in X$. Αν $s \in X$ τότε όπως είδαμε πριν $\Phi_x(M_s) = s$. Αν $s \in [0,1] \setminus X$ θέτουμε $s_o = sup\{t \in X / t < s\}$και παρατηρούμε ότι $\|M_s(x) - M_{s_o}(x)\|^2 = \mu(s_o, s] = 0$ αφού $(s_o, s] \subseteq [0,1] \setminus X$ και $supp(\mu) \subseteq X$. Άρα αφού το x είναι διαχωρίζον διάνυσμα για την $\mathcal{N}''$έχουμε ότι $M_s = M_{s_o}$ και επομένως $\Phi_x(M_s) = \Phi_x(M_{s_o}) = s_o \in X$.

3.8. Ολοκλήρωμα σε nests

Μπορούμε να ορίσουμε "ολοκλήρωμα" στις συνεχείς συναρτήσεις με τιμές στο $\mathbb{C}$ που ορίζονται πάνω σε nest ως εξής:

Έστω $\mathcal{N}$ nest και $f : \mathcal{N} \to \mathbb{C}$ συνεχής.

Ισχυρισμός: για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει πεπερασμένη διαμέριση του $\mathcal{N}$, $F_o = \{0 = N_o <$ $< N_1 < \ldots < N_k = I\}$ ώστε αν $N_{i-1} < N \leq N' \leq N_i$ να είναι $|f(N) - f(N')| < \varepsilon$.

Απόδειξη:

Επειδή το $\mathcal{N}$ είναι συμπαγές σύνολο υπάρχουν $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{C}$ ώστε $\mathcal{N} =$ $= \bigcup_{i=1}^{n} f^{-1}(S(a_i, \varepsilon))$. Τα σύνολα $f^{-1}(S(a_i, \varepsilon))$ είναι ανοικτά, άρα υπάρχουν βασικά υποσύνολα της μορφής $(N,M),[0,M),(N,I]$, έστω (I_J^i), ώστε $f^{-1}(S(a_i, \varepsilon)) = \bigcup_J I_J^i$.

Τότε $\mathcal{N} = \bigcup_{i=1}^{n} \bigcup_J I_J^i$. Από την συμπάγεια του $\mathcal{N}$ υπάρχει πεπερασμένο πλήθος από

αυτά $J_o, J_1, \ldots, J_m$ ώστε $\mathcal{N} = \bigcup_{i=1}^{m} J_i$. Από την κατασκευή $diam\, f(J_i) < \varepsilon$ για κάθε i.
Χωρίς βλάβη υποθέτω ότι: $J_o = [E_o, F_o), J_1 = (E_1, F_1), \ldots, J_m = (E_m, F_m]$ ώστε $0 = E_o \le E_1 \le E_2 \le \ldots \le E_m < F_m = I$ (1).

Θα δείξουμε με επαγωγή ως προς m ότι υπάρχουν υποδιαστήματα ξένα ανά δύο που καλύπτουν το nest.

Για $m = 1$ έχουμε $J_o = [E_o, F_o)$, $J_1 = (E_1, F_1]$, $E_o = 0$, $F_1 = 1$. Τότε υποχρεωτικά $E_1 < F_o$ και επομένως έχουμε τα ξένα διαστήματα $[0, E_1]$, $(E_1, F_o]$, $(F_o, I]$ που καλύπτουν το $\mathcal{N}$.

Έστω ότι η υπόθεση ισχύει για $k = m - 1$ και έχουμε την κατάσταση (1), τότε $[0, E_m] = \bigcup_{i=1}^{m-1} ([0, E_m] \cap J_i)$ θέτουμε $I_i = [0, E_m] \cap J_i$ και παρατηρούμε ότι τα I_i είναι βασικά σύνολα και συνεπώς από την υπόθεση της επαγωγής μπορούν να διαιρεθούν σε μικρότερα ξένα ανά δύο με ένωση το $[0, E_m]$.

Στα προηγούμενα σύνολα προσθέτουμε το $(E_m, I]$ και έχουμε την ισχύ της υπόθεσης για $k = m$.

Συμπεραίνουμε τελικά ότι το $[0, I]$ μπορεί να γραφεί: $[0, I] = [N_o, N_1] \cup (N_1, N_2] \cup \ldots \cup (N_{k-1}, N_k]$, $N_o = 0$, $N_k = I$ ώστε να ισχύει $|f(N) - f(N')| < \varepsilon$ για κάθε $N, N' \in (N_{i-1}, N_i]$ $i = 1, \ldots, k$.

Σε συνέχεια για κάθε διαμέριση $\mathcal{F} = \{0 = N_o < N_1 < \ldots < N_k = I\}$ θέτουμε $I_{\mathcal{F}}(f) = \sum_{i=1}^{k} f(N_i)(N_i - N_{i-1})$. Τότε ορίζεται το δίκτυο $\{ I_{\mathcal{F}}(f) \,/\, \mathcal{F}$ πεπερασμένη διαμέριση του $\mathcal{N}\}$ που είναι Cauchy. Πράγματι για $\varepsilon > 0$ υπάρχει από τον ισχυρισμό διαμέριση $\mathcal{F}_o = \{0 = N_o < N_1 < \ldots < N_k = I\}$ ώστε αν $N_{i-1} < N \le N' < N$ να είναι $|f(N) - f(N')| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Αν θεωρήσουμε διαμερίσεις $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2 \supseteq \mathcal{F}_o$ τότε $\| I_{\mathcal{F}_1}(f) - I_{\mathcal{F}_o}(f) \| \le \frac{\varepsilon}{2}$, $\| I_{\mathcal{F}_2}(f) - I_{\mathcal{F}_o}(f) \| \le \frac{\varepsilon}{2}$ και άρα $\| I_{\mathcal{F}_1}(f) - I_{\mathcal{F}_2}(f) \| \le \varepsilon$.

Επειδή $I_{\mathcal{F}}(f) \in C^*(\mathcal{N})$ για κάθε $\mathcal{F}$ το δίκτυο $(I_{\mathcal{F}}(f))_{\mathcal{F}}$ συγκλίνει στην άλγεβρα $C^*(\mathcal{N})$ σε τελεστή που τον συμβολίζουμε $\int f(N)\,dN$. Παρατηρούμε ακόμα ότι $\left\|\int f(N)\,dN\right\| = \|f\|_\infty$. Πράγματι για κάθε διαμέριση $\mathcal{F} = \{N_o, N_1, \ldots, N_k\}$ έχουμε ότι $\| I_{\mathcal{F}}(f) \| = sup\{|f(N_i)| \,/\, N_i \in \mathcal{F}\}$ αφού οι προβολές $(N_i - N_{i-1})_{i=1}^{k}$

είναι αν δύο κάθετες. Επομένως $\left\| \int f d_N \right\| = \lim_{\mathrm{F}} \| I_{\mathrm{F}}(f) \| = \lim_{\mathrm{F}} \{ \sup\{ |f(N)| \ / N \in$ $\mathrm{F} \} \} = \|f\|_\infty$, όπου η τελευταία ισότητα οφείλεται στο ότι $\|f\|_\infty \in f(\mathcal{N})$.

3.9. Πρόταση: Έστω $\mathcal{N}$ nest σε χώρο Χίλμπερτ Η, $\Phi: \mathcal{N} \to [0,1]$ ομοιομορφική εμφύτευση που διατηρεί την διάταξη με $\Phi(O) = 0$, $\Phi(I) = 1$ και $A = \int \Phi(N)\, dN$ τότε

α) $\sigma(A) = \Phi(\mathcal{N})$ και A θετικός τελεστής.

β) $\Phi^{-1}(t) = E_A[0,t]$, $\Phi^{-1}(t)_- = E_A[0,t)$ όπου $E_A[\cdot\ ]$ το φασματικό μέτρο του A.

γ) $\{A\}'' = \mathcal{N}''$.

Απόδειξη:

α) Ορίζουμε απεικόνιση: $(C(\mathcal{N}), \|\cdot\|_\infty) \to B(H): f \to \int f(N)\, dN$. Αυτή είναι φανερά γραμμική και ισομετρική, αφού όπως δείξαμε ισχύει $\left\| \int f dN \right\| = \|f\|_\infty$.

Επίσης είναι $*$-μορφισμός αφού για κάθε $f, g \in C(\mathcal{N})$ και για κάθε πεπερασμένη διαμέριση του $\mathcal{N}$, F, έχουμε:

$\sum_{N_i \in \mathrm{F}} f(N_i) g(N_i)(N_i - N_{i-1}) = \left(\sum_{N_i \in \mathrm{F}} f(N_i)(N_i - N_{i-1}) \right) \cdot \left(\sum_{N_i \in \mathrm{F}} g(N_i)(N_i - N_{i-1}) \right)$, δηλαδή με τον συμβολισμό του 3.8. ισχύει $I_{\mathrm{F}}(f \cdot g) = I_{\mathrm{F}}(f) \cdot I_{\mathrm{F}}(g)$. Μεταβαίνοντας στα όρια έχουμε $\int (f \cdot g)(N)\, dN = \int f(N)\, dN \cdot \int g(N)\, dN$. Επίσης επειδή για κάθε x, y ισχύει: $\langle I_{\mathrm{F}}(f) x, y \rangle = \langle x, I_{\mathrm{F}}(\bar{f}) y \rangle$ έχουμε ότι: $\left\langle \int f(N)\, dN(x), y \right\rangle = \left\langle x, \int \bar{f}(N)\, dN(y) \right\rangle$ και άρα $\left(\int f(N)\, dN \right)^* = \int \bar{f}(N)\, dN$.

Λόγω του $*$-ισομορφισμού έχουμε ότι: $\sigma\left(\int f(N)\, dN \right) = \sigma(f) = f(\mathcal{N})$.

Επίσης η απεικόνιση $f \to \int f(N)\, dN$ είναι θετική διότι αν $f \geq 0$ τότε $I_{\mathrm{F}}(f) \geq 0$ για κάθε F και άρα παίρνοντας όρια $\int f(N)\, dN \geq 0$

β) Έστω $\Phi: \mathcal{N} \to [0,1]$ ομοιομορφική εμφύτευση που διατηρεί την διάταξη με $\Phi(O) = 0$, $\Phi(I) = 1$. Τότε είναι εύκολο να δούμε πως η απεικόνιση: $C(\Phi(\mathcal{N})) \to C(\mathcal{N}): f \to f \circ \phi$ είναι ισομετρικός $*$-ισομορφισμός.

Αν $A = \int \Phi(N)\, dN$ τότε όπως είδαμε στο (α) $\sigma(A) = \Phi(\mathcal{N})$ και συνεπώς ορίζεται ισομετρικός $*$-μορφισμός $C(\sigma(A)) \to C(\mathcal{N}) \to B(H): f \to f \circ \Phi \to$ $\to \int f \circ \Phi(N)\, dN$ για τον οποίο έχουμε $id \to \int id \circ \Phi(N)\, dN = A$, ενώ αν $\mathbb{1} \in C(\sigma(A))$, $\mathbb{1} \to \int \mathbb{1} \circ \Phi(N)\, dN = I$ Τότε όμως λόγω της μοναδικότητας του συναρτησιακού λογισμού (βλέπε τα 1.5.1. , 1.5.2.), ο προηγούμενος μορφισμός παίρνει τιμές πάνω στην άλγεβρα $C^*(A)$ και ισχύει $\int f \circ \Phi(N)\,dN = f(A) = \int f d_{E_A}$.

Έστω $t \in \Phi(\mathcal{N})$ θα δείξουμε ότι $\Phi^{-1}(t) = E_A[0,t]$.

α' Περίπτωση : Αν το t είναι εικόνα αριστερού άκρου ατόμου του $\mathcal{N}$, τότε υπάρχει $L \in \mathcal{N}$ ώστε $L_- < L$ και $\Phi(L_-) = t$. Παρατηρούμε ότι το σύνολο $[0,t] \cap \Phi(\mathcal{N})$ είναι ταυτόχρονα ανοικτό και κλειστό στην σχετική τοπολογία του $\Phi(\mathcal{N})$ διότι $[0,t] \cap \Phi(\mathcal{N}) = [0,s) \cap \Phi(\mathcal{N})$ για κάθε $s \in (t, \Phi(L))$. Επομένως η συνάρτηση $\chi_{[0,t] \cap \Phi(\mathcal{N})}$ είναι συνεχής στο $\Phi(\mathcal{N})$ και άρα $E_A[0,t] = \chi_{[0,t]}(A) = \int \chi_{[0,t]} \circ \Phi(N)\,dN$. Παρατηρούμε ότι για κάθε πεπερασμένη διαμέριση $\mathcal{F}$ του $\mathcal{N}$, ώστε $L_-, L \in \mathcal{F}$ είναι $I_{\mathcal{F}}(\chi_{[0,t]} \circ \Phi) = L_-$ και άρα $\int \chi_{[0,t]} \circ \Phi(N)\,dN = L_-$. Τελικά : $E_A[0,t] = L_- = \Phi^{-1}(t)$.

β' Περίπτωση: Αν $\Phi(t) = N_o$ και N_o όχι αριστερό άκρο ατόμου του nest. Τότε υπάρχει (N_m) γνησίως φθίνουσα ακολουθία στο $\mathcal{N}$: $N_m \xrightarrow{SOT} N$. Αν $t_m = \Phi(N_m)$ τότε $t_m \downarrow t$. Για κάθε m ορίζουμε συνεχή συνάρτηση f_m στο $[0,1]$ ώστε $f_m(s) = \chi_{[0,t]}(s)$ για κάθε $s \notin (t, t_m)$ και γραμμική στο $[t, t_m]$. Τότε $0 \le \chi_{[0,t]} \le f_m \le 1$, για κάθε m και (f_m) φθίνουσα ακολουθία που συγκλίνει κατά σημείο στην $\chi_{[0,t]}$.

Για αυθαίρετο $x \in H$, θεωρούμε το μέτρο $\mu_x(\Omega) = \langle E_A(\Omega)x, x\rangle$. Τότε:
$\langle f_m(A)x, x\rangle = \left\langle \int f_m(s)\,dE(s)\,x, x\right\rangle = \int f_m(s)\,d_{\mu_x}(s) \to \int \chi_{[0,t]}(s)\,d_{\mu_x}(s) = \langle E_A[0,t]x, x\rangle$ από το θεώρημα μονότονης σύγκλισης.

Η απόδειξη θα ολοκληρωθεί αν δείξουμε ότι $SOT - lim \int f_m \circ \Phi(N)\,dN = N_o$.

$$\text{Έχουμε ότι: } \int f_m \circ \Phi(N)\,dN = \int_o^{N_o} f_m \circ \Phi(N)\,dN + \int_{N_o}^{N_m} f_m \circ \Phi(N)\,dN + \int_{N_m}^{I} f_m \circ \Phi(N)\,dN =$$

$$= \int_o^{N_o} 1\,dN + \int_{N_o}^{N_m} f_m \circ \Phi(N)\,dN + \int_{N_m}^{I} 0\,dN = N_o + \int_{N_o}^{N_m} f_m \circ \Phi(N)\,dN.$$

Όμως $0 \le \int_{N_o}^{N_m} f_m \circ \Phi(N)\,dN \le \int_{N_o}^{N_m} 1\,dN = N_m - N_o$, διότι η απεικόνιση $f \to \int f \circ \Phi(N)\,dN$ είναι θετική γραμμική. Επομένως $SOT - lim \int f_m \circ \Phi(N)\,dN = N_o$.

Δείξαμε ότι $N = E_A[0, \Phi(N)]$ για κάθε $N \in \mathcal{N}$. Θα δείξουμε ότι $\Phi^{-1}(t)_- = E_A[0,t)$ για κάθε $t \in \Phi(\mathcal{N})$.

Έστω $\Phi^{-1}(t)_- < \Phi^{-1}(t)$ και $\Phi\left(\Phi^{-1}(t)_-\right) = s$. Τότε $s < t$ και $[0,s] \cap \Phi(\mathcal{N}) = [0,\theta) \cap \Phi(\mathcal{N})$ για κάθε $\theta \in (s,t)$. Επομένως $E_A[0,s] = E_A[0,\theta)$ για κάθε $\theta \in (s,t)$ και άρα $\Phi^{-1}(t)_- = E_A[0,s] = \vee\{E_A[0,\theta) / \theta \in (s,t)\} = E_A\left(\bigcup_{s<\theta<t}[0,\theta)\right) = E_A[0,t)$.

Έστω $\Phi^{-1}(t)_- = \Phi^{-1}(t)$, τότε $\Phi^{-1}(t)_- = \vee\{N / N < \Phi^{-1}(t)\} = \vee\{E_A[0,\Phi(N)] / \Phi(N) < t\} \leq E_A[0,t) \leq E_A[0,t] = \Phi^{-1}(t)$ και συνεπώς $\Phi^{-1}(t)_- = E_A[0,t)$.

γ) Επειδή για κάθε διαμέριση $\mathcal{F}$ του $\mathcal{N}$ έχουμε $I_{\mathcal{F}}(\Phi) \in \mathcal{N}''$ τελικά $A \in \mathcal{N}''$ και άρα $\{A\}'' \subseteq \mathcal{N}''$. Όμως $\mathcal{N} = \{E_A[0,t] / t \in \Phi(\mathcal{N})\}$ και $\{E_A(\Omega) / \Omega$ *Borel* υποσύνολο του $[0,1]\ \}'' = \{A\}''$ από το 1.5.1. Επομένως $\mathcal{N}'' \subseteq \{A\}''$.

3.10. Πόρισμα: Αν $\mathcal{M}$ αβελιανή von Neumann άλγεβρα που δρα σε διαχωρίσιμο χώρο, υπάρχει αυτοσυζυγής τελεστής A ώστε $\{A\}'' = \mathcal{M}$.

Απόδειξη: Άμεση από τα 2.11, 3.9.

4. ΜΟΝΑΔΙΑΙΕΣ ΙΣΟΔΥΝΑΜΙΕΣ ΓΙΑ MASA.

4.1. Ορισμοί:

α) Έστω $\mathcal{M}_1$, $\mathcal{M}_2$ άλγεβρες von Neumann που δρούν στους χώρους H_1, H_2 αντίστοιχα. Λέμε ότι αυτές είναι μοναδιαία ισοδύναμες αν υπάρχει μοναδιαίος τελεστής $U : H_1 \to H_2$ ώστε: $U \mathcal{M}_1 U^* = \mathcal{M}_2$. Συμβολίζουμε $\mathcal{M}_1 \sim \mathcal{M}_2$.

Μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι κάθε μοναδιαία ισοδυναμία μεταξύ αλγεβρών von Neumann είναι και *- ισομορφισμός.

Εύκολα επίσης διαπιστώνεται ότι αν δύο αβελιανές άλγεβρες von Neumann είναι μοναδιαία ισοδύναμες και μία απ' αυτές είναι masa , τότε είναι και η άλλη masa.

β) Έστω οι τελεστές $T_i \in B(H_i)$, $i = 1, 2$. Αυτοί λέγονται μοναδιαία ισοδύναμοι αν υπάρχει μοναδιαίος τελεστής $U : H_1 \to H_2$ ώστε $UT_1U^* = T_2$. Συμβολίζουμε $T_1 \sim T_2$.

4.2. Πρόταση: Έστω $\mathcal{M}$ masa που δρα σε διαχωρίσιμο χώρο Χίλμπερτ H, τότε υπάρχει μεγιστικό nest $\mathcal{N}$ ώστε $\mathcal{N}'' = \mathcal{M}$.

Απόδειξη:

Από το 2.11. υπάρχει nest $\mathcal{N}_o : \mathcal{N}_o'' = \mathcal{M}$. Επεκτείνουμε το $\mathcal{N}_o$ σε μεγιστικό nest $\mathcal{N}$ στον H. Τότε $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{M}$ και άρα $\mathcal{N}'' = \mathcal{M}$.

Πράγματι έστω P προβολή του $\mathcal{N}$. Τότε αφού συγκρίνεται με κάθε προβολή του $\mathcal{N}_o$ ανήκει στην άλγεβρα $\mathcal{N}_o' = \mathcal{M}'$. Όμως $\mathcal{M}' = \mathcal{M}$ αφού η $\mathcal{M}$ είναι masa και συνεπώς $P \in \mathcal{M}$.

Σχόλια: α) Το αντίστροφο της 4.2. δεν ισχύει πάντα. Δηλαδή αν το $\mathcal{N}$ είναι μεγιστικό nest, τότε η άλγεβρα $\mathcal{N}''$ δεν είναι απαραίτητα masa.

Ως αντιπαράδειγμα θεωρούμε το nest $\mathcal{N} = \left\{ \begin{pmatrix} M_{\chi_{[0,t]}} & 0 \\ 0 & M_{\chi_{[0,t]}} \end{pmatrix} / \ 0 \le t \le 1 \right\}$

που δρα στον χώρο $\left(L^2[0,1], \lambda\right)^{(2)}$, λ μέτρο Lebesgue. Το $\mathcal{N}$ είναι συνεχές και άρα μεγιστικό nest. Τότε $\mathcal{N}'' = \mathcal{M}_\lambda \oplus \mathcal{M}_\lambda$. Πράγματι αν $f \in L^\infty(\lambda)$ όπως είδαμε στο 2.3.α. υπάρχει δίκτυο από κλιμακωτές συναρτήσεις $(g_i)_i : M_{g_i} \xrightarrow{SOT} M_f$ και επομένως :

$$\begin{pmatrix} M_{g_i} & 0 \\ 0 & M_{g_i} \end{pmatrix} \xrightarrow{SOT} \begin{pmatrix} M_f & 0 \\ 0 & M_f \end{pmatrix}.$$

Όμως είναι εύκολο να διαπιστώσουμε ότι:

$$(\mathcal{M}_\lambda \oplus \mathcal{M}_\lambda)' = = \left\{ \begin{pmatrix} M_{f_1} & M_{f_2} \\ M_{f_3} & M_{f_4} \end{pmatrix} / f_i \in L^\infty[0,1] \ \ i = 1,2,3,4 \right\} \neq \mathcal{N}''.$$

β) Όμως αν το $\mathcal{N}$ είναι μεγιστικό και ατομικό nest , τότε η άλγεβρα $\mathcal{N}''$ είναι masa. Πράγματι έστω $\{ N_n - (N_n)_- / n \in \mathbb{N} \}$ τα άτομα του nest . Αφού το nest είναι μεγιστικό, τότε $dim(N_n - N_{n-}) = 1$ και αν $(N_n - N_{n-})(H) = [e_n]$ έχουμε ότι: $H = \overline{[e_n / n \in \mathbb{N}]}$.

Θεωρούμε το διάνυσμα $x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} e_n$. Αυτό είναι κυκλικό για την άλγεβρα $\mathcal{N}''$ διότι $\overline{[\mathcal{N}'' \ x]} \supseteq \overline{[(N_n - (N_n)_-(x) / n \in \mathbb{N})]} = \overline{[\frac{1}{n} \cdot e_n / n \in \mathbb{N}]} = H$. Επομένως η άλγεβρα $\mathcal{N}''$ είναι masa.

4.3. Θεώρημα: Έστω $\mathcal{M}$ masa που δρα στον χώρο H.

α) Υπάρχει αυτοσυζυγής τελεστής A ώστε $\mathcal{M} = \{A\}''$, και μέτρο πιθανότητας μ ορισμένο στα Borel υποσύνολα του $\sigma(A)$ ισοδύναμο προς το φασματικό μέτρο του A, ώστε η $\mathcal{M}$ να είναι μοναδιαία ισοδύναμη με την πολλαπλασιαστική άλγεβρα $\mathcal{M}_\mu$.

β) Έστω μεγιστικό nest $\mathcal{N}$ ώστε $\mathcal{M} = \mathcal{N}''$. Τότε ισχύουν:

β-1) Αν το $\mathcal{N}$ είναι συνεχές nest, τότε η $\mathcal{M}$ είναι μοναδιαία ισοδύναμη με την άλγεβρα $\mathcal{M}_\lambda$, όπου λ το μέτρο Lebesgue στην Borel σ-άλγεβρα του $[0,1]$.

β-2) Αν το $\mathcal{N}$ περιέχει k το πλήθος άτομα, τότε η $\mathcal{M}$ είναι μοναδιαία ισοδύναμη με την άλγεβρα $\mathcal{M}_\lambda \oplus \mathcal{M}_{l^\infty(k)}$ όπου $\mathcal{M}_{l^\infty(k)}$ η πολλαπλασιαστική άλγεβρα στον χώρο $l^2(S_k)$, S_k σύνολο με k στοιχεία, $k \in \{\infty,1,2,\ldots\}$. Ιδιαίτερα αν το $\mathcal{N}$ είναι ατομικό nest, τότε η $\mathcal{M}$ είναι μοναδιαία ισοδύναμη ακριβώς με την $\mathcal{M}_{l^\infty(k)}$.

Απόδειξη:

α) Από το 4.2 υπάρχει (μεγιστικό) nest $\mathcal{N}$: $\mathcal{M} = \mathcal{N}''$. Επειδή η $\mathcal{M}$ είναι masa έχει κυκλικό μοναδιαίο διάνυσμα x. Από το 3.5. ορίζεται ομοιομορφική εμφύτευση $\Phi_x : \mathcal{N} \to [0,1]: \Phi_x(N) = \| Nx \|^2$. Τότε αν $A = \int \Phi_x(N) dN$ όπως στο 3.9, έχουμε ότι $\mathcal{M} = \{A\}''$ και $\sigma(A) = \Phi_x(\mathcal{N})$. Πάλι από το 3.5 ορίζεται μέτρο Borel πιθανότητας μ στο $[0,1]$, ώστε $\mu((s,t]) = t - s$ για κάθε $t,s \in \Phi_x(\mathcal{N})$ και $supp(\mu) \subseteq \Phi_x(\mathcal{N})$.

Το μ είναι ισοδύναμο προς το φασματικό μέτρο του A. Πράγματι αν $\nu(\Omega)=\langle E_A(\Omega)x,x\rangle$ για κάθε Ω Borel υποσύνολο του $\sigma(A)$ τότε για κάθε $s,t\in\sigma(A)$ έχουμε $\nu((s,t])=\langle E_A(s,t]x,x\rangle$. Όμως από το 3.9 $E_A(s,t]=\Phi^{-1}(t)-$ $-\Phi^{-1}(s)$ και άρα $\nu((s,t])=\langle\Phi^{-1}(t)x,x\rangle-\langle\Phi^{-1}(s)x,x\rangle=t-s=\mu((s,t])$. Επομένως τα μέτρα ν,μ συμπίπτουν από το 1.4.5. και αφού το x είναι διαχωρίζον διάνυσμα στην άλγεβρα $\mathcal{M}$, το μ είναι ισοδύναμο προς το φασματικό μέτρο του A.

Παραμετρικοποιούμε το $\mathcal{N}$ μέσω της Φ_x : $\mathcal{N}=\{N_s\,/\,\Phi_x(N_s)=s\}$. Έστω $\mathcal{K}_o$ το σύνολο των κλιμακωτών συναρτήσεων στον $(L^2[0,1],\mu)$ τότε ορίζουμε U_o: $\mathcal{K}_o\to$ H ως εξής : για $f_s=\chi_{[0,s]}$, $s\in\Phi_x(\mathcal{N})$, να είναι $U_o(f_s)=N_s(x)$ και επεκτείνουμε γραμμικά στο $\mathcal{K}_o$.

Η U_o είναι καλά ορισμένη αφού για κάθε $t\in[0,1]$ υπάρχει $s\in\Phi_x(\mathcal{N})$: $[0,s]=[0,t]$ μ.σ.π. Επιπλέον είναι ισομετρική αφού : $\|(U_o(f_s))\|^2=\|(N_s(x))\|^2=$ $=\Phi_x(s)=\mu([0,s])=\int|f_s|^2d\mu$ για κάθε $s\in\Phi_x(\mathcal{N})$.

Επειδή όπως δείξαμε στο 2.3.α $\overline{\mathcal{K}_o}^{\|\cdot\|_2}=L^2(\mu)$ η U_o επεκτείνεται σε ισομετρική εμφύτευση $U:L^2(\mu)\to H$. Θα αποδείξουμε ότι η U είναι επί. Έχουμε: $U(L^2(\mu))=\overline{U(\mathcal{K}_o)}^{\|\cdot\|}\geq\overline{[N_s(x)/\,s\in\Phi_x(\mathcal{N})]}^{\|\cdot\|}$. Αρκεί να δείξουμε ότι το σύνολο $[N(x)\;/\;N\in\mathcal{N}\;]$ είναι πυκνό στο χώρο H.

Έστω $y\in H$ και $\varepsilon>0$. Αφού $\overline{\mathcal{M}x}^{\|\cdot\|}=H$ υπάρχει $A\in\mathcal{M}:\|A(x)-y\|<\frac{\varepsilon}{2}$ (1).

Όμως $\mathcal{N}''=\mathcal{M}$, άρα υπάρχει δίκτυο από γραμμικούς συνδυασμούς στοιχείων του $\mathcal{N}$, $(P_i)_i:P_i\xrightarrow{SOT}A$. Οπότε $P_i(x)\to A(x)$ και συνεπώς υπάρχει i_o : $:\|P_{i_o}(x)-A(x)\|<\frac{\varepsilon}{2}$ (2).

Από τις (1), (2) έχουμε ότι $\|P_{i_o}(x)-y\|<\varepsilon$, ενώ $P_{i_o}(x)\in[N(x)/\,N\in\mathcal{N}\;]$.

Θα δείξουμε ότι $UM_{f_s}=N_sU:L^2(\mu)\to L^2(\mu)$, για κάθε $s\in\Phi_x(\mathcal{N})$. Αρκεί γι΄αυτό να δείξουμε : $UM_{f_s}\big|_{\mathcal{K}_o}=N_sU\big|_{\mathcal{K}_o}$.

Πράγματι για κάθε $t\in\Phi_x(\mathcal{N})$ έχουμε :
$UM_{f_s}(f_t)=U(f_s\cdot f_t)=U_o(f_{min\{t,s\}})==N_{min\{t,s\}}(x)=N_s(N_t(x))=N_sU(f_t)$.

Έχουμε δείξει ότι $U^* N_s U = M_{f_s} \in \mathcal{M}_\mu$ για κάθε $s \in \Phi_x(\mathcal{N})$. Επομένως $U^* \mathcal{N} U \subseteq \mathcal{M}_\mu$ και άρα $U^* \mathcal{N}'' U \subseteq \mathcal{M}_\mu$. Όμως η άλγεβρα $\mathcal{N}'' = \mathcal{M}$ είναι masa και άρα έχουμε $U^* \mathcal{M} U = \mathcal{M}_\mu$.

Σχόλιο: Στο (α) δεν χρησιμοποιήθηκε πουθενά η μεγιστικότητα του $\mathcal{N}$ Θα χρησιμοποιηθεί όμως καίρια στο (β).

β-1) Έστω $\mathcal{N}$ συνεχές nest ώστε $\mathcal{M} = \mathcal{N}''$. Τότε αν Φ_x και μ όπως στο (α) από την παρατήρηση 3.7.α $\Phi_x(\mathcal{N}) = [0,1]$ και το μ συμπίπτει με το Borel μέτρο Lebesgue στο $[0,1]$. Συνεπώς από το (α) η $\mathcal{M}$ είναι ισοδύναμη με την πολ/κή άλγεβρα $\mathcal{M}_\lambda$ του χώρου $L^2(\lambda)$.

β-2) Έστω ότι το $\mathcal{N}$ δεν είναι συνεχές. Τότε αφού είναι μεγιστικό τα άτομά του είναι μονοδιάστατα (2.7). Έστω $k \in \{\infty, 1, 2, \ldots\}$ το πλήθος των ατόμων και S_k σύνολο με k στοιχεία. Θέτουμε $C_{oo}(S_k) = \{ f : S_k \to \mathbb{C} / \ f(x) \neq 0$ για πεπερασμένο πλήθος $x \in S_k \}$.

Υποθέτουμε ότι τα άτομα $\{E_s / s \in S_k\}$ είναι προβολές επί των χώρων $[e_s]$, $s \in S_k$, όπου $\|e_s\| = 1$ για κάθε s. Ορίζουμε απεικόνιση $U_o : (C_{oo}(S_k), \| \ \|_2) \to H$ ώστε $U_o(f) = \sum_{s \in S_k} f(s) e_s$. (Παρατήρησε ότι αν $k < \infty$ $C_{oo}(S_k) = l^2(S_k)$).

Τότε η U_o είναι γραμμική και ισομερική : $\|U_o(f)\|^2 = \left\| \sum_{s \in S_k} f(s) e_s \right\|^2 = \sum_{s \in S_k} |f(s)|^2 =$ $= \|f\|_2^2$. Επομένως επεκτείνεται σε ισομετρία U από τον χώρο $C_{oo}(S_k)^{-\|\cdot\|_2} = l^2(S_k)$ επί του χώρου $[e_s / s \in S_k]^{-\|\cdot\|}$. Διακρίνουμε τώρα δύο περιπτώσεις :

1η. Αν το $\mathcal{N}$ είναι ατομικό nest, τότε $[e_s / s \in S_k]^{-\|\cdot\|} = H$ και συνεπώς η $U : l^2(S_k) \to H$ είναι ισομερία επί.

Θα δείξουμε ότι : $UM_f = \left(\sum_{s \in S_k} f(s) E_s \right) U$ για κάθε $f \in C_{oo}(S_k)$. Έστω $g \in C_{oo}(S_k)$, τότε : $UM_f(g) = U_o(fg) = \sum_{s \in S_k} f(s) g(s) e_s = \left(\sum_{s \in S_k} f(s) e_s \right)$.

$\cdot\left(\sum_{s\in S_k} g(s)e_s\right)=\left(\sum_{s\in S_k} f(s)E_s\right)\cdot\left(\sum_{s\in S_k} g(s)e_s\right)=\left(\sum_{s\in S_k} f(s)E_s\right)U(g)$ όπου στην προηγούμενη ισότητα χρησιμοποιήσαμε ότι $E_s(e_t)=\delta_{st}(e_s)$. Δείξαμε ότι $UM_fU^* = \sum_{s\in S_k} f(s)E_s \in \mathcal{N}''= \mathcal{M}$ για κάθε $f \in C_{oo}(S_k)$.

Θα δείξουμε ότι : $\{M_g / g \in C_{oo}(S_k)\}''= \mathcal{M}_{l^\infty(k)}$ και άρα από την προηγούμενη σχέση έχουμε $U\mathcal{M}_{l^\infty(k)}U^* \subseteq \mathcal{M}$. Παρατηρούμε ότι $\{M_g / g \in C_{oo}(S_k)\}''\subseteq \mathcal{M}_{l^\infty(k)}$. Όμως η άλγεβρα $\{M_g / g \in C_{oo}(S_k)\}''$ είναι masa και άρα συμπίπτει με την $\mathcal{M}_{l^\infty(k)}$.

Πράγματι το διάνυσμα $a=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\cdot e_k$ είναι κυκλικό γι' αυτήν διότι:

$$[M_f(a)/ f \in C_{oo}(S_k)]^{-} \supseteq [M_{ne_n}(a)/ n\in\mathbb{N}]^{-} = [e_n / n\in\mathbb{N}] = l^2(S_k)$$

Επειδή $U\mathcal{M}_{l^\infty(k)}U^* \subseteq \mathcal{M}$ και η $\mathcal{M}_{l^\infty(k)}$ είναι masa έχουμε ότι $U\mathcal{M}_{l^\infty(k)}U^* = \mathcal{M}$.

2η. Αν το $\mathcal{N}$ δεν είναι ατομικό nest, τότε $H_o = [e_s / s\in S_k]^{-\|\ \|} \underset{\neq}{<} H$. Θεωρούμε την ορθογώνια διάσπαση του $H = H_o \oplus H_o^{\perp}$. Τότε οι άλγεβρες $\mathcal{M}_o = \mathcal{M}|_{H_o}$, $\mathcal{M}_1 = \mathcal{M}|_{H_o^{\perp}}$ είναι masa από το 1.3.1. και η $\mathcal{M}\sim\mathcal{M}_o\oplus\mathcal{M}_1$ μέσω του τελεστή $H \to H_o \oplus H_o^{\perp} : x \to (P(x), P^{\perp}(x))$ όπου P η προβολή στην H_o.

Όμως $\mathcal{M}_o = \{\ \mathcal{N}|_P\ \}''$ και $\mathcal{M}_1 = \{\ \mathcal{N}|_{P^\perp}\ \}''$ από το 1.3.5. Από το 2.10. το $\mathcal{N}|_P$ είναι ατομικό nest με το ίδιο πλήθος ατόμων k με το $\mathcal{N}$. Επίσης είναι μεγιστικό αφού τα άτομά του είναι μονοδιάστατα. Επόμενα από την προηγούμενη περίπτωση $\mathcal{M}_o\sim\mathcal{M}_{l^\infty(k)}$. Πάλι από το 2.10. το $\mathcal{N}|_{P^\perp}$ είναι συνεχές nest και άρα από το (β-1) $\mathcal{M}_1\sim\mathcal{M}_\lambda$. Συνεπώς $\mathcal{M}\sim\mathcal{M}_\lambda\oplus\mathcal{M}_{l^\infty(k)}$.

4.4. Παρατηρήσεις

4.4.1. Στο (α) του θεωρήματος 4.3. δείξαμε ότι υπάρχει μοναδιαία ισοδυναμία $\mathcal{M}_\mu \to \mathcal{M} : M_f \to UM_fU^*$ και άρα ένας $*$-ισομορφισμός $L^\infty(\sigma(A),\mu)\to\{A\}''$: $: f \to UM_fU^*$. Θα δείξουμε ότι $UM_fU^* = \int f\, d_{E_A}$ για κάθε $f\in L^\infty(\mu)$.
Αρκεί γι αυτό να δείξουμε ότι $UM_{\chi_\Omega}U^* = E_A[\Omega]$ για κάθε Borel υποσύνολο Ω του $\sigma(A)$. Αν $s, t \in \sigma(A)$ με $s<t$ έχουμε ήδη δεί στην απόδειξη του 4.3.α. ότι $E_A((s,t]\cap\sigma(A)) =$ $= N_t - N_s = UM_{f_t}U^* - UM_{f_s}U^* = U(M_{f_t} - M_{f_s})U^* = UM_{\chi_{(s,t]\cap\sigma(A)}}U^*$. Επομένως

αφού τα φασματικά μέτρα $\Omega \rightarrow E_A[\Omega]$ και $\Omega \rightarrow UM_{\chi_\Omega}U^*$ συμπίπτουν στο σύνολο $\{[s,t] \cap \sigma(A) / s,t \in \sigma(A)\}$ συμπίπτουν παντού από το 1.4.5.

4.4.2. Στο 4.3.α. δείξαμε ότι αν το $\mathcal{N}$ είναι nest στο χώρο H ώστε η $\mathcal{N}''$ να είναι masa, τότε υπάρχει μέτρο μ ισοδύναμο προς τα φασματικό μέτρο της $\mathcal{N}''$ και $U : (L^2[0,1], \mu) \rightarrow H$ μοναδιαίος τελεστής ώστε $U\mathcal{N}U^* = \mathcal{M}$ όπου $\mathcal{M}$ το nest $\{M_{\chi_{[0,s]}} / 0 \le s \le 1\}$ στον χώρο $L^2(\mu)$. Επομένως αν το $\mathcal{N}$ είναι συνεχές nest τότε όπως είδαμε στο 4.3.β. το μ είναι το μέτρο Lebesgue στο $[0,1]$ και άρα το $U\mathcal{N}U^*$ είναι το nest του Volterra.

4.4.3. Μία άλλη ισοδυναμία που μπορούμε να πάρουμε για μία masa $\mathcal{M}$ είναι ότι : $\mathcal{M} \sim \mathcal{M}_{\lambda_o} \oplus \mathcal{M}_\nu$, όπου λ_o μη ατομικό και ν ατομικό μέτρο Borel στο $[0,1]$.
Στο 4.3.α. δείξαμε ότι $\mathcal{M} \sim \mathcal{M}_\mu$, όπου το μ από το 3.6. δίδεται από την σχέση :

$\mu(S) = \lambda(S \cap \sigma(A)) + \sum_{n=1}^{\infty}(r_n - l_n)\delta_{\{r_n\}}(S)$ για κάθε Borel υποσύνολο S του $[0,1]$, ενώ

$[0,1] \setminus \sigma(A) = \bigcup_{n=1}^{\infty}(l_n, r_n)$, (l_n, r_n) ξανά ανά δύο . Ορίζουμε Borel μέτρα λ_o και ν στο

$[0,1]$ ώστε : $\lambda_o(S) = \lambda(S \cap \sigma(A))$, $\nu(S) = \sum_{n=1}^{\infty}(r_n - l_n)\delta_{\{r_n\}}(S)$ για κάθε S και έχουμε

ότι $\mu = \lambda_o + \nu$.

Ορίζουμε απεικόνιση $T : (L^2[0,1], \mu) \rightarrow (L^2[0,1], \lambda_o) \oplus (L^2[0,1], \nu) : T(f) = (f, f)$.
Η T είναι ισομετρική αφού $\|f\|_\mu^2 = \int |f(s)|^2 d\mu(s) = \int |f(s)|^2 d\lambda_o(s) + \int |f(s)|^2 d\nu(s) =$
$= \|f\|_{\lambda_o}^2 + \|f\|_\nu^2$. Επίσης είναι επί, αφού αν $(f, g) \in L^2(\lambda_o) \oplus L^2(\nu)$, θεωρούμε :

$$h(t) = \begin{cases} = f(t), \ t \in X \setminus \{r_n\} \\ = g(r_n), \ t = r_n, \ n \in \mathbb{N} \quad (1) \\ = 0, \text{ αλλού στο } [0,1]. \end{cases}$$

Τότε $h = f$, $\lambda_o \cdot \sigma \cdot \pi$ και $h = g$, $\nu \cdot \sigma \cdot \pi$. Άρα $(h, h) = (f, g)$.

Παρατηρούμε ότι για κάθε $l \in L^\infty(\mu)$ είναι $l \in L^\infty(\lambda_o) \cap L^\infty(\nu)$ και $T \circ M_l \circ T^*(f, g) = T \circ M_l(h) = T(l \cdot h)$ όπου $h \in L^2(\mu)$ ώστε $h = f \ \lambda_o \cdot \sigma \cdot \pi$ και $h = g \ \nu \cdot \sigma \cdot \pi$. Επομένως $T \circ M_l \circ T^*(f, g) = (l \cdot h, l \cdot h) = (l \cdot f, l \cdot g) =$
$= (M_l \oplus M_l)(f, g)$. Δείξαμε ότι $T\mathcal{M}_\mu T^* \subseteq \mathcal{M}_{\lambda_o} \oplus \mathcal{M}_\nu$ και άρα αφού η $\mathcal{M}_{\lambda_o} \oplus \mathcal{M}_\nu$ είναι αβελιανή άλγεβρα και η $T\mathcal{M}_\mu T^*$ masa τελικά συμπίπτουν.

Συμπεραίνουμε ότι : $\mathcal{M} \sim \mathcal{M}_\mu \sim \mathcal{M}_{\lambda_o} \oplus \mathcal{M}_\nu$.

4.5. Πρόταση: Αν δύο masa $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$ είναι $*$-ισόμορφες τότε είναι μοναδιαία ισοδύναμες.Μάλιστα ο $*$-ισόμορφισμός επάγεται από μοναδιαίο τελεστή.

Απόδειξη:

Έστω $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$ masa, $*$-ισόμορφες που δρούν στους χώρους Χίλμπερτ H_1, H_2 αντίστοιχα. Από το θεώρημα 4.4. υπάρχουν μ_1, μ_2 μέτρα πιθανότητας ορισμένα στα Borel υποσύνολα συμπαγών χώρων X, Y αντίστοιχα ώστε $\mathcal{M}_1 \sim \mathcal{M}_{\mu_1}$, $\mathcal{M}_2 \sim \mathcal{M}_{\mu_2}$. Επομένως υπάρχουν $*$-ισομορφισμοί $\widetilde{\Phi} : \mathcal{M}_{\mu_1} \to \mathcal{M}_{\mu_2}$, $\Phi : L^\infty(\mu_1) \to L^\infty(\mu_2)$ ώστε αν $\widetilde{\Phi}(M_f) = M_g$ τότε $\Phi(f) = g$.

Παρατηρούμε ότι η Φ απεικονίζει αμφιμονοσήμαντα και επί τις χαρακτηριστικές συναρτήσεις των Borel υποσυνόλων του X σ'αυτές του Y. Πράγματι αν Ω Borel υποσύνολο του X έχουμε : $\Phi(\chi_\Omega \cdot \chi_\Omega) = \Phi(\chi_\Omega)$ και άρα $\Phi(\chi_\Omega)(\Phi(\chi_\Omega) - 1) = 0$. Επόμενα αν $\overline{\Omega} = \{t \in Y / \Phi(\chi_\Omega)(t) \neq 0\}$ έχουμε $\Phi(\chi_\Omega) = \chi_{\overline{\Omega}}$.

Ορίζουμε στα Borel υποσύνολα του Y μέτρο ν_2 ώστε $\nu_2(\Omega) = \mu_1(\{t \in X / / \Phi^{-1}(\chi_\Omega)(t) \neq 0\})$. Τότε τα μέτρα ν_2, μ_2 είναι ισοδύναμα στον Y. Πράγματι $\nu_2(\Omega) = 0 \Leftrightarrow \Phi^{-1}(\chi_\Omega) = 0 \Leftrightarrow \chi_\Omega = 0 \Leftrightarrow \mu_2(\Omega) = 0$.

Άρα υπάρχει $f \in L^2(\mu_2)$, $f > 0$ $\mu_2 \cdot \sigma \cdot \pi$, ώστε $\nu_2(\Omega) = \int_\Omega f^2 \, d\mu_2$ για κάθε Ω Borel υποσύνολο του Y.

Ορίζουμε συνάρτηση $V_o : V_o(\chi_\Omega) = \Phi(\chi_\Omega)$ και επεκτείνουμε γραμμικά στο σύνολο των απλών συναρτήσεων του $L^2(\mu_1)$.Τότε η V_o είναι ισομετρική από το σύνολο των απλών συναρτήσεων του $L^2(\mu_1)$ επί των απλών συναρτήσεων του $L^2(\nu_2)$. Πράγματι :

$\|V_o(\chi_\Omega)\|_2^2 = \int |\Phi(\chi_\Omega)|^2 d\nu_2 = \nu_2([\Phi(\chi_\Omega) \neq 0]) = \mu_1(\Omega) = \|\chi_\Omega\|_2^2$. Άρα η V_o επεκτείνεται σε ισομετρία επί: $V : L^2(\mu_1) \to L^2(\nu_2)$.

Ορίζουμε $W : L^2(\nu_2) \to L^2(\mu_2)$: $g \to fg$ πού είναι ισομετρική διότι

$\int |fg|^2 d\mu_2 = \int |g|^2 d\nu_2$ και επί αφού $\frac{1}{f} \in L^2(\nu_2)$.

Άρα ορίζεται ισομετρία επί $U = W \circ V : L^2(\mu_1) \to L^2(\mu_2)$ για την οποία $U(\chi_\Omega) = \Phi(\chi_\Omega) f$ για κάθε Borel σύνολο Ω.

Θα δείξουμε ότι η U επάγει τον $*$-ισομορφισμό $\widetilde{\Phi}$. Δηλαδή θα δείξουμε την μεταθετικότητα του διαγράμματος .

$$
\begin{array}{ccc}
L^2(X,\mu_1) & \xrightarrow{U} & L^2(Y,\mu_2) \\
M_h \downarrow & & \downarrow \widetilde{\Phi}(M_h) = M_{\Phi(h)} \\
L^2(X,\mu_2) & \xrightarrow{U} & L^2(Y,\mu_2)
\end{array}
$$

για κάθε $h \in L^\infty(\mu_1)$.

Θα δείξουμε αρχικά ότι ισχύει για $h = \chi_V$, V Borel υποσύνολο του X.

Για κάθε $g = \chi_\Omega$, Ω Borel υποσύνολο του X έχουμε :
$\widetilde{\Phi}(M_h)U(g) = M_{\Phi(h)}(\Phi(\chi_\Omega)\cdot f) = \Phi(h)\Phi(\chi_\Omega)f = \Phi(\chi_{V\cap\Omega})f = U(\chi_{V\cap\Omega}) = U(h\cdot g) =$
$= UM_h(g)$.

Λόγω γραμμικότητας έχουμε $\widetilde{\Phi}(M_h)U = UM_h$ πάνω στο σύνολο των απλών συναρτήσεων και λόγω της $\|\cdot\|_2$ - πυκνότητας των απλών συναρτήσεων έχουμε ότι $\widetilde{\Phi}(M_h)U = UM_h$ παντού στον $L^2(\mu_1)$.

Έχουμε δείξει ότι $\widetilde{\Phi}(M_h)U = UM_h$ για κάθε h απλή συνάρτηση. Αν τώρα $h \in L^\infty(\mu_1)$ τότε υπάρχει ακολουθία (h_n) από απλές συναρτήσεις : $h_n \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} h$ και άρα $M_{h_n} \xrightarrow{\|\cdot\|} M_h$.

Τότε όμως $\Phi(h_n) \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} \Phi(h)$ και άρα $M_{\Phi(h_n)} = \widetilde{\Phi}(M_{h_n}) \xrightarrow{\|\cdot\|} \widetilde{\Phi}(M_h) =$
$= M_{\Phi(h)}$. Συμπεραίνουμε ότι $\widetilde{\Phi}(M_h)U = UM_h$ για κάθε $h \in L^\infty(\mu_1)$.

Δείξαμε ότι $\mathcal{M}_{\mu_1} \sim \mathcal{M}_{\mu_2}$ και συνεπώς $\mathcal{M}_1 \sim \mathcal{M}_2$.

5. ΜΟΝΑΔΙΑΙΕΣ ΙΣΟΔΥΝΑΜΙΕΣ ΓΙΑ NESTS ΧΩΡΙΣ ΠΟΛΛΑΠΛΟΤΗΤΑ.

5.1. Ορισμός: Ένα nest $\mathcal{N}$ λέμε ότι δεν έχει πολλαπλότητα αν η άλγεβρα $\mathcal{N}''$ είναι masa.

5.2. Ορισμός: έστω $\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2$ nests στους χώρους H_1, H_2 αντίστοιχα. Αυτά ονομάζονται μοναδιαία ισοδύναμα αν υπάρχει μοναδιαίος τελεστής $U : H_1 \to H_2$ ώστε $U\mathcal{N}_1U^* = \mathcal{N}_2$. Συμβολίζουμε $\mathcal{N}_1 \sim \mathcal{N}_2$.

5.3. Παρατηρήσεις:

1). Από τον προηγούμενο ορισμό παρατηρούμε ότι αν $\mathcal{N}_1 \sim \mathcal{N}_2$ τότε $\mathcal{N}''_1 \sim \mathcal{N}''_2$. Όμως δεν συμβαίνει το αντίστροφο, ακόμα και αν οι άλγεβρες $\mathcal{N}''_1$, $\mathcal{N}''_2$ είναι masa. Θα φέρουμε το εξής αντιπαράδειγμα : τα nests $\mathcal{N}_1$, $\mathcal{N}_2$ που ορίσαμε στα 2.3.β, 2.3.γ. είδαμε ότι είναι ατομικά και μεγιστικά (2.8), επομένως οι άλγεβρες $\mathcal{N}''_1$, $\mathcal{N}''_2$ που παράγουν είναι masa (σχόλιο (β) στο 4.2). Από το θεώρημα 4.3. μάλιστα διαπιστώνουμε ότι $\mathcal{N}''_1 \sim \mathcal{M}_{l^\infty(\mathbb{N})} \sim \mathcal{N}''_2$.

Όμως τα $\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2$ δεν μπορεί να είναι μοναδιαία ισοδύναμα αφού το $\mathcal{N}_1$ περιέχει αριθμήσιμο πλήθος στοιχείων, ενώ το $\mathcal{N}_2$, φανερά, υπεραριθμήσιμο πλήθος στοιχείων. Συμπεραίνουμε ότι υπάρχει αριθμήσιμου πλήθους nest $\mathcal{M}_2$ στον χώρο $L^2((0,1],\mu)$ ώστε $\mathcal{M}''_2 = \mathcal{N}''_2 = \mathcal{M}_\mu$, που είναι ισοδύναμο προς το $\mathcal{N}_1$ και το οποίο θα προσδιορίσουμε . Θέτουμε $H_1 = l^2(\mathbb{N})$, $\mathcal{N}_1 = \{0, P_n, n \in \mathbb{N}, I\}$ όπου P_n η προβολή στο χώρο $[e_1, e_2, ..., e_n]$, $n \in \mathbb{N}$.

Αν $H_2 = L^2(\mu)$, τότε η ισομετρία που περιγράφεται στο θεώρημα 4.3. είναι ακριβώς:

$$U : H_1 \to H_2 : U((a_n)_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot 2^{\frac{n}{2}} \chi_{\{q_n\}}$$

$$\text{με } U^* : H_2 \to H_1 : U^*((f)) = (a_n)_n : a_n = \frac{f(q_n)}{2^{\frac{n}{2}}},\ n \in \mathbb{N}.$$

Ενδιαφερόμαστε για το nest $\mathcal{M}_2 = U\mathcal{N}_1U^*$. Παρατηρούμε ότι : $UP_nU^*(f) = \sum_{k=1}^{n} f(q_k) \cdot \chi_{\{q_k\}} = \left(\sum_{k=1}^{n} \chi_{\{q_k\}} \right)(f)$.

Άρα $\mathcal{M}_2=\left\{0, \sum_{k=1}^{m} \chi_{\{q_k\}},\ m \in \mathbb{N},\ I\right\}$.

2). Μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι αν δύο nests $\mathcal{N}_1$, $\mathcal{N}_2$ είναι μοναδιαία ισοδύναμα, τότε επάγεται ένας SOT -ομοιομορφισμός : $\mathcal{N}_1 \to \mathcal{N}_2 : N \to UNU^*$ που διατηρεί την διάταξη: $N \le M \Leftrightarrow UNU^* \le UMU^*$.

Όμως το αντίστροφο δεν συμβαίνει πάντα ακόμα και αν τά $\mathcal{N}_1$, $\mathcal{N}_2$ είναι nests χωρίς πολλαπλότητα. Θα φέρουμε το εξής αντιπαράδειγμα: Έστω X το σύνολο του Cantor και $[0,1] \setminus X = \bigcup_n (l_n, r_n)$ όπου $(l_n, r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ξανά ανά δύο διαστήματα.

Τότε από την παρατήρηση 3.7.4. ορίζεται το nest χωρίς πολλαπλότητα $\mathcal{N}_1=\{M_s \,/\, 0 \le s \le 1\}$, $M_s = M_{\chi_{[0,s]}}$ που δρα στον χώρο $L^2(\mu)$ όπου $\mu(S)=\lambda(S \cap X)+\sum_n (r_n - l_n)\, \delta_{\{r_n\}}(S) = 0 + \sum_n (r_n - l_n)\delta_{\{r_n\}}(S)$.

Θεωρούμε μία συνάρτηση (τύπου Cantor - Lebesgue) $h:[0,1]\to[0,1]$ επί, γνησίως αύξουσα, συνεχής, ώστε $\lambda(Y)>0$, $Y=h(X)$. Τότε $[0,1]\setminus Y = \bigcup_n (h(l_n), h(r_n))$.

Πάλι από την 3.7.4. ορίζεται το nest χωρίς πολλαπλότητα $\mathcal{N}_2 = \{M_{h(s)} \,/\, 0 \le s \le 1\}$ που δρα στον χώρο $L^2(\nu)$ όπου $\nu(S)=\lambda(S \cap Y)+\sum_n (h(l_n), h(r_n))\ \delta_{\{h(r_n)\}}(S)$.

Η απεικόνιση $\widetilde{h}$: $\mathcal{N}_1 \to \mathcal{N}_2$: $\widetilde{h}(M_s)=M_{h(s)}$ είναι επί, SOT συνεχής ($\widetilde{h}=\Psi_x^{-1} \circ h \circ \Phi_x$, $\Phi_x(M_s)=\|M_s x\|^2 = s,\ s\in X$, $\Psi_x(M_{h(s)})=\|M_{h(s)}x\|^2 = h(s),\ s \in X$, $x(t)=1$ όπως στο 3.7.4.) που ασφαλώς διατηρεί την διάταξη.

Επίσης είναι 1-1 αφού αν $s,t \in X$ ώστε $s<t$ και $M_{h(s)} = M_{h(t)} \Rightarrow \nu((h(s),h(t)])=0 \Rightarrow h(t)-h(s)=0$

. (Η τελευταία συνεπαγωγή οφείλεται στο ότι $h(t),h(s) \in Y$ βλέπε 3.5.).

Επόμενα τα $\mathcal{N}_1$, $\mathcal{N}_2$ είναι ισόμορφα μέσω της $\widetilde{h}$. Όμως δεν είναι μοναδιαία ισοδύναμα. Πράγματι έστω ότι υπάρχει SOT-ομοιομορφισμός που διατηρεί την διάταξη $\widetilde{f}$: $\mathcal{N}_1 \to \mathcal{N}_2$ που επάγεται από μοναδιαίο τελεστή U. Τότε ορίζεται $f: X \to Y$ ομοιομορφισμός που διατηρεί την διάταξη $f=\Psi_x \circ \widetilde{f} \circ \Phi_x^{-1}$. Παρατηρούμε για κάθε $s\in X$,$UM_sU^* = M_{f(s)}$ και άρα για κάθε $s,t \in X$ ώστε $s<t$ έχουμε $UM_{\chi_{(s,t]}}U^* = M_{\chi_{f((s,t])}}$

Συμπεραίνουμε ότι τα φασματικά μέτρα : $\Omega \to UM_{\chi_\Omega}U^*$, $\Omega \to M_{\chi_{f(\Omega)}}$ συμπίπτουν (1.4.5.).

Επομένως $UM_{X\setminus\{r_n\}}U^* = M_{Y\setminus\{f(r_n)\}}$. Όμως $\lambda(X\setminus\{r_n\}) = 0$ και άρα $M_{Y\setminus\{f(r_n)\}} = 0$. Άτοπο, αφού $\lambda(Y\setminus\{f(r_n)\}) = \lambda(Y) > 0$.

5.4. Πρόταση: Όλα τα συνεχή nests χωρίς πολλαπλότητα είναι μοναδιαία ισοδύναμα.

Απόδειξη:

Αρκεί να δειχθεί ότι κάθε συνεχές nest $\mathcal{N}$ χωρίς πολλαπλότητα είναι ισοδύναμο προς το nest του Volterra. Αυτό όμως πορίζεται από το θεώρημα 4.3. (βλέπε παρατήρηση 4.4.2.).

5.5. Στην συνέχεια συμβολίζουμε με $\boldsymbol{AbsHom}\,[\mathbf{0,1}]$ το σύνολο όλων των απολύτως συνεχών συναρτήσεων (βλέπε στο [6], ορισμός 14.15) από το [0,1] επί του [0,1] που διατηρούν την διάταξη. Μία τέτοια απεικόνιση είναι ασφαλής 1-1 και άρα από την συμπάγεια του [0,1] είναι ομοιομορφισμός.

Έστω $f:[0,1]\to[0,1]$ ομοιομορφισμός που διατηρεί την διάταξη. Τότε οι ακόλουθοι ισχυρισμοί είναι ισοδύναμοι :
(i) $f \in \boldsymbol{AbsHom}\,[\mathbf{0,1}]$.
(ii) για κάθε Borel σύνολο A ώστε $\lambda(A) = 0$ συνεπάγεται ότι $\lambda(f(A)) = 0$.
(iii) $f^{-1} \in \boldsymbol{AbsHom}\,[\mathbf{0,1}]$.
(iv) για κάθε Borel σύνολο A ώστε $\lambda(f(A)) = 0$ συνεπάγεται ότι $\lambda(A) = 0$.

Πράγματι ο πρώτος συνεπάγεται τον δεύτερο και ο τρίτος τον τέταρτο (από την πρόταση 14.19 στο [6]).

Ο δεύτερος συνεπάγεται τον τρίτο:

Ορίζουμε το μέτρο $\nu(A) = \lambda(f^{-1}(A))$. Τότε αν $\nu(A) = 0$ έχουμε ότι $\lambda(A) = 0$ και επομένως το ν είναι απόλυτα συνεχές ως προς το λ. Από το θεώρημα Radon – Nikodym υπάρχει $h_1 \in L^1(\lambda) : \nu(A) = \int_A h_1\, d\lambda$. Τότε για κάθε t,

$f^{-1}(t) = \lambda([0, f^{-1}(t)]) = \lambda(f^{-1}[0,t]) = \nu([0,t]) = \int_0^t h_1(x) d\lambda(x)$, επομένως η f^{-1} είναι ολοκλήρωμα και άρα απολύτως συνεχής. Με τα ίδια επιχειρήματα ο τέταρτος συνεπάγεται τον πρώτο.

Χρησιμοποιώντας τις προηγούμενες ισοδυναμίες, βλέπουμε ότι αν $f,g \in \mathbf{AbsHom}[0,1]$ τότε οι συναρτήσεις $f^{-1}, f \circ g \in \mathbf{AbsHom}[0,1]$ και άρα το σύνολο $\mathbf{AbsHom}[0,1]$ με την πράξη της σύνθεσης γίνεται ομάδα.

Παρατηρούμε ακόμα ότι αν $f \in \mathbf{AbsHom}[0,1]$ και $h \in L^1(\lambda)$ ώστε $f(t) = \int_0^t h(x) d\lambda(x)$, τότε αφού η f είναι γνησίως αύξουσα ισχύει: $h > 0$ $\lambda.\sigma.\pi.$

5.6. Αν $\mathcal{M}$ nest χωρίς πολλαπλότητα, συμβολίζουμε με $h(\mathcal{M})$ την οικογένεια των συνόλων $\Phi_y(\mathcal{M})$ όπου y διαχωρίζον διάνυσμα για την $\mathcal{M}''$ και Φ_y όπως στο 3.4.

5.7. Πρόταση : Έστω $\mathcal{M}$ nest χωρίς πολλαπλότητα που δρα στον χώρο H και $X = \Phi_x(\mathcal{M})$ για κάποιο διαχωρίζον διάνυσμα x της άλγεβρας $\mathcal{M}''$. Τότε $h(\mathcal{M}) = \{f(X) / f \in \mathbf{AbsHom}[0,1]\}$.

Απόδειξη:

Παραμετρικοποιούμε το $\mathcal{M}$ μέσω της Φ_x, δηλαδή $\mathcal{M} = \{M_t / t \in X\}$ όπου $\Phi_x(M_t) = t$. Τότε ορίζεται μέτρο μ_x με support το X, ώστε $\mu_x(S) = \lambda(S \cap X) + \sum_{r_n \in S} (r_n - l_n)$ για κάθε Borel υποσύνολο S του [0,1], όπου $[0,1] \setminus X = \bigcup_{n=1}^{\infty} (l_n, r_n)$, και $\Phi_x^{-1}(r_n) - \Phi_x^{-1}(l_n)$ τα άτομα του $\mathcal{M}$ (3.6.).

Στο θεώρημα 4.3.α. δείξαμε ότι υπάρχει μοναδιαίος τελεστής $U : H \to L^2(\mu_x)$ ώστε : $U(M_t(x)) = \chi_{[0,t]}$, $U^* M_{\chi_{[0,t]}} U = M_t$ για κάθε $t \in X$ και $U^* \mathcal{M}_{\mu_x} U = \mathcal{M}''$.

Έστω $f \in \mathbf{AbsHom}[0,1]$ θα δείξουμε ότι $f(X) \in h(\mathcal{M})$. Όπως είδαμε στο 5.5. υπάρχει θετική συνάρτηση $h \in L^1(\lambda)$ ώστε $f(t) = \int_0^t h(x) d\lambda(x)$.

$$\text{Ορίζουμε } \quad \bar{y}(t) = \begin{cases} = h(t)^{\frac{1}{2}}, \text{ αν } t \in X \setminus \{r_n\} \\ = \dfrac{\left(\int_{l_n}^{r_n} h \, d\lambda \right)^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{r_n - l_n}}, \text{ αν } t = r_n \\ = 0, \text{ αλλού στο } [0,1]. \end{cases}$$

Τότε το $\bar{y}$ είναι μοναδιαίο διάνυσμα του $L^2(\mu_x)$.

$$\int_0^1 \bar{y}^2(s)\,\mathrm{d}_{\mu_x}(s) = \int_{X\setminus\{r_n/n\in\aleph\}} \bar{y}^2(s)\,\mathrm{d}_{\mu_x}(s) + \int_{\{r_n/n\in\aleph\}} \bar{y}^2(s)\,\mathrm{d}_{\mu_x}(s) = \int_{X\setminus\{r_n/n\in\aleph\}} \bar{y}^2(s)\,\mathrm{d}\lambda(s) + \sum_{n=1}^{\infty} \bar{y}^2(r_n)\cdot \mu_x(\{r_n\}) =$$

$$= \int_X h(s)\,\mathrm{d}\lambda(\mathrm{s}) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\int_{l_n}^{r_n} h\,\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{r_n} - l_n}\cdot (r_n - l_n) = \int_X h(s)\,\mathrm{d}\lambda(\mathrm{s}) + \int_{\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}(l_n,r_n)} h(s)\,\mathrm{d}\lambda(\mathrm{s}) = \int_{X\cup\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}(l_n,r_n)} h(s)\,\mathrm{d}\lambda(\mathrm{s}) =$$

$$= \int_{[0,1]} h(s)\,d\lambda(s) = f(1) = 1.$$

Επίσης το $\bar{y}$ είναι διαχωρίζον διάνυσμα για την άλγεβρα $\mathcal{M}_{\mu_x}$. Πράγματι: για κάθε $g \in L^{\infty}(\mu_x)$, $\quad \left\| M_g(\bar{y}) \right\|^2 = \langle M_g(\bar{y}), M_g(\bar{y}) \rangle =$

$$= \int |g(s)|^2\, \bar{y}^2(s)\,d\mu_x(s) = \int_{X\setminus\{r_n/n\in\mathbb{N}\}} |g(s)|^2\, h(s)\,d\lambda(s) + \sum_{n=1}^{\infty} \bar{y}^2(r_n)\cdot |g(r_n)|^2 \cdot \mu_x(\{r_n\}) =$$

$$= \int_{X\setminus\{r_n/n\in\mathbb{N}\}} |g(s)|^2\, h(s)\,d\lambda(s) + \sum_{n=1}^{\infty} |g(r_n)|^2 \cdot \int_{l_n}^{r_n} h(s)\,d\lambda(s).$$

Επειδή $h > 0$ λ.σ.π. στο $[0,1]$ έχουμε από την τελευταία σχέση ότι $\left\| M_g(\bar{y}) \right\| = 0 \Leftrightarrow g = 0$ λ.σ.π. στο $X\setminus\{r_n, n\in\mathbb{N}\}$ και $g(r_n) = 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Ισοδύναμα, $M_g(\bar{y}) = 0$ αν μόνο αν $g = 0$ $\mu_x.\sigma.\pi.$ δηλαδή αν και μόνο αν $M_g = 0$.

Συμπεραίνουμε ότι και το διάνυσμα $y = U^*(\bar{y}) \in H$ είναι μοναδιαίο διαχωρίζον διάνυσμα για την masa $\mathcal{M}''$. Επομένως ορίζεται $\Phi_y : \mathcal{M} \to [0,1]$ ώστε για κάθε $t \in X$ $\quad \Phi_y(M_t) = \langle M_t(y), y \rangle = \langle M_t U^*(\bar{y}), U^*(\bar{y}) \rangle = \langle U M_t U^*(\bar{y}), \bar{y} \rangle =$

$$= \langle M_{\chi_{[0,t]}}(\bar{y}), \bar{y} \rangle = \left\| M_{\chi_{[0,t]}}(\bar{y}) \right\|^2 = \int_0^1 \chi_{[0,t]}\, h(s)\,d\lambda(s) = \int_0^t h(s)\,d\lambda(s) = f(t).$$

Συνεπώς $f(X) = \Phi_y(\mathcal{M})$.

Θα δείξουμε το αντίστροφο, δηλαδή αν y διαχωρίζον διάνυσμα για την άλγεβρα $\mathcal{M}''$, υπάρχει $f \in \boldsymbol{AbsHom}\,[\mathbf{0,1}]$, ώστε $f(X) = \Phi_y(\mathcal{M})$.

Ορίζουμε $f_o : X \to \Phi_y(\mathcal{M}) : f_o = \Phi_y \circ \Phi_x^{-1}$ που είναι ομοιομορφισμός. Επεκτείνουμε την f_o στο $[0,1]$, ώστε να είναι γραμμική στο $[l_n, r_n]$. Τότε η επέκταση της f είναι ομοιομορφισμός που διατηρεί την διάταξη, με $f(X) = f_o(X) = \Phi_y(\mathcal{M}) = Y$.

Μένει να δείξουμε ότι η f είναι απολύτως συνεχής. Αρκεί για τούτο (5.5.) να δείξουμε ότι αν $\lambda(A)=0$ έπεται ότι $\lambda(f(A))=0$.

Έστω λοιπόν $\lambda(A)=0$ για A Borel υποσύνολο του $[0,1]$. Θέτουμε $A_o = A \cap X \setminus \{r_n / n \in \mathbb{N}\}$ και τότε $f(A_o) = f(A) \cap f(X) \setminus \{f(r_n)/ n \in \mathbb{N}\} = f_o(A_o)$.

Έχουμε ότι $\Phi_y(\mathcal{M}) = f(X)$ και $[0,1] \setminus f(X) = \bigcup_{n=1}^{\infty} (f(l_n), f(r_n))$ και συνεπώς από την παρατήρηση 3.7.2. ισχύουν :
$supp(\mu_y) = f_o(X)$, $\mu_y\big|_{f(X)\setminus\{f(r_n)/ n\in\mathbb{N}\}} = \lambda\big|_{f(X)\setminus\{f(r_n)/ n\in\mathbb{N}\}}$. Άρα έχουμε ότι $\mu_y(f_o(A_o)) = 0 \Leftrightarrow \lambda(f_o(A_o)) = 0$. Από το ίδιο επιχείρημα έχουμε ότι, αφού $\lambda(A_o)=0$, είναι $\mu_x(A_o)=0$.

Είναι αρκετό τότε για να δείξουμε $\lambda(f_o(A_o))=0$, ότι τα Borel μέτρα στο $[0,1]$: $\Omega \to \mu_x(\Omega)$, $\Omega \to \mu_y(f_o(\Omega))$ είναι ισοδύναμα.

Έχουμε τις ισομετρίες $U_x : H \to L^2(\mu_x)$ και $U_y : H \to L^2(\mu_y)$ ώστε : $U_x^* M_{\chi(\Phi_x(N),\Phi_x(M)]} U_x = M - N$, $U_y^* M_{\chi(\Phi_y(N),\Phi_y(M)]} U_y = M - N$ και συνεπώς υπάρχει ισομετρία $W : L^2(\mu_x) \to L^2(\mu_y)$ ώστε $W^* M_{\chi(\Phi_y(N),\, \Phi_y(M)]} W = M_{\chi(\Phi_x(N),\Phi_x(M)]}$.

Όμως: $(\Phi_y(N), \Phi_y(M)] \cap Y = (f_o(\Phi_x(N)), f_o(\Phi_x(M))] \cap f_o(X) =$

$= f_o((\Phi_x(N), \Phi_x(M)] \cap X)$ και συνεπώς τα φασματικά μέτρα: $\Omega \to W^* M_{\chi_{f_o(\Omega)}} W$, $\Omega \to M_{\chi_\Omega}$ συμπίπτουν παντού (βλέπε 1.4.5.).

Επομένως $M_{\chi_\Omega} = 0 \Leftrightarrow M_{\chi_{f_o(\Omega)}} = 0$ από το οποίο έχουμε $\mu_x(\Omega) = 0 \Leftrightarrow \mu_y(f_o(\Omega)) = 0$.

Δείξαμε ότι $\lambda(f(A_o))=0$, μένει να δείξουμε ότι $\lambda\,(f\,(A\setminus A_o))=0$. Παρατηρούμε ότι η f στο σύνολο $[0,1] \setminus X$ είναι γραμμική και συνεπώς μεταφέρει σύνολα μέτρου μηδέν σε σύνολα μέτρου μηδέν.

Επειδή $A \setminus A_o \subseteq ([0,1] \setminus X) \cup \{r_n / n \in \mathbb{N}\}$, συμπεραίνουμε ότι $\lambda\,(f\,(A\setminus A_o))=0$.

5.8. Θεώρημα : Έστω $\mathcal{M}$, $\mathcal{N}$ nests χωρίς πολλαπλότητα. Τότε οι ακόλουθοι ισχυρισμοί είναι ισοδύναμοι:

(i) Τα $\mathcal{N}$, $\mathcal{M}$ είναι μοναδιαία ισοδύναμα.

(ii) $h(\mathcal{N}) = h(\mathcal{M})$.

(iii) Τα $h(\mathcal{N})$, $h(\mathcal{M})$ τέμνονται, δηλαδή υπάρχουν x, y ώστε $\Phi_x(\mathcal{N}) = \Phi_y(\mathcal{M})$.

(iv) Για κάθε x, y μοναδιαία διαχωρίζοντα διανύσματα για τα $\mathcal{N}$, $\mathcal{M}$ υπάρχει $f \in \boldsymbol{AbsHom}[0,1]$, ώστε $f(\Phi_x(\mathcal{N})) = \Phi_y(\mathcal{M})$.

Απόδειξη:

(i) $\Rightarrow$ (ii): Έστω x μοναδιαίο διαχωρίζον διάνυσμα για την $\mathcal{N}''$ αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχει y μοναδιαίο διαχωρίζον διάνυσμα για την $\mathcal{M}''$, ώστε $\Phi_x(\mathcal{N}) = \Phi_y(\mathcal{M})$.

Αφού $\mathcal{N} \sim \mathcal{M}$ υπάρχει U μοναδιαίος τελεστής: $\mathcal{M} = \{UNU^* / N \in \mathcal{N}\}$. Τότε το $y = Ux$ είναι μοναδιαίο διαχωρίζον διάνυσμα για την $\mathcal{M}''$. Για κάθε $M \in \mathcal{M}$ έχουμε: $\Phi_y(M) = \langle M\, y, y\rangle = \langle U^*MU\, x, x\rangle = \Phi_x(U^*MU) \in \Phi_x(\mathcal{N})$. Επόμενα $\Phi_y(\mathcal{M}) \subseteq \Phi_x(\mathcal{N})$, ανάλογα $\Phi_x(\mathcal{N}) \subseteq \Phi_y(\mathcal{M})$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii): Προφανές.

(iii)$\Rightarrow$ (i): Έστω ότι υπάρχουν x,y: $\Phi_x(\mathcal{N}) = \Phi_y(\mathcal{M})$, τότε από την παρατήρηση 3.7.3. $\mu_x = \mu_y$. Όμως από την παρατήρηση 4.4.2. κάθε ένα από τα $\mathcal{N}$, $\mathcal{M}$ είναι μοναδιαία ισοδύναμο με το nest $\{M_{\chi[0,s]} / 0 \le s \le 1\}$ που δρα στον χώρο $L^2(\mu_x)$.

(ii) $\Rightarrow$ (iv): Έστω x,y μοναδιαία διαχωρίζοντα διανυσματα για τις άλγεβρες $\mathcal{N}''$, $\mathcal{M}''$ αντίστοιχα. Αν $X = \Phi_x(\mathcal{N})$, τότε το $X \in h(\mathcal{M})$, άρα υπάρχει $y' : X = \Phi_{y'}(\mathcal{M})$. Επόμενα από την πρόταση 5.7. υπάρχει $f \in \boldsymbol{AbsHom}[0,1]$ ώστε $f(X) = \Phi_y(\mathcal{M})$. Δηλαδή $f(\Phi_x(\mathcal{N})) = \Phi_y(\mathcal{M})$.

(iv) $\Rightarrow$ (ii): Έστω x, y μοναδιαία διαχωρίζοντα διανύσματα για τις άλγεβρες $\mathcal{N}''$, $\mathcal{M}''$ τότε υπάρχει $g \in \boldsymbol{AbsHom}[0,1]$, ώστε $g(\Phi_x(\mathcal{N})) = \Phi_y(\mathcal{M})$.
Εχουμε: $h(\mathcal{M}) = \{f(\Phi_y(\mathcal{M})) / f \in \boldsymbol{AbsHom}[0,1]\} = \{f \circ g(\Phi_x(\mathcal{N})) / f \in \boldsymbol{AbsHom}[0,1]\} =$
$= \{f(\Phi_x(\mathcal{N})) / f \in \boldsymbol{AbsHom}[0,1]\} = h(\mathcal{N})$, όπου στις προηγούμενες ισότητες έχουμε χρησιμοποιήσει ότι η δομή ($\boldsymbol{AbsHom}$ [0,1], $\circ$) είναι ομάδα.

6.ΜΟΝΑΔΙΑΙΕΣ ΙΣΟΔΥΝΑΜΙΕΣ ΣΕ ΑΒΕΛΙΑΝΕΣ ΑΛΓΕΒΡΕΣ VON NEUMANN ΚΑΙ NESTS.

6.1. Πρόταση: Έστω A φυσιολογικός τελεστής με φασματικό μέτρο $E[\cdot]$ που δρά στον χώρο Η και μ μέτρο Borel πιθανότητας πάνω στο $X = \sigma(A)$ που είναι ισοδύναμο με το $E[\cdot]$. Τότε ο συναρτησιακός λογισμός $\Phi_B : f \to \int f d_E$ είναι ισομετρικός $*$ - ισομορφισμός από τον $L^\infty(X,\mu)$ επί της άλγεβρας $\mathcal{M} = \{A\}''$.

Απόδειξη:

Είναι γνωστό (βλέπε στο [4], παράγραφος 10.5), ότι ο Φ_B είναι ένας $*$ - - μορφισμός από το σύνολο των φραγμένων μετρήσιμων συναρτήσεων στην $\mathcal{M}$.

Μπορούμε να επεκτείνουμε τον Φ_B στο σύνολο των μ ουσιωδώς φραγμένων συναρτήσεων εκμεταλλευόμενοι ότι το μ είναι ισοδύναμο προς το $E[\cdot]$, ως εξής:
Αν $f \in L^\infty(X,\mu)$ ορίζουμε $\Phi_B(f) = \int f \cdot \chi[|f| \le \|f\|_\infty] d_E$. Η επέκταση είναι καλά ορισμένη αφού η $f \cdot \chi[|f| \le \|f\|_\infty]$ είναι φραγμένη και αν $f = g$ $\mu.\sigma.\pi.$ τότε $\tilde{f} = f \cdot \chi[|f| \le \|f\|_\infty] = g \cdot \chi[|g| \le \|g\|_\infty] = \tilde{g}$ $\mu.\sigma.\pi.$ Επομένως $\mu([\tilde{f} \neq \tilde{g}]) = 0$ από το οποίο προκύπτει ότι: $E([\tilde{f} \neq \tilde{g}]) = 0 \Rightarrow \int \tilde{f}\, dE = \int \tilde{g}\, dE \Rightarrow \Phi_B(f) = \Phi_B(g)$.

Στο εξής θα χρησιμοποιούμε : $\Phi_B(f) = \int f\, dE$ για κάθε $f \in L^\infty(\mu)$.

Η Φ_B είναι ισομετρία: πράγματι αν $f = \sum c_n \chi_{\Omega_n}$ απλή συνάρτηση, τότε
$\| \Phi_B(f) \| = max\{ |c_k| / E[\Omega_k] \neq 0 \} = max\{ |c_k| / \mu(\Omega_k) \neq 0 \} = \| f \|_\infty$.
Θα δείξουμε ότι είναι επί:

Έστω $\xi \in H$ μοναδιαίο διαχωρίζον διάνυσμα για την $\mathcal{M}$, τότε το μέτρο $\mu_\xi : \mu_\xi(\Omega) = \langle E[\Omega]\xi, \xi \rangle$, Ω Borel υποσύνολο του X είναι ισοδύναμο προς το $E[\cdot]$ και άρα προς το μ. Επειδή $L^\infty(X,\mu_\xi) = L^\infty(X,\mu)$ μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\mu = \mu_\xi$. Έστω $H_o = \overline{\mathcal{M}\,\xi}$ και $\mathcal{M}_o = \left\{ T|_{H_o} / T \in \mathcal{M} \right\} \subseteq B(H_o)$. Τότε η $\mathcal{M}_o$ είναι masa και η απεικόνιση $T \to T|_{H_o}$ είναι $*$ - ισομορφισμός από το $\mathcal{M}$ επί του $\mathcal{M}_o$ (1.3.4.) .

Έστω $H_{oo} = \{\Phi_B(f)\xi / f$ απλή συνάρτηση στον $(X,\mu)\}$, τότε ο H_{oo} είναι πυκνός στον H_o.

Πράγματι γνωρίζουμε ότι $\mathcal{M} = \{E[\Omega] / \Omega$ Borel υποσύνολο στο $X\}''$ (1.5.1.).

Είναι εύκολο να δούμε ότι $H_o = \overline{[\,E[\Omega]\xi \;/\; \Omega \text{ Borel υποσύνολο στο } X\,]}$ και άρα $\overline{H}_{oo} = H_o$.

Ορίζουμε $U_o : H_{oo} \to L^2(\mu) : \Phi_B(f)\xi \to f$. Τότε η U_o είναι ισομετρική: αν $f = \sum_i \lambda_i \chi_{\Omega_i}$ απλή συνάρτηση, τότε $\|f\|_2^2 = \int \left|\sum_i \lambda_i \chi_{\Omega_i}\right|^2 d\mu = \int \sum_i |\lambda_i|^2 \chi_{\Omega_i} d\mu =$

$= \sum_i |\lambda_i|^2 \mu(\Omega_i) = \sum_i |\lambda_i|^2 \langle E[\Omega_i]\xi, \xi\rangle = \sum_i |\lambda_i|^2 \|E[\Omega_i]\xi\|^2 = \left\|\sum_i \lambda_i E[\Omega_i]\xi\right\|^2 = \|\Phi_B(f)\xi\|^2$. Η U_o επεκτείνεται σε ισομετρία U από το H_o επί του $L^2(\mu)$. Πράγματι $U(H_o) = U(\overline{H}_{oo}) = \overline{U_o(H_{oo})}^{\|\;\|_2} = \overline{\{f \,/\, f \text{ απλή συνάρτηση}\}}^{\|\;\|_2} = L^2(\mu)$.

Παρατηρούμε ότι: $U\Phi_B(f)|_{H_o} U^{-1} = M_f$ για κάθε $f \in L^\infty(\mu)$. Πράγματι για κάθε απλή συνάρτηση g έχουμε $(U\Phi_B(f)) \cdot (\Phi_B(g)\xi) = U_o(\Phi_B(fg)\xi) = fg = M_f(g) =$ $= M_f U(\Phi_B(g)\xi)$. Το συμπέρασμα προκύπτει από την πυκνότητα του H_{oo} στον H_o. Αν $T \in \mathcal{M}$ τότε ο T μετατίθεται με όλα τα στοιχεία της μορφής $\Phi_B(f)$ και άρα ο $UT|_{H_o} U^{-1}$ μετατίθεται με κάθε στοιχείο της $\mathcal{M}_\mu$.

Συμπεραίνουμε ότι $UT|_{H_o} U^{-1} \in (\mathcal{M}_\mu)' = \mathcal{M}_\mu$ και συνεπώς υπάρχει $g \in L^\infty(\mu)$:

$U\left(T|_{H_o}\right)U^{-1} = M_g \Rightarrow T|_{H_o} = U^{-1} M_g U = \Phi_B(g)|_{H_o} \Rightarrow T\xi = \Phi_B(g)\xi \Rightarrow$

$\Rightarrow T = \Phi_B(g)$.

6.2. Παρατηρήσεις:

6.2.1. Για κάθε φυσιολογικό τελεστή A οι προβολές της άλγεβρας $\{A\}''$ είναι ακριβώς η οικογένεια $\{E_A[\Omega] / \Omega \text{ Borel υποσύνολο του } \sigma(A)\}$. Πράγματι αν $P \in \{A\}''$ προβολή και μ μέτρο ισοδύναμο προς το φασματικό μέτρο του A, υπάρχει $f \in L^\infty(\mu)$: $\int f\, dE = P$. Επειδή $P^2 = P$ και $P^* = P$ από τον συναρτησιακό λογισμό έχουμε ότι: $\int f^2 dE = \int f dE$, $\int f dE = \int \bar{f}\, dE$ και άρα $f^2 = f$, $f = \bar{f}$ $\mu.\sigma.\pi.$ Επόμενα αν $\Omega = [f \neq 0]$ έχουμε $f = \chi_\Omega$ και άρα $P = E_A[\Omega]$.

6.2.2. Στην απόδειξη του 6.1. δείξαμε ότι αν το x είναι διαχωρίζον διάνυσμα της άλγεβρας $\mathcal{M} = \{A\}''$, $H_o = \overline{\mathcal{M}x}$ και μ μέτρο ισοδύναμο προς το φασματικό μέτρο του A, υπάρχει μοναδιαίος τελεστής $U_x : H_o \to L^2(\sigma(A), \mu)$ ώστε $U_x f(A)|_{H_o} U_x^{-1} = M_f$ για κάθε $f \in L^\infty(\mu)$.

6.3. Ορισμός: Έστω $\mathcal{M}$ αβελιανή άλγεβρα von Neumann. Η $\mathcal{M}$ λέμε ότι έχει **ομοιόμορφη πολλαπλότητα n** όπου $n \in \{\infty,1,2,\ldots\}$ πληθικός αριθμός, αν υπάρχει προβολή $P \in \mathcal{M}'$ και μοναδιαίος τελεστής $U : (P(H))^{(n)} \to H$, ώστε η άλγεβρα $\mathcal{M}|_{P(H)}$ να είναι masa και να ισχύει $U\left(A|_{P(H)}\right)^{(n)} U^* = A$ για κάθε $A \in \mathcal{M}$.

Σχόλια:

1). Από τον ορισμό προκύπτει ότι αν η $\mathcal{M}$ έχει ομοιόμορφη πολλαπλότητα n, τότε είναι μοναδιαία ισοδύναμη με την άλγεβρα $\left(\mathcal{M}|_{P(H)}\right)^{(n)}$ που δρα στον χώρο $(P(H))^{(n)}$.

2). Αν η άλγεβρα $\mathcal{M}$ είναι masa από τον ορισμό έχει ομοιόμορφη πολλαπλότητα 1.

6.4. Παρατηρήσεις:

6.4.1. Αν οι αβελιανές άλγεβρες von Neumann $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$ είναι μοναδιαία ισοδύναμες και η $\mathcal{M}_1$ είναι ομοιόμορφης πολλαπλότητας n, τότε και η $\mathcal{M}_2$ είναι ομοιόμορφης πολλαπλότητας n.

Απόδειξη:

Έστω ότι οι $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$ δρούν στους χώρους H, K αντίστοιχα. Αν η $\mathcal{M}_1$ είναι πολλαπλότητας n, τότε από τον ορισμό υπάρχει προβολή $P \in \mathcal{M}_1'$, ώστε η $\mathcal{M}_1|_{P(H)}$ να είναι masa και μοναδιαίος τελεστής $U : (P(H))^{(n)} \to H$: $U\left(A|_{P(H)}\right)^{(n)} U^* = A$ για κάθε $A \in \mathcal{M}_1$.

Αν οι $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$ είναι μοναδιαία ισοδύναμες υπάρχει μοναδιαίος τελεστής $V : H \to K$, ώστε $\mathcal{M}_2 = \{VAV^* / A \in \mathcal{M}_1\}$.

Θεωρούμε την προβολή $Q = VPV^* \in B(K)$, η οποία ανήκει στην $\mathcal{M}'_2$ διότι $VAV^*Q = VAV^* \cdot VPV^* = VAPV^* = VPAV^* = VPV^* \cdot VAV^* = QVAV^*$.

Επίσης η άλγεβρα $\mathcal{M}_2|_{Q(K)}$ είναι masa. Πράγματι, ο τελεστής $V_o = V|_{P(H)}$: $P(H) \to Q(K)$ είναι μοναδιαίος και για κάθε $A \in \mathcal{M}_1$ είναι : $V_o A|_{P(H)} V_o^* =$
$= VAV^*|_{Q(K)} \in \mathcal{M}_2|_{Q(K)}$ και άρα οι άλγεβρες $\mathcal{M}_2|_{Q(K)}$, $\mathcal{M}_1|_{Q(K)}$ είναι μοναδιαία ισοδύναμες.

Θεωρούμε τον μοναδιαίο τελεστή $W = VU\left(V_o^*\right)^{(n)} : (Q(K))^{(n)} \to K$ για τον οποίο για κάθε $A \in \mathcal{M}_1$ έχουμε:

$$W\left(VAV^*\big|_{Q(K)}\right)^{(n)}W^* = VU\left(V_o^*\right)^{(n)}\cdot\left(V_o A\big|_{P(H)}V_o^*\right)^{(n)}\left(V_o\right)^{(n)}U^*V^* =$$

$$= VU\left(A\big|_{P(H)}\right)^{(n)}U^*V^* = VAV^*.$$

Από τον ορισμό συμπεραίνουμε ότι η $\mathcal{M}_2$ είναι άλγεβρα ομοιόμορφης πολλαπλότητας n.

6.4.2. Αν $\mathcal{M}$ αβελιανή άλγεβρα von Neumann που δρα στον χώρο H για την οποία υπάρχουν n το πλήθος διαχωρίζοντα διανύσματα (x_i) ώστε $\overline{\mathcal{M}x_i} \underset{i\neq j}{\perp} \overline{\mathcal{M}x_j}$ και $H = \underset{i}{\oplus}\overline{\mathcal{M}x_i}$, τότε η $\mathcal{M}$ έχει ομοιόμορφη πολλαπλότητα n.

Απόδειξη:

Έστω A αυτοσυζυγής τελεστής ώστε $\mathcal{M} = \{A\}''$ και μ μέτρο ισοδύναμο προς το φασματικό μέτρο του A. Θέτουμε $H_i = \overline{\mathcal{M}x_i}$ για κάθε i. Από την παρατήρηση 6.2.2. υπάρχει μοναδιαίος τελεστής $U_{x_i} : H_i \to L^2(\sigma(A),\mu)$ ώστε $U_{x_i} f(A)\big|_{H_i} U_{x_i}^* = M_f$ για κάθε $f \in L^\infty(\mu)$.

Αν P_1 η προβολή στον χώρο H_1, τότε είναι προφανές ότι $P_1 \in \mathcal{M}'$, ενώ η άλγεβρα $\mathcal{M}\big|_{P_1(H)}$ είναι masa. (βλέπε 1.3.4.).

Θεωρούμε τον μοναδιαίο τελεστή $W = \underset{i}{\oplus}U_{x_i}^* \circ \left(U_{x_1}\right)^{(n)} : (H_1)^{(n)} \to H$ για τον οποίο έχουμε ότι :

$$W\left(f(A)\big|_{H_1}\right)^{(n)}W^* = \left(\underset{i}{\oplus}U_{x_i}^*\right)\left(U_{x_1}\right)^{(n)}\left(f(A)\big|_{H_1}\right)^{(n)}\left(U_{x_1}^*\right)^{(n)}\left(\underset{i}{\oplus}U_{x_i}\right) =$$

$$= \left(\underset{i}{\oplus}U_{x_i}^*\right)\left(U_{x_1} f(A)\big|_{H_1} U_{x_1}^*\right)^{(n)}\left(\underset{i}{\oplus}U_{x_i}\right) = \underset{i}{\oplus}\left(U_{x_i}^* M_f U_{x_i}\right) = \underset{i}{\oplus} f(A)\big|_{H_i} = f(A)$$ για κάθε $f \in L^\infty(\mu)$.

Επομένως από τον ορισμό η $\mathcal{M}$ είναι ομοιόμορφης πολλαπλότητας n.

6.4.3. Για κάθε μέτρο μ σ-πεπερασμένο, η άλγεβρα $\left(\mathcal{M}_\mu\right)^{(n)}$ που δρα στον χώρο $\left(L^2(\mu)\right)^{(n)}$ είναι ομοιόμορφης πολλαπλότητας n.

Απόδειξη:

Έστω $f \in L^2(\mu)$ μοναδιαίο και κυκλικό διάνυσμα για την άλγεβρα $\mathcal{M}_\mu$. Τότε $L^2(\mu) = \overline{\mathcal{M}_\mu(f)}^{\|\cdot\|_2}$.

Θεωρούμε για κάθε i το διάνυσμα ξ_i του χώρου $\left(L^2(\mu)\right)^{(n)}$ που έχει i-συντεταγμένη f και στις υπόλοιπες μηδέν. Το ξ_i είναι φανερά μοναδιαίο και διαχωρίζον διάνυσμα για την άλγεβρα $\left(\mathcal{M}_\mu\right)^{(n)}$.

Θέτουμε $L_i = \overline{(\mathcal{M}_\mu)^{(n)}(\xi_i)}$ για κάθε i και έχουμε ότι $L_i \perp L_j$ για $i \neq j$, ενώ $\left(L^2(\mu)\right)^{(n)} = \bigoplus_i L_i$.

Συμπεραίνουμε από την προηγούμενη παρατήρηση ότι η $\mathcal{M}$ έχει ομοιόμορφη πολλαπλότητα n.

6.4.4. Αν $\mathcal{M}$ αβελιανή άλγεβρα von Neumann ομοιόμορφης πολλαπλότητας n, A αυτοσυζυγής τελεστής ώστε $\mathcal{M} = \{A\}''$ και μ μέτρο ισοδύναμο προς το φασματικό μέτρο του A, τότε υπάρχει μοναδιαίος τελεστής $U : H \to \left(L^2(\mu)\right)^{(n)}$ ώστε $Uf(A)U^* = \left(M_f\right)^{(n)}$ για κάθε $f \in L^\infty(\mu)$ και άρα η $\mathcal{M}$ είναι μοναδιαία ισοδύναμη με την άλγεβρα $\left(\mathcal{M}_\mu\right)^{(n)}$.

Απόδειξη:

Έστω $P \in \mathcal{M}'$ όπως στον ορισμό 6.3. Τότε υπάρχει μοναδιαίος τελεστής $W_1 : H \to \left(P(H)\right)^{(n)}$ που επάγει την μοναδιαία ισοδυναμία $\mathcal{M} \to \left(\mathcal{M}|_{P(H)}\right)^{(n)}$: $f(A) \to \left(f(A)|_{P(H)}\right)^{(n)}$, $f \in L^\infty(\mu)$.

Όμως από το 1.3.3. έχουμε τον $*$-ισομορφισμό $\left(\mathcal{M}|_{P(H)}\right)^{(n)} \to \mathcal{M}|_{P(H)}$: $\left(f(A)|_{P(H)}\right)^{(n)} \to f(A)|_{P(H)}$ και άρα συνθέτοντας έχουμε τον $*$-ισομορφισμό: $\mathcal{M}_\mu \to \mathcal{M}|_{P(H)} : M_f \to f(A)|_{P(H)}$.

Από την πρόταση 4.5. αφού οι άλγεβρες $\mathcal{M}_\mu, \mathcal{M}|_{p(H)}$ είναι masa, τότε είναι μοναδιαία ισοδύναμες. Συνεπώς υπάρχει μοναδιαίος τελεστής $W_2 : P(H) \to L^2(\mu)$ ώστε $W_2^* M_f W_2 = f(A)|_{P(H)}, f \in L^\infty(\mu)$.

Θεωρούμε τον μοναδιαίο τελεστή $U = (W_2)^{(n)} \circ W_1 : H \to (L^2(\mu))^{(n)}$ για τον οποίο έχουμε $Uf(A)U^* = (M_f)^{(n)}$ για κάθε $f \in L^\infty(\mu)$.

6.4.5. Θα δείξουμε το αντίστροφο της 6.4.2. Αν η $\mathcal{M}$ είναι αβελιανή άλγεβρα von Neumann ομοιόμορφης πολλαπλότητας n τότε υπάρχουν $n-$πλήθους (x_i) διαχωρίζοντα διανύσματα για την $\mathcal{M}$, ώστε $\overline{\mathcal{M}_{x_i}} \underset{i \neq j}{\perp} \overline{\mathcal{M}_{x_j}}$ και $H = \underset{i}{\oplus} \overline{\mathcal{M}_{x_i}}$.

Απόδειξη:

Έστω A αυτοσυζυγής τελεστής ώστε $\mathcal{M} = \{A\}''$. Αν μ μέτρο ισοδύναμο προς το φασματικό μέτρο του A από την προηγούμενη παρατήρηση υπάρχει μοναδιαίος τελεστής $U : H \to (L^2(\mu))^n$, ώστε $Ug(A)U^* = (M_g)^{(n)}$ για κάθε $g \in L^\infty(\mu)$.

Όπως στο 6.4.3. υπάρχουν n το πλήθος διαχωρίζοντα διανύσματα (ξ_i) για την άλγεβρα $(\mathcal{M}_\mu)^{(n)}$, ώστε αν $L_i = \overline{\mathcal{M}_\mu^{(n)}(\xi_i)}$ είναι: $L_i \underset{i \neq j}{\perp} L_j$ και $(L^2(\mu))^{(n)} = \underset{i}{\oplus} L_i$.

Ορίζουμε $x_i = U^*(\xi_i)$ για κάθε i. Τότε τα (x_i) είναι διαχωρίζοντα διανύσματα για την $\mathcal{M}$ διότι για κάθε $g \in L^\infty(\mu)$ έχουμε τις ισοδυναμίες:

$$g(A)(x_i) = 0 \Leftrightarrow \langle g(A)x_i, g(A)x_i \rangle = 0 \Leftrightarrow \langle U\, g(A)U^*(\xi_i), U\, g(A)U^*(\xi_i) \rangle = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \langle (M_g)^{(n)}(\xi_i), (M_g)^{(n)}(\xi_i) \rangle = 0 \Leftrightarrow (M_g)^{(n)} = 0 \Leftrightarrow M_g = 0 \Leftrightarrow g = 0 \Leftrightarrow g(A) = 0 .$$

Παρατηρούμε ότι $U(\overline{\mathcal{M}x_i}) = L_i$. Πράγματι:

$$U(\overline{\mathcal{M}x_i}) = \overline{U(\mathcal{M}x_i)} = \overline{\{U\, g(A)x_i \,/\, g \in L^\infty(\mu)\}} = \overline{\{U\, g(A)U^*(\xi_i) / g \in L^\infty(\mu)\}} =$$
$$= \overline{\{(M_g)^{(n)}(\xi_i) / g \in L^\infty(\mu)\}} = \overline{\mathcal{M}_\mu^{(n)}(\xi_i)} = L_i \quad \text{για κάθε } i.$$

Επομένως έχουμε ότι $\overline{\mathcal{M}x_i} \underset{i \neq j}{\perp} \overline{\mathcal{M}x_j}$ και $H = \underset{i}{\oplus} \overline{\mathcal{M}x_i}$.

6.5. Λήμμα: Αν η αβελιανή άλγεβρα von Neumann $\mathcal{M}$ έχει ομοιόμορφη πολλαπλότητα, τότε αυτή είναι μοναδική.

Απόδειξη:

Έστω ότι η $\mathcal{M}$ που δρα στον χώρο H έχει ομοιόμορφη πολλαπλότητα $n < \infty$. Θα δείξουμε ότι αν έχει και ομοιόμορφη πολλαπλότητα m, τότε $m \leq n$. Αυτό είναι αρκετό για την ισχύ του λήμματος.

Αφού η $\mathcal{M}$ έχει ομοιόμορφη πολλαπλότητα $n < \infty$, από την παρατήρηση 6.4.5. υπάρχουν $x_1, x_2, \ldots, x_n$ διαχωρίζοντα διανύσματα για την $\mathcal{M}$ ώστε: $H = \bigoplus\limits_i \overline{\mathcal{M}x_i}$.

Πάλι από την ίδια παρατήρηση αν $m > n$, υπάρχουν $y_1, y_2, \ldots, y_{n+1}$ διαχωρίζοντα διανύσματα, ώστε: $\overline{\mathcal{M}y_i} \underset{i \neq j}{\perp} \overline{\mathcal{M}y_j}$ για $i \neq j$.

Έστω A αυτοσυζυγής τελεστής ώστε $\mathcal{M} = \{A\}''$ και μ μέτρο ισοδύναμο προς το φασματικό μέτρο του A, τότε από την παρατήρηση 6.4.4. υπάρχει μοναδιαίος τελεστής $U : H \to \left(L^2(\mu)\right)^{(n)}$ ώστε $U^* f(A) U = \left(M_f\right)^{(n)}$ για κάθε $f \in L^\infty(\mu)$.

Έστω ότι $U^* y_i = \begin{pmatrix} f_{i_1} \\ \vdots \\ f_{i_n} \end{pmatrix}$ για $i = 1, 2, \ldots, n+1$. Τότε για κάθε i, j και για κάθε Borel υποσύνολο Ω του $\sigma(A)$ έχουμε:

$$\left\langle E[\Omega](y_i), E[\Omega](y_j) \right\rangle = 0 \Leftrightarrow \left\langle U^* E[\Omega] U U^*(y_i), U^* E[\Omega] U U^*(y_j) \right\rangle = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\langle M_{x_\Omega}^{(n)}\left(U^*(y_i)\right), M_{x_\Omega}^{(n)}\left(U^*(y_j)\right) \right\rangle = 0 \Leftrightarrow \left\langle \begin{pmatrix} f_{i_1} \cdot x_\Omega \\ \vdots \\ f_{i_n} \cdot x_\Omega \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} f_{j_1} \cdot x_\Omega \\ \vdots \\ f_{j_n} \cdot x_\Omega \end{pmatrix} \right\rangle = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n} \left\langle f_{i_k} \cdot x_\Omega, f_{j_k} \cdot x_\Omega \right\rangle = 0 \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n} \int_\Omega f_{i_k}(s) \cdot \overline{f_{j_k}(s)}\, d\mu(s) = 0 \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n} f_{i_k} \cdot \overline{f_{j_k}} = 0 \ \ \mu.\sigma.\pi.$$

Επιλέγουμε $t \in \sigma(A)$ ώστε $\begin{pmatrix} f_{i_1}(t) \\ \vdots \\ f_{i_n}(t) \end{pmatrix} \neq \vec{0}$ για κάθε $i = 1, 2, \ldots, n+1$. Αυτό είναι δυνατόν αφού από τις προηγούμενες ισοδυναμίες έχουμε για κάθε Borel Ω ότι $\sum\limits_{k=1}^{n} \int_\Omega \left|f_{i_k}(s)\right|^2 d\mu(s) = 0$ αν και μόνο αν $E[\Omega] y_i = 0$ και αφού y_i είναι διαχωρίζον διάνυσμα αν και μόνο αν $\mu(\Omega) = 0$.

Επομένως $\begin{pmatrix} f_{i_1} \\ \vdots \\ f_{i_n} \end{pmatrix} \neq 0 \ \ \mu.\sigma.\pi.$

Τότε αφού $\sum_{k=1}^{n} f_{i_k}(t)\,\overline{f_{j_k}(t)} = 0$ για $1 \le i \ne j \le n+1$ έχουμε $n+1$ γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα του $\mathbb{C}^n$. Άτοπο.

6.6. Ορισμός: Έστω $\mathcal{M}$ αβελιανή άλγεβρα $V-N$ και $P \in \mathcal{M}$ μη μηδενική προβολή. Λέμε ότι η P έχει πολλαπλότητα n αν η άλγεβρα $\mathcal{M}|_{P(H)}$ έχει ομοιόμορφη πολλαπλότητα n.

6.7. Λήμμα: Έστω A αυτοσυζυγής τελεστής που δρα στον χώρο H, $\mathcal{M} = \{A\}''$ και $E_A[\cdot]$ το φασματικό μέτρο του A. Αν P προβολή που ανήκει στην $\mathcal{M}$ ή P προβολή στον χώρο $\overline{\mathcal{M}x}$, x διαχωρίζον διάνυσμα της $\mathcal{M}$, $H_o = P(H)$ και $A_o = A|_{H_o}$, τότε το φασματικό μέτρο του A_o είναι $E_{A_o}[\cdot] = E_A[\cdot]|_{H_o}$. Ιδιαίτερα ισχύουν:
$E_A[\Omega]|_{H_o} = E_{A_o}[\Omega \cap \sigma(A_o)]$ για κάθε Ω Borel υποσύνολο του $\sigma(A)$ και
$f(A)|_{H_o} = f|_{\sigma(A_o)}(A_o)$ για κάθε φραγμένη Borel συνάρτηση f στο $\sigma(A)$.

Απόδειξη:

Επειδή σε κάθε περίπτωση $P \in \mathcal{M}'$ έχουμε ότι $A_o \in B(H_o)$ και $\sigma(A_o) \subseteq \sigma(A)$.

Αν $p(z)$ πολυώνυμο στον χώρο $C(\sigma(A))$ παρατηρούμε ότι
$p(A)|_{H_o} = p|_{\sigma(A_o)}(A_o)$.

Έστω τώρα $f_o \in C(\sigma(A_o))$ και μία συνεχής της επέκταση $f \in C(\sigma(A))$. Τότε υπάρχει ακολουθία πολυωνύμων $(P_n) \subseteq C(\sigma(A))$: $P_n \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} f$ και άρα $P_n(A) \xrightarrow{\|\cdot\|} f(A)$ από το οποίο $P_n(A)|_{H_o} \xrightarrow{\|\cdot\|} f(A)|_{H_o}$.

Επειδή $P_n|_{\sigma(A_o)} \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} f_o$ έχουμε $P_n|_{\sigma(A_o)}(A_o) \xrightarrow{\|\cdot\|} f_o(A_o)$. Συμπεραίνουμε ότι $f|_{\sigma(A_o)}(A_o) = f(A)|_{H_o}$ (1).

Έστω $\mathcal{M}_0 = \{A_o\}''$ και μ, ν μέτρα ισοδύναμα προς τα φασματικά μέτρα $E_A[\cdot], E_{A_o}[\cdot]$. Από την 6.1. έχουμε τους $*$-ισομορφισμούς:

$$\phi_1 : L^\infty(\sigma(A), \mu) \to \mathcal{M} : \phi_1(f) = f(A)$$

$$\phi_3 : L^\infty(\sigma(A_o), \nu) \to \mathcal{M}_0 : \phi_3(g) = g(A_o)$$

Θεωρούμε τον $*$-επί-μορφισμό $\phi_2 : \mathcal{M} \to \mathcal{M}_o : \phi_2(T) = T|_{H_o}$ και παίρνοντας σύνθεση έχουμε τον $*$-επί-μορφισμό:

$$\varphi = \phi_3^{-1} \circ \phi_2 \circ \phi_1 : L^{\infty}(\sigma(A), \mu) \to L^{\infty}(\sigma(A_o), \nu)$$

για τον οποίο αν $f \in C(\sigma(A))$ από την (1) έχουμε: $\varphi(f) = f|_{\sigma(A_o)}$.

Επειδή οι ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 διατηρούν την διάταξη $\left(f(A) \geq 0 \Leftrightarrow f \geq 0\right.$ και αν $\left.T \geq 0 \Rightarrow T|_{H_o} \geq 0\right)$ έχουμε ότι και η φ διατηρεί την διάταξη. Από αυτό μπορούμε να συμπεράνουμε ότι αν $(f_n) \subseteq L^{\infty}(\mu)$ αύξουσα ακολουθία : $\sup\limits_n f_n = f \in L^{\infty}(\mu)$, τότε $\varphi(f) = \sup\limits_n \varphi(f_n)$.

Πράγματι επειδή $f_n \leq f_{n+1} \leq f \Rightarrow \varphi(f_n) \leq \varphi(f_{n+1}) \leq \varphi(f)$ και άρα $\sup\limits_n \varphi(f_n) \leq \varphi(f)$. Συμπεραίνουμε ότι η συνάρτηση $g = \sup\limits_n \varphi(f_n) \in L^{\infty}(\nu)$. Επειδή η φ είναι επί υπάρχει $h \in L^{\infty}(\mu)$: $\varphi(h) = g$.

Αν P προβολή στο χώρο $\overline{Mx}$, τότε ο φ είναι $*-$ισομορφισμός. Επειδή $\varphi(f_n) \leq \varphi(h) \leq \varphi(f) \Rightarrow f_n \leq h \leq f$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε ότι $h = f \Rightarrow \varphi(f) = g = \sup \varphi(f_n)$.

(Θυμίζουμε ότι $\varphi(f) \geq 0$ αν και μόνο αν το φάσμα της $\varphi(f)$: $\sigma(\varphi(f)) \subseteq \mathbb{R}^+$ και επειδή η φ είναι $*-$ισομορφισμός $\sigma(f) = \sigma(\varphi(f))$ από το οποίο προκύπτει ότι $f \geq 0$).

Αν $P \in \mathcal{M}$, τότε από την 6.2.1. υπάρχει Ω Borel υποσύνολο του $\sigma(A)$: $P = E_A[\Omega]$. Επειδή $\varphi(f_n) \leq \varphi(h) \leq \varphi(f)$ έχουμε ότι $f_n(A)|_{P(H)} \leq h(A)|_{P(H)} \leq$ $\leq f(A)|_{P(H)}$ και άρα $f_n(A)P \leq h(A)P \leq f(A)P \Leftrightarrow f_n\chi_{\Omega}(A) \leq h\chi_{\Omega}(A) \leq f\chi_{\Omega}(A) \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow f_n\chi_{\Omega} \leq h\chi_{\Omega} \leq f\chi_{\Omega}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ από το οποίο έχουμε ότι $f\chi_{\Omega} = h\chi_{\Omega}$ και άρα $\varphi(f) = \varphi(h) = \sup\limits_n \varphi(f_n)$.

Θεωρούμε την οικογένεια $\mathcal{A} = \{\Omega$ Borel υποσύνολο του $\sigma(A)$: $\varphi(\chi_{\Omega}) = \chi_{\Omega \cap \sigma(A_o)}\}$. Θα δείξουμε ότι είναι $\sigma-$άλγεβρα.

Πράγματι : $\varphi(\chi_{\sigma(A)}) = \varphi(\mathbb{1}) = \mathbb{1} = \chi_{\sigma(A_o)} = \chi_{\sigma(A) \cap \sigma(A_o)}$, άρα $\sigma(A) \in \mathcal{A}$.

Αν $\Omega \in \mathcal{A}$, τότε $\varphi(\chi_{\Omega^c}) = \varphi(\chi_{\sigma(A)} - \chi_{\Omega}) = \varphi(\chi_{\sigma(A)}) - \varphi(\chi_{\Omega}) = \chi_{\sigma(A_o)} - \chi_{\Omega \cap \sigma(A)} = \chi_{\sigma(A_o) \cap \Omega^c}$, άρα $\Omega^c \in \mathcal{A}$.

Αν $\Omega_1, \Omega_2 \in \mathcal{A}$ τότε: $\varphi(\chi_{\Omega_1 \cap \Omega_2}) = \varphi(\chi_{\Omega_1} \cdot \chi_{\Omega_2}) = \varphi(\chi_{\Omega_1})\varphi(\chi_{\Omega_2}) = \chi_{\Omega_1 \cap \sigma(A_o)} \cdot \chi_{\Omega_2 \cap \sigma(A_o)} = \chi_{(\Omega_1 \cap \Omega_2) \cap \sigma(A_o)}$ και άρα $\Omega_1 \cap \Omega_2 \in \mathcal{A}$. Επομένως η $\mathcal{A}$ είναι άλγεβρα.

Αν τώρα (Ω_n) αύξουσα ακολουθία υποσυνόλων της $\mathcal{A}$ έχουμε $\chi_{\underset{n}{\cup}\Omega_n} = \sup \chi_{\Omega_n}$ και άρα:

$\varphi\left(\chi_{\underset{n}{\cup}\Omega_n}\right) = \varphi\left(\sup \chi_{\Omega_n}\right) = \sup \varphi\left(\chi_{\Omega_n}\right) = \sup \chi_{\Omega_n \cap \sigma(A_0)} = \chi_{\left(\underset{n}{\cup}\Omega_n\right)\cap\sigma(A_o)}$ από το οποίο έχουμε ότι η $\underset{n}{\cup}\Omega_n \in \mathcal{A}$. Τελικά η $\mathcal{A}$ είναι σ – άλγεβρα (Βλέπε στο [6], πρόταση 1.6.).

Έστω Ω ανοικτό υποσύνολο του $\sigma(A)$.

Θέτουμε $f_k(t) = \begin{cases} =1 \text{ αν } d(t,\Omega^c) \geq \dfrac{1}{2^k} \\ \\ = 2^k \cdot d(t,\Omega^c) \text{ αν } d(t,\Omega^c) < \dfrac{1}{2^k} \end{cases}$

Τότε (f_k) αύξουσα ακολουθία συνεχών συναρτήσεων ώστε $\sup\limits_k f_k = \chi_\Omega$.

Έχουμε $\varphi(\chi_\Omega) = \varphi\left(\sup\limits_k f_k\right) = \sup\limits_k \varphi(f_k) = \sup\limits_k f_k|_{\sigma(A_o)} = \chi_{\Omega\cap\sigma(A_o)}$ και άρα $\Omega \in \mathcal{A}$.

Συμπεραίνουμε ότι η $\mathcal{A}$ συμπίπτει με την Borel σ-άλγεβρα του $\sigma(A)$ αφού περιέχει τα ανοικτά σύνολα. Τελικά έχουμε ότι $\varphi(\chi_\Omega) = \chi_{\Omega\cap\sigma(A_o)}$ για κάθε Ω Borel υποσύνολο του $\sigma(A)$.

Παρατηρούμε ότι: $E_A[\Omega]|_{H_o} = \phi_2(\chi_\Omega(A)) = \phi_3 \circ \varphi \circ \phi_1^{-1}(\chi_\Omega(A)) =$ $\phi_3 \circ \varphi(\chi_\Omega) = \phi_3(\chi_{\Omega\cap\sigma(A_o)}) = \chi_{\Omega\cap\sigma(A_o)}(A_o) = E_{A_o}[\Omega \cap \sigma(A_o)]$ για κάθε Ω Borel υποσύνολο του $\sigma(A)$ και άρα $E_{A_o}[\cdot] = E_A[\cdot]|_{H_o}$.

Από την τελευταία σχέση συμπεραίνουμε ότι το μέτρο ν είναι απόλυτα συνεχές ως προς τον περιορισμό του μ στον Borel σ- άλγεβρα του $\sigma(A_o)$, μ_o.

Αν $f \in L^\infty(\mu)$ τότε υπάρχει ακολουθία απλών συναρτήσεων $(S_n): S_n \xrightarrow{\|\ \|_\infty^\mu} f \Rightarrow S_n(A)|_{H_o} \to f(A)|_{H_o}$. Όμως $S_n(A)|_{H_o} = S_n|_{\sigma(A_o)}^{(A_o)}$, ενώ $S_n|_{\sigma(A_o)} \xrightarrow{\|\ \|_\infty^{\mu_o}} f|_{\sigma(A_o)} \Rightarrow S_n|_{\sigma(A_o)} \xrightarrow{\|\ \|_\infty^{\nu}} f|_{\sigma(A_o)}$ οπότε $S_n|_{\sigma(A_o)}(A_o) \xrightarrow{\|\ \|} f|_{\sigma(A_o)}(A_o)$. Τελικά $f(A)|_{H_o} = f|_{\sigma(A_o)}(A_o)$.

6.8. Λήμμα: Όλα τα μέτρα που είναι ισοδύναμα προς το φασματικό μέτρο $E[\cdot]$ αυτοσυζυγούς τελεστού A, είναι της μορφής $\mu_y(\Omega) = \langle E[\Omega]y, y\rangle$, Ω Borel υποσύνολο του $\sigma(A)$, y διαχωρίζον διάνυσμα της άλγεβρας $\mathcal{M} = \{A\}''$.

Απόδειξη:

Έστω μ Borel μέτρο πιθανότητας στο $\sigma(A)$ ισοδύναμο προς το $E[\cdot]$.
α) Υποθέτουμε ότι η $\mathcal{M}$ είναι masa. Αν x μοναδιαίο κυκλικό διάνυσμα για την $\mathcal{M}$, τότε τα μέτρα μ, μ_x είναι ισοδύναμα. Επομένως από το θεώρημα Radon - Nikodym υπάρχει $f \in L^1(\sigma(A), \mu_x)$ ώστε $f > 0$ $\mu_x.\sigma.\pi.$ και $\mu(\Omega) = \int_\Omega f d\mu_x$ για κάθε Ω.

Από την παρατήρηση 6.2.2. υπάρχει μοναδιαίος τελεστής $U : L^2(\mu_x) \to H$, ώστε $U^* f(A) U = M_f$ για κάθε $f \in L^\infty(\mu_x)$. Τότε αφού $f^{\frac{1}{2}} \in L^2(\mu_x)$ ορίζεται το διάνυσμα $y = U\left(f^{\frac{1}{2}}\right) \in H$.

Για κάθε Borel υποσύνολο Ω του $\sigma(A)$ έχουμε: $\mu_y(\Omega) = \langle E[\Omega]y, y\rangle =$

$$= \langle U^* E[\Omega] U U^* y, U^* y\rangle = \left\langle U^* E[\Omega] U\left(f^{\frac{1}{2}}\right), f^{\frac{1}{2}}\right\rangle.$$

Επειδή $U^* E[\Omega] U = M_{\chi_\Omega}$ έπεται ότι $\mu_y(\Omega) = \int_\Omega f d_{\mu_x} = \mu(\Omega)$.

Θα δείξουμε τώρα ότι το y είναι κυκλικό διάνυσμα για την $\mathcal{M}$.

Έστω $\overline{\mathcal{M}y} \subsetneq H$ επιλέγουμε $z \in H^\perp$. Τότε για κάθε Borel σύνολο Ω, αν $g = U^*(z)$ έχουμε $\int_\Omega f^{\frac{1}{2}} \bar{g}\, d\mu_x = \left\langle \chi_\Omega f^{\frac{1}{2}}, g\right\rangle = \left\langle U\left(\chi_\Omega f^{\frac{1}{2}}\right), U(g)\right\rangle =$
$\left\langle UM_{\chi_\Omega}\left(f^{\frac{1}{2}}\right), z\right\rangle = \left\langle UM_{\chi_\Omega} U^*\left(U\left(f^{\frac{1}{2}}\right)\right), z\right\rangle = \langle E[\Omega]y, z\rangle = 0$. Το τελευταίο ισχύει για κάθε Ω επομένως $f^{\frac{1}{2}}\bar{g} = 0$ $\mu_x.\sigma.\pi.$ και αφού $f \neq 0$ έχουμε $g = 0$ $\mu_x.\sigma.\pi.$, οπότε $z = 0$. Άτοπο.

β) Αν $\mathcal{M} = \{A\}''$ αβελιανή άλγεβρα von Neumann γενικά, x διαχωρίζον διάνυσμα, $H_o = \overline{\mathcal{M}x}$, $A_o = A|_{H_o}$, τότε η $\mathcal{M}_o = \{A_o\}''$ είναι masa.

Από το προηγούμενο λήμμα έχουμε ότι: $E_A[\Omega]\Big|_{H_o} = E_{A_o}[\Omega \cap \sigma(A_o)]$. Έστω μ μέτρο ισοδύναμο προς το φασματικό μέτρο του A και μ_o ο περιορισμός του μ

στην Borel σ-άλγεβρα του $\sigma(A_o)$. Τότε για κάθε Borel σύνολο $\Omega \subseteq \sigma(A_o)$ έχουμε: $\mu_o(\Omega)=0 \Leftrightarrow \mu(\Omega)=0 \Leftrightarrow E_A[\Omega]=0 \Leftrightarrow E_A[\Omega]|_{H_o}=0 \Leftrightarrow E_{A_o}[\,\Omega\,]=0$. Άρα αφού το μ_o είναι ισοδύναμο προς το $E_{A_o}[\cdot]$, από το (α) υπάρχει $\xi \in H_o$ κυκλικό διάνυσμα για την M_o και άρα διαχωρίζον για την M ώστε: $\mu_o(\Omega)=\langle E_{A_o}[\Omega]\xi,\xi\rangle =$ $=\langle E_A[\Omega]\xi,\xi\rangle$ για κάθε κάθε Ω Borel στο $\sigma(A_o)$.

Παρατηρούμε ότι $\mu(\Omega)=0 \Leftrightarrow E_A[\Omega]\xi=0 \Leftrightarrow E_{A_o}[\Omega\cap\sigma(A_o)]\xi=0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \mu_o(\Omega\cap\sigma(A_o))=0 \Leftrightarrow \mu(\Omega\cap\sigma(A_o))=0$ για κάθε Ω Borel υποσύνολο του $\sigma(A\ )$.

Άρα $\mu(\,\sigma(A)\backslash\sigma(A_o)\,)=0$ από το οποίο έχουμε:

$$\mu(\Omega)=\mu(\Omega\cap\sigma(A_o))=\mu_o(\Omega\cap\sigma(A_o))=\langle E_{A_o}[\Omega\cap\sigma(A_o)]\xi,\xi\rangle=\langle E_A[\Omega]\xi,\xi\rangle=\mu_\xi(\Omega)$$

για κάθε Borel σύνολο Ω.

6.9. Πρόταση: Έστω A αυτοσυζυγής τελεστής, $\mathsf{M}=\{A\}''$, μ μέτρο ισοδύναμο προς το φασματικό μέτρο του A $E_A[\cdot]$ και $P=E_A[\,\Omega_o\,]$ για Ω_o Borel υποσύνολο του $\sigma(A)$. Τότε αν η P έχει πολλαπλότητα n, η άλγεβρα $\mathsf{M}|_{p(H)}$ είναι μοναδιαία ισοδύναμη με την πολλαπλασιαστική άλγεβρα $\left(\mathsf{M}_{\mu|_{\Omega_o}}\right)^{(n)}$ που δρα στον χώρο $\left(L^2\left(\sigma(A),\mu|_{\Omega_o}\right)\right)^{(n)}$. (Το $\mu|_{\Omega_o}$ ορίζεται στα Borel υποσύνολα του $\sigma(A)$ ως εξής: $\mu|_{\Omega_o}(\Omega)=\mu(\Omega\cap\Omega_o)$).

Απόδειξη:

Από την πρόταση 6.8. υπάρχει διαχωρίζον διάνυσμα x για την M ώστε: $\mu(\Omega)=\langle E_A[\Omega]x\,,x\rangle$ για κάθε Ω Borel υποσύνολο του $\sigma(A)$.

Το $P(x)$ είναι διαχωρίζον διάνυσμα για την $\mathsf{M}|_{P(H)}$ και επομένως αν $A_o=A|_{P(H)}$ τότε $\mathsf{M}|_{P(H)}=\{A_o\}''$ και το μέτρο $\nu(\Omega)=\langle E_{A_o}[\Omega]P(x),P(x)\rangle$, Ω Borel υποσύνολο του $\sigma(A_o)$, είναι ισοδύναμο προς το φασματικό μέτρο του $A_o, E_{A_o}[\cdot]$.

Από την παρατήρηση 6.4.4. έχουμε ότι $\mathsf{M}|_{P(H)}\sim(\mathsf{M}_\nu)^{(n)}$, όπου M_ν η πολ/κή άλγεβρα στον χώρο $L^2(\sigma(A_o),\nu)$.

Αν $\tilde{\nu}$ η επέκταση του ν στην Borel σ-άλγεβρα του $\sigma(A)$: $\tilde{\nu}(\Omega)=$ $=\nu(\Omega\cap\sigma(A_o))$ τότε είναι εύκολο να δούμε ότι $\mathsf{M}_\nu\sim\mathsf{M}_{\tilde{\nu}}$.

Παρατηρούμε ότι $\mu|_{\Omega_o}(\Omega) = \mu(\Omega \cap \Omega_o) = \langle E_A[\Omega \cap \Omega_o]x, x\rangle =$

$$\overset{6.7.}{=} \left\langle E_A[\Omega]|_{P(H)} P(x), P(x)\right\rangle = \left\langle E_{A_o}[\Omega \cap \sigma(A_o)]P(x), P(x)\right\rangle = \nu(\Omega \cap \sigma(A_o)) = \tilde{\nu}(\Omega)$$

για κάθε Ω Borel υποσύνολο του $\sigma(A)$.

Συνεπώς $\mu|_{\Omega_o} = \tilde{\nu}$ και άρα $\mathcal{M}|_{P(H)} \sim \left(\mathcal{M}|_{\mu|\Omega_o}\right)^{(n)}$.

6.10. Πρόταση: Έστω $\mathcal{M}$ αβελιανή άλγεβρα von Neumann που δρα στον χώρο H.

α) Αν $P \in \mathcal{M}$ προβολή πολ/τας n, τότε κάθε μη μηδενική προβολή $P' \in \mathcal{M}$: $P' \leq P$ είναι επίσης πολ/τας n.

β) Αν $(P_a)_{a\in A}$ όλες οι προβολές πολλαπλότητας n στην άλγεβρα $\mathcal{M}$, τότε και η προβολή $P = \underset{a\in A}{\vee} P_a$ είναι πολλαπλότητας n.

Απόδειξη:

Έστω A αυτοσυζυγής τελεστής ώστε $\mathcal{M} = \{A\}''$ και μ μέτρο ισοδύναμο προς το φασματικό μέτρο του A, $E_A[\cdot]$.

α) Αρκεί να δείξουμε ότι αν η $\mathcal{M}$ είναι πολ/τας n και P μη μηδενική προβολή στην $\mathcal{M}$, τότε η $\mathcal{M}|_{P(H)}$ είναι πολλαπλότητας n. Έστω $P = E_A[\Omega]$ για $\Omega \subseteq \sigma(A)$.

Από την παρατήρηση 6.4.4. υπάρχει μοναδιαίος τελεστής $V : H \to$ $\to (L^2(\mu))^{(n)} : Vg(A)V^* = (M_g)^{(n)}$ για κάθε $g \in L^\infty(\mu)$, ενώ $\mathcal{M}|_{P(H)} = \{g(A)|_{P(H)} /$ $/ g \in L^\infty(\mu)\}$.

Θέτουμε $H_o = P(H)$. Τότε η απεικόνιση $V|_{H_o} : H_o \to (L^2(\mu))^{(n)}$ είναι ισομετρική και επί του χώρου $(M_{x_\Omega}(L^2(\mu)))^{(n)}$ όπου $M_{x_\Omega}(L^2(\mu)) =$ $= \{x_\Omega \cdot f / f \in L^2(\mu)\}$.

Πράγματι αφού $(M_{\chi_\Omega})^{(n)} = V \cdot \chi_\Omega(A)V^*$ τότε: $(M_{x_\Omega}(L^2(\mu)))^{(n)} =$ $= (M_{\chi_\Omega})^{(n)} \cdot (L^2(\mu))^{(n)} = V\chi_\Omega(A)(H) = VP(H) = V(H_o)$.

Ως προς την ισομετρία $V|_{H_o}$ έχουμε ότι: $V|_{H_o}\, g(A)|_{H_o}\, V^*|_{(M_{x_\Omega}(L^2(\mu)))^{(n)}} =$ $= (M_{g\cdot\chi_\Omega})^{(n)}$ για κάθε $g \in L^\infty(\mu)$.

Θέτουμε $\mathcal{A} = \{M_{g\cdot\chi_\Omega} / g \in L^\infty(\mu)\}$ και συμπεραίνουμε ότι η άλγεβρα $\mathcal{M}|_{p(H)}$ είναι ισοδύναμη με την άλγεβρα $\mathcal{A}^{(n)}$.

Θεωρούμε τον τελεστή $W : M_{\chi_\Omega}(L^2(\mu)) \to L^2(\mu|_\Omega) : \chi_\Omega \cdot g \to \chi_\Omega \cdot g$, ο οποίος είναι προφανώς ισομετρία αλλά και επί, διότι αν $h \in L^2(\mu|_\Omega)$ τότε $h \cdot \chi_\Omega \in L^2(\mu)$ και $\|W(h\cdot\chi_\Omega) - h\|_2^2 = \int_\Omega |h\cdot\chi_\Omega - h|^2 \, d\mu|_\Omega = 0 \Rightarrow W(h\cdot\chi_\Omega) = h$.

Για κάθε $h \in L^\infty(\mu|_\Omega)$ έχουμε $h \cdot \chi_\Omega \in L^\infty(\mu)$ και ισχύει $W^* M_h W = = M_{(h\cdot\chi_\Omega)\chi_\Omega} \in \mathcal{A}$. Επομένως $W^* \mathcal{M}_{\mu|_\Omega} W \subseteq \mathcal{A}$ και επειδή η άλγεβρα $\mathcal{M}_{\mu|_\Omega}$ είναι masa έχουμε $W^* \mathcal{M}_{\mu|_\Omega} W = \mathcal{A}$

Συμπεραίνουμε ότι η άλγεβρα $(\mathcal{A})^{(n)}$ είναι ισοδύναμη με την $\left(\mathcal{M}_{\mu|_\Omega}\right)^{(n)}$ και άρα $\mathcal{M}|_{p(H)} \sim \left(\mathcal{M}_{\mu|_\Omega}\right)^{(n)}$. Το συμπέρασμα έπεται από τις παρατηρήσεις 6.4.1., 6.4.3.

β) Έστω $P = \bigvee_{a\in A} P_a$, θα δείξουμε ότι υπάρχει ακολουθία δεικτών $(a_k)_k \subseteq A$ και ακολουθία κάθετων ανά δύο προβολών $(P_k)_k$ στην άλγεβρα $\mathcal{M}$ ώστε $P_k \leq P_{a_k}$ για κάθε k και $P = \sum_k P_k$.

Από το λήμμα 2.9. υπάρχει $(a_k)_k \subseteq A$ ώστε $P = \bigvee_{k=1}^{\infty} P_{a_k}$. Για κάθε k υπάρχει Borel υποσύνολο του $\sigma(A)$, έστω $B_k : P_{a_k} = E_A[B_k]$.

Ορίζουμε $\Omega_k = B_k \setminus \bigcup_{i=1}^{k-1} B_i$ για κάθε k. Τότε η ακολουθία των Borel συνόλων $(\Omega_k)_k$ αποτελείται από $\mu-$σχεδόν ξένα ανά δύο σύνολα ώστε: $\bigcup_{k=1}^{\infty} \Omega_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k$.

Ορίζουμε $P_k = E_A[\Omega_k]$. Τότε από τον συναρτησιακό λογισμό οι προβολές (P_k) είναι κάθετες ανά δύο, ενώ: $\sum_k P_k = \bigvee_k P_k = \bigvee_k E_A[\Omega_k] \leq \bigvee_k E_A[B_k] = = \bigvee_k P_{a_k} = P$. Όμως $\bigvee_k E_A[\Omega_k] = E_A\left[\bigcup_k \Omega_k\right] = E_A\left[\bigcup_k B_k\right] \geq E_A[B_m] = P_{a_m}$ για κάθε m, οπότε $\sum_k P_k = \bigvee_k E_A[\Omega_k] \geq \bigvee_k P_{a_k} = P$. Συμπεραίνουμε ότι $\sum_k P_k = P$, ενώ $P_k \leq P_{a_k}$ και άρα η P_k είναι προβολή πολλαπλότητας n για κάθε k.

Από την πρόταση 6.9 η άλγεβρα $\mathcal{M}|_{P_k(H)}$ είναι μοναδιαία ισοδύναμη με την $\left(M_{\mu|_{\Omega_k}}\right)^{(n)}$.

Άρα για να ολοκληρωθεί η απόδειξη αρκεί να δείξουμε ότι:

$$\underset{k}{\oplus}\mathcal{M}|_{P_k(H)} \sim \mathcal{M}|_{P(H)} \quad (1).$$

$$\underset{k}{\oplus}\left(\mathcal{M}_{\mu|_{\Omega_k}}\right)^{(n)} \sim \left(\mathcal{M}_{\mu|_{\Omega}}\right)^{(n)} \quad (2).$$

και τότε το συμπέρασμα θα προκύψει από τις παρατηρήσεις 6.4.1., 6.4.3.

Ορίζουμε $U : P(H) \to \underset{k}{\oplus} P_k(H) : x \to \underset{k}{\oplus} P_k(x)$. Ως προς αυτόν τον μοναδιαίο τελεστή έχουμε: $UM|_{P(H)}U^* = \underset{k}{\oplus}M|_{P_k(H)}$ για κάθε $M \in \mathcal{M}$ και έτσι ισχύει η (1).

Ορίζουμε τελεστή $W : \underset{k}{\oplus} L^2\left(\mu|_{\Omega_k}\right) \to L^2\left(\mu|_{\Omega}\right) : \underset{k}{\oplus} f_k \to \sum_k f_k \cdot X_{\Omega_k}$ που είναι μοναδιαίος και επί, διότι $\Omega = \underset{k}{U}\,\Omega_k$ και Ω_k, Ω_m $\mu -$σχεδόν ξένα για $k \neq m$. Παρατηρούμε ότι $W^* M_f W = \underset{k}{\oplus} M_{f \cdot \chi_{\Omega_k}}$ για κάθε $f \in L^\infty\left(\mu|_{\Omega}\right)$, επομένως $W^* \mathcal{M}_{\mu|_{\Omega}} W \subseteq \underset{k}{\oplus} \mathcal{M}_{\mu|_{\Omega_k}}$. Όμως η άλγεβρα $\mathcal{M}_{\mu|_{\Omega}}$ είναι masa και άρα $\underset{k}{\oplus}\mathcal{M}_{\mu|_{\Omega_k}} \sim \mathcal{M}_{\mu|_{\Omega}}$, από το οποίο έχουμε ότι $\left(\mathcal{M}_{\mu|_{\Omega}}\right)^{(n)} \sim \left(\underset{k}{\oplus}\mathcal{M}_{\mu|_{\Omega_k}}\right)^{(n)}$.
Επειδή $\left(\underset{k}{\oplus}\mathcal{M}_{\mu|_{\Omega_k}}\right)^{(n)} \sim \underset{k}{\oplus}\left(\mathcal{M}_{\mu|_{\Omega_k}}\right)^{(n)}$ συμπεραίνουμε ότι ισχύει η (2).

6.11. Λημμα: Αν $\mathcal{M}$ αβελιανή άλγεβρα von Neumann υπάρχει μη μηδενική προβολή $P \in \mathcal{M}$ που έχει πολλαπλότητα.

Απόδειξη:

Έστω x_1 διαχωρίζον διάνυσμα για την $\mathcal{M}$ και Q_1 η προβολή στον χώρο $\overline{\mathcal{M}x_1}$. Τότε $Q_1 \in \mathcal{M}'$, $x_1 \in Q_1(H)$.

Έστω $x_2 \in Q_1^{\perp}(H)$ διαχωρίζον διάνυσμα για την $\mathcal{M}|_{Q_1^{\perp}(H)}$. Αν Q_2 η προβολή στον χώρο $\overline{\mathcal{M}|_{Q_1^{\perp}(H)}(x_2)} = \overline{\mathcal{M}x_2}$, τότε $Q_2 \in \mathcal{M}'$ και $Q_2 \leq Q_1^{\perp}$. Το x_2 είναι κυκλικό για την $\left(\mathcal{M}|_{Q_1^{\perp}(H)}\right)\Big|_{Q_2(H)} = \mathcal{M}|_{Q_2(H)}$ και $x_2 \in Q_2(H)$.

Συνεχίζουμε επαγωγικά και έχουμε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ $x_n \in (Q_1 + \ldots + Q_{n-1})^{\perp}(H)$ διαχωρίζον διάνυσμα για την $\mathcal{M}|_{(Q_1+\ldots+Q_{n-1})^{\perp}(H)}$. Αν Q_n η προβολή στον χώρο $\overline{\mathcal{M}|_{(Q_1+\ldots+Q_{n-1})^{\perp}(H)} x_n} = \overline{\mathcal{M} x_n}$ τότε $Q_n \in \mathcal{M}'$ και $Q_n \leq (Q_1 + \ldots + Q_{n-1})^{\perp}$.

Το x_n είναι κυκλικό για την $\left(\mathcal{M}|_{(Q_1+\ldots+Q_{n-1})^{\perp}(H)}\right)\Big|_{Q_n(H)} = \mathcal{M}|_{Q_n(H)}$ και τελικά $x_n \in Q_n(H)$.

Θέτουμε $\overline{Q_n} = \wedge\{P \,/\, P$ προβολή στην $\mathcal{M}$ ώστε $P \geq Q_n\}, n \in \mathbb{N}$. Τότε αφού η $\mathcal{M}$ είναι SOT-κλειστή, $\overline{Q_n} \in \mathcal{M}$ για κάθε n. Θα δείξουμε ότι $I = \overline{Q_1} \geq \overline{Q_n} \geq \overline{Q}_{n+1}$.

Έστω P προβολή στην $\mathcal{M}$ ώστε $P \geq Q_1$ τότε $Px_1 = x_1$ και αφού το x_1 είναι διαχωρίζον διάνυσμα για την $\mathcal{M}$, έχουμε ότι $P = I$. Οπότε $\overline{Q_1} = I$.

Θα δείξουμε ότι $\overline{Q}_n \geq \overline{Q}_{n+1}$. Ισοδύναμα, αν $P \in \mathcal{M}$ προβολή: $P \geq Q_n$ τότε $P \geq Q_{n+1}$ ή ισοδύναμα, αν $P \in \mathcal{M}$ προβολή: $P \leq Q_n{}^{\perp}$ τότε $P \leq Q_{n+1}{}^{\perp}$.

Έστω $P \leq Q_n{}^{\perp}$ τότε $PQ_n = 0$ και άρα $Px_n = 0$ διότι $x_n \in Q_n(H)$. Όμως το x_n είναι διαχωρίζον διάνυσμα για την $\mathcal{M}|_{(Q_1+\ldots+Q_{n-1})^{\perp}(H)}$, άρα $P(Q_1 + \ldots + Q_{n-1})^{\perp} = 0$ και επειδή $Q_{n+1} \leq (Q_1 + \ldots + Q_n)^{\perp} \leq (Q_1 + \ldots + Q_{n-1})^{\perp}$ έχουμε ότι $PQ_{n+1} = 0$, δηλαδή $P \leq Q_{n+1}{}^{\perp}$.

Έχουμε τώρα δύο περιπτώσεις: i) Υπάρχει $n_o : \overline{Q}_{n_o} = I > \overline{Q}_{n_o+1}$ και ii) $\overline{Q}_n = I$ για κάθε $n \geq 1$.

i) Θέτουμε $R = I - \overline{Q}_{n_o+1} \in \mathcal{M}$ και συμβολίζουμε: $\mathcal{M}_R = \mathcal{M}|_{R(H)}$. Παρατηρούμε ότι: $Rx_{n_o+1} = x_{n_o+1} - \overline{Q}_{n_{o+1}}(x_{n_o+1}) = x_{n_o+1} - x_{n_o+1} = 0$. Το x_{n_o+1} είναι διαχωρίζον διάνυσμα για την $\mathcal{M}|_{(Q_1+\ldots+Q_{n_o})^{\perp}(H)}$ και επειδή $R(Q_1 + \ldots + Q_{n_o})^{\perp}(x_{n_o+1}) = R(x_{n_o+1}) = 0$, τότε $R(Q_1 + \ldots + Q_{n_o})^{\perp} = 0$ από το οποίο $R \leq Q_1 + \ldots + Q_{n_o}$. Έστω $R_i = RQ_i \in \mathcal{M}'$, τότε $R = \bigoplus_{i=1}^{n} R_i$.

Έχουμε ότι :

(α) $\boldsymbol{Rx_i}$ **= διαχωρίζον διάνυσμα για την** $\boldsymbol{\mathcal{M}_R}$ **για κάθε** $\boldsymbol{i = 1,2,\ldots,n_o}$. Πράγματι έστω $M|_{R(H)}(Rx_i) = 0 \Rightarrow MR(x_i) = 0 \Rightarrow MRQ_i(x_i) = 0 \Rightarrow MR|_{Q_i(H)}(x_i) = 0$ και τότε αφού το x_i είναι κυκλικό για την $\mathcal{M}|_{Q_i(H)}$ έχουμε ότι : $MR|_{Q_i(H)} = 0 \Rightarrow MRQ_i = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (I-MR)Q_i = Q_i \Rightarrow I - MR \geq Q_i$. Όμως $I - MR \in \mathcal{M}$ άρα $I - MR \geq \overline{Q}_i = I \Rightarrow$
$\Rightarrow MR = 0 \Rightarrow M|_{R(H)} = 0$.

(β) $\boldsymbol{R_i}$ **= προβολή στον χώρο** $\overline{\mathcal{M}_R(Rx_i)}$ **για κάθε** $\boldsymbol{i = 1,2,\ldots,n_o}$. Πράγματι για κάθε $M \in \mathcal{M}$ $\quad R_i\left(M|_{R(H)}(Rx_i)\right) = R_i(MRx_i) = MR_i(x_i) = M|_{R(H)}(Rx_i)$, οπότε $\overline{\mathcal{M}|_{R(H)}(Rx_i)} \leq R_i(H)$. Ενώ για τυχόν $R_i(x) = RQ_i(x)$ επειδή $Q_i(x) \in \overline{\mathcal{M}x_i}$ υπάρχει $(M_n) \subseteq \mathcal{M}$ ώστε :
$Q_i(x) = \lim_n M_n(x_i) \Rightarrow R_i(x) = \lim_n RM_n(x_i) = \lim_n M_n|_{R(H)}(Rx_i) \in \overline{\mathcal{M}|_{R(H)}(Rx_i)}$.
Συνεπώς $R_i(H) \leq \overline{\mathcal{M}|_{R(H)}(Rx_i)}$.

Έχουμε ότι $R(H) = \bigoplus_{i=1}^{n_o} R_i(H)$, $R_i(H) = \overline{\mathcal{M}_R(Rx_i)}$, Rx_i διαχωρίζον διάνυσμα για την άλγεβρα $\mathcal{M}_R$ για κάθε $i = 1,2,\ldots,n_o$. Συμπεραίνουμε από την παρατήρηση 6.4.2. ότι η $\mathcal{M}_R$ και άρα η R έχει πολ/τα n_o.

ii) Έστω $\overline{Q}_n = I$, $n \in \mathbb{N}$. Παρατηρούμε ότι το x_n είναι διαχωρίζον διάνυσμα της $\mathcal{M}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Πράγματι έστω $P \in \mathcal{M} : Px_n = 0$. Τότε για κάθε $A \in \mathcal{M}$, $P(Ax_n) =$
$= APx_n = 0$. Επομένως $P(\overline{\mathcal{M}x_n}) = 0 \Rightarrow PQ_n = 0 \Rightarrow P \perp Q_n \Rightarrow I - P \geq Q_n \Rightarrow$
$\Rightarrow I - P \geq \overline{Q}_n = I \Rightarrow P = 0$.

Έχουμε λοιπόν Q_n = προβολή στον χώρο $\overline{\mathcal{M}x_n}$, x_n διαχωρίζον διάνυσμα για την $\mathcal{M}$ και $Q_n \perp Q_m$ για $n \neq m$. Κάνοντας αν χρειάζεται χρήση του λήμματος ZORN, υποθέτουμε ότι η οικογένεια (Q_n) είναι μεγιστική ως προς τις προηγούμενες ιδιότητες: $Q_n \perp Q_m$, $n \neq m$, Q_n προβολή στο χώρο $\overline{\mathcal{M}x_n}$, x_n διαχωρίζον διάνυσμα της $\mathcal{M}$.

Θέτουμε $Q = \left(\sum_n Q_n\right)^{\perp}$. Τότε αν $\overline{Q} = \wedge\{P / P$ προβολή στην $\mathcal{M}$ ώστε $P \geq Q\}$ έχουμε ότι $\overline{Q} \neq I$. Πράγματι αν $\overline{Q} = I$ τότε η $\mathcal{M}|_{Q(H)}$ έχει διαχωρίζον διάνυσμα $y \in Q(H)$ που γίνεται όμως διαχωρίζον για την $\mathcal{M}$ διότι αν $P \in \mathcal{M} : Py = 0$ τότε όπως και προηγούμενα $P(\overline{\mathcal{M}y}) = 0 \Rightarrow PQ = 0 \Rightarrow I - P \geq Q \Rightarrow I - P \geq \overline{Q} = I \Rightarrow$
$\Rightarrow P = 0$. Παρατηρούμε ότι $QMy = MQy = My$, επόμενα $\overline{\mathcal{M}y} \leq Q(H)$. Θεωρούμε Q' την προβολή στον χώρο $\overline{\mathcal{M}y}$ τότε $Q' \perp Q_n$ για κάθε n. Άτοπο, αφού αυτό αντιβαίνει στην μεγιστικότητα της οικογένειας (Q_n).

Θέτουμε $R = I - \overline{Q}$, θα επαναλάβουμε την διαδικασία που ακολουθήσαμε στο (i) για να δείξουμε ότι η R έχει άπειρη πολλαπλότητα.

Έστω $y \in Q(H)$ διαχωρίζον διάνυσμα για την $\mathcal{M}|_{Q(H)}$, τότε $R\,y = y - \overline{Q}\,y = y - y = 0$. Το y είναι διαχωρίζον διάνυσμα για την $\mathcal{M}|_{(\sum Q_n)^{\perp}(H)}$ και επειδή $R(\sum Q_n)^{\perp} y = R\,y = 0$, τότε $R\left(\sum_n Q_n\right)^{\perp} = 0 \Rightarrow R \le \sum_n Q_n$. Θέτουμε $R_i = RQ_i \in \mathcal{M}'$ και τότε $R = \bigoplus_{i=1}^{\infty} R_i$. Εντελώς ανάλογα με την περίπτωση (i) έχουμε ότι: (α): Rx_i = διαχωρίζον διάνυσμα για την $\mathcal{M}_R = \mathcal{M}|_{R(H)}$, (β): R_i = προβολή στον χώρο $\overline{\mathcal{M}_R(Rx_i)}$ για κάθε $i = 1,2,\ldots$.

Συμπεραίνουμε από την παρατήρηση 6.4.2. ότι η $\mathcal{M}_R$ και άρα η R έχει πολλαπλότητα ∞.

6.12. Θεώρημα: Έστω $\mathcal{M}$ αβελιανή άλγεβρα von Neumann και A αυτοσυζυγής τελεστής ώστε $\mathcal{M} = \{A\}''$, τότε:

(α) Υπάρχουν μοναδικά ορισμένες κάθετες ανά δύο προβολές $\{P_n : 1 \le n \le \infty\} \subseteq \mathcal{M}$, ώστε P_n πολλαπλότητας n και $I = P_\infty + \sum_{n=1}^{\infty} P_n$.

(β) Υπάρχουν κάθετα ανά δύο μέτρα Borel στον $X = \sigma(A)$, μ_n, $1 \le n \le \infty$, απολύτως συνεχή προς το φασματικό μέτρο του A ώστε η $\mathcal{M}$ να είναι μοναδιαία ισοδύναμη με την άλγεβρα $(\mathcal{M}_{\mu_\infty})^{\infty} \oplus \sum_{n=1}^{\infty} \oplus (\mathcal{M}_{\mu_n})^{(n)}$ που δρα στον χώρο

$$\left(L^2(\mu_\infty)\right)^{\infty} \oplus \sum_{n=1}^{\infty} \oplus \left(L^2(\mu_n)\right)^{(n)}.$$

Απόδειξη:

α) Για κάθε πληθικό αριθμό $n \in \{\infty,1,2,\ldots\}$ θεωρούμε P_n το sup όλων των προβολών της $\mathcal{M}$, που είναι πολλαπλότητας n. Από την πρόταση 6.10 και η P_n έχει πολλαπλότητα n.

Τότε η (P_n) είναι ορθογώνια οικογένεια προβολών αφού αν $n \ne m$ και $P_n P_m \ne 0$ πάλι από το 6.10 η προβολή $P_n P_m$ θα είναι πολ/τας και n και m, άτοπο από το 6.5.

Θα δείξουμε ότι $\sum_{1 \le n \le \infty} P_n = I$. Πράγματι, διαφορετικά θα είχαμε την μη μηδενική προβολή $Q = I - \sum_{1 \le n \le \infty} P_n$. Από το λήμμα 6.11. η άλγεβρα $\mathcal{M}|_{Q(H)}$ έχει προβολή R κάποιας πολλαπλότητας m. Επόμενα η προβολή της $\mathcal{M}$ πάνω στον χώρο

$RQ(H)$ θα έχει επίσης πολλαπλότητα m και άρα $RQ(H) \leq P_m(H)$. Άτοπο αφού $Q \perp P_m$.

Έστω $\{Q_n : 1 \leq n \leq \infty\} \subseteq \mathcal{M}$ ώστε Q_n πολλαπλότητας n, $I = Q_\infty + \sum_{n=1}^{\infty} Q_n$ και $Q_n \perp Q_m$ για $n \neq m$. Επειδή $P_n = \vee\{Q \in \mathcal{M} / Q = \text{πολ/τας } n\}$ έχουμε ότι $Q_n \leq P_n$ για κάθε n.

Αν $Q_{n_o} < P_{n_o}$ για κάποιο n_o επειδή οι προβολές (Q_n) είναι κάθετες θα είχαμε ότι $I = Q_\infty + \sum_{n=1}^{\infty} Q_n < P_\infty + \sum_{n=1}^{\infty} P_n = I$, άτοπο. Συνεπώς $P_n = Q_n$ για κάθε n.

(β) Έστω μ μέτρο ισοδύναμο προς το φασματικό μέτρο του $A, E[\cdot]$. Τότε αφού $I = \sum_{1 \leq n \leq \infty} P_n$ και $P_n \perp P_m$ για $n \neq m$ αν $P_n = E[\Omega_n]$, Ω_n Borel υποσύνολο του X, από τον συναρτησιακό λογισμό έχουμε ότι $X = \bigcup_{1 \leq n \leq \infty} \Omega_n$ και $\Omega_n \bigcap_{n \neq m} \Omega_m = \emptyset$ μ..σ.π..

Από την πρόταση 6.9. $\mathcal{M}\big|_{P_n(H)} \sim \left(\mathcal{M}_\mu\big|_{\Omega_n}\right)^{(n)}$ για κάθε n. Όμως

$$\mathcal{M} \sim \mathcal{M}\big|_{P_\infty(H)} \oplus \mathcal{M}\big|_{P_1(H)} \oplus \mathcal{M}\big|_{P_2(H)} \oplus \ldots$$ και συνεπώς

$$\mathcal{M} \sim \left(\mathcal{M}_\mu\big|_{\Omega_\infty}\right)^{(\infty)} \oplus \sum_{n=1}^{\infty} \oplus \left(\mathcal{M}_\mu\big|_{\Omega_n}\right)^{(n)}.$$

Θέτουμε $\mu_n = \mu\big|_{\Omega_n}$ για κάθε n και η απόδειξη ολοκληρώθηκε.

6.13. Έστω $\mathcal{M}$ αβελιανή άλγεβρα von Neumann, A αυτοσυζυγής τελεστής : $\mathcal{M} = \{A\}''$, μ μέτρο ισοδύναμο προς το φασματικό μέτρο του A. Τότε από το προηγούμενο θεώρημα υπάρχουν μοναδικά ορισμένες κάθετες ανά δύο προβολές P_n της άλγεβρας $\mathcal{M}$, ώστε $I = P_\infty + \sum_{n=1}^{\infty} P_n$ και P_n πολ/τας n για κάθε n. Από τον συναρτησιακό λογισμό υπάρχουν μ – σχεδόν ξένα Borel υποσύνολα (Ω_n): $E[\Omega_n] = P_n$, $n = \infty, 1, 2, \ldots$ και $\sigma(A) = \bigcup_{1 \leq n \leq \infty} \Omega_n$. Ορίζουμε τότε συνάρτηση $m : \sigma(A) \to \{\infty, 1, 2, \ldots\}$ ώστε $m = \infty \cdot \chi_{\Omega_\infty} + \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \chi_{\Omega_n}$ η οποία ονομάζεται **συνάρτηση πολλαπλότητας** της άλγεβρας $\mathcal{M}$ ή του τελεστού A. Παρατηρούμε ότι η m είναι Borel μετρήσιμη συνάρτηση.

6.14. Πρόταση: Δύο αυτοσυζυγείς τελεστές Α,Β είναι μοναδιαία ισοδύναμοι αν και μόνο αν έχουν το ίδιο φάσμα, ισοδύναμα φασματικά μέτρα και την ίδια συνάρτηση πολλαπλότητας.

Απόδειξη:

Έστω U μοναδιαίος τελεστής ώστε $B = UAU^*$. Τότε : $\sigma(A) = \sigma(B) = X$ και αν $E_A[\cdot], E_B[\cdot]$ φασματικά μέτρα των A, B αντίστοιχα έχουμε από το 1.5.4. $E_B[\Omega] = UE_A[\Omega]U^*$ για κάθε Borel υποσύνολο Ω του X και άρα τα $E_A[\cdot], E_B[\cdot]$ είναι ισοδύναμα φασματικά μέτρα. Έστω μ Borel μέτρο ισοδύναμο προς τα $E_A[\cdot], E_B[\cdot]$.

Από το θεώρημα 6.12. υπάρχουν μ – σχεδόν μοναδική Borel διαμέριση του X, $\{\Omega_n\}$ ώστε $I = E_A[\Omega_\infty] + \sum_{n=1}^{\infty} E_A[\Omega_n]$.

Αν m_A η συνάρτηση πολ/τας του A, έχουμε $m_A = \infty\chi_{\Omega_\infty} + \sum_{n=1}^{\infty} n\chi_{\Omega_n}$.

Δρώντας με τον U έχουμε: $I = UE_A[\Omega_\infty]U^* + \sum_{n=1}^{\infty} UE_A[\Omega_n]U^* = E_B[\Omega_\infty] +$
$+ \sum_{n=1}^{\infty} E_B[\Omega_n]$.

Οι προβολές $\{E_B(\Omega_n)\}$ είναι κάθετες ανά δύο πολλαπλότητας n, και επομένως λόγω της μοναδικότητας που εξασφαλίζει το θεώρημα 6.12. $m_B = \infty\chi_\infty +$
$+ \sum_{n=1}^{\infty} n\chi_{\Omega_n} = m_A$.

Αντίστροφα, έστω ότι οι αυτοσυζυγείς τελεστές A, B δρούν στους χώρους H, K αντίστοιχα έχουν το ίδιο φάσμα X, ισοδύναμα φασματικά μέτρα $E_A[\cdot], E_B[\cdot]$ και την ίδια συνάρτηση πολλαπλότητας m.

Τότε υπάρχει Borel διαμέριση του $X, \{\Omega_n\}$, ώστε $m = \infty\chi_{\Omega_\infty} + \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \chi_{\Omega_n}$.

Συμπεραίνουμε ότι $H = \bigoplus_{1 \le n \le \infty} E_A[\Omega_n](H)$, $K = \bigoplus_{1 \le n \le \infty} E_B[\Omega_n](K)$ όπου $E_A[\Omega_n] \neq 0 \Leftrightarrow E_B[\Omega_n] \neq 0$ για κάθε n λόγω της ισοδυναμίας των $E_A[\cdot], E_B[\cdot]$.

Έστω μ, Borel μέτρο ισοδύναμο προς τα $E_A[\cdot], E_B[\cdot]$. Θέτουμε $H_n = E_A[\Omega_n](H)$, $K_n = E_B[\Omega_n](K)$ για κάθε n. Αν $\mu(\Omega_n) \neq 0$, τότε από την πρόταση 6.9. $\{A\}''\big|_{H_n} \sim \left(\mathrm{M}\big|_{\mu|\Omega_n}\right)^{(n)} \sim \{B\}''\big|_{K_n}$ και συνεπώς υπάρχει μοναδιαίος τελεστής $U_n : H_n \to K_n$ ώστε αν Ω Borel υποσύνολο του X να έχουμε ότι: $U_n\, E_A[\Omega]\big|_{H_n} U_n^* = E_B[\Omega]\big|_{K_n}$ για κάθε n. Ορίζουμε $U = \bigoplus_n U_n : H \to K$ ώστε

$$UE_A[\Omega]U^* = \left(\underset{n}{\oplus} U_n\right)\left(\underset{n}{\oplus} E_A[\Omega]|_{H_n}\right)\left(\underset{n}{\oplus} U_n^*\right) = \underset{n}{\oplus}\left(U_n\, E_A[\Omega]|_{H_n}\, U_n^*\right) =$$
$$= \underset{n}{\oplus} E_B[\Omega]|_{K_n} = E_B[\Omega].$$

Τότε αν f_1 η ταυτοτική συνάρτηση στο X έχουμε : $B = \int f_1\, d_{E_B} =$
$= \int f_1\, dUE_AU^* = U \int f_1\, dE_AU^* = UAU^*$.

6.15. Πρόταση: Έστω $\mathcal{N}$, $\mathcal{M}$ nests , Φ: $\mathcal{N} \to [0,1]$ ομοιομορφική εμφύτευση που διατηρεί την διάταξη ώστε : $0,1 \in \Phi(\mathcal{N})$ και $\Psi : \mathcal{N} \to \mathcal{M}$ 1-1 και επί απεικόνιση που διατηρεί την διάταξη. Τότε υπάρχει μοναδιαίος τελεστής U που επάγει την Ψ , (δηλαδή $\Psi(N) = UNU^*$ για κάθε N) αν και μόνο αν οι τελεστές $A = \int \Phi(N)\, dN$, $B = \int \Phi \circ \Psi^{-1}(M)\, dM$ είναι ισοδύναμοι.

Απόδειξη:

Έστω ότι υπάρχει μοναδιαίος τελεστής που επάγει την Ψ . Παρατηρούμε ότι η απεικόνιση $\Phi \circ \Psi^{-1} : \mathcal{M} \to [0,1]$ είναι ομοιομορφική εμφύτευση που διατηρεί την διάταξη με $\Phi \circ \Psi^{-1}(O) = 0$, $\Phi \circ \Psi^{-1}(I) = 1$. Επόμενα από την πρόταση 3.9. ορίζεται ο τελεστής $B = \int \Phi \circ \Psi^{-1}(M)\, dM$.

Έστω $E_A[\cdot]$, $E_B[\cdot]$ τα φασματικά μέτρα των A, B αντίστοιχα, τότε πάλι από την 3.9. $\sigma(A) = \Phi(\mathcal{N}) = \Phi \circ \Psi^{-1}(\mathcal{M}) = \sigma(B) = X$ και $E_A[0,t] = \Phi^{-1}(t)$, $E_B[0,t] = \Psi \circ \Phi^{-1}(t)$ για κάθε $t \in X$.

Θεωρούμε τον τελεστή $B' = UAU^*$ τότε από το 1.5.4. έχουμε $E_{B'}[0,t] = UE_A[0,t]U^* = \Psi(E_A[0,t]) = E_B[0,t]$. Επομένως από το 1.5.1. αφού οι B, B' έχουν τα ίδια φασματικά μέτρα, συμπίπτουν.

Αντίστροφα, έστω ότι οι τελεστές $A = \int \Phi(N)dN$, $B = \int \Phi \circ \Psi^{-1}(M)\, dM$ είναι ισοδύναμοι: $B = UAU^*$. Τότε για κάθε $t \in X$, $E_B[0,t] = UE_A[0,t]U^* \Rightarrow$
$\Rightarrow \Psi(\Phi^{-1}(t)) = U\Phi^{-1}(t)U^*$ και άρα $\Psi(N) = UNU^*$ για κάθε $N \in \mathcal{N}$.

6.16. Πόρισμα: Έστω $\mathcal{N}$, $\mathcal{M}$ nests που είναι ομοιομορφικά με υποσύνολο ω του $[0,1]$ μέσω των απεικονίσεων $\Phi : \mathcal{N} \to \omega$, $\Psi : \mathcal{M} \to \omega$ που διατηρούν την διάταξη. Τότε η $\Psi^{-1} \circ \Phi : \mathcal{N} \to \mathcal{M}$ επάγεται από μοναδιαίο τελεστή αν και μόνο αν οι τελεστές $A = \int \Phi(N)\, dN$, $B = \int \Psi(M)\, dM$ έχουν τα ίδια φασματικά μέτρα και την ίδια συνάρτηση πολλαπλότητας.

Απόδειξη:

Από την προηγούμενη πρόταση η απεικόνιση $\Psi^{-1} \circ \Phi$ επάγεται από μοναδιαίο τελεστή αν και μόνο αν οι αυτοσυζυγείς τελεστές $A = \int \Phi(N)\,dN$, $B = \int \Phi \circ \left(\Psi^{-1} \circ \Phi\right)^{-1}(M)\,dM = \int \Psi(M)\,dM$ είναι μοναδιαία ισοδύναμοι.

Το τελευταίο όμως από την 6.14. γίνεται αν και μόνο αν οι A, B έχουν τα ίδια φασματικά μέτρα και την ίδια συνάρτηση πολλαπλότητας.

Σχόλιο: Αν τα $\mathcal{N}, \mathcal{M}$ είναι συνεχή nests και Φ, Ψ όπως στο 6.16 , τότε $\Phi(\mathcal{N}) = \Psi(\mathcal{M}) = [0,1]$.
Από την παρατήρηση 3.7.1. οι τελεστές $A = \int \Phi(N)dN$, $B = \int \Psi(M)dM$ έχουν τα ίδια φασματικά μέτρα και άρα από το τελευταίο πόρισμα τα $\mathcal{N}, \mathcal{M}$ είναι ισοδύναμα αν και μόνο αν οι άλγεβρες $\mathcal{N}'', \mathcal{M}''$ έχουν την ίδια συνάρτηση πολλαπλότητας.

7. ΜΟΝΑΔΙΑΙΕΣ ΔΡΑΣΕΙΣ ΣΕ NESTS ΚΑΙ ΟΙ ΣΧΕΣΕΙΣ ΤΟΥ WEYL

7.1. Ορισμοί: Έστω $\mathcal{N}$ nest :

α) Στο εξής κάθε απεικόνιση $\Phi : \mathcal{N} \to \mathcal{N}$ 1-1, επί που διατηρεί την διάταξη: $N \leq M \Leftrightarrow \Phi(N) \leq \Phi(M)$ θα λέγεται **ισομορφισμός διάταξης**. Είναι εύκολο να διαπιστώσουμε ότι κάθε ισομορφισμός διάταξης είναι ομοιομορφισμός όταν το $\mathcal{N}$ είναι εφοδιασμένο με την SOT τοπολογία, ενώ απαραίτητα $\Phi(0) = 0, \Phi(I) = I$. Το σύνολο των ισομορφισμών διάταξης με πράξη την σύνθεση είναι ομάδα.

β) Μία **μονοπαραμετρική ομάδα** για το nest $\mathcal{N}$ είναι μία υποομάδα $\{\Theta_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ της ομάδας των ισομορφισμών διάταξης του $\mathcal{N}$, ώστε: $\Theta_{t+s} = \Theta_t \circ \Theta_s$ για κάθε $t,s \in \mathbb{R}$. Παρατηρούμε τότε ότι $\Theta_o = id$ και $\Theta_{-t} = \Theta_t^{-1}$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$. Επίσης ότι για δεδομένη μονοπαραμετρική ομάδα $\{\Theta_t\}_{t \in \mathbb{R}}$, ορίζεται δράση της προσθετικής ομάδας των πραγματικών αριθμών ($\mathbb{R}$,+) πάνω στο $\mathcal{N}$,
$\Theta : \mathbb{R} \times \mathcal{N} \to \mathcal{N} : \Theta(t,E) = \Theta_t(E)$.

γ) Μία μονοπαραμετρική ομάδα $\{\Theta_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ ονομάζεται **SOT-συνεχής** αν η απεικόνιση $\mathbb{R} \to \mathcal{N} : t \to \Theta_t(E)$ είναι συνεχής για κάθε $E \in \mathcal{N}$ όταν το $\mathbb{R}$ είναι εφοδιασμένο με την συνήθη τοπολογία και το $\mathcal{N}$ με την SOT τοπολογία.

δ) Έστω $\{\Theta_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ SOT συνεχής μονοπαραμετρική ομάδα για το $\mathcal{N}$. Λέμε ότι η Θ δρα **μεταβατικά** αν η κλειστή θήκη κάποιας τροχιάς $\mathcal{O}(E_o) = \{\Theta_t(E_o)/ t \in \mathbb{R}\}$ είναι το $\mathcal{N}$. Μπορούμε να συμπεράνουμε ότι το $\mathcal{N}$ είναι συνεχές nest, ενώ η τροχιά κάθε $E \in (O,I)$ είναι πυκνή στο $\mathcal{N}$.
Πράγματι, λόγω της SOT συνέχειας της απεικόνισης $s \to \Theta_s(E_o)$ η τροχιά $\mathcal{O}(E_o)$ είναι διάστημα στο $\mathcal{N}$. Επειδή $O,I \notin \mathcal{O}(E_o)$ έχουμε ότι υπάρχουν J_o, J_1 διαστήματα με $O \in J_o$, $I \in J_1$, $\mathcal{N} \setminus \mathcal{O}(E_o) = J_o \cup J_1$. Επειδή $\overline{\mathcal{O}(E_o)} = \mathcal{N}$ τότε $J_o = \{O\}$, $J_1 = \{I\}$ και άρα $\mathcal{O}(E_o) = (O,I)$.
Το σύνολο (O,I) είναι συνεκτικό με $\overline{(O,I)} = \mathcal{N}$.Συμπεραίνουμε από αυτό ότι το $\mathcal{N}$ είναι συνεχές nest. Αν $E \in (O,I)$ τότε $\mathcal{O}(E) = \mathcal{O}(E_o)$ και άρα $\overline{\mathcal{O}(E)} = \mathcal{N}$

ε) Έστω $\{\Theta_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ SOT-συνεχής μονοπαραμετρική ομάδα για το $\mathcal{N}$.Λέμε ότι η Θ δρα **μοναδιαία** αν για κάθε $t \in \mathbb{R}$ υπάρχει μοναδιαίος τελεστής $U(t)$ ώστε $\Theta_t(E) = U(t)EU(t)^*$ για κάθε $E \in \mathcal{N}$.

7.2. Πρόταση:

α) Έστω ότι η Θ δρα μεταβατικά πάνω στο nest $\mathcal{N}$. Τότε υπάρχει μονότονος ομοιομορφισμός $P : \mathbb{R} \to (O,I)$ ώστε $\Theta_s(P_t) = P_{t+s}$.

β) Αν επιπλέον η Θ δρα μοναδιαία, $h: \mathcal{N} \to [0,1]$ ομοιομορφισμός που διατηρεί την διάταξη και $E[\cdot]$ φασματικό μέτρο του τελεστή $\int h(N)dN$ (βλέπε πρόταση 3.9), τότε το φασματικό μέτρο $\mathcal{P} = E \circ h \circ P$ είναι ισοδύναμο προς το Borel μέτρο Lebesgue λ.

Απόδειξη:

α) Έστω $E_o \in \mathcal{N}$ και $t \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $\Theta_t(E_o) \neq E_o$. Επειδή $\Theta_{-t}(E_o) \neq E_o$, τότε μπορούμε να υποθέσουμε ότι $t > 0$.

Υποθέτουμε ότι $\Theta_t(E_o) > E_o$. Θα συμπεράνουμε ότι $\Theta_s(E_o) > E_o$ για κάθε $s > 0$ (1).

Θέτουμε $A = \{s > 0 / \Theta_s(E_o) = E_o\}$. Έστω $A \neq \varnothing$. Τότε αν $s \in A \Rightarrow qs \in A$ για κάθε θετικό ρητό q. Πράγματι $\Theta_s(E_o) = E_o \Rightarrow$ $\Rightarrow \Theta_{2s}(E_o) = E_o \Rightarrow \ldots \Rightarrow \Theta_{ns}(E_o) = E_o \Rightarrow ns \in A$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Αν $\Theta_{ns}(E_o) = E_o$ τότε $\Theta_s(E_o) = E_o$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. (Διαφορετικά αν $\Theta_s(E_o) < E_o$ ή $\Theta_s(E_o) > E_o$ επειδή η $\{\Theta_t\}$ διατηρεί την διάταξη εφαρμόζοντας διαδοχικά την Θ_s θα είχαμε $\Theta_{ns}(E_o) < E_o$ ή $\Theta_{ns}(E_o) > E_o$).

Επόμενα για κάθε $m,n \in \mathbb{N}$, έχουμε τις ισοδυναμίες:
$ns \in A \Leftrightarrow s \in A \Leftrightarrow \frac{s}{n} \in A \Leftrightarrow \frac{m}{n}s \in A$. Συνεπώς το A περιέχει ένα πυκνό υποσύνολο του $\mathbb{R}^+$. Λόγω όμως της συνέχειας της απεικόνισης: $s \to \Theta_s(E_o)$ είναι και κλειστό, επόμενα συμπίπτει με το $\mathbb{R}^+$. Συμπεραίνουμε ότι $\Theta_s(E_o) = E_o$ για κάθε $s \in \mathbb{R}^+$. Άτοπο, διότι $\Theta_t(E_o) > E_o$. Άρα $A = \emptyset$ και συνεπώς $\Theta_s(E_o) \neq E_o$ για κάθε $s > 0$.

Παρατηρούμε ότι: $\{s > 0 / \Theta_s(E_o) > E_o\} = \{s > 0 / \Theta_s(E_o) \geq E_o\}$ και από την SOT - συνέχεια της απεικόνισης $s \to \Theta_s(E_o)$ το τελευταίο σύνολο είναι ανοικτό και κλειστό στο $\mathbb{R}^+$. Οπότε $\mathbb{R}^+ = \{s > 0 / \Theta_s(E_o) > E_o\}$, δηλαδή ισχύει η (1).

Από την (1) έχουμε ότι $\Theta_s(F) > F$ για κάθε $s > 0$, $\Theta_s(F) < F$ για κάθε $s < 0$ και για κάθε $F \in \mathcal{O}(E_o)$. Πράγματι αν $\Theta_{t_1}(E_o) = F$ για κάποιο t_1, τότε αφού για κάθε $s > 0$ $\Theta_s(E_o) > E_o \Rightarrow \Theta_{t_1+s}(E_o) > \Theta_{t_1}(E_o) \Rightarrow \Theta_s(\Theta_{t_1}(E_o)) >$ $> \Theta_{t_1}(E_o) \Rightarrow \Theta_s(F) > F$. Από το τελευταίο προκύπτει ότι $\Theta_s(F) < F$ για κάθε $s < 0$.

Η απεικόνιση $s \to \Theta_s(F)$ είναι γνησίως αύξουσα και επί του $\mathcal{O}(E_o)$ για κάθε $F \in \mathcal{O}(E_o)$. Πράγματι το επί είναι άμεσο, ενώ αν $t_1 > t_2$ τότε για $s = t_1 - t_2$ έχουμε $\Theta_s(F) > F \Rightarrow \Theta_{t_2}(\Theta_s(F)) = \Theta_{t_1}(F) > \Theta_{t_2}(F)$.

Ορίζουμε P: $\mathbb{R}\to(O,I)$ ώστε $P(t)=\Theta_t(E_o)$. Από τα προηγούμενα η P είναι γνησίως αύξουσα και ομοιομορφισμός επί του (O,I), ενώ $\Theta_s(P_t)=$
$=\Theta_s(\Theta_t(E_o))=\Theta_{s+t}(E_o)=P_{t+s}$.

Έχουμε ότι $\mathcal{O}(E_o)=(O,I)=\{\Theta_t(E_o)/\,t\in\mathbb{R}\}$, ενώ $\lim\limits_{t\to-\infty}\Theta_t(E_o)=O$, $\lim\limits_{t\to+\infty}\Theta_t(E_o)=I$ και επομένως μπορούμε να συμβολίζουμε $\Theta_{-\infty}(E_o)=O$, $\Theta_{+\infty}(E_o)=I$, $\mathcal{N}=\{\Theta_t(E)/\,-\infty\leq t\leq+\infty\}$.

Παρατήρηση: Στο (α) εργασθήκαμε με υπόθεση ότι $\Theta_t(E_o)>E_o$ για κάποιο $t>0$. Αν είχαμε $\Theta_t(E_o)<E_o$ θα φθάναμε στο συμπέρασμα ότι η P: $\mathbb{R}\to(O,I)$ είναι γνησίως φθίνων ομοιομορφισμός.

β) Έστω ότι η Θ δρά μοναδιαία. Τότε για κάθε $t\in\mathbb{R}$, υπάρχει μοναδιαίος τελεστής $U(t)$ ώστε $\Theta_t(E)=U(t)EU(t)^*$ για κάθε $E\in\mathcal{N}$.

Έστω $h:\mathcal{N}\to[0,1]$ ομοιομορφισμός που διατηρεί την διάταξη, τότε η $h\circ P:\mathbb{R}\to(0,1)$ είναι ομοιομορφισμός.

Επόμενα από το 1.4.6. ορίζεται φασματικό μέτρο $\mathcal{P}$ στα Borel υποσύνολα του $\mathbb{R}$ ώστε $\mathcal{P}[\Omega]=E[h\circ P(\Omega)]$ όπου $E[\,\cdot\,]$ φασματικό μέτρο του τελεστή $\int h(N)dN$.

Θα δείξουμε ότι $U(s)\,\mathcal{P}[B]U(s)^*=\mathcal{P}[B+s]$ για κάθε $s\in\mathbb{R}$ και για κάθε Borel σύνολο B.

Για κάθε διάστημα $(a,\gamma]$ του $\mathbb{R}$ έχουμε: $\mathcal{P}[(a,\gamma]]=E[h\circ P(a,\gamma]]=$
$=E[h(P(a),P(\gamma)]]=E[(h(P(a))\ ,\ h(P(\gamma))]]\overset{3.9}{=}P(\gamma)-P(a)$.

Άρα $U(s)\,\mathcal{P}[(a,\gamma]]U(s)^*=U(s)(P(\gamma)-P(a))U(s)^*=U(s)P(\gamma)U(s)^*-$
$-U(s)P(a)U(s)^*=\Theta_s(P(\gamma))-\Theta_s(P(a))=P_{\gamma+s}-P_{a+s}=\mathcal{P}[(a+s\,,\gamma+s]]=$
$=\mathcal{P}[(a,\gamma]+s]$

Επομένως από την 1.4.5. έχουμε: $U(s)\ \mathcal{P}[B]U(s)^*=\mathcal{P}[B+s]$ (2).

Ορίζουμε το Borel μέτρο: $\mu(\,\cdot\,)=\langle\mathcal{P}[\,\cdot\,]x,x\rangle$ όπου x διαχωρίζον διάνυσμα της άλγεβρας $\mathcal{N}''$ και έχουμε: $\mu(B)=0\Leftrightarrow\mathcal{P}[B]=0\overset{(2)}{\Leftrightarrow}\mathcal{P}[B+s]=0\Leftrightarrow\mu(B+s)=0$ για κάθε $s\in\mathbb{R}$. Παρατηρούμε ότι η μετάθεση κάθε Borel συνόλου μέτρου μηδέν είναι επίσης μέτρου μηδέν. Αποτελεί κλασικό αποτέλεσμα ότι το μ είναι ισοδύναμο προς το μέτρο Lebesgue (Βλέπε στο [7], 3.3.)

7.3. Στο εξής θα χρησιμοποιήσουμε τις εξής έννοιες (βλέπε στο [2], παράγρ. 15).

Έστω K χώρος Χίλμπερτ.

- Η $f : \mathbb{R} \to K$ ονομάζεται ασθενώς μετρήσιμη αν για κάθε $\xi \in K$ η απεικόνιση $\mathbb{R} \ni t \to \langle f(t), \xi \rangle$ είναι Borel μετρήσιμη.

- Συμβολίζουμε $L^2(\mathbb{R}, K)=\{f : \mathbb{R} \to K \,/\, f$ ασθενώς μετρήσιμη με $\int \|f(t)\|^2 \, d\lambda(t) < \infty\}$, λ μέτρο Lebesgue. Ο $L^2(\mathbb{R}, K)$ γίνεται χώρος Χίλμπερτ με εσωτερικό γινόμενο $\langle f, g \rangle = \int \langle f(t), g(t) \rangle \, d\lambda(t)$.

- Η $F: \mathbb{R} \to B(K)$ ονομάζεται ασθενώς μετρήσιμη αν για κάθε $\xi, n \in K$ η απεικόνιση $\mathbb{R} \ni t \to \langle F(t)\xi, n \rangle$ είναι Borel μετρήσιμη. Επιπλέον ονομάζεται ουσιωδώς φραγμένη αν $\|F\|_\infty < \infty$, όπου $\|F\|_\infty = \inf\{M \in [0,+\infty] \,/$ $/ \, \|F(x)\| \leq M \quad \lambda.\sigma.\pi \}$. Συμβολίζουμε $L^\infty(\mathbb{R}, B(K)) = \{ F: \mathbb{R} \to B(K) \,/\, F$ ουσιωδώς φραγμένη $\}$.

- Η $L^\infty(\mathbb{R}, B(K))$ είναι άλγεβρα ισομετρικά $*$ – ισόμορφη με την άλγεβρα τελεστών $\{L_F \,/\, F =$ ουσιωδώς φραγμένη $\}$ που δρα στον χώρο $L^2(\mathbb{R},K)$, ως εξής: $L_F : L^2(\mathbb{R}, K) \to L^2(\mathbb{R}, K)$ ώστε $L_F(g)(t) = F(t)(g(t))$. Στο εξής θα ταυτίζουμε τις δύο άλγεβρες.

- Αν $g \in L^\infty(\mathbb{R}, \lambda)$ ορίζεται $L_g : L^2(\mathbb{R}, K) \to L^2(\mathbb{R}, K)$ ώστε $L_g(f)(t) = g(t) \cdot f(t)$. Παρατηρούμε ότι $L_g = L_G$, όπου G η ουσιωδώς φραγμένη συνάρτηση $G(t) = g(t) \cdot I$, $t \in \mathbb{R}$. Επομένως $\{ L_g \,/\, g \in L^\infty(\mathbb{R}, \lambda) \} \subseteq$ $\subseteq L^\infty(\mathbb{R}, B(K))$.

- Συμβολίζουμε $L^\infty(\mathbb{R}) \otimes I_K = \{ L_g \,/\, g \in L^\infty(\mathbb{R}, \lambda) \}$. Αποδεικνύεται ότι $(L^\infty(\mathbb{R}) \otimes I_K)' = L^\infty(\mathbb{R}, B(K))$.

7.4. Ορισμός. Έστω K χώρος Χίλμπερτ . Ορίζουμε

$$\mathcal{N}_0 = \{Q_t \,/\, Q_t = L_{\chi_{(-\infty,t)}}, t \in \mathbb{R}\} \cup \{O, I\}$$

Το $\mathcal{N}_0$ είναι nest στον χώρο $L^2(\mathbb{R}, K)$ και ονομάζεται **nest του Volterra** (ομοιόμορφης) πολλαπλότητας dimK.

Θα δείξουμε ότι $\mathcal{N}_0{}'' = L^\infty(\mathbb{R}, \lambda) \otimes I_K$ και άρα $\mathcal{N}_0{}' = L^\infty(\mathbb{R}, B(K))$.

Έστω $f \in L^\infty(\mathbb{R})$, θα δείξουμε ότι $L_f \in \mathcal{N}_0{}''$.

Ισχυρισμός: $L_f \in \overline{[L_{f \cdot \chi_{[n,n+1]}} \,/\, n \in \mathbb{Z}]}^{\text{SOT}}$.

Πράγματι, αν $g \in L^2(\mathbb{R}, K)$ έχουμε $\left\| L_f(g) - \sum_{n=-m}^{n=+m} L_{f\cdot\chi_{[n,n+1]}}(g) \right\|^2 =$

$$= \left\| g\cdot f - \sum_{n=-m}^{n=+m} f\cdot \chi_{[n,n+1]} g \right\|^2 = \int_{\mathbb{R}} \left\| g(t)\cdot f(t) - \sum_{n=-m}^{n=+m} f(t)\cdot \chi_{[n,n+1]}(t) g(t) \right\|^2 d\lambda(t) =$$

$$= \int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2 \cdot \left\| g(t) - \sum_{n=-m}^{n=+m} \chi_{[n,n+1]}(t) g(t) \right\|^2 d\lambda(t) \leq \|f\|_\infty^2 \cdot \int \left\| g(t) - \sum_{n=-m}^{n=+m} \chi_{[n,n+1]}(t) g(t) \right\|^2 d\lambda(t) =$$

$$= \|f\|_\infty^2 \int_{\mathbb{R}\setminus[-m,m+1]} \|g(t)\|^2 d\lambda(t) \to 0,\ m \to +\infty,$$ αφού $g \in L^2(\mathbb{R}, K)$.

Αυτό ισχύει για κάθε $g \in L^2(\mathbb{R}, K)$ και άρα $\sum_{n=-m}^{n=+m} L_f \cdot \chi_{[n,n+1]} \xrightarrow{SOT} L_f$, όταν $m \to +\infty$. Συμπεραίνουμε ότι ο ισχυρισμός ισχύει.

Αρκεί τώρα να δείξουμε ότι: $L_{f\cdot\chi_{[n,n+1]}} \in [Q_t / t \in \mathbb{R}]''$ για κάθε $n \in \mathbb{Z}$.

Επειδή $f \cdot \chi_{[n,n+1]} \in L^\infty([n,n+1])$, όπως είδαμε στην παρατήρηση του 2.3.α. υπάρχει δίκτυο κλιμακωτών συναρτήσεων (p_i): $M_{p_i} \xrightarrow{SOT} M_{f\cdot\chi_{[n,n+1]}}$ στον χώρο $L^2([n,n+1])$.

Θέτουμε $q_i(t) = \begin{cases} = p_i(t),\ n \leq t \leq n+1 \\ = 0\text{, αλλού.} \end{cases}$ για κάθε i

Τότε αν $g \in L^2(\mathbb{R}, K)$ έχουμε: $\left\| L_{q_i}(g) - L_{f\cdot\chi_{[n,n+1]}}(g) \right\|^2 = \left\| (q_i - f\cdot\chi_{[n,n+1]}) g \right\|^2 =$

$$= \int \left\| (q_i(t) - f\cdot \chi_{[n,n+1]}(t)) \cdot g(t) \right\|^2 d\lambda(t) = \int_n^{n+1} \left| q_i(t) - f\cdot\chi_{[n,n+1]} \right|^2 \cdot \|g(t)\|^2 d\lambda(t) =$$

$$= \left\| M_{p_i}(\|g\|) - M_{f\cdot\chi_{[n,n+1]}}(\|g\|) \right\|^2 \to 0$$

Άρα $L_{q_i} \xrightarrow{SOT} L_{f\cdot\chi_{[n,n+1]}}$ από το οποίο αφού $L_{q_i} \in [Q_t / t \in \mathbb{R}]$ για κάθε i έχουμε ότι $L_{f\cdot\chi_{[n,n+1]}} \in [Q_t / t \in \mathbb{R}]''$.

7.5. Ορισμός : Έστω K χώρος Χίλμπερτ. Τότε ορίζουμε την **ομάδα μετατόπισης** $\{U_o(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ ως εξής:
Για κάθε $t \in \mathbb{R}$, $U_o(t)$: $L^2(\mathbb{R}, K) \to L^2(\mathbb{R}, K)$ ώστε $U_o(t) f(x) = f(x-t)$.

Ο τελεστής $U_o(t)$ είναι μοναδιαίος για κάθε $t \in \mathbb{R}$: $\|U_o(t)(f)\|^2 =$
$= \int_{\mathbb{R}} \|f(x-t)\|^2 d\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}} \|f(x)\|^2 d\lambda(x) = \|f\|^2$, ενώ $U_o(t)^* = U_o(-t)$.

Η οικογένεια $\{U_o(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ είναι εύκολο να δούμε ότι είναι ομάδα. Επιπλέον είναι SOT- συνεχής.

Πράγματι έστω, $f \in L^2(\mathbb{R}, K)$ συνεχής με συμπαγή φορέα, τότε $\|U_o(t)(f) - f\|^2 = \int_{\mathbb{R}} \|f(x-t) - f(x)\|^2 d\lambda(x)$. Επειδή $\lim_{t\to 0}\|f(x-t) - f(x)\| = 0$ ομοιόμορφα ως προς t έχουμε ότι $\lim_{t\to 0}\|U_o(t)(f) - f\| = 0$ και άρα $\lim_{t\to s}\|U_o(t)(f) - U_o(s)(f)\| = 0$.

Αν $g \in L^2(\mathbb{R}, K)$ και $\varepsilon > 0$, υπάρχει συνεχής συνάρτηση f με συμπαγή φορέα ώστε $\|f - g\| < \frac{\varepsilon}{4}$. Έστω $\delta > 0 : \|U_o(t)(f) - U_o(s)(f)\| < \frac{\varepsilon}{2}$ για κάθε $t : |t - s| < \delta$. Τότε: $\|U_o(t)(g) - U_o(s)(g)\| \le \|U_o(t)(g) - U_o(t)(f)\| +$

$$+\|U_o(t)(f) - U_o(s)(f)\| + \|U_o(s)(f) - U_o(s)(g)\| \le 2\|f - g\| + \|U_o(t)(f) - U_o(s)(g)\| < \varepsilon$$

Επόμενα $\lim_{t\to s}\|U_o(t)(g) - U_o(s)(g)\| = 0$.

Ορίζουμε δράση του $\mathbb{R}$ πάνω στο $\mathcal{N}_o$: $\Theta_o(s, Q_t) = Q_{t+s}$. Η δράση αυτή επάγεται από την ομάδα $\{U_o(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ και άρα είναι SOT- συνεχής.

Πράγματι, για κάθε $f \in L^2(\mathbb{R}, K)$ και για κάθε $t, s \in \mathbb{R}$, έχουμε:
$$(U_o(t)Q_s\, U_o(-t))(f)(x) = (U_o(t)Q_s)f(x+t) = U_o(t)(\chi_{(-\infty,s)}(x)\cdot f(x+t)) =$$
$$= \chi_{(-\infty,s)}(x-t)f(x) = \chi_{(-\infty,t+s)}(x)f(x) = Q_{t+s}(f)(x) = \Theta_o(s, Q_t)(f)(x).$$

Επειδή η Θ_o δρα μεταβατικά, το $\mathcal{N}_o$ είναι συνεχές nest.

Από την πρόταση 7.2. έχουμε τον μονότονο ομοιομορφισμό $P_o : \mathbb{R} \to \mathcal{N}_o$: $: P_o(t) = Q_t$ και το Borel φασματικό μέτρο $\mathcal{P}_o : \mathcal{P}_o(t, s] = P_o(s) - P_o(t) =$
$= Q_s - Q_t = L_{\chi(t,s]}$.

Συνεπώς από το 1.4.5. $\mathcal{P}_o(\Omega) = L_{\chi_\Omega}$ για κάθε Ω Borel υποσύνολο του $\mathbb{R}$.

7.6. Συμβολίζουμε $Abs\mathbb{R} = \{\Phi : \mathbb{R}\to\mathbb{R} \ / \Phi =$ μονότονη, απολύτως συνεχής, 1-1, επί με Φ^{-1} απολύτως συνεχής$\}$.

- Θα αποδείξουμε ότι αν η Φ είναι γνησίως μονότονη 1-1 και επί, τότε $\Phi \in Abs\mathbb{R}$ αν και μόνο αν οι Φ, Φ^{-1} διατηρούν τα σύνολα μέτρου μηδέν. Ενώ αν $\Phi \in Abs\mathbb{R}$, τότε $\Phi'(\Phi^{-1}(x)) \cdot (\Phi^{-1})'(x) = 1$ $\lambda.\sigma.\pi.$, όπου $\Phi', (\Phi^{-1})'$ οι παράγωγοι Radon - Nikodym των Φ, Φ^{-1} αντίστοιχα.

Έστω $\Phi \in Abs\mathbb{R}$, τότε οι Φ, Φ^{-1} διατηρούν τα σύνολα μέτρου μηδέν (βλέπε πρόταση 14.19 στο [6]). Επειδή οι Φ, Φ^{-1} είναι απολύτως συνεχείς υπάρχουν

$$\Phi', (\Phi^{-1})' \in L^1(\mathbb{R}) : \Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \Phi'(t)\, d\lambda(t), \quad \Phi^{-1}(x) = \int_{-\infty}^{x} (\Phi^{-1})'(t)\, d\lambda(t).$$

Υποθέτουμε ότι οι Φ , Φ^{-1} είναι γνησίως αύξουσες και άρα $\Phi', (\Phi^{-1})' > 0$ λ.σ.π.

Θυμίζουμε ότι αν $(X, \mathcal{A}), (Y, \mathcal{B})$ μετρήσιμοι χώροι, $f : X \to Y$ $\mathcal{A}$ - $\mathcal{B}$ μετρήσιμη και μ μέτρο στον $(X, \mathcal{A})$ τότε ορίζεται μέτρο $f^*(\mu)$ στον $(Y, \mathcal{B})$ ώστε $f^*(\mu)(\Omega) = \mu(f^{-1}(\Omega))$, ενώ $\int_{f^{-1}(\Omega)} (g \circ f)\, d\mu = \int_{\Omega} g\, df^*(\mu)$ για κάθε g $f^*(\mu)$ ολοκληρώσιμη.

Στην περίπτωσή μας ορίζεται Borel μέτρο $\Phi^*(\lambda) : \Phi^*(\lambda)(\Omega) = \lambda(\Phi^{-1}(\Omega)) =$

$$= \int_{\Omega} (\Phi^{-1})'\, d\lambda .$$

(Αυτό διότι $\Phi^*(\lambda)((a,b]) = \lambda((\Phi^{-1}(a), \Phi^{-1}(b)\,]) = \Phi^{-1}(b) - \Phi^{-1}(a) = \int_a^b (\Phi^{-1})'\, d\lambda$ για κάθε $a, b \in \mathbb{R}$).

Ανάλογα ορίζεται Borel μέτρο $(\Phi^{-1})^*(\lambda) : (\Phi^{-1})^*(\lambda)(\Omega) = \int_{\Omega} \Phi'\, d\lambda$.

Θεωρούμε το θετικό μέτρο: $\nu(\Omega) = \int_{\Omega} \Phi'(\Phi^{-1}(x)) \cdot (\Phi^{-1})'(x)\, d\lambda(x) =$

$$\int_{\Omega} \Phi'(\Phi^{-1}(x)) \cdot d\Phi^*(\lambda) = \int_{\Phi^{-1}(\Omega)} \Phi'(x)\, d(\Phi^{-1})^*(\Phi^*(\lambda)) = \int_{\Phi^{-1}(\Omega)} \Phi'(x)\, d\lambda = (\Phi^{-1})^*(\lambda)(\Phi^{-1}(\Omega)) =$$

$$= \lambda(\Phi(\Phi^{-1}(\Omega))) = \lambda(\Omega).$$

Επομένως από την μοναδικότητα της παραγώγου Radon - Nikodym έχουμε $\Phi'(\Phi^{-1}(x)) \cdot (\Phi^{-1})'(x) = 1$ $\lambda.\sigma.\pi.$

Αν οι Φ , Φ^{-1} είναι φθίνουσες, τότε $-\Phi$, $(-\Phi)^{-1}$ αύξουσες και εργαζόμαστε όπως πριν.

Έστω τώρα $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ γνησίως αύξουσα, 1-1, επί, ώστε $\lambda(\Omega) = 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \lambda(\Phi(\Omega)) = 0$ για κάθε Borel σύνολο Ω. Ορίζουμε το Borel μέτρο $\mu : \mu(\Omega) =$ $= \lambda(\Phi(\Omega))$. Τότε τα μέτρα μ, λ είναι ισοδύναμα, άρα υπάρχει $h \in L^1(\mathbb{R}) : \mu(\Omega) =$ $= \int_\Omega h\, d\lambda$ και $h > 0$ $\lambda.\sigma.\pi.$

Επειδή η Φ είναι γνησίως αύξουσα και επί, τότε για κάθε $s,t : s < t$ έχουμε ότι $\Phi([s,t]) = [\Phi(s), \Phi(t)]$. Επομένως $\Phi(t) - \Phi(s) = \lambda([\Phi(s), \Phi(t)]) =$

$$= \lambda(\Phi[s,t]) = \mu([s,t]) = \int_s^t h\, d\lambda \Rightarrow \Phi(t) = \Phi(s) + \int_s^t h\, d\lambda .$$

Συμπεραίνουμε ότι η Φ είναι απολύτως συνεχής στο $[s, +\infty)$ για κάθε $s \in \mathbb{R}$ και συνεπώς απολύτως συνεχής στο $\mathbb{R}$. Ανάλογα έχουμε ότι η Φ^{-1} είναι επίσης απολύτως συνεχής.

Αν η Φ είναι γνησίως φθίνουσα εργαζόμαστε με την $-\Phi$ και καταλήγουμε στα ίδια συμπεράσματα.

- Αν $\Phi \in Abs$ ($\mathbb{R}$) και K χώρος Χίλμπερτ, ορίζουμε $W_\Phi : L^2(\mathbb{R}, K) \to L^2(\mathbb{R}, K)$: $: W_\Phi(f)(x) = |\Phi'(x)|^{\frac{1}{2}} \cdot f(\Phi(x))$. Ο W_Φ είναι μοναδιαίος τελεστής. Πράγματι,

$$\|W_\Phi(f)\|^2 = \int_{\mathbb{R}} |\Phi'(x)| \cdot \|f(\Phi(x))\|^2\, d\lambda = \int_{\mathbb{R}} \|f(\Phi(x))\|^2\, d(\Phi^{-1})^*(\lambda) =$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \left\| f \circ \Phi \circ \Phi^{-1}(x) \right\|^2 d\lambda = \int_{\mathbb{R}} \|f(x)\|^2\, d\lambda = \|f\|^2 .$$

Επιπλέον είναι επί, αφού $W_\Phi \circ W_{\Phi^{-1}} = W_{\Phi^{-1}} \circ W_\Phi = I$:

$$W_{\Phi^{-1}} \circ W_\Phi(f)(x) = W_{\Phi^{-1}}\left(|\Phi'(x)|^{\frac{1}{2}} \cdot f(\Phi(x)) \right) = \left| \left(\Phi^{-1}\right)'(x) \right|^{\frac{1}{2}} \cdot \left| \Phi'\left(\Phi^{-1}(x)\right) \right|^{\frac{1}{2}} \cdot$$

$$\cdot f\left(\Phi\left(\Phi^{-1}(x)\right)\right) = \left| \left(\Phi^{-1}\right)'(x) \cdot \Phi'\left(\Phi^{-1}(x)\right) \right|^{\frac{1}{2}} \cdot f(x) = 1 \cdot f(x) = f(x).$$

7.7. Πρόταση:

α) Μία ομάδα $\{\Theta_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ ορίζει μία SOT- συνεχή μεταβατική μοναδιαία δράση στο $\mathcal{N}_0$ αν και μόνο αν επάγεται από την SOT- συνεχή μοναδιαία ομάδα $\{W_{\Phi+c}\, U_o(s) W^*_{\Phi+c}\}_{s \in \mathbb{R}}$ για μοναδική $\Phi \in Abs$ ($\mathbb{R}$) $: \Phi(0) = 0$, $c \in \mathbb{R}$ αυθαίρετη σταθερά.

β) Μία SOT- συνεχής μοναδιαία ομάδα $\{U(\cdot)\}$δρα στο $\mathcal{N}_0$ με μετατόπιση $(U(t) Q_s U(-t) = Q_{s+t}$ για κάθε t,s $\in \mathbb{R}$)αν και μόνο αν υπάρχει μοναδιαίος τελεστής

$V \in \mathcal{N}_0'$ ώστε $U(t) = VU_o(t)V^*$. Αν $V_1, V_2 \in \mathcal{N}_0'$ ώστε $V_1U_o(t)V_1^* = V_2U_o(t)V_2^*$ τότε $V_1^*V_2 = L_F$, όπου $F(x) = A$ σχεδόν παντού, A μοναδιαίος τελεστής του K.

Απόδειξη:

α) Έστω ότι η $\{\Theta_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ δρα προσεταιριστικά και μοναδιαία στο $\mathcal{N}_0$.

Θέτουμε $P_t = \Theta_t(Q_o)$ και τότε η $t \to P_t$ είναι μονότονος ομοιομορφισμός. Έστω $P_t = Q_{\Phi(t)}$ για κάποιο $\Phi(t) \in \mathbb{R}$. Θα δείξουμε ότι η απεικόνιση $P_t \to \Phi(t)$ είναι μονότονος ομοιομορφισμός. Πράγματι: $P_t < P_s \Leftrightarrow Q_{\Phi(t)} < Q_{\Phi(s)} \Leftrightarrow \Phi(t) < \Phi(s)$ και $P_{t_i} \xrightarrow{SOT} P_t \Leftrightarrow Q_{\Phi(t_i)} \xrightarrow{SOT} Q_{\Phi(t)} \Leftrightarrow \Phi(t_i) \to \Phi(t)$. Επόμενα η $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι μονότονος ομοιομορφισμός.

Ορίζουμε φασματικό μέτρο Q στα Borel υποσύνολα του $\mathbb{R}$ με τιμές στους τελεστές του $L^2(\mathbb{R}, K)$ ως εξής: για κάθε $t \in \mathbb{R}$ θέτουμε $Q((-\infty, t)) = Q_t = L_{\chi(-\infty,t)}$. Τότε για κάθε $s,t \in \mathbb{R}$ $Q([s,t)) = Q_t - Q_s = L_{\chi[s,t)}$. Συμπεραίνουμε ότι το Q είναι το φασματικό μέτρο: $\Omega \to L_{\chi_\Omega}$, Ω Borel υποσύνολο του $\mathbb{R}$.

Επειδή η $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι ομοιομορφισμός ορίζεται το Borel φασματικό μέτρο $Q \circ \Phi$ $B(\mathbb{R}) \to \mathcal{B}(L^2(\mathbb{R}, K))$ (1.4.6.).

Αν $\mathcal{P}$ όπως στην πρόταση 7.2.β., τότε όπως είδαμε $\mathcal{P}([a,b]) = P(b) - P(a) = Q_{\Phi(b)} - Q_{\Phi(a)} = Q([\Phi(a), \Phi(b))) = Q \circ \Phi([a,b))$. Συμπεραίνουμε ότι $\mathcal{P} = Q \circ \Phi$.

Έστω A Borel υποσύνολο του $\mathbb{R}$, τότε $\lambda(A) = 0 \Leftrightarrow \mathcal{P}(A) = 0$ από την πρόταση 7.2. Όμως $\mathcal{P}(A) = Q(\Phi(A)) = L_{\chi_{\Phi(A)}}$ η προβολή στον $L^2(\Phi(A), K)$. Επομένως $\mathcal{P}(A) = 0 \Leftrightarrow \lambda(\Phi(A)) = 0$.

Δείξαμε ότι $\lambda(A) = 0 \Leftrightarrow \lambda(\Phi(A)) = 0$. Από αυτό έχουμε ότι $\Phi \in Abs$ ($\mathbb{R}$).

Παρατηρούμε ότι: $W_\Phi^* \, P_t \, W_\Phi = Q_t = W_\Phi^* \, Q_{\Phi(t)} \, W_\Phi$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$ (1).
Πράγματι:

$$W_\Phi^* \, P_t \, W_\Phi(f)(x) = W_\Phi^* \, P_t\left(|\Phi'(x)|^{\frac{1}{2}} f(\Phi(x))\right) = W_{\Phi^{-1}}\left(Q_{\Phi(t)}\left(|\Phi'(x)|^{\frac{1}{2}} f(\Phi(x))\right)\right) =$$

$$= W_{\Phi^{-1}}\left(\chi_{(-\infty,\Phi(t))}(x)|\Phi'(x)|^{\frac{1}{2}} f(\Phi(x))\right) = \left|\left(\Phi^{-1}\right)'(x)\right|^{\frac{1}{2}} \cdot \chi_{(-\infty,\Phi(t))}\left(\Phi^{-1}(x)\right) \cdot \left|\Phi'\left(\Phi^{-1}(x)\right)\right|^{\frac{1}{2}} f(x) =$$

$$= \chi_{(-\infty,t)}(x) f(x) = Q_t(f)(x).$$

Για κάθε $t \in \mathbb{R}$, έχουμε: $\Theta_s(P_t) = P_{t+s} \overset{(1)}{=} W_\Phi\, Q_{t+s}\, W_\Phi^* = W_\Phi \Theta_o(s, Q_t)\, W_\Phi^* \overset{7.5.}{=}$

$\overset{7.5.}{=} W_\Phi \left(U_o(s) Q_t U_o(s)^*\right) W_\Phi^* = \left(W_\Phi U_o(s) W_\Phi^*\right) P_t \left(W_\Phi U_o(s)^* W_\Phi^*\right)$. Άρα η δράση επάγεται από την ομάδα $\{W_\Phi U_o(s) W_\Phi^*\}_{s\in\mathbb{R}}$.

Αντίστροφα. Έστω $\{\Theta_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ μονοπαραμερική ομάδα για την οποία υπάρχει $\Phi \in Abs$ ($\mathbb{R}$), ώστε: $\Theta_s(Q_t) = \left(W_\Phi\, U_o(s) W_\Phi^*\right) Q_t \left(W_\Phi\, U_o(s) W_\Phi^*\right)^*$. Προφανώς η $\{\Theta_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ δρα μοναδιαία. Θα δείξουμε ότι δρα και μεταβατικά. Για κάθε $s, t \in \mathbb{R}$ έχουμε:

$$\Theta_s(Q_t) = W_\Phi \left(U_o(s)\left(W_\Phi^* Q_t W_\Phi\right) U_o(s)^*\right) W_\Phi^* \overset{(1)}{=} W_\Phi \left(U_o(s) Q_{\Phi^{-1}(t)}\, U_o(s)^*\right) W_\Phi^* =$$

$$= W_\Phi \left(\Theta_o\left(s, Q_{\Phi^{-1}(t)}\right) W_\Phi^*\right) \overset{(1)}{=} W_\Phi Q_{\Phi^{-1}(t)+s} W_\Phi^* = Q_{\Phi\left(\Phi^{-1}(t)+s\right)}.$$

Άρα $\mathcal{O}(Q_t) = \{\Theta_s(Q_t) / s \in \mathbb{R}\} = \left\{Q_{\Phi\left(\Phi^{-1}(t)+s\right)} / s \in \mathbb{R}\right\} = \{Q_s / s \in \mathbb{R}\}$. Η τελευταία τροχιά έχει κλειστότητα το $\mathcal{N}_\upsilon$.

Θα δείξουμε την μοναδικότητα. Παρατηρούμε ότι $Q_{\Phi(o)} = P_o = \Theta_o(Q_o) =$ $= Q_o \Rightarrow \Phi(0) = 0$. Έστω $\Psi \in Abs$ ($\mathbb{R}$): $\Psi(0) = 0$ ώστε η $\{W_\Psi U_o(t) W_\Psi^* / t \in \mathbb{R}\}$ να επάγει την Θ. Επειδή $W_\Psi Q_o W_\Psi^* = Q_{\Psi^{-1}(o)} = Q_o$ έχουμε: $Q_{\Phi(t)} = P_t = \Theta_t(Q_o) =$

$= W_\Psi U_o(t) W_\Psi^* Q_o W_\Psi U_o(-t) W_\Psi^* = W_\Psi U_o(t) Q_o U_o(-t) W_\Psi^* = W_\Psi Q_t W_\Psi^* = Q_{\Psi(t)}$. Άρα $\Phi(t) = \Psi(t)$.

Για την πληρότητα της απόδειξης μένει να δείξουμε ότι η δράση της $\{W_{\Phi+c}\, U_o(t) W_{\Phi+c}^*\}$ είναι ίδια με την δράση της $\{W_\Phi\, U_o(t) W_\Phi^*\}$ για κάθε $c \in \mathbb{R}$.

Θέτουμε $\Psi(t) = \Phi(t) + c$ είναι εύκολο να δούμε ότι $W_\Psi Q_t W_\Psi^* = Q_{\Psi^{-1}(t)} =$ $= Q_{\Phi^{-1}(t-c)}$. Τότε: $W_\Psi U_o(t) W_\Psi^* Q_s W_\Psi U_o(-t) W_\Psi^* = W_\Psi U_o(t) Q_{\Phi(s)+c} U_o(-t) W_\Psi^* =$

$$\overset{(1)}{=} W_\Psi Q_{\Phi(s)+c+t} W_\Psi^* = Q_{\Phi^{-1}(\Phi(s)+c+t-c)} = Q_{\Phi^{-1}(\Phi(s)+t)} = W_\Phi Q_{\Phi(s)+t} W_\Phi^* =$$

$$\overset{(1)}{=} W_\Phi U_o(t) Q_{\Phi(s)}\, U_o(-t) W_\Phi^* = W_\Phi U_o(t) W_\Phi^* Q_s W_\Phi U_o(-t) W_\Phi^*.$$

β) Έστω μοναδιαίος τελεστής $V \in \mathcal{N}_\upsilon'$ και $U(t) = V U_o(t) V^*$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$. Τότε η $\{U(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ είναι SOT- συνεχής ομάδα που δρα με μετατόπιση στο $\mathcal{N}_\upsilon$ αφού: $U(t) Q_s U(t)^* = V U_o(t) V^* Q_s V U_o(-t) V^* = V U_o(t) Q_s U_o(-t) V^* = V Q_{t+s} V^* = Q_{t+s}$.

Αντίστροφα, έστω $\{U(s)\}_{s\in\mathbb{R}}$ SOT- συνεχής ομάδα που δρα με μετατόπιση στο nest $\mathcal{N}_\upsilon$.

Θέτουμε $V_1(s)=U(s)U_o(-s)$ και παρατηρούμε ότι: $V_1(s)Q_tV_1(s)^* =$
$=U(s)U_o(-s)Q_tU_o(s)U(-s)=U(s)Q_{t-s}U(-s)=Q_{t-s+s}=Q_t$. Επόμενα $V_1(s)\in \mathcal{N}_\upsilon'$ για κάθε $s\in\mathbb{R}$.

Επειδή $\mathcal{N}_\upsilon' = L^\infty(\mathbb{R}, \mathrm{B}(K))$ από την 7.3 για κάθε $s\in\mathbb{R}$ υπάρχει $\Omega_s\subseteq\mathbb{R}$ μέτρου 0 και μετρήσιμη συνάρτηση F_s: $\mathbb{R}\setminus\Omega_s\to B(K)$: $V_1(s)=L_{F_s}$. Επομένως για κάθε $s\in\mathbb{R}$ και για κάθε $x\in\mathbb{R}\setminus\Omega_s$ ορίζεται $\upsilon_o(s,x)=F_s(x)$.

Από το [7] υπάρχει $\upsilon_1:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to B(K)$ ασθενώς Borel μετρήσιμη, ώστε $\upsilon_1(s,x)=\upsilon_o(s,x)$ για κάθε $s\in\mathbb{R}, x\in\mathbb{R}\setminus\Omega_s$.

Ορίζουμε υ_1: $\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to B(K)$: $\upsilon_1(s,x)=F_s(x)$. Η υ_1 είναι ασθενώς Borel μετρήσιμη (βλέπε στο [7]). Επιπλέον παίρνει τιμές στο σύνολο των μοναδιαίων τελεστών του K.

Πράγματι για κάθε $s\in\mathbb{R}$, $L_{F_s}\circ(L_{F_s})^* = L_{\mathbb{1}} = (L_{F_s})^*\circ L_{F_s}$ όπου
$\mathbb{1}:\mathbb{R}\to B(K)$: $\mathbb{1}(t)=I$. Επειδή $(L_{F_s})^* = L_{(F_s)^*}$ όπου $(F_s)^*(x)=(F_s(x))^*$, $x\in\mathbb{R}$
έχουμε $L_{F_sF_s^*} = L_{\mathbb{1}} = L_{F_s^*F_s}$.

Η L είναι $*-$ ισομορφισμός. Αρα για κάθε $s\in\mathbb{R}$, $F_sF_s^*=\mathbb{1}=F_s^*F_s \Rightarrow$
$\Rightarrow F_s(x)\circ F_s^*(x)=I=F_s^*(x)F_s(x)$ $x-$ σχεδόν παντού $\Rightarrow \upsilon_1(s,x)\circ\upsilon_1(s,x)^*=I=$
$=\upsilon_1(s,x)^*\circ\upsilon_1(s,x)$ $x-$ σχεδόν παντού.

Θα αποδείξουμε ότι $\upsilon_1(s+t,x)=\upsilon_1(t,x)\upsilon_1(s,x-t)$ σχεδόν παντού.
Παρατηρούμε ότι: $V_1(s+t)=U(s+t)U_o(-s-t)=U(s)U(t)U_o(-s)U_o(-t)=$
$=U(s)V_1(t)U_o(-s)$ και άρα για κάθε $f\in L^2(\mathbb{R}, K)$ και $x\in\mathbb{R}$ έχουμε:
$V_1(s+t)(f)(x)=(U(s)V_1(t)U_o(-s))(f)(x)=(U(s)V_1(t))(f(x+s))=$
$=U(s)(\upsilon_1(t,x)f(x+s))=U(s)U_o(-s)\ (\upsilon_1(t,x-s)f(x))=V_1(s)(\upsilon_1(t,x-s)f(x))=$
$=\upsilon_1(s,x)\upsilon_1(t,x-s)f(x)$.

Όμως $V_1(s+t)(f)(x)=\upsilon_1(s+t,x)f(x)$ και άρα: $\upsilon_1(s,x)\upsilon_1(t,x-s)=$
$=\upsilon_1(s+t,x)$ σχεδόν παντού.

Ορίζουμε $\upsilon:\mathbb{R}\to\mathcal{B}(K)$: $\upsilon(x)=\upsilon_1^*(x,x)$ Θα δείξουμε ότι η υ είναι ουσιωδώς φραγμένη για την οποία $\upsilon_1(t,x)=\upsilon^*(x)\upsilon(x-t)$ σχεδόν παντού.

Παρατηρούμε ότι $\upsilon = \upsilon_1^* \circ \delta$ όπου $\delta : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$: $x \to (x,x)$και άρα αφού η υ_1^* είναι ασθενώς Borel μετρήσιμη είναι και η υ. Επίσης είναι ουσιωδώς φραγμένη αφού: $\|\upsilon(x)\| = \|\upsilon_1^*(x,x)\| = \|F_x(x)\| \leq \|F_x\|_\infty = \|L_{F_x}\| = \|V_1(x)\| = 1, x -$ σχεδόν παντού.

Χρησιμοποιώντας την ιδιότητα $\upsilon_1(t,x)\upsilon_1(s,x-t) = \upsilon_1(s+t,x)$ έχουμε: $\upsilon_1(t,x)\upsilon^*(x-t) = \upsilon_1(t,x)\upsilon_1(x-t,x-t) = \upsilon_1(t+(x-t),x) = \upsilon_1(x,x) = \upsilon^*(x)$. Επόμενα $\upsilon_1(t,x) = \upsilon^*(x)\upsilon(x-t)$σχεδόν παντού.

Επειδή $\upsilon \in L^\infty$ ($\mathbb{R}$, B(K)) τότε υπάρχει μοναδιαίος τελεστής $V \in B(L^2(\mathbb{R},K))$ ώστε $V = L_\upsilon$ και άρα $V(f)(x) = L_\upsilon(f)(x) = \upsilon(x)f(x)$. Έχουμε ότι: $V^*U_o(s)V(f)(x) =$ $= V^*U_o(s)(\upsilon(x)f(x)) = V^*(\upsilon(x-s)f(x-s)) = \upsilon^*(x)\upsilon(x-s)f(x-s) = \upsilon_1(s,x)f(x-s) =$ $= V_1(s)f(x-s) = V_1(s)U_o(s)(f)(x) = U(s)(f)(x)$ για κάθε $f \in L^2(\mathbb{R},K)$.

Επομένως $U(s) = V^*U_o(s)V$ $s -$ σχεδόν παντού. Λόγω όμως της SOT συνέχειας των $\{U(s)\},\{U_o(s)\}$ έχουμε $U(s) = V^*U_o(s)V$ για κάθε $s \in \mathbb{R}$, $V \in \mathcal{N}_\upsilon'$.

Έστω V_1 , $V_2 \in \mathcal{N}_\upsilon' : V_1U_o(t)V_1^* = V_2U_o(t)V_2^*$. Επειδή $V_1^*V_2 \in L^\infty$ ($\mathbb{R}$, $B(K)$) υπάρχει ουσιωδώς φραγμένη F ώστε $V_1^*V_2 = L_F \Rightarrow V_1^*V_2(f)(x) = F(x)f(x)$, $f \in L^2(\mathbb{R},K)$. Έχουμε ότι $V_1^*V_2U_o(t) = U_o(t)V_1^*V_2$ και άρα για κάθε $f \in L^2(\mathbb{R},K)$., και για κάθε $t,x \in \mathbb{R}$ είναι
$L_FU_o(t)(f)(x) = U_o(t)L_F(f)(x) \Leftrightarrow L_F(f(x-t)) = U_o(t)(F(x)f(x)) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow F(x)f(x-t) = F(x-t)f(x-t)$.

Συμπεραίνουμε ότι $F(x) = F(x-t)$ σχεδόν παντού για κάθε $t,x \in \mathbb{R}$ και άρα η $F : \mathbb{R} \to \mathcal{B}(K)$ είναι σταθερή συνάρτηση.

Θα δείξουμε ότι $F(t) = A$ σχεδόν παντού, όπου A μοναδιαίος τελεστής. Πράγματι : $L_F(f)(x) = A(f(x)) = T_A(f)(x)$, όπου $T_A : L^2$ ($\mathbb{R}$, K) $\to$ $\to L^2$ ($\mathbb{R}$, K) : $T_A(f) = A \circ f$.

Παρατηρούμε για κάθε $A,B \in B(K)$ ότι $T_A \circ T_B = T_{AB}$, $(T_A)^* = T_{A^*}$, $T_I = I$, $T_A = T_B \Leftrightarrow A = B$.

Επομένως $L_F = T_A$ μοναδιαίος $\Leftrightarrow T_AT_{A^*} = I = T_{A^*}T_A \Leftrightarrow T_{AA^*} = T_I = T_{A^*A} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow AA^* = I = A^*A \Leftrightarrow A$ μοναδιαίος τελεστής του K.

7.8. Θεώρημα:

α) Μία SOT συνεχής ομάδα $\{\Theta_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ ορίζει μεταβατική μοναδιαία δράση στο nest $\mathcal{N}$ αν και μόνο αν υπάρχει μοναδιαίος τελεστής $W : H \to L^2$ ($\mathbb{R}$, K) ώστε $W\mathcal{N}W^* = \mathcal{N}_\upsilon$, όπου $\mathcal{N}_o$ το nest του Volterra στον L^2 ($\mathbb{R}$, K) για κάποιο χώρο Χίλμπερτ K και η Θ επάγεται από την SOT συνεχή μοναδιαία ομάδα $\{W^* U_o(t) W\}_{t\in\mathbb{R}}$ όπου $\{U_o(t)\}$η ομάδα μετατόπισης στον L^2($\mathbb{R}$, K).

β) Για κάθε δύο SOT συνεχείς μοναδιαίες ομάδες $\{U_1(t)\}, \{U_2(t)\}$που επάγουν την ίδια μεταβατική δράση Θ υπάρχει μοναδιαίος τελεστής $T \in \mathcal{N}\,'$ ώστε: $U_1(t) = TU_2(t)T^*$.

Απόδειξη:

α) Έστω SOT συνεχής ομάδα $\{\Theta_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ που δρα μεταβατικά στο nest $\mathcal{N}$, ώστε για κάθε s να υπάρχει μοναδιαίος τελεστής $U(s)$: $\Theta_s(E) = U(s)EU(s)^*$ για κάθε $E \in \mathcal{N}$.

Επεκτείνουμε την Θ_s στις προβολές της άλγεβρας $\mathcal{N}\,'$ θέτοντας $\Theta_s(F) = U(s)FU(s)^*$, F προβολή της $\mathcal{N}''$.

Από την πρόταση 7.2. υπάρχει $P : \mathbb{R} \to \mathcal{N}$ μονότονος ομοιομορφισμός ώστε $\mathcal{N} = \{P_t \;/\; -\infty \le t \le +\infty\}$ και $U(s)P_tU(s)^* = P_{t+s}$. Πάλι από την 7.2. υπάρχει Borel φασματικό μέτρο $\mathcal{P}$ με τιμές στην άλγεβρα $\mathcal{N}''$, ισοδύναμο προς το μέτρο Lebesgue ώστε: $\Theta_s(\mathcal{P}[A]) = U(s)\mathcal{P}[A]U(s)^* = \mathcal{P}[A+s]$ για κάθε Borel σύνολο A.

Από το θεώρημα 6.12. υπάρχουν μοναδικά ορισμένες προβολές (E_k) της άλγεβρας $\mathcal{N}''$κάθετες ανά δύο, ώστε E_k να είναι το sup όλων των προβολών πολ/τας k για κάθε $k = \infty, 1, 2, \ldots$ και $I = E_\infty + \sum_k E_k$. Η προβολή $\Theta_s(E_k)$ είναι πολ/τας k ως ισοδύναμη με την E_k. Αρα $\Theta_s(E_k) \le E_k$, ανάλογα $\Theta_{-s}(E_k) \le E_k$ και συνεπώς $\Theta_s(E_k) = E_k$.

Αν A_k Borel υποσύνολο του $\mathbb{R}$ ώστε: $E_k = \mathcal{P}(A_k)$, τότε $\Theta_s(E_k) = \Theta_s(\mathcal{P}(A_k)) = \mathcal{P}(A_k + s)$ για κάθε $s \in \mathbb{R}$. Άρα αφού $\mathcal{P}(A_k) = \mathcal{P}(A_k + s)$ τα σύνολα $A_k, A_k + s$ διαφέρουν το πολύ κατά μέτρο μηδέν. Όμως αυτό ισχύει για κάθε $s \in \mathbb{R}$ και άρα $\lambda(A_k) = 0$ ή $\lambda(\mathbb{R} \setminus A_k) = 0$.

Συμπεραίνουμε ότι για κάθε k έχουμε $E_k = I$ ή $E_k = O$. Επομένως υπάρχει $n : E_n = I$ και άρα η $\mathcal{N}''$είναι ομοιόμορφης πολ/τας n.

Από την παρατήρηση 6.4.5. για την άλγεβρα $\mathcal{N}''$ υπάρχουν n το πλήθος μοναδιαία και διαχωρίζοντα διανύσματα (ξ_i) ώστε $\mathcal{N}''\xi_i \underset{i\neq j}{\perp} \mathcal{N}''\xi_j$ και $H = \bigoplus_i \overline{\mathcal{N}''\xi_i}$.

Για κάθε $i = 1, 2, \ldots, n$ ορίζεται πεπερασμένο μέτρο Borel μ_i στο $\mathbb{R}$ ώστε $\mu_i(B) = \langle \mathcal{P}(B)\xi_i, \xi_i \rangle$. Έστω $\frac{d\mu_i}{d\lambda} = f_i^2$, δηλαδή $\mu_i(B) = \int_B f_i^2\, d\lambda$,όπου $f_i \in L^2(\mathbb{R})$, $f_i > 0$ $\lambda.\sigma.\pi.$ Τότε η απεικόνιση $V_i : L^2(\mathbb{R}, \mu_i) \to L^2(\mathbb{R}, \lambda)$: $g \to f_i g$ είναι μοναδιαίος τελεστής.

Στην απόδειξη του 4.3. σελίδα 35, δείξαμε ότι αν το x είναι διαχωρίζον διάνυσμα για την $\mathcal{N}''$, τότε ο χώρος $[N(x), N \in \mathcal{N}]$ είναι πυκνός στον $\overline{\mathcal{N}''x}$. Επομένως αφού $[N\xi_i \,/\, N \in \mathcal{N}] \subseteq [\mathcal{P}(B)\xi_i \,/\, B$ Borel υποσύνολο του $\mathbb{R}\,]$, έχουμε την πυκνότητα του τελευταίου στον $\overline{\mathcal{N}''\xi_i}$.

Ορίζουμε απεικόνιση $U_i^o : \{\mathcal{P}(B)\xi_i \,/\, B$ Borel υποσύνολο του $\mathbb{R}\} \to$ $\to L^2(\mathbb{R}, \mu_i) : \mathcal{P}(B)\xi_i \to \chi_B$ την οποία επεκτείνουμε γραμμικά στον χώρο $[\mathcal{P}(B)\xi_i \,/\, B$ Borel υποσύνολο του $\mathbb{R}\,]$.

Η U_i^o είναι ισομετρική αφού $\|\mathcal{P}(B)\xi_i\|^2 = \langle \mathcal{P}(B)\xi_i, \xi_i \rangle = \mu_i(B) =$ $= \int |\chi_B|^2\, d\mu_i$. Λόγω της πυκνότητας του $[\mathcal{P}(B)\xi_i \,/\, B$ Borel υποσύνολο του $\mathbb{R}\,]$ στον χώρο $\overline{\mathcal{N}''\xi_i}$ η U_i^o επεκτείνεται σε ισομετρία $U_i : \overline{\mathcal{N}''\xi_i} \to L^2(\mathbb{R}, \mu_i)$ που γίνεται επί αφού στην εικόνα της περιέχει τις απλές συναρτήσεις του $L^2(\mathbb{R}, \mu_i)$.

Θέτουμε $W_i = V_i \circ U_i : \overline{\mathcal{N}''\xi_i} \to L^2(\mathbb{R}, \lambda)$ για κάθε i και θεωρούμε τον χώρο Χίλμπερτ $K = l^2(n)$ καθώς και τον μοναδιαίο τελεστή $T : L^2(\mathbb{R}, \lambda)^{(n)} \to$ $\to L^2(\mathbb{R}, K)$ ώστε $T\left(\overset{n}{\underset{i=1}{\oplus}} f_i\right)(t) = (f_1(t), f_2(t), \ldots)$. Τότε ορίζεται ο μοναδιαίος τελεστής: $W = T \circ \underset{i}{\oplus} W_i : H = \underset{i}{\oplus} \overline{\mathcal{N}''\xi_i} \to L^2(\mathbb{R}, K)$.

Ως προς αυτόν τον τελεστή έχουμε: $WP_tW^* = Q_t$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$ και συνεπώς $W\mathcal{N}W^* = \mathcal{N}_0$ από το οποίο έχουμε ότι $W\mathcal{N}''W^* = L^\infty(\mathbb{R}) \otimes I_k$ (βλέπε 7.4.). Πράγματι έστω P_i η προβολή στον $\overline{\mathcal{N}''\xi_i}$, τότε $P_i \in \mathcal{N}'$ και $P_t = \mathcal{P}(-\infty, t] =$ $= \sum_i \oplus \mathcal{P}(-\infty, t]P_i$. Άρα $WP_tW^* = T \underset{i}{\oplus} \left(W_i \mathcal{P}(-\infty, t] W_i^*\right) T^* = T M_{\chi(-\infty, t]}^{(n)} T^* = Q_t$.

Παρατηρούμε ότι: $WQ_s(P_t)W^* = WP_{t+s}W^* = Q_{t+s} = U_o(s)Q_tU_o(-s) =$ $= U_o(s)WP_tW^*U_o(-s)$ και άρα $\Theta_s(P_t) = W^*U_o(s)W \circ P_t \circ \left(W^*U_o(s)W\right)^*$. Δηλαδή η δράση της Θ επάγεται από την SOT συνεχή μοναδιαία ομάδα $\{W^*U_o(t)W\}_{t\in\mathbb{R}}$.

Αντίστροφα, έστω K χωρος Χίλμπερτ και $W : H \to L^2(\mathbb{R}, K)$ μοναδιαίος τελεστής: $W\mathcal{N}W^* = \mathcal{N}_0$. Ορίζεται τότε δράση πάνω στο $\mathcal{N}$:

$: E \to W^*U_o(t)W \circ E \circ W^*U_o(-t)W$ η οποία προφανώς είναι SOT-συνεχής και μοναδιαία. Θα δείξουμε ότι είναι και μεταβατική.

Η $\{U_o(t)\}$ δρα μεταβατικά στο $\mathcal{N}_\upsilon$ άρα για κάθε $E \in \mathcal{N}$ έχουμε:
$\overline{\{U_o(t) \circ WEW^* \circ U_o(-t) / t \in \mathbb{R}\}}^{SOT} = \mathcal{N}_\upsilon$ από το οποίο προκύπτει ότι:
$\overline{\{W^*U_o(t)W \circ E \circ W^*U_o(-t)W / t \in \mathbb{R}\}}^{SOT} = \mathcal{N}$.

β) Έστω $\{U_1(t)\}$, $\{U_2(t)\}$ SOT συνεχείς μοναδιαίες ομάδες που ορίζουν την ίδια δράση Θ στο $\mathcal{N}$.

Στο (α) δείξαμε ότι υπάρχει μοναδιαίος τελεστής $W : H \to L^2(\mathbb{R}, K)$ ώστε $W\mathcal{N}W^* = \mathcal{N}_\upsilon$ ενώ οι ομάδες $\{WU_1(t)W^*\}$, $\{WU_2(t)W^*\}$ δρούν με μετατόπιση στο $\mathcal{N}_\upsilon$.

Από την πρόταση 7.7. υπάρχουν $V_1, V_2 \in \mathcal{N}_\upsilon{}'$: $WU_1(t)W^* = V_1U_o(t)V_1^*$ και $WU_2(t)W^* = V_2U_o(t)V_2^*$. Από τις τελευταίες σχέσεις έχουμε ότι: $U_1(t) =$
$= W^*V_1^*V_2^*W \circ U_2(t) \circ (W^*V_1^*V_2^*W)^*$. Αρκεί να δείξουμε ότι $T = W^*V_1^*V_2^*W \in \mathcal{N}'$.

Επειδή $W\mathcal{N}W^* = \mathcal{N}_\upsilon \Rightarrow \mathcal{N}' = W^*\mathcal{N}_\upsilon{}'W$. Όμως $V_1, V_2 \in \mathcal{N}_\upsilon{}'$ και άρα $W^*V_1^*W$, $W^*V_2^*W \in \mathcal{N}'$. Παρατηρούμε ότι : $T = W^*V_1^*W \circ W^*V_2^*W \in \mathcal{N}'$.

7.9. Παρατήρηση: Στην απόδειξη του 7.8. είδαμε ότι αν ένα nest $\mathcal{N}$ δέχεται μεταβατική και μοναδιαία δράση, τότε η άλγεβρα $\mathcal{N}''$ έχει καθορισμένη πολλαπλότητα n, ενώ το $\mathcal{N}$ είναι μοναδιαία ισοδύναμο με το nest του Volterra που δρα στον χώρο $L^2(\mathbb{R}, K)$, K χώρος Χίλμπερτ διάστασης n.

7.10. Παρουσιάζουμε συνοπτικά ορισμένες έννοιες που θα χρησιμοποιήσουμε:

Θεώρημα Stone: Αν $E[\cdot]$ φασματικό μέτρο ορισμένο στα Borel υποσύνολα του $\mathbb{R}$ και $f_t(\lambda) = e^{it\lambda}$, $t, \lambda \in \mathbb{R}$, τότε για κάθε $t \in \mathbb{R}$ ο τελεστής $U(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_t(\lambda)\,dE_\lambda$ είναι μοναδιαίος τελεστής, ενώ η οικογένεια $\{U(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ είναι SOT συνεχής μοναδιαία ομάδα. Αντίστροφα, για κάθε SOT συνεχή μοναδιαία ομάδα $\{U(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ υπάρχει μοναδικό φασματικό μέτρο $E[\cdot]$ ορισμένο στην Borel σ-άλγεβρα του $\mathbb{R}$ ώστε :

$$U(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_t(\lambda)\,dE_\lambda .$$

(Βλέπε σχετικά στο [5]).

Για την ομάδα $\{U(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ η οικογένεια $\{E(-\infty,\lambda]/\lambda\in\mathbb{R}\}\cup\{O,I\}$ είναι nest που καλείται **φασματικό nest** (βλέπε στο [9], παραγρ. 5.6.).

Σχέσεις Weyl: Δύο SOT συνεχείς ομάδες $\{U(t)\}$, $\{V(s)\}$ σε χώρο Χίλμπερτ H ικανοποιούν τις σχέσεις του Weyl αν $V(s)U(t)=e^{ist}\,U(t)V(s)$ για κάθε $t,s\in\mathbb{R}$.

Για την ομάδα μετατόπισης $\{U_o(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ που δρα στον χώρο $L^2(\mathbb{R},K)$, K χώρος Χίλμπερτ, υπάρχει SOT συνεχής μονοπαραμετρική ομάδα $\{V_o(\lambda)\}_{\lambda\in\mathbb{R}}$, ώστε οι $\{U_o(t)\}$, $\{V_o(\lambda)\}$ να ικανοποιούν τις σχέσεις Weyl.

Εστω το φασματικό μέτρο $\mathcal{P}_o(\Omega)=L_{\chi_\Omega}$, Ω Borel υποσύνολο του $\mathbb{R}$ (Βλέπε στο 7.5.). Τότε για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$ ορίζεται ο μοναδιαίος τελεστής $V_o(\lambda)=\int f_\lambda d\mathcal{P}_o$, για τον οποίο ισχύει $V_o(\lambda)(f)(t)=e^{i\lambda t}f(t)$ για κάθε $f\in L^2(\mathbb{R},K)$ και για κάθε $t,\lambda\in\mathbb{R}$.

Πράγματι στο φασματικό μέτρο $\mathcal{P}_o$ αντιστοιχούν τα Borel μέτρα $\{\mu_{f,g}\,/\,f,g\in L^2(\mathbb{R},K)\}$ όπου: $\mu_{f,g}(\Omega)=\langle L_{\chi_\Omega}(f),g\rangle=\int_\Omega\langle f,g\rangle\,d\lambda$. Άρα $\langle V_o(\lambda)(f),g\rangle=\langle\int f_\lambda d\mathcal{P}_o(f),g\rangle=\int f_\lambda(t)d\mu_{f,g}(t)=\int f_\lambda(t)\langle f(t),g(t)\rangle\,d\lambda(t)=$
$\int\langle f_\lambda(t)f(t),g(t)\rangle\,d\lambda(t)=\langle f_\lambda f,g\rangle$ για κάθε f,g.

Για κάθε $f\in L^2(\mathbb{R},K)$ και $t\in\mathbb{R}$ έχουμε: $(e^{is\lambda}U_o(s)V_o(\lambda))(f)(t)=$
$=(e^{is\lambda}U_o(s))(e^{i\lambda t}f(t))=e^{is\lambda}\cdot e^{i\lambda(t-s)}f(t-s)=e^{i\lambda t}f(t-s)=V_o(\lambda)(f(t-s))=$
$=(V_o(\lambda)U_o(s))(f)(t)$

7.11. Θεώρημα. Έστω $\{U(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$, $\{V(\lambda)\}_{\lambda\in\mathbb{R}}$, SOT συνεχείς μονοπαραμετρικές ομάδες σε χώρο Χίλμπερτ H, τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

α). Οι ομάδες $\{U(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$, $\{V(\lambda)\}_{\lambda\in\mathbb{R}}$ ικανοποιούν τις σχέσεις του Weyl.

β). Υπάρχει χώρος Χίλμπερτ K και μοναδιαίος τελεστής $W:H\to L^2(\mathbb{R},K)$ ώστε $WU(t)W^*=U_o(t)$, $WV(\lambda)W^*=V_o(\lambda)$ για κάθε $\lambda,t\in\mathbb{R}$.

γ) Η ομάδα $\{U(t)\}$ δρα με μετατόπιση πάνω στο φασματικό nest της $\{V(\lambda)\}$.

Απόδειξη:

(α) $\Rightarrow$ (γ).

Έστω $V(\lambda)=\int e^{is\lambda}dE$. Αρκεί να δείξουμε ότι $U(t)E[\Omega]U(t)^* = E[\Omega+t]$ για κάθε Ω Borel υποσύνολο του $\mathbb{R}$ και για κάθε $t\in\mathbb{R}$.

Από τις σχέσεις του Weyl έχουμε: $U(t)V(\lambda)U(t)^* = e^{-it\lambda}V(\lambda)$.
Σταθεροποιώντας το $t\in\mathbb{R}$ οι SOT συνεχείς μοναδιαίες ομάδες $\{U(t)V(\lambda)U(t)^*\}_{\lambda\in\mathbb{R}}$, $\{e^{-it\lambda}V(\lambda)\}_{\lambda\in\mathbb{R}}$ συμπίπτουν.

Άρα από το θεώρημα Stone υπάρχει μοναδικό φασματικό μέτρο $E_o[\cdot]$ ώστε $U(t)V(\lambda)U(t)^* = \int_{\mathbb{R}} e^{i\lambda s}dE_o(s)=e^{-it\lambda}V(\lambda)$. Όμως $U(t)V(\lambda)U(t)^* = U(t)\int e^{is\lambda}dE(s)\cdot U(t)^* = \int e^{is\lambda}dU(t)E(s)U(t)^*$ και $e^{-it\lambda}\,V(\lambda)=$
$= e^{-it\lambda}\int e^{i\lambda s}dE(s)=\int e^{i\lambda(s-t)}dE(s)=\int e^{i\lambda s}dE\circ P_t(s)$ όπου $P_t(s)=t+s$ για κάθε $s\in\mathbb{R}$.

Άρα από την μοναδικότητα του θεωρήματος Stone έχουμε ότι:
$U(t)E[\cdot]U(t)^* = E_o[\cdot]=E\circ P_t[\cdot]$ η ισοδύναμα: $U(t)E[\Omega]U(t)^* = E[\Omega+t]$.

(γ) $\Rightarrow$ (β).

Έστω $V(\lambda)=\int f_\lambda dE$. Αφού η SOT - συνεχής μοναδιαία ομάδα $\{U(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ δρά με μετατόπιση πάνω στο nest $\mathcal{N}=\{E(-\infty,\lambda]/\lambda\in\mathbb{R}\}\cup\{O,I\}$. Τότε η δράση : $U(t)E(-\infty,s]U(t)^* = E(-\infty,s+t]$ είναι μοναδιαία και μεταβατική.

Από την πρόταση 7.2. ορίζεται ο μονότονος ομοιομορφισμός :

$$P:\mathbb{R}\to\{E(-\infty,\lambda]/\lambda\in\mathbb{R}\}: P(t)=E(-\infty,t]$$

Από το θεώρημα 7.8. υπάρχει χώρος Χίλμπερτ K διάστασης όσο και η πολλαπλότητα της άλγεβρας $\mathcal{N}''$ καθώς και μοναδιαίος τελεστής $W:H\to L^2(\mathbb{R},K)$ ώστε $U(t)=W^*U_o(t)W$, $WP_tW^*=Q_t$ για κάθε $t\in\mathbb{R}$.

Επίσης $WE[\Omega]W^* = \mathcal{P}_o(\Omega)$ για κάθε Ω Borel υποσύνολο του $\mathbb{R}$.

Πράγματι $WE(s,t]W^* = W(P_t-P_s)W^* = Q_t-Q_s = L_{\chi_{(s,t]}}=\mathcal{P}_o(s,t]$ για κάθε $t,s\in\mathbb{R}$.

Τότε: $WV(\lambda)W^* = W\int f_\lambda dEW^* = \int f_\lambda dWEW^* = \int f_\lambda d\mathcal{P}_o = V_o(\lambda)$ για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$.

(β) $\Rightarrow$ (α).

Είναι άμεσο αφού οι ομάδες $\{U_o(t)\}, \{V_o(\lambda)\}$ ικανοποιούν τις σχέσεις Weyl (7.10.).

Σχόλιο: Η ισοδυναμία των (α) , (β) στο προηγούμενο θεώρημα είναι γνωστή ως **θεώρημα Stone -von Neumann**.

7.12. Θεώρημα: Έστω Θ μοναδιαία δράση του $\mathbb{R}$ πάνω στο nest $\mathcal{N}$. Τότε υπάρχει μία SOT-συνεχής μοναδιαία ομάδα $\{U(\cdot)\}$που επάγει την Θ και προβολή $N \in \mathcal{N}''$ ώστε:

α) Η Θ δρά τετριμμένα στο nest $\mathcal{N}\big|_{N^\perp}$.

β) Η προβολή N είναι το άθροισμα κάθετων ανά δύο προβολών $\{Q_n\} \subseteq \mathcal{N}''$, κάθε μία από τις οποίες είναι διάστημα του $\mathcal{N}$ ώστε $Q_n U(t) = U(t) Q_n$, ενώ το $\mathcal{N}\big|_{Q_n}$ είναι συνεχές nest ομοιόμορφης πολλαπλότητας .

γ) Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει SOT συνεχής μοναδιαία ομάδα $\{V_n(\lambda)\}_{\lambda \in \mathbb{R}}$ με φασματικό nest $\mathcal{N}\big|_{Q_n}$ ώστε το ζεύγος $(U(\cdot), V_n(\cdot))$ να ικανοποιεί τις σχέσεις του Weyl.

Απόδειξη:

Το $\mathcal{N}$ είναι ένωση ξένων ανά δύο τροχιών. Όπως στην πρόταση 7.2. αν $E \in \mathcal{N}$ και $t \in \mathbb{R}$ ώστε $\Theta_t(E) \neq E$ η τροχιά του $E : \mathcal{O}(E) = \{\Theta_t(E) / t \in \mathbb{R}\}$ είναι μη τετριμμένο διάστημα. Αν $\Theta_t(E) = E$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$, τότε $\mathcal{O}(E) = \{E\}$.

Κάθε μη τετριμμένη τροχιά είναι ανοικτό διάστημα: αν $\mathcal{O}(E) = (M, N]$, τότε $\Theta_t(E) \leq N$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$ τότε όμως $\Theta_s(N) > N$ για $s > 0$ και $\Theta_s(N) \in \mathcal{O}(E)$. Άτοπο. Ανάλογο άτοπο υπάρχει αν υποθέσουμε ότι $\mathcal{O}(E) = [M, N)$.

Από την διαχωρισιμότητα του $\mathcal{N}$ υπάρχει το πολύ αριθμήσιμο πλήθος ανοικτών διαστημάτων, έστω $(E_n, F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ που κάθε ένα από αυτά είναι τροχιά. Θέτουμε $Q_n = F_n - E_n$ και $N = \sum_n Q_n$ τότε $(Q_n)_n \subseteq \mathcal{N}''$, $Q_n \underset{n \neq m}{\perp} Q_m$ και Q_n διάστημα για κάθε n.

Προφανώς η Θ δρα τετριμμένα πάνω στο nest $\mathcal{N}\big|_{N^\perp}$. Για κάθε n θεωρούμε την δράση Θ^n πάνω στο nest $\mathcal{N}\big|_{Q_n}$ που ορίζεται από την σχέση :

$$\Theta_t^n\left(E\big|_{Q_n(H)}\right) = \Theta_t(E)\big|_{Q_n(H)}.$$

Η δράση αυτή είναι μοναδιαία και SOT- συνεχής αφού και η δράση της Θ είναι τέτοια. Επίσης είναι και μεταβατική αφού αν $E\big|_{Q_n(H)} \in \mathcal{N}\big|_{Q_n}$ είναι

$$\overline{\{\Theta_t^n\left(E\big|_{Q_n(H)}\right) / t \in \mathbb{R}\}} = \overline{\{\Theta_t(E)\big|_{Q_n(H)} / t \in \mathbb{R}\}} = \overline{\mathcal{O}(E)\big|_{Q_n(H)}} = \overline{\mathcal{O}(E)}\big|_{Q_n(H)} =$$
$$= [E_n, F_n]\big|_{Q_n} = \mathcal{N}\big|_{Q_n}.$$

Από τις προτάσεις 7.2., 7.8 το nest $\mathcal{N}\big|_{Q_n}$ είναι συνεχές nest ομοιόμορφης πολλαπλότητας ενώ για κάθε n υπάρχει SOT συνεχής μοναδιαία ομάδα $\{U_n(t)\}$ που δρα στον $Q_n(H)$ και επάγει την Θ^n δηλαδή: $\Theta_t(E)\big|_{Q_n} = U_n(t)E\big|_{Q_n(H)}U_n(t)^*$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$.

Ορίζουμε για κάθε t , $U(t) = I\big|_{N^\perp(H)} \oplus \sum_n \oplus U_n(t)$. Τότε αυτός είναι μοναδιαίος τελεστής με $U(t)^* = I\big|_{N^\perp(H)} \oplus \sum_n \oplus U_n(t)^*$. Επιπλέον η οικογένεια των τελεστών $\{U(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ είναι SOT συνεχής ομάδα που επάγει την Θ :

Για κάθε $E \in \mathcal{N}$, $\Theta_t(E) = \Theta_t(E)N^\perp + \sum_n \Theta_t(E)Q_n = E\big|_{N^\perp(H)} \oplus \sum_n \oplus U_n(t)E\big|_{Q_n(H)}U_n(t)^* =$

$$=\left(I\big|_{N^\perp(H)} \oplus \sum_n \oplus U_n(t)\right)\left(E\big|_{N^\perp(H)} \oplus \sum_n \oplus E\big|_{Q_n(H)}\right)\left(I\big|_{N^\perp(H)} \oplus \sum_n \oplus U_n(t)\right)^* = U(t)EU(t)^*.$$

Το (γ) απορρέει άμεσα από το 7.11.

7.13. Πόρισμα:

α) Ένα ολικά ατομικό nest δεν δέχεται μη τετριμμένες SOT συνεχείς δράσεις του $\mathbb{R}$.

β) Ένα nest $\mathcal{N}$ δέχεται μη τετριμμένες δράσεις του $\mathbb{R}$ αν και μόνο αν υπάρχει μη τετριμμένο διάστημα P του $\mathcal{N}$, ώστε το nest $\mathcal{N}\big|_P$ να είναι μοναδιαία ισοδυναμο με το nest του Volterra κάποιας πολλαπλότητας.

Απόδειξη:

Άμεσο από τα 7.2., 7.12.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

[1]. M. Anoussis and A. Katavolos: "Unitary actions on nests and the Weyl relations", Bull.London Math Soc. 27(1995), 265-272.

[2]. K.R. Davidson: "Nest algebras", Longman Scientific &Technical, New York 1988.

[3]. J.A. Erdos: "Unitary invariants for nests", Pacific J. Math. 23 (1967), 229-256.

[4]. A. Κατάβολος: Σημειώσεις στο μεταπτυχιακό μάθημα "Θεωρία Τελεστών" (1998).

[5]. A. Κατάβολος: "Άλγεβρες Von Neumann και μη φραγμένοι τελεστές" στο " Αλγεβρες τελεστών - Κβαντική μηχανική " , Εκδ. Ζήτη, Θεσ/νίκη 1997, 147-199.

[6]. Γ. Κουμουλλής και Σ. Νεγρεπόντης: "Θεωρία μέτρου", Εκδ. Συμμετρία, Αθήνα 1991.

[7]. G.W. Mackey: "A theorem of Stone and von Neumman", Duke Math J. 16(1949), 313-326.

[8]. Σ. Νεγρεπόντης, Θ. Ζαχαριάδης, Ν. Καλαμίδας, Β. Φαρμάκη: "Γενική Τοπολογία και Συναρτησιακή Ανάλυση", Εκδ. Αίθρα, Αθήνα 1989.

[9]. R.V. Kadison and J.R. Ringrose: "Fundamentals of the theory of operator algebras", vol. I and II,Academic press, London 1983.