**ΕΥΓΕΝΙΟΣ ΚΑΚΑΡΙΑΔΗΣ**

# Χώροι Τελεστών και Άλγεβρες Τελεστών: Ημισταυρωτά Γινόμενα Αλγεβρών Τελεστών

**Διδακτορική Διατριβή**

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΤΜΗΜΑ
2011

**ΕΙΣΗΓΗΤΗΣ:** ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ ΑΡΙΣΤΕΙΔΗΣ ΚΑΤΑΒΟΛΟΣ

# Ευχαριστίες

Πρώτα από όλα θα ήθελα να ευχαριστήσω τον καθηγητή Αριστείδη Κατάβολο για την στενή και συστηματική παρακολούθηση της διατριβής και για την απλόχερη και ανιδιοτελή βοήθεια που μου προσέφερε όλο το διάστημα της εκπόνησής της. Η ακεραιότητά του θα αποτελεί παράδειγμα στη μελλοντική μου πορεία.

Επίσης ευχαριστώ τον καθηγητή Ηλία Κατσούλη για την πολυσχιδή συνεργασία η οποία και βοήθησε ουσιαστικά στην επιτάχυνση της ωρίμανσής μου. Είναι μεγάλη τύχη για μένα να δουλεύω με ανθρώπους με τέτοιο ερευνητικό βάθος και εμπειρία.

Ευχαριστώ τον καθηγητή Μιχάλη Ανούση για τις καίριες παρατηρήσεις του κατά τη διάρκεια της σειράς των διαλέξεων που έδωσα στο σεμινάριο «Θεωρία Τελεστών». Επιπλέον ευχαριστώ τον καθηγητή Stephen Power που δέχτηκε να συμμετάσχει στην τριμελή επιτροπή.

Ακόμα ευχαριστώ τους καθηγητές Απόστολο Γιαννόπουλο, Σωτήρη Καρανάσιο, Βασίλειο Νεστορίδη και Μαρία Φραγκουλοπούλου για την τιμή που μου έκαναν να κρίνουν την εργασία μου.

Τέλος θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά την οικογένεια μου, την κοπέλα μου και τους φίλους μου για την ουσιαστική συναισθηματική υποστήριξη και την αγάπη τους· χωρίς αυτούς τους ιδιαίτερους ανθρώπους δεν θα μπορούσα να έχω το ψυχικό σθένος να συνεχίζω και να ονειρεύομαι.

Η παρούσα διδακτορική διατριβή χρηματοδοτήθηκε από το Ίδρυμα Κρατικών Υποτροφιών, την περίοδο Νοέμβριος 2007 εώς Φεβρουάριος 2011, και έχει συγχρηματοδοτηθεί από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο - ΕΚΤ) και από εθνικούς πόρους μέσω του Επιχειρησιακού Προγράμματος ¨Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση’ του Εθνικού Στρατηγικού Πλαισίου Αναφοράς (ΕΣΠΑ) - Ερευνητικό Χρηματοδοτούμενο Έργο: Ηράκλειτος ΙΙ (Επένδυση στην κοινωνία της γνώσης μέσω του Ευρωπαϊκού Κοινωνικού Ταμείου), την περίοδο Μάρτιος 2011 εώς Ιούνιος 2011.

# Πρόλογος

Κατά τη διάρκεια των τελευταίων δύο δεκαετιών η κβαντική φυσική και τα μη-μεταθετικά συστήματα έχουν επηρεάσει σε σημαντικό βαθμό τα μοντέρνα μαθηματικά. Στον κλάδο της ανάλυσης αυτή η επιρροή οδήγησε στην ανάπτυξη της θεωρίας των «Χώρων Τελεστών», όπου είναι εμφανής ο συνδυασμός της συναρτησιακής ανάλυσης με την άλγεβρα. Ειδικότερα το πεδίο των αλγεβρών τελεστών είναι ο συνδετικός κρίκος μεταξύ της συναρτησιακής ανάλυσης και της κβαντικής φυσικής καθώς προσφέρει την απαραίτητη κωδικοποίηση για την επίλυση προβλημάτων που προκύπτουν σε μη-μεταθετικά περιβάλλοντα, μέσω της κβαντοποίησης των χώρων και της θεωρίας αναπαραστάσεων.

Με τον όρο *συγκεκριμένος (concrete) χώρος τελεστών* (αντ. *συγκεκριμένη (concrete) άλγεβρα τελεστών*) καλούμε ένα γραμμικό υπόχωρο (αντ. μια υπάλγεβρα) φραγμένων τελεστών που δρουν σε χώρο Hilbert $H$. Μερικά από τα πλέον ενδιαφέροντα παραδείγματα αλγεβρών τελεστών είναι οι C*-άλγεβρες, δηλαδή οι κλειστές και αυτοσυζυγείς άλγεβρες τελεστών: λόγω του Θεωρήματος Gelfand-Naimark κάθε C*-άλγεβρα, δηλαδή κάθε άλγεβρα Banach με ενέλιξη που επιπλέον τα στοιχεία της ικανοποιούν τη C*-ιδιότητα $\|c^*c\| = \|c\|^2$, αναπαρίσταται ως άλγεβρα τελεστών (σε χώρο Hilbert). Αξίζει να αναφέρουμε ότι κάθε χώρος Banach αναπαρίσταται ως χώρος τελεστών καθώς μπορεί να εμφυτευθεί ισομετρικά σε μια μεταθετική C*-άλγεβρα (λόγω του Θεωρήματος Hahn-Banach). Αυτά είναι δύο απλά παραδείγματα που φανερώνουν το εύρος της θεωρίας των χώρων τελεστών. Για τις άλγεβρες τελεστών η αντίστοιχη «κβαντοποίηση» επιτυγχάνεται με το Θεώρημα των Blecher, Ruan και Sinclair. Προτού το παρουσιάσουμε, ας κάνουμε μερικές χρήσιμες παρατηρήσεις.

Κάθε κλειστή μοναδιαία υπάλγεβρα $\mathcal{A}$ ενός $\mathcal{B}(H)$ κληρονομεί και επιπλέον δομή από τον $\mathcal{B}(H)$. Όπως είναι γνωστό, για κάθε $\nu \geq 1$, ο χώρος $\mathcal{M}_\nu(\mathcal{B}(H))$ των $\nu \times \nu$ πίνακων με στοιχεία από τον $\mathcal{B}(H)$ ταυτίζεται με τον $\mathcal{B}(\underbrace{H \oplus \cdots \oplus H}_{\nu\text{-φορές}}) \equiv \mathcal{B}(H^{(\nu)})$ και είναι φυσιολογικό να θεωρήσουμε την άλγεβρα $\mathcal{M}_\nu(\mathcal{A})$ ως υπάλγεβρα του $\mathcal{B}(H^{(\nu)})$. Επομένως είναι φυσιολογικό να ορίσουμε τις αναπαραστάσεις μιας άλγεβρας τελεστών λαμβάνοντας υπόψιν και τη δομή που προκύπτει από την ακολουθία νορμών. Επίσης παρατηρούμε ότι η $\mathcal{M}_\nu(\mathcal{A})$ είναι μοναδιαία άλγεβρα Banach ως προς τη νόρμα $\|\cdot\|_\nu$, για κάθε $\nu$.

Γενικότερα, έστω ένα ζεύγος $(\mathcal{A}, \{\|\cdot\|_\nu\}_{\nu\geq 1})$, όπου η $\mathcal{A}$ είναι μοναδιαία άλγεβρα Banach και οι νόρμες $\|\cdot\|_\nu$ ικανοποιούν τα αξιώματα του Ruan, δηλαδή

$(R_1)$ $\|\alpha x\beta\|_\nu \leq \|\alpha\| \, \|x\|_\nu \, \|\beta\|$, για κάθε $\nu \geq 1, \alpha, \beta \in \mathcal{M}_\nu, x \in \mathcal{M}_\nu(\mathcal{A})$,

$(R_2)$ για κάθε $x \in \mathcal{M}_m(\mathcal{A}), y \in \mathcal{M}_\nu(\mathcal{A})$,

$$\left\| \begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{bmatrix} \right\|_{m+\nu} = \max\{\|x\|_m, \|y\|_\nu\}.$$

Θα λέμε ότι το ζεύγος $(\mathcal{A}, \{\|\cdot\|_\nu\}_{\nu\geq 1})$ ορίζει μια *αφηρημένη (abstract) άλγεβρα τελεστών* αν η $\mathcal{M}(_\nu(\mathcal{A}))$ είναι άλγεβρα Banach, για κάθε $\nu$. Μια απεικόνιση $\pi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ σε χώρο Hilbert $\mathcal{H}$ θα καλείται *αναπαράσταση της* $\mathcal{A}$, αν η $\pi$ είναι μορφισμός αλγεβρών και *πλήρης συστολή*, δηλαδή αν $\|\pi_\nu\| \leq 1$, για κάθε $\nu \geq 1$, όπου

$$\pi_\nu : \mathcal{M}_\nu(\mathcal{A}) \to \mathcal{M}_\nu(\mathcal{B}(H)) : [a_{ij}] \mapsto \pi_\nu([a_{ij}]) := [\pi(a_{ij})].$$

Αν επιπλέον κάθε $\pi_\nu$ είναι ισομετρία τότε η $\pi$ θα καλείται *πλήρης ισομετρία*. Η φυσιολογική έννοια ισομορφισμού στις (αφηρημένες) άλγεβρες τελεστών είναι η ακόλουθη: δύο αφηρημένες άλγεβρες τελεστών $\mathcal{A}$ και $\mathcal{B}$ είναι ισόμορφες αν υπάρχει ισομορφισμός αλγεβρών $\pi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ έτσι ώστε κάθε $\pi_\nu : \mathcal{M}_\nu(\mathcal{A}) \to \mathcal{M}_\nu(\mathcal{B})$ είναι ισομετρία. Τότε η $\pi$ καλείται *πλήρως ισομετρικός ισομορφισμός* και οι $\mathcal{A}$ και $\mathcal{B}$ *πλήρως ισομετρικά ισόμορφες*. Το Θεώρημα BRS δικαιολογεί πλήρως τους παραπάνω ορισμούς.

**Θεώρημα (BRS).** *Κάθε αφηρημένη άλγεβρα τελεστών $(\mathcal{A}, \{\|\cdot\|_\nu\}_{\nu\geq 1})$ αναπαρίσταται πλήρως ως συγκεκριμένη άλγεβρα τελεστών: υπάρχει ένας χώρος Hilbert $\mathcal{H}$ και ένας πλήρως ισομετρικός μορφισμός αλγεβρών $\pi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$.* $\square$

Αν $\iota : \mathcal{A} \to \mathcal{C}$ είναι πλήρης ισομετρία και η εικόνα $\iota(A)$ παράγει τη $\mathcal{C}$ ως C*-άλγεβρα τότε το ζεύγος $(\mathcal{C}, \iota)$ θα καλείται C*-κάλυμμα της $\mathcal{A}$. Το Θεώρημα BRS αποδεικνύει την ύπαρξη τουλάχιστον ενός C*-καλύμματος για κάθε άλγεβρα τελεστών. Όπως φαίνεται όμως από το επόμενο απλό παράδειγμα, δεν υπάρχει μοναδικό C*-κάλυμμα.

**Παράδειγμα.** Έστω η άλγεβρα του δίσκου $\mathbb{A}(\mathbb{D})$. Τότε η $C(\overline{\mathbb{D}})$ είναι ένα C*-κάλυμμά της. Επίσης από την αρχή μεγίστου, η απεικόνιση

$$\iota : \mathbb{A}(\mathbb{D}) \to C(\mathbb{T}) : f \mapsto f|_{\mathbb{T}}$$

είναι (πλήρης) ισομετρία και η $C(\mathbb{T})$ είναι ένα δεύτερο C*-κάλυμμά της. Η $C(\mathbb{T})$ είναι «μικρότερη» με την έννοια ότι υπάρχει *-επιμορφισμός $\Phi : C(\overline{\mathbb{D}}) \to C(\mathbb{T})$, έτσι ώστε $\Phi(f) = \iota(f)$ για κάθε $f \in \mathbb{A}(\mathbb{D})$.

Επομένως, για την ίδια άλγεβρα τελεστών μπορεί να υπάρχουν περισσότερα του ενός (μη-ισομορφικά) C*-καλύμματα. Παρόλα αυτά, ο Hamana [**18**], οι Dritchell και McCullough [**15**] και ο Arveson [**2**] έχουν αποδείξει ότι υπάρχει η έννοια του ελάχιστου C*-καλύμματος.

**Θεώρημα (Hamana ('79), Dritschel-McCullough ('05), Arveson ('06)).** *Υπάρχει μια (καθολική)* C*-*άλγεβρα,* $\mathrm{C}^*_{env}(\mathcal{A})$ *έτσι ώστε η* $(\mathrm{C}^*_{env}(\mathcal{A}), j)$ *είναι ένα* C*-*κάλυμμα της* $\mathcal{A}$, *και για κάθε άλλο* C*-*κάλυμμα* $(\mathcal{C}, \iota)$ *της* $\mathcal{A}$, *υπάρχει μοναδικός* *-*επιμορφισμός* $\Phi$ *έτσι ώστε το επόμενο διάγραμμα να είναι μεταθετικό*

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{C}^*(\iota(\mathcal{A})) = \mathcal{C} \arrow[r, dashed, "\Phi"] & \mathrm{C}^*_{env}(\mathcal{A}) = \mathrm{C}^*(j(\mathcal{A})) \\
\mathcal{A} \arrow[u, "\iota"] \arrow[ur, "j"'] &
\end{tikzcd}$$

*δηλαδή,* $\Phi(\iota(a)) = j(a)$, *για κάθε* $a \in \mathcal{A}$. *Η* C*-*άλγεβρα* $\mathrm{C}^*_{env}(\mathcal{A})$ *είναι μοναδική ως προς* *-*ισομορφισμούς και καλείται το* C*-*envelope της* $\mathcal{A}$. $\Box$

Ένας ισοδύναμος τρόπος καθορισμού του C*-envelope μιας άλγεβρας τελεστών είναι μέσω του Šilov ιδεώδους. Πρώτα σταθεροποιούμε ένα C*-κάλυμμα $(C, \iota) \equiv \mathrm{C}^*(\mathcal{A})$ της $\mathcal{A}$. Τότε ένα *συνοριακό ιδεώδες για την* $\mathcal{A}$, είναι ένα ιδεώδες $J \subseteq C^*(\mathcal{A})$ με την ιδιότητα ο περιορισμός της απεικόνισης πηλίκο $q : C^*(\mathcal{A}) \to C^*(\mathcal{A})/J$ στην $\mathcal{A}$ να είναι πλήρης ισομετρία. Το *Šilov ιδεώδες* είναι το μέγιστο συνοριακό ιδεώδες. Στην ενότητα 1.2.3 αποδεικνύουμε την ύπαρξη του Šilov ιδεώδους και δείχνουμε ότι το πηλίκο $\mathrm{C}^*(\mathcal{A})/J$ έχει την καθολική ιδιότητα του C*-envelope $\mathrm{C}^*_e(\mathcal{A})$.

Μια από τις ιδιαιτερότητες που έχουν οι χώροι των φραγμένων τελεστών $\mathcal{B}(H)$, όπου $H$ χώρος Hilbert, είναι ότι επιδέχονται και άλλες τοπολογίες, πέρα από την τοπολογία της νόρμας, όπως είναι η ισχυρή (sot), η ασθενής (wot) και η *-ασθενής (w*) τοπολογία. Επομένως, ανάλογα με την τοπολογία που εξετάζουμε, το α-ντικείμενο ενδέχεται να καθορίζεται από διαφορετικές οικογένειες αναπαραστάσεων. Μάλιστα για αρκετά χρόνια υπήρχε μια άτυπη «αντιπάθεια» μεταξύ των αποκαλού-μενων C*-αλγεβριστών και των W*-αλγεβριστών με αποτέλεσμα «να μην γνωρίζει η δεξιά τι ποιεί η αριστερά». Σύγχρονες μέθοδοι δείχνουν ότι χρησιμοποιώντας τόσο τη θεωρία της τοπολογίας της νόρμας όσο και τη w*-τοπολογία μπορούμε να έχουμε αξιοσημείωτα αποτελέσματα (βλέπε **[8]** για μια ολοκληρωμένη εικόνα). Για αυτό το λόγο στη παρούσα διατριβή τα υπό μελέτη αντικείμενα εξετάζονται ως προς τις δύο αυτές τοπολογίες.

Παρόλο που οι αυτοσυζυγείς υπάλγεβρες του $\mathcal{B}(H)$ αποτελούν ένα σημαντι-κό τομέα στη Θεωρία Τελεστών, υπάρχουν αρκετοί λόγοι που αναδεικνύουν τους μη-αυτοσυζυγείς υποχώρους ως εξίσου σημαντικό κλάδο στη Θεωρία Τελεστών. Προτού επιχειρηματολογήσουμε για την άποψη αυτή, ας παραθέσουμε το Θεώρη-μα του Δεύτερου Μεταθέτη του von Neumann. Υπενθυμίζουμε ότι μια μοναδιαία αυτοσυζυγής υπάλγεβρα $A$ ενός $\mathcal{B}(H)$ καλείται άλγεβρα von Neumann αν $\overline{A}^{\text{sot}} = A$.

**Θεώρημα (Δευτέρου Μεταθέτη).** *Έστω $A$ άλγεβρα von Neumann. Τότε* $A'' = \overline{A}^{w^*} = \overline{A}^{wot} = A$. □

Επομένως, κάθε άλγεβρα von Neumann είναι ίση με την άλγεβρα που παρά-γουν τα στοιχεία του $\mathcal{B}(H)$ που αφήνουν αναλλοίωτο κάθε αναλλοίωτο υπόχωρο της $A$, δηλαδή κάθε άλγεβρα von Neumann είναι ανακλαστική (βλέπε ορισμό 4.1.6). Αυτό το ισχυρό αποτέλεσμα απορρέει από το γεγονός ότι η $A$ περιέχει το συζυ-γή κάθε στοιχείου της. Κάτι τέτοιο δεν ισχύει στις μη-αυτοσυζυγείς περιπτώσεις. Για παράδειγμα έστω $\mathcal{A} = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a \end{bmatrix} : a, b \in \mathbb{C} \right\}$. Τότε η άλγεβρα που παράγουν τα στοιχεία που αφήνουν αναλλοίωτο κάθε αναλλοίωτο υπόχωρο της $A$ είναι η $\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} : a, b, c \in \mathbb{C} \right\} \supsetneq A$. Σε αυτό το σημείο σημειώνουμε ότι οι (μη-αυτοσυζυγείς) ανακλαστικές άλγεβρες, όπως για παράδειγμα οι nest άλγεβρες, απο-τελούν ιδιαίτερο κεφάλαιο στη Θεωρία Τελεστών. Τα ίχνη τους μας πάνε τουλάχι-στον 40 χρόνια πίσω, για την ακρίβεια στο 1966, όπου ο Sarason στο **[43]** αποδεικνύ-ει ένα από τα πρώτα αποτελέσματα σχετικά με την ανακλαστικότητα. Μάλιστα εκεί γίνεται ίσως η πρώτη αναφορά στις μη-αυτοσυζυγείς άλγεβρες με τον όρο unstarred operator algebras.

# Καθολικές άλγεβρες Δυναμικών Συστημάτων

Ένας από τους σκοπούς της παρούσας διατριβής είναι ο υπολογισμός του C*-envelope για μια οικογένεια αλγεβρών τελεστών που προκύπτουν από ένα δυναμικό σύστημα. Με τον όρο *δυναμικό σύστημα* στη διατριβή αυτή θα καλούμε ένα ζεύγος $(\mathcal{A},\alpha)$, όπου η $\mathcal{A}$ είναι άλγεβρα τελεστών και η $\alpha : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ ενδομορφισμός της $\mathcal{A}$. Σαν γενική εικόνα, μπορούμε να πούμε ότι οι υπό εξέταση άλγεβρες τελεστών παράγονται από γενικευμένα πολυώνυμα $p(\mathfrak{U})$ ως προς ένα καθολικό σύμβολο $\mathfrak{U}$ με συντελεστές από την άλγεβρα $\mathcal{A}$ και ο πολλαπλασιασμός στον υποκείμενο χώρο επάγεται από μια επιλεγμένη συναλλοίωτη σχέση, όπου επιδρά η δράση $\alpha$.

Το πιο απλό παράδειγμα τέτοιας άλγεβρας τελεστών είναι το σταυρωτό γινόμενο. Έστω $(\mathcal{C},\alpha)$ δυναμικό σύστημα, όπου $\mathcal{C}$ είναι C*-άλγεβρα και $\alpha : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ *-ισομορφισμός της. Ένα ζεύγος $(\pi, V)$ καλείται συναλλοίωτο αν **(i)** $\pi : \mathcal{C} \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ αναπαράσταση, **(ii)** $V$ unitary στον $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ ($V^*V = VV^* = I_{\mathcal{H}}$), και ικανοποιείται η *συναλλοίωτη σχέση*

$$\pi(\alpha(c)) = V\pi(c)V^*, \quad \text{για κάθε } c \in \mathcal{C}.$$

Μπορούμε να επιλέξουμε τα συναλλοίωτα ζεύγη $(\pi, V)$ έτσι ώστε ο χώρος Hilbert $\mathcal{H}$ όπου δρα κάθε τέτοιο ζεύγος να έχει διάσταση μικρότερη από $\dim \mathcal{H}_u$, (όπου $\mathcal{H}_u$ όπως στη κατασκευή[1] GNS) και να ορίσουμε

$$\pi_u(c) \equiv \bigoplus \pi(c), \quad \mathfrak{U} = \bigoplus V.$$

Ταυτίζοντας κάθε στοιχείο $c$ με την εικόνα του $\pi_u(c)$, ορίζουμε *το σταυρωτό γινόμενο* $\mathcal{C} \rtimes_\alpha \mathbb{Z}$ *του* $(\mathcal{C},\alpha)$ ως την (καθολική) C*-άλγεβρα που παράγεται από τα $c \in \mathcal{C}$ και το $\mathfrak{U}$. Επομένως είναι η κλειστή γραμμική θήκη των τριγωνομετρικών πολυωνύμων $\sum_{n=-k}^{k} c_n\mathfrak{U}^n, c_n \in \mathcal{C},\ k \geq 0$, όπου $\mathfrak{U}$ unitary και επιπλέον $\alpha(c) = \mathfrak{U}c\mathfrak{U}^*$ για κάθε $c \in \mathcal{C}$.

Τα σταυρωτά γινόμενα αλγεβρών von Neumann εισήχθησαν από τους Murray και von Neumann προκειμένου να κατασκευαστούν παραδείγματα αλγεβρών von Neumann που είναι Type II ή Type III factors και έκτοτε μελετήθηκαν αρκετά. Ένα από τα κύρια ερωτήματα που αφορούσε το C*-ανάλογο τους ήταν πότε το ακόλουθο ισχύει:

[1] $H_u$ είναι ο χώρος όπου δρα η καθολική αναπαράσταση της $\mathcal{C}$, για παράδειγμα βλέπε **[33]**.

> *Έστω τα δυναμικά συστήματα $(\mathcal{C}, \alpha)$ και $(\mathcal{B}, \beta)$. Τότε υπάρχει ένας ισομορφισμός $\gamma : \mathcal{C} \to \mathcal{B}$ έτσι ώστε $\gamma \circ \alpha = \beta \circ \gamma$ (δηλαδή τα δυναμικά συστήματα είναι συζυγή) αν και μόνο αν τα αντίστοιχα σταυρωτά γινόμενα $\mathcal{C} \rtimes_\alpha \mathbb{Z}$ και $\mathcal{B} \rtimes_\beta \mathbb{Z}$ είναι *-ισόμορφα.*

Παρόλο που το ευθύ είναι προφανές, το αντίστροφο δεν ισχύει εν γένει. Πράγματι, τα σταυρωτά γινόμενα $\mathcal{C} \rtimes_\alpha \mathbb{Z}$ και $\mathcal{C} \rtimes_{\alpha^{-1}} \mathbb{Z}$ είναι πάντα *-ισόμορφα, ενώ οι δράσεις $\alpha$ και $\alpha^{-1}$ μπορεί να μην είναι συζυγείς. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι μπορούμε να κατασκευάσουμε έναν *-ισομορφισμό για τα σταυρωτά γινόμενα που να μη διατηρεί τα «αναλυτικά πολυώνυμα». Επομένως, το ερώτημα διαμορφώθηκε εκ νέου στο εξής

> *Έστω τα δυναμικά συστήματα $(\mathcal{C}, \alpha)$ και $(\mathcal{B}, \beta)$. Είναι αλήθεια ότι αν υπάρχει ένας *-ισομορφισμός μεταξύ των σταυρωτών γινομένων $\mathcal{C} \rtimes_\alpha \mathbb{Z}$ και $\mathcal{B} \rtimes_\beta \mathbb{Z}$ που διατηρεί τα αναλυτικά πολυώνυμα, τότε τα δυναμικά συστήματα είναι συζυγή;*

Χωρίς να είμαστε ιδιαίτερα ακριβείς προς στιγμή, μπορούμε να πούμε ότι το ημισταυρωτό γινόμενο που προκύπτει από ένα δυναμικό σύστημα είναι η άλγεβρα των αναλυτικών πολυωνύμων. Επομένως το προηγούμενο ερώτημα μπορεί να αναδιαμορφωθεί στο ακόλουθο

> *Έστω τα δυναμικά συστήματα $(\mathcal{C}, \alpha)$ και $(\mathcal{B}, \beta)$. Είναι αλήθεια ότι αν τα αντίστοιχα ημισταυρωτά γινόμενα είναι ισόμορφα, τότε τα δυναμικά συστήματα είναι συζυγή;*

Το αξιοσημείωτο είναι ότι τα ημισταυρωτά γινόμενα ορίζονται και για δυναμικά συστήματα $(\mathcal{C}, \alpha)$ όπου η δράση δεν είναι *-αυτομορφισμός. Θετικές απαντήσεις στο προηγούμενο ερώτημα δόθηκαν για μεταθετικά δυναμικά συστήματα στα [**3, 17, 39**], με επιπλέον, όμως, υποθέσεις στη δράση. Πρόσφατα, οι Davidson και Κατσούλης [**12**] δώσανε θετική απάντηση χωρίς καμμία επιπλέον υπόθεση στη δράση, εισάγοντας την έννοια των *pencils αναπαραστάσεων*.

Όπως διαφαίνεται το πρόβλημα του ορισμού των ημισταυρωτών γινομένων είναι περισσότερο πρόβλημα αναπαραστάσεων, με την έννοια ότι για διαφορετικές αναπαραστάσεις του ίδιου αντικειμένου, ενδέχεται να καταλήξουμε σε μη-ισόμορφα αντικείμενα. Ας δούμε πρώτα ένα απλό παράδειγμα.

Παρατηρούμε ότι το σταυρωτό γινόμενο $\mathcal{C} \rtimes_\alpha \mathbb{Z}$ περιέχει την μη-αυτοσυζυγή υπάλγεβρα που παράγουν τα «αναλυτικά πολυώνυμα»

$$\sum_{n=0}^{k} c_n \mathfrak{U}^n, c_n \in \mathcal{C}, k \geq 0,$$

την οποία ονομάζουμε *σχετικό ημισταυρωτό γινόμενο*. Τότε μπορούμε να δείξουμε ότι το C*-envelope του σχετικού ημισταυρωτού γινομένου είναι το crossed product $\mathcal{C} \rtimes_\alpha \mathbb{Z}$. Στην περίπτωση που η $\mathcal{C}$ είναι οι μιγαδικοί αριθμοί, το προηγούμενο αποτέλεσμα δείχνει ότι το C*-envelope της $\mathbb{A}(\mathbb{D})$ είναι η $C(\mathbb{T})$.

Αυτός δεν είναι ο μοναδικός τρόπος για να κατασκευάσουμε *ημισταυρωτά γινόμενα*. Γενικότερα, δοθέντος δυναμικού συστήματος $(\mathcal{C}, \alpha)$, υπάρχουν πολλαπλές επιλογές ώστε να κατασκευάσουμε, καταρχάς, καθολικές C*-άλγεβρες ως προς συλλογές ζευγών $(\pi, V)$, έτσι ώστε η $(H, \pi)$ να είναι αναπαράσταση της $\mathcal{C}$, ο $V$ να είναι τελεστής στον $\mathcal{B}(H)$ και να ισχύει ένα είδος «συναλλοίωτης σχέσης». Για παράδειγμα, μπορούμε να θεωρήσουμε μια από τις σχέσεις[†]

$$\begin{aligned} &(1) \quad \pi(\alpha(c)) = V\pi(c)V^*, \\ &(2) \quad V\pi(\alpha(c)) = \pi(c)V, \\ &(3) \quad V\pi(\alpha(c))V^* = \pi(c), \end{aligned}$$

και ο τελεστής $V$ μπορεί να επιλεγεί συστολή, ισομετρία, co-isometry ή unitary. Όταν η $\alpha$ είναι *-ισομορφισμός και ο $V$ unitary, τότε οι τρεις σχέσεις είναι ισοδύναμες και η καθολική C*-άλγεβρα που προκύπτει είναι το σταυρωτό γινόμενο $\mathcal{C} \rtimes_\alpha \mathbb{Z}$.

Ένα ακόμη ενδιαφέρον παράδειγμα, προκύπτει για μοναδιαία C*-άλγεβρα $\mathcal{C}$, όπου η δράση $\alpha$ είναι 1-1, έτσι ώστε να ικανοποιείται η σχέση (1) με $V$ ισομετρία. Τότε η καθολική C*-άλγεβρα $\mathcal{C} \times_\alpha \mathbb{N}$ που προκύπτει είναι η κλειστή γραμμική θήκη των πολυωνύμων

$$\sum_{n,m=-k}^{k} (\mathfrak{U}^*)^m c_{n,m} \mathfrak{U}^n, c_{n,m} \in \mathcal{C}, k \geq 0,$$

όπου το (καθολικό) σύμβολο $\mathfrak{U}$ είναι ισομετρία και επιπλέον $\alpha(c) = \mathfrak{U} c \mathfrak{U}^*$ για κάθε $c \in \mathcal{C}$. Η $\mathcal{C} \times_\alpha \mathbb{N}$ καλειται *σταυρωτό γινόμενο με ενδομορφισμό* και εισήχθη από τον Stacey **[45]** (υποθέτουμε ότι η $\alpha$ δεν διατηρεί τη μονάδα, διαφορετικά η σχέση (1) θα έδινε ότι ο $V$ είναι απαραίτητα unitary). Και σε αυτό το παράδειγμα, μπορούμε

[†] όπως παρουσιάζονται από τον M. Lamoureux, GPOTS (1999).

να θεωρήσουμε ως *ημισταυρωτό γινόμενο* την μη-αυτοσυζυγή υπάλγεβρα που παράγουν τα αναλυτικά πολυώνυμα $\sum_{n=0}^{k} c_n \mathfrak{U}^n, c_n \in \mathcal{C}, k \geq 0$ και να υπολογίσουμε το C*-envelope. Πάλι όμως θα έχουμε χρησιμοποιήσει έναν συγκεκριμένο τρόπο να ορίσουμε τα ημισταυρωτά γινόμενα.

Το πρώτο ερώτημα, λοιπόν, που προκύπτει είναι αν μπορούμε να ορίσουμε τα ημισταυρωτά γινόμενα ως αφηρημένες άλγεβρες τελεστών, χρησιμοποιώντας τη γλώσσα των αναπαραστάσεων. Επίσης, πρέπει καταρχάς να επιλέξουμε τη συναλλοίωτη σχέση με την οποία θα ασχοληθούμε. Ίσως, η πιο ενδιαφέρουσα να είναι η σχέση (2) καθώς, σε ειδικές περιπτώσεις, συνδέει τις άλλες δύο. Πράγματι, είναι εύκολο να δούμε ότι όταν ο τελεστής $V$ είναι ισομετρία τότε $[(1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3)]$, ενώ όταν ο $V$ είναι co-isometry ισχύουν οι αντίστροφες συνεπαγωγές.

## «Νορμαρισμένα» Ημισταυρωτά Γινόμενα

Η πρώτη φορά που εμφανίζεται η έννοια των ημισταυρωτών γινομένων στη βιβλιογραφία είναι στο άρθρο του Arveson [**1**] και ένα σημαντικό βήμα στη κωδικοποίησή τους έγινε από τον Peters στο [**36**]. Καθώς, όμως, δεν είχε αναπτυχθεί σε τέτοιο βαθμό η θεωρία των αλγεβρών τελεστών εξετάζονται ως μη-αυτοσυζυγείς άλγεβρες Banach παρά σαν άλγεβρες τελεστών. Εμπνευσμένοι από αυτήν την κωδικοποίηση δίνουμε τον ακόλουθο ορισμό για τα ημισταυρωτά γινόμενα. Τα αποτελέσματα του κεφαλαίου 2 περιλαμβάνονται στο [**21**] και αποτελούν γενικεύσεις του [**37**, Theorem 4].

### Ημισταυρωτά Γινόμενα C*-αλγεβρών

Έστω, λοπόν, $\mathcal{C}$ μια $C^*$-άλγεβρα με μονάδα και $\alpha : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ ένας μοναδιαίος *-ενδομορφισμός. Μιμούμενοι την κατασκευή του σταυρωτού γινομένου, εφοδιάζουμε το αλγεβρικό τανυστικό γινόμενο $c_{00}(\mathbb{Z}_+) \odot \mathcal{C}$ με τον αριστερό πολλαπλασιασμό

$$(\delta_n \otimes c) *_l (\delta_m \otimes y) = \delta_{n+m} \otimes a^m(c)y,$$

και συμβολίζουμε με $\ell^1(\mathcal{C}, \alpha, \mathbb{Z}_+)_l$ την άλγεβρα Banach που προκύπτει από την πλήρωση ως προς τη νόρμα

$$\left\| \sum_{n=0}^{k} \delta_n \otimes c_n \right\|_1 = \sum_{n=0}^{k} \|c_n\|_{\mathcal{C}}.$$

Προκειμένου να ορίσουμε δομή άλγεβρας τελεστών στην άλγεβρα Banach $\ell^1(\mathcal{C}, \alpha, \mathbb{Z}_+)_l$ χρησιμοποιούμε την οικογένεια των αναπαραστάσεών της σε χώρο Hilbert που είναι συστολές ως προς τη νόρμα $|\cdot|_1$. Έστω $\mathcal{F}$ σύνολο $|\cdot|_1$-συστολών $\rho : \ell^1(\mathcal{C}, \alpha, \mathbb{Z}_+)_l \to \mathcal{B}(H)$ σε χώρο Hilbert $H$. Για κάθε $\nu = 1, 2, \ldots$, ορίζουμε τις ημινόρμες

$$\omega_\nu([F_{i,j}]) = \sup\{\|[\rho(F_{i,j})]\|_{\mathcal{B}(H^\nu)} : \rho \in \mathcal{F}\},$$

για κάθε $F_{i,j} \in \ell^1(\mathcal{C}, \alpha, \mathbb{Z}_+)_r$, $1 \leq i, j \leq \nu$. Αν $\mathcal{N} = \{F \in \ell^1(\mathcal{C}, \alpha, \mathbb{Z}_+)_r : \omega_1(F) = 0\}$ τότε η ημινόρμα $\omega_1$ επάγει μια νόρμα στην άλγεβρα πηλίκο $\ell^1(\mathcal{C}, \alpha, \mathbb{Z}_+)_r/\mathcal{N}$, έτσι ώστε $\|F + \mathcal{N}\|_\infty := \omega_1(F)$. Επιπλέον για κάθε $\nu > 1$ έχουμε ότι $\ker \omega_\nu = \mathcal{M}_\nu(\mathcal{N})$, επομένως κάθε ημινόρμα $\omega_\nu$ επάγει μια νόρμα στην άλγεβρα πηλίκο $\mathcal{M}_\nu(\ell^1(\mathcal{C}, \alpha, \mathbb{Z}_+)_r)/\mathcal{M}_\nu(\mathcal{N}) = \mathcal{M}_\nu(\ell^1(\mathcal{C}, \alpha, \mathbb{Z}_+)_r/\mathcal{N})$. Η πλήρωση της $\ell^1(\mathcal{C}, \alpha, \mathbb{Z}_+)_r/\mathcal{N}$ ως προς τη νόρμα $\|\cdot\|_\infty$ εφοδιάσμένη με αυτή τη δομή γίνεται μια άλγεβρα τελεστών. Φυσικά αυτός ο ορισμός εξαρτάται κάθε φορά από το σύνολο των αναπαραστάσεων $\mathcal{F}$ που επιλέγουμε, με την έννοια ότι δύο διαφορετικά σύνολα, ενδεχομένως, να ορίζουν μη-ισόμορφες άλγεβρες τελεστών.

Παρατηρούμε ότι αν $\rho : \ell^1(\mathcal{C}, \alpha, \mathbb{Z}_+)_l \to \mathcal{B}(H)$ είναι μια $|\cdot|_1$-συστολή τότε ο περιορισμός της $(H, \rho)$ στη $C^*$-άλγεβρα $\mathcal{C}$ ορίζει μια αναπαράσταση της $\mathcal{C}$. Θέτοντας $V = \rho(\delta_1 \otimes 1_{\mathcal{C}})$, παρατηρούμε ότι $\|V\| \leq 1$, άρα η $V$ είναι συστολή. Λόγω του ορισμού του αριστερού πολλαπλασιασμού είναι εύκολο να δούμε ότι το ζεύγος $(\pi, V)$ ικανοποιεί την *αριστερά συναλλοίωτη σχέση*

$$\pi(c)V = V\pi(\alpha(c)), \; c \in \mathcal{C}.$$

Αντίστροφα, έστω $(H, \pi)$ μια αναπαράσταση της $\mathcal{C}$ και $V$ μια συστολή στον $\mathcal{B}(H)$ έτσι ώστε το ζεύγος $(\pi, V)$ να ικανοποιεί την αριστερά συναλλοίωτη σχέση. Τότε η απεικόνιση $(V \times \pi)$ που ορίζεται από τη σχέση

$$(V \times \pi)\left(\sum_{n=0}^{k} \delta_n \otimes c_n\right) := \sum_{n=0}^{k} V^n \pi(c_n),$$

είναι μια αναπαράσταση της $\ell^1(\mathcal{C}, \alpha, \mathbb{Z}_+)_l$ στον $\mathcal{B}(H)$. Τα ζεύγη $(\pi, V)$ που ικανοποιούν την αριστερά συναλλοίωτη σχέση, με $(H, \pi)$ μια αναπαράσταση της $\mathcal{C}$ και $V$ συστολή, ισομετρία, γνήσια ισομετρία, co-isometry ή ορθομοναδιαίος τελεστής, θα καλούνται *left covariant contractive, isometric, purely isometric*[2], *co-isometric* ή

[2] Μια ισομετρία $V \in \mathcal{B}(H)$ καλείται pure isometry αν έχει την ιδιότητα $\cap_{n\geq 0} V^n H = (0)$.

*unitary ζεύγη*, αντίστοιχα. Επομένως μπορούμε να ορίσουμε τα εξής ημισταυρωτά γινόμενα

- $\mathfrak{A}(\mathcal{C}, \alpha, \mathrm{contr})_l$: ως προς το σύνολο $\{(V \times \pi) : (\pi, V)$ left cov. contractive pair$\}$,
- $\mathfrak{A}(\mathcal{C}, \alpha, \mathrm{isom})_l$: ως προς το σύνολο $\{(V \times \pi) : (\pi, V)$ left cov. isometric pair$\}$,
- $\mathfrak{A}(\mathcal{C}, \alpha, \text{co-isom})_l$: ως προς το σύνολο $\{(V \times \pi) : (\pi, V)$ left cov. co-isometric pair$\}$,
- $\mathfrak{A}(\mathcal{C}, \alpha, \mathrm{un})_l$: ως προς το σύνολο $\{(V \times \pi) : (\pi, V)$ left cov. unitary pair$\}$,

όπου για κάθε αναπαράσταση $(H, \pi)$ υποθέτουμε ότι $\dim H \leq \dim H_u$, όπου με $H_u$ συμβολίζουμε το χώρο Hilbert της καθολικής αναπαράστασης της $\mathcal{C}$. Αυτή η υπόθεση μας εξασφαλίζει ότι οι παραπάνω οικογένειες είναι σύνολα.

**$\mathfrak{A}(\mathcal{C}, \alpha, \textbf{co-is})_l$, $\mathfrak{A}(\mathcal{C}, \alpha, \textbf{un})_l$:**

Ξεκινώντας τη μελέτη του ημισταυρωτού γινομένου $\mathfrak{A}(\mathcal{C}, \alpha, \text{co-is})_l$ στην ενότητα 2.2, παρατηρούμε ότι πρωτεύοντα ρόλο έχει το *ριζικό ιδεώδες* $\mathcal{R}_\alpha := \overline{\cup_n \ker \alpha^n}$ της δράσης $\alpha$. Το $\mathcal{R}_\alpha$ είναι $\alpha$-αναλλοίωτο ιδεώδες της $\mathcal{C}$ και άρα ορίζεται ο *-μορφισμός (που είναι 1-1)

$$\hat{\alpha} : \mathcal{C}/\mathcal{R}_\alpha \to \mathcal{C}/\mathcal{R}_\alpha : c + \mathcal{R}_\alpha \mapsto \hat{\alpha}(c + \mathcal{R}_\alpha) := \alpha(c) + \mathcal{R}_\alpha.$$

Επομένως μπορούμε να ορίσουμε το δυναμικό σύστημα $(\mathcal{C}/\mathcal{R}_\alpha, \dot{\alpha})$. Τότε, το ημισταυρωτό γινόμενο $\mathfrak{A}(\mathcal{C}, \alpha, \text{co-is})_l$ του δυναμικού συστήματος $(\mathcal{C}, \alpha)$ είναι πλήρως ισομετρικά ισόμορφο προς το ημισταυρωτό γινόμενο $\mathfrak{A}(\mathcal{C}/\mathcal{R}_\alpha, \dot{\alpha}, \text{co-is})_l$ του δυναμικού συστήματος $(\mathcal{C}/\mathcal{R}_\alpha, \dot{\alpha})$, καθώς

$$\ell^1(\mathcal{C}, \alpha, \mathbb{Z}_+)/\mathcal{N} \simeq \ell^1(\mathcal{C}/\mathcal{R}_\alpha, \dot{\alpha}, \mathbb{Z}_+)$$

όπου $\mathcal{N}$ είναι ο πυρήνας της ημινόρμας $\omega_1$ που ορίζεται ως προς το σύνολο $\{(V \times \pi) : (\pi, V)$ left covariant co-isometric pair$\}$. Συνεπώς, σε αυτήν την περίπτωση, μπορούμε να θεωρούμε δυναμικά συστήματα $(\mathcal{C}, \alpha)$ όπου η δράση $\alpha$ είναι 1-1. Το επόμενο βήμα είναι να περάσουμε σε ένα δυναμικό σύστημα όπου η δράση θα είναι επιπλέον επί.

Έστω $\mathcal{C}_\infty := \varinjlim(\mathcal{C}_n, \alpha_n)$, όπου $\mathcal{C}_n = \mathcal{C}$ και $\alpha_n = \alpha$ (βλ. κεφάλαιο 5.2). Ορίζουμε τον *-μορφισμό $\alpha_\infty : \mathcal{C}_\infty \to \mathcal{C}_\infty$ μέσω του διαγράμματος

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C} \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, dashed, "\alpha"'] & \mathcal{C} \arrow[r, "\alpha"] \arrow[dl, dashed, "id"'] & \mathcal{C} \arrow[r, "\alpha"] \arrow[dl, dashed, "id"'] & \dots \arrow[dl, dashed, "id"'] & : \mathcal{C}_\infty \arrow[d, dashed, "\alpha_\infty"] \\
\mathcal{C} \arrow[r, "\alpha"] & \mathcal{C} \arrow[r, "\alpha"] & \mathcal{C} \arrow[r, "\alpha"] & \dots & : \mathcal{C}_\infty
\end{tikzcd}$$

Τότε ο $\alpha_\infty$ είναι *-ισομορφισμός της $\mathcal{C}_\infty$. Συνοψίζοντας, έχουμε την κατασκευή:

$\diamond$ $\mathcal{R}_\alpha = \overline{\cup_n \ker \alpha^n}$, $\quad \dot{\alpha} : \mathcal{C}/\mathcal{R}_\alpha \to \mathcal{C}/\mathcal{R}_\alpha : c + \mathcal{R}_\alpha \mapsto \alpha(c) + \mathcal{R}_\alpha$,

$\diamond$ $(\mathcal{C}/\mathcal{R}_\alpha)_\infty = \varinjlim(\mathcal{C}/\mathcal{R}_\alpha, \dot{\alpha})$,

και η $(\dot{\alpha})_\infty$ ορίζεται από το παρακάτω διάγραμμα

$\diamond$
$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C}/\mathcal{R}_\alpha \arrow[r, "\dot{\alpha}"] \arrow[d, dashed, "\dot{\alpha}"'] & \mathcal{C}/\mathcal{R}_\alpha \arrow[r, "\dot{\alpha}"] \arrow[dl, dashed, "id"'] & \mathcal{C}/\mathcal{R}_\alpha \arrow[r, "\dot{\alpha}"] \arrow[dl, dashed, "id"'] & \dots \arrow[dl, dashed, "id"'] & : (\mathcal{C}/\mathcal{R}_\alpha)_\infty \arrow[d, dashed, "(\dot{\alpha})_\infty"] \\
\mathcal{C}/\mathcal{R}_\alpha \arrow[r, "\dot{\alpha}"] & \mathcal{C}/\mathcal{R}_\alpha \arrow[r, "\dot{\alpha}"] & \mathcal{C}/\mathcal{R}_\alpha \arrow[r, "\dot{\alpha}"] & \dots & : (\mathcal{C}/\mathcal{R}_\alpha)_\infty
\end{tikzcd}$$

και το ακόλουθο κύριο θεώρημα.

**Θεώρημα 2.2.10 (K).** *Το* C*-*envelope του ημισταυρωτού γινομένου* $\mathfrak{A}(\mathcal{C}, \alpha, \textit{co-is})_l$ *είναι το σταυρωτό γινόμενο* $(\mathcal{C}/\mathcal{R}_\alpha)_\infty \rtimes_{(\dot{\alpha})_\infty} \mathbb{Z}$. $\square$

Το αντίστοιχο αποτέλεσμα για το ημισταυρωτό γινόμενο $\mathfrak{A}(\mathcal{C}, \alpha, \mathrm{un})_l$ έπεται άμεσα από το γεγονός ότι κάθε left covariant co-isometric ζεύγος επεκτείνεται σε ένα left covariant unitary ζεύγος. Επομένως το $\mathfrak{A}(\mathcal{C}, \alpha, \mathrm{un})_l$ είναι πλήρως ισομετρικά ισόμορφο προς το $\mathfrak{A}(\mathcal{C}, \alpha, \mathrm{co\text{-}is})_l$ και άρα έχουν το ίδιο C*-envelope.

### $\mathfrak{A}(\mathcal{C}, \alpha, \mathbf{contr})_l$, $\mathfrak{A}(\mathcal{C}, \alpha, \mathbf{is})_l$:

Στην ενότητα 2.3 εξετάζουμε τα ημισταυρωτά γινόμενα $\mathfrak{A}(\mathcal{C}, \alpha, \mathrm{contr})_l$ και $\mathfrak{A}(\mathcal{C}, \alpha, \mathrm{is})_l$. Εφόσον κάθε left covariant contractive ζεύγος διαστέλλεται σε ένα left covariant isometric ζεύγος, έπεται ότι τα $\mathfrak{A}(\mathcal{C}, \alpha, \mathrm{contr})_l$ και $\mathfrak{A}(\mathcal{C}, \alpha, \mathrm{is})_l$ είναι πλήρως ισομετρικά ισόμορφα. Επιπλέον μπορούμε να κατασκευάσουμε μια αναπαράστασή τους που είναι πλήρης ισομετρία. Ξεκινώντας με μια πιστή αναπαράσταση

$(H_0, \pi)$ της $\mathcal{C}$, ορίζουμε

$$S = \begin{bmatrix} 0 & & & \\ \mathbf{1}_{\mathcal{H}_0} & 0 & & \\ & \mathbf{1}_{\mathcal{H}_0} & 0 & \\ & & & \ddots \end{bmatrix} \text{ και } \widetilde{\pi}(c) = \begin{bmatrix} \pi(c) & & & \\ & \pi(\alpha(c)) & & \\ & & \pi(\alpha^2(c)) & \\ & & & \ddots \end{bmatrix}, c \in \mathcal{C}.$$

Τότε το ζεύγος $(\widetilde{\pi}, S_{H_0})$ είναι ένα left covariant (pure) isometric ζεύγος και η αναπαράσταση $(S_{H_0} \times \widetilde{\pi})$ είναι πλήρης ισομετρία.

Πάλι το πρώτο βήμα είναι να περάσουμε σε ένα δυναμικό σύστημα όπου η δράση είναι 1-1. Έστω $\mathcal{M} \equiv \mathcal{M}(\ker \alpha)$ η $C^*$-άλγεβρα των πολλαπλασιαστών του $\ker \alpha$, και $\theta : \mathcal{C} \to \mathcal{M}$ ο μοναδικός μοναδιαίος *-μορφισμός που επεκτείνει τη φυσιολογική εμφύτευση $\ker \alpha \hookrightarrow \mathcal{M}$. Ορίζουμε τη $C^*$-άλγεβρα $\mathcal{B} = \mathcal{C} \oplus c_0(\theta(\mathcal{C}))$ και την απεικόνιση $\beta : \mathcal{B} \to \mathcal{B}$ έτσι ώστε

$$\beta(c, (x_n)) = (\alpha(c), (y_n)), \text{ όπου } y_1 = \theta(c), \ y_n = x_{n-1} \text{ για } n \geq 2,$$

για κάθε $c \in \mathcal{C}$, $(x_n) \in c_0(\theta(\mathcal{C}))$. Τότε η $\beta$ είναι ένας μοναδιαίος *-μονομορφισμός. Στο δεύτερο βήμα δημιουργούμε το δυναμικό σύστημα $(\mathcal{B}_\infty, \beta_\infty)$ όπως στην προηγούμενη ενότητα και εξετάζουμε τη σχέση που έχει το C*-envelope του $\mathfrak{A}(\mathcal{C}, \alpha, \mathrm{is})_l$ με το σταυρωτό γινόμενο $\mathcal{B}_\infty \rtimes_{\beta_\infty} \mathbb{Z}$. Το δυναμικό σύστημα $(\mathcal{B}, \beta)$ δεν επεκτείνει το αρχικό $(\mathcal{C}, \alpha)$, αλλά η $\beta$ είναι μια διαστολή της $\alpha$ και δεν αναμένουμε ισομορφία των δύο εν λόγω C*-αλγεβρών. Παρόλα αυτά έχουμε το εξής κύριο θεώρημα. Υπενθυμίζουμε ότι αν $p$ είναι μια προβολή στην άλγεβρα πολλαπλασιαστών μιας $C^*$-άλγεβρας $\mathfrak{C}$, τότε η $p\mathfrak{C}p$ είναι μια $C^*$-υπάλγεβρα της $\mathfrak{C}$, η οποία καλείται *corner* της $\mathfrak{C}$. Το corner καλείται *full* αν η γραμμική θήκη του συνόλου $\mathfrak{C}p\mathfrak{C}$ είναι πυκνός υπόχωρος της $\mathfrak{C}$. Ισοδύναμα, αν η $p\mathfrak{C}p$ δεν περιέχεται σε κανένα γνήσιο κλειστό ιδεώδες της $\mathfrak{C}$.

**Θεώρημα 2.3.21 (K, Κατσούλης).** *Το* C**-envelope του ημισταυρωτού γινομένου* $\mathfrak{A}(\mathcal{C}, \alpha, is)_l$ *είναι full corner του σταυρωτού γινόμενου* $\mathcal{B}_\infty \rtimes_{\beta_\infty} \mathbb{Z}$. □

Δηλαδή, το $\mathrm{C}_e^*(\mathfrak{A}(\mathcal{C}, \alpha, \mathrm{is})_l)$ είναι *Morita ισοδύναμο* (βλ. [**6**, Definition II.7.6.1]) με το σταυρωτό γινόμενο $\mathcal{B}_\infty \rtimes_{\beta_\infty} \mathbb{Z}$. Επίσης, η προβολή που προκύπτει στο παραπάνω θεώρημα εξαρτάται μόνο από το γεγονός ότι η $\alpha$ δεν είναι εν γένει 1-1, με την έννοια ότι όταν η δράση είναι 1-1 το $\mathrm{C}_e^*(\mathfrak{A}(\mathcal{C}, \alpha, \mathrm{is})_l)$ είναι ακριβώς το σταυρωτό γινόμενο $\mathcal{C}_\infty \rtimes_{\alpha_\infty} \mathbb{Z}$. Τέλος αξίζει να αναφέρουμε ότι δεν μπορούμε να αποφύγουμε τη διαστολή $(\mathcal{B}, \beta)$ που κατασκευάσαμε και στην θέση της να βρούμε ένα κατάλληλο δυναμικό σύστημα $(\Gamma, \gamma)$ όπου η $\gamma$ είναι μια 1-1 δράση που επεκτείνει την $\alpha$. Πράγματι σε αυτήν την περίπτωση θα είχαμε ότι $(0) \neq \ker \alpha \subseteq \ker \gamma = (0)$.

## Ημισταυρωτά Γινόμενα μη-αυτοσυζυγών αλγεβρών τελεστών

Στο κεφάλαιο 3 εξετάζουμε ημισταυρωτά γινόμενα που παράγονται από δυναμικά συστήματα $(\mathcal{A}, \alpha)$, όπου $\alpha : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ είναι αυτομορφισμός (που είναι επιπλέον πλήρης συστολή) μιας εν γένει μη-αυτοσυζυγούς άλγεβρας τελεστών $\mathcal{A}$. Μια επιπλέον συνθήκη κανονικοποίησης που υποθέτουμε είναι η δράση $\alpha$ να διατηρεί το Šilov ιδεώδες, ισοδύναμα να επεκτείνεται σε *-αυτομορφισμό του $\mathrm{C}^*_e(\mathcal{A})$. Τα αποτελέσματα αυτού του κεφαλαίου περιλαμβάνονται στο **[22]**.

Ξεκινώντας με την άλγεβρα Banach $\ell^1(\mathcal{A}, \alpha, \mathbb{Z}_+)$ και μελετώντας τις $|\cdot|_1$-αναπαραστάσεις της μπορούμε να κατασκευάσουμε τις άλγεβρες τελεστών $\mathfrak{A}(\mathcal{A}, \alpha, \mathrm{contr})_l$ και $\mathfrak{A}(\mathcal{A}, \alpha, \mathrm{is})_l$, όπως στο κεφάλαιο 2. Το πρώτο αποτέλεσμα που έχουμε είναι το εξής.

**Θεώρημα 3.2.4 (K, Κατσούλης).** *Έστω $\mathcal{A}$ άλγεβρα τελεστών και $\alpha$ αυτομορφισμός της $\mathcal{A}$ που επεκτείνεται σε *-αυτομορφισμό του $\mathrm{C}^*_e(\mathcal{A})$. Τότε $\mathrm{C}^*_e(\mathfrak{A}(A, \alpha, is)_l) \simeq \mathrm{C}^*_e(\mathcal{A}) \rtimes_\alpha \mathbb{Z}$.* $\square$

Στην περίπτωση που η $\mathcal{A}$ είναι C*-άλγεβρα είδαμε ότι τα ημισταυρωτά γινόμενα $\mathfrak{A}(\mathcal{A}, \alpha, \mathrm{contr})_l$ και $\mathfrak{A}(\mathcal{A}, \alpha, \mathrm{is})_l$ είναι πλήρως ισομετρικά ισόμορφα. Ευτυχώς (!) κάτι τέτοιο δεν είναι αληθές στην περίπτωση που η $\mathcal{A}$ είναι μη-αυτοσυζυγής, όπως προκύπτει από το επόμενο αντιπαράδειγμα.

**Αντιπαράδειγμα.** Θεωρούμε την άλγεβρα $A(\mathbb{D}^2)$ η οποία εμφυτεύεται πλήρως ισομετρικά στη $\mathrm{C}(\mathbb{T}^2)$. Από το Θεώρημα του Ando (βλ. θεώρημα 1.1.19) έπεται ότι $\mathrm{C}^*_e(A(\mathbb{D}^2)) = \mathrm{C}(\mathbb{T}^2)$. Επίσης έπεται ότι οι αναπαραστάσεις της $A(\mathbb{D}^2)$ καθορίζονται πλήρως από ζεύγη συστολών $T_1, T_2$ που μετατίθενται μεταξύ τους. Κάθε covariant αναπαράσταση της $(A(\mathbb{D}^2), \mathrm{id})$ δίνεται από ένα τέτοιο ζεύγος και μια τρίτη συστολή $T_3$ που μετατίθεται με τις $T_1$ και $T_2$. Αν οι $\mathfrak{A}(\mathcal{A}, \alpha, \mathrm{contr})_l$ και $\mathfrak{A}(\mathcal{A}, \alpha, \mathrm{is})_l$ ήταν πλήρως ισομετρικά ισόμορφες, τότε θα είχαν το ίδιο C*-envelope. Όμως το $\mathrm{C}^*_e(\mathfrak{A}(\mathcal{A}, \alpha, \mathrm{is})_l)$ αποδείξαμε ότι είναι το σταυρωτό γινόμενο $\mathrm{C}(\mathbb{T}^2) \times_{\mathrm{id}} \mathbb{Z} \simeq \mathrm{C}(\mathbb{T}^3)$. Θα είχαμε τότε ότι κάθε τριάδα μετατιθέμενων συστολών ικανοποιεί την ανισότητα von Neumann. Ο Βαρόπουλος στο **[46]** έχει δώσει αντιπαράδειγμα που καταρρίπτει αυτόν τον ισχυρισμό.

Επομένως, η ταυτοποίηση του $\mathrm{C}^*_e(\mathfrak{A}(\mathcal{A},\alpha,\mathrm{contr})_l)$ εξαρτάται από το εκάστοτε ζεύγος $(\mathcal{A},\alpha)$ που έχουμε. Στο **[22]** προχωρήσαμε στην μελέτη του συγκεκριμένου ζεύγους $(\mathcal{T}_X^+,\alpha)$, όπου $\mathcal{T}_X^+$ είναι η tensor άλγεβρα μιας C*-αντιστοιχίας και η δράση $\alpha$ είναι ταυτοτική πάνω στη διαγώνιο της Toeplitz-Cuntz-Pimsner άλγεβρας $\mathcal{T}_X^+$. Οι tensor άλγεβρες C*-αντιστοιχιών βρίσκονται στο κέντρο της έρευνας των αλγεβρών τελεστών τις τελευταίες δύο δεκαετίες και αποτελούν έναν ενιαίο τρόπο κωδικοποίησης αρκετών κατασκευών. Ένα τέτοιο παράδειγμα είναι η $\mathfrak{A}(C,\alpha,\mathrm{is})_l$ (δες παράρτημα για περισσότερες πληροφορίες). Στη παρούσα διατριβή επιλέξαμε να δείξουμε το αποτέλεσμα που υπάρχει στο **[22]** για μια ιδιαίτερη κατηγορία tensor αλγεβρών, της οποίας δίνουμε τον ορισμό ακολούθως (βλ. ενότητα 1.1.5).

Έστω $G$ αριθμήσιμο κατευθυνόμενο γράφημα με σύνολο κορυφών $G_0$, σύνολο ακμών $G_1$ και δύο απεικονίσεις $s,r : G_1 \to G_0$ έτσι ώστε $s(e)$ να είναι η αρχή και $r(e)$ το πέρας της ακμής $e$. Μια οικογένεια από μερικές ισομετρίες $\{S_e\}_{e\in G_1}$ και προβολές $\{P_x\}_{x\in G_0}$ λέμε ότι ικανοποιεί τις συνθήκες Cuntz-Krieger αν και μόνο αν

$$(\dagger)\begin{cases} (1) & P_xP_y = 0 & \forall\, x,y\in G_0,\ x\neq y\\ (2) & S_e^*S_f = 0 & \forall\, e,f\in G_1,\ e\neq f\\ (3) & S_e^*S_e = S_{s(e)} & \forall\, e\in G_1\\ (4) & S_eS_e^* \leq P_{r(e)} & \forall\, e\in G_1\\ (5) & \sum_{r(e)=x} S_eS_e^* = P_x & \forall\, x\in G_0 \text{ με } |r^{-1}(x)|\neq 0,\infty \end{cases}$$

Οι σχέσεις $(\dagger)$ έχουν καταλήξει στην παραπάνω μορφή στα **[5, 42]** μετά από μια σειρά άρθρων από την «Αυστραλιανή Σχολή». Όλες οι αλλαγές αφορούσαν στη συνθήκη (5) και στη μορφή που είναι τώρα, η (5) δίνει την απαραίτητη πληροφορία για τις προβολές $P_x$ έτσι ώστε η κορυφή $x$ να δέχεται πεπερασμένο πλήθος ακμών.

Αποδεικνύεται ότι υπάρχει μια καθολική C*-άλγεβρα, που συμβολίζεται με $\mathcal{O}_G$, για την οποία ισχύουν οι σχέσεις $(\dagger)$. Επίσης, υπάρχει μια καθολική C*-άλγεβρα, που συμβολίζεται με $\mathcal{T}_G$ για την οποία ισχύουν οι 4 πρώτες σχέσεις από τις $(\dagger)$. Επιπλέον, αν $\mathcal{A}_G$ είναι η κλειστή υπάλγεβρα της $\mathcal{T}_G$ που παράγεται από τις (καθολικές) προβολές $p_x$ και τις (καθολικές) ισομετρίες $s_e$, την οποία καλούμε *άλγεβρα του γραφήματος*, τότε $\mathrm{C}^*_e(\mathcal{A}_G) = \mathcal{O}_G$.

**Θεώρημα 3.3.9 (K, Κατσούλης).** *Έστω $\mathcal{A}_G$ η άλγεβρα ενός γραφήματος $G$ και $\alpha$ ένας αυτομορφισμός της $\mathcal{A}_G$ που επεκτείνεται στην $\mathcal{O}_G$, έτσι ώστε $\alpha(p_x) = p_x$ για κάθε $x \in G^0$. Τότε $\mathrm{C}^*_e(\mathfrak{A}(\mathcal{A}_G,\alpha,\mathrm{contr})_l) \simeq \mathcal{O}_G \rtimes_\alpha \mathbb{Z}$.* □

Τέλος αναφέρουμε ότι δοθέντος ενός δυναμικού συστήματος $(\mathcal{A}, \alpha)$ όπου η $\alpha$ επεκτείνεται σε $*$-αυτομορφισμό του $\mathrm{C}_e^*(\mathcal{A})$, μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα ακόμα ημισταυρωτό γινόμενο. Αυτό παράγεται από τα αναλυτικά πολυώνυμα στο σταυρωτό γινόμενο $\mathrm{C}_e^*(\mathcal{A}) \rtimes_\alpha \mathbb{Z}$ με συντελεστές μόνο από την άλγεβρα τελεστών $\mathcal{A}$, συμβολίζεται με $\mathfrak{A}(\mathcal{A}, \alpha, \mathrm{relative})_l$ και καλείται *σχετικό ημισταυρωτό γινόμενο.*

**Θεώρημα 3.1.6 (K, Κατσούλης).** *Έστω $\mathcal{A}$ άλγεβρα τελεστών και $\alpha$ αυτομορφισμός της $\mathcal{A}$ που επεκτείνεται σε $*$-αυτομορφισμό του $\mathrm{C}_e^*(\mathcal{A})$. Τότε* $\mathrm{C}_e^*(\mathfrak{A}(\mathcal{A}, \alpha, \mathrm{relative})_l) \simeq \mathrm{C}_e^*(\mathcal{A}) \times_\alpha \mathbb{Z}$. □

## w*-Ημισταυρωτά Γινόμενα

Στο κεφάλαιο 4 εξετάζουμε ημισταυρωτά γινόμενα που ορίζονται από w*-συνεχείς μορφισμούς σε w*-κλειστές άλγεβρες. Όπως αναφέραμε κάθε αριστερά συναλλοίωτο ζεύγος επάγει έναν μορφισμό μιας κατάλληλης άλγεβρας Banach σε χώρο Hilbert. Αντίστοιχα ως ημισταυρωτό γινόμενο στην w*-τοπολογία θα ορίζουμε την w*-κλειστή γραμμική θήκη της εικόνας αυτού του μορφισμού. Επομένως για κάθε αριστερά συναλλοίωτο ζεύγος ορίζουμε διαφορετικό (εν γένει) ημισταυρωτό γινόμενο. Ενδιαφερόμαστε κυρίως για την *ανακλαστική θήκη* αυτών των χώρων, ενώ σε επιμέρους περιπτώσεις αποδεικνύουμε την *ιδιότητα του δεύτερου μεταθέτη* και εντοπίζουμε το *ριζικό ιδεώδες Jacobson.*

Έστω $\mathcal{A} \subseteq B(H_0)$ μια μοναδιαία υπάλγεβρα, κλειστή ως προς τη w*-τοπολογία, και $\beta : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$, ένας w*-συνεχής ενδομορφισμός με $\|\beta\| \leq 1$. Θέτουμε $H = H_0 \otimes \ell^2(\mathbb{Z}_+)$, και ορίζουμε ως *w*-ημισταυρωτό γινόμενο* $\mathbb{Z}_+ \overline{\times}_\beta \mathcal{A}$ να είναι η w*-κλειστή γραμμική θήκη των «αναλυτικών πολυωνύμων» $\sum_{n=0}^k S^n \pi(b_n)$, $b_n \in \mathcal{A}$, $k \geq 0$, όπου

$$S = \begin{bmatrix} 0 & & & \\ \mathbf{1}_{\mathcal{H}_0} & 0 & & \\ & \mathbf{1}_{\mathcal{H}_0} & 0 & \\ & & & \ddots \end{bmatrix} \text{ και } \pi(b) = \begin{bmatrix} b & & & \\ & \beta(b) & & \\ & & \beta^2(b) & \\ & & & \ddots \end{bmatrix}, \text{ για } b \in \mathcal{A}.$$

Στην ειδική περίπτωση που η δράση επάγεται από έναν ορθομοναδιαίο τελεστή του $H_0$, δηλαδή υπάρχει $w \in \mathcal{U}(H_0)$ έτσι ώστε $\beta(b) = wbw^*$, για κάθε $b \in \mathcal{A}$, η $\mathbb{Z}_+ \overline{\times}_\beta \mathcal{A}$ είναι ορθομοναδιαία ισοδύναμη με την w*-κλειστή άλγεβρα που παράγεται από τα στοιχεία

$$W = \begin{bmatrix} 0 & & & \\ w^* & 0 & & \\ & w^* & 0 & \\ & & & \ddots \end{bmatrix} \text{ και } \rho(b) = \begin{bmatrix} b & & & \\ & b & & \\ & & b & \\ & & & \ddots \end{bmatrix} \text{ για κάθε } b \in \mathcal{A}.$$

την οποία συμβολίζουμε με $\mathbb{Z}_+ \overline{\times}_w \mathcal{A}$. Η ορθομοναδιαία ισοδυναμία μας εξασφαλίζει ότι η $\mathbb{Z}_+ \overline{\times}_\beta \mathcal{A}$ είναι ανακλαστική άλγεβρα αν και μόνο αν η $\mathbb{Z}_+ \overline{\times}_w \mathcal{A}$ είναι ανακλαστική.

Το κεντρικό θεώρημα είναι το ακόλουθο και προηγούμενα γνωστά θεωρήματα προκύπτουν ως ειδικές περιπτώσεις (βλ. εφαρμογές 4.2.13). Σημειώνουμε ότι ένας χώρος καλείται κληρονομικά ανακλαστικός αν κάθε w*-κλειστός υπόχωρός του είναι ανακλαστικός χώρος. Επίσης ένας w*-κλειστός υπόχωρος $\mathcal{S}$ του $\mathbb{Z}_+ \overline{\times}_w \mathcal{A}$ καλείται $G$-αναλλοίωτος αν οι διαγώνιοι κάθε στοιχείου $T \in \mathcal{S}$ είναι επίσης στοιχεία του $\mathcal{S}$.

**Θεώρημα 4.2.12 (K).** *Αν $\mathcal{A}$ είναι ανακλαστική άλγεβρα, τότε η $\mathbb{Z}_+ \overline{\times}_w \mathcal{A}$ είναι ανακλαστική. Αν επιπλέον η $\mathcal{A}$ είναι κληρονομικά ανακλαστική, τότε κάθε $G$-αναλλοίωτος $w^*$-κλειστός υπόχωρος του $\mathbb{Z}_+ \overline{\times}_w \mathcal{A}$ είναι ανακλαστικός.* $\square$

Όπως είπαμε η έννοια της ανακλαστικής θήκης ταυτίζεται με την ιδιότητα του δεύτερου μεταθέτη όταν ο υποκείμενος χώρος είναι αυτοσυζυγής άλγεβρα με μονάδα. Παρόλο που αυτό δεν ισχύει εν γένει στις μη-αυτοσυγείς περιπτώσεις, έχουμε το ακόλουθο.

**Θεώρημα 4.2.15 (K).** *Ο δεύτερος μεταθέτης της $\mathbb{Z}_+ \overline{\times}_w \mathcal{A}$ είναι η $\mathbb{Z}_+ \overline{\times}_w \mathcal{A}''$. Επομένως, το $w^*$-ημισταυρωτό γινόμενο ισούται με το δεύτερο μεταθέτη του αν, και μόνο αν, $\mathcal{A} = \mathcal{A}''$.* $\square$

Και στην περίπτωση του w*-ημισταυρωτού γινομένου μπορούμε να ορίσουμε την έννοια του σχετικού ημισταυρωτού γινομένου. Θεωρώντας λοιπόν ένα δυναμικό σύστημα $(M, \beta)$, όπου η $M$ είναι άλγεβρα von Neumann και η $\beta$ w*-συνεχής αυτομορφισμός της, ορίζουμε ως *σχετικό $w^*$-ημισταυρωτό γινόμενο* $\mathbb{Z}_+ \overline{\rtimes}_\beta \mathcal{M}$ την w*-κλειστή γραμμική θήκη των «αναλυτικών πολυωνύμων» στο σταυρωτό γινόμενο von Neumann $\mathcal{M} \rtimes_\beta \mathbb{Z}$.

**Θεώρημα 4.3.2 (K).** *Το σχετικό w*-ημισταυρωτό γινόμενο $\mathbb{Z}_+\overline{\rtimes}_\beta\mathcal{M}$ μιας άλγεβρας von Neumann είναι ανακλαστικός υπόχωρος. Επίσης, αν $\mathcal{A}$ είναι $\beta$-αναλλοίωτη ανακλαστική υπάλγεβρα της $\mathcal{M}$, τότε η w*-κλειστή γραμμική θήκη των «αναλυτικών πολυωνύμων» με συντελεστές από την $\mathcal{A}$ είναι ανακλαστική άλγεβρα.* □

Τέλος, μελετάμε συναλλοίωτες αναπαραστάσεις μεταθετικών, μοναδιαίων C*-αλγεβρών. Έστω δυναμικό σύστημα $(C(K),\alpha)$, όπου $K$ συμπαγής, χώρος Hausdorff και $\alpha:\mathcal{C}\to\mathcal{C}$ ο *-ενδομορφισμός, ο οποίος επάγεται από μια συνεχή απεικόνιση $\phi:K\to K$, έτσι ώστε $\alpha(f)=f\circ\phi$. Τότε για κάθε $t\in K$ ορίζεται το αριστερά συναλλοίωτο ζεύγος $(\pi_t,s)$ στον $\mathcal{B}(\ell^2(\mathbb{Z}_+))$, όπου

$$s=\begin{bmatrix} 0 & & & \\ 1 & 0 & & \\ & 1 & 0 & \\ & & & \ddots \end{bmatrix} \text{ και } \pi_t(f)=\begin{bmatrix} f(t) & & & \\ & f(\phi(t)) & & \\ & & f(\phi^2(t)) & \\ & & & \ddots \end{bmatrix}, f\in C(K).$$

Ως *w*-ημισταυρωτό γινόμενο τροχιάς του σημείου* $t\in K$, $\mathcal{C}_t$, ορίζουμε τη w*-κλειστή γραμμική θήκη των «αναλυτικών πολυωνύμων» $\sum_{n=0}^k s^n\pi_t(f_n)$, $f_n\in C(K)$, $k\in\mathbb{Z}_+$.

Όπως προκύπτει, η τροχιά του σημείου $t\in K$ παίζει πρωτεύοντα ρόλο στη μελέτη της $\mathcal{C}_t$, και για αυτό το λόγο τη συμπεριλαμβάνουμε στον ορισμό. Πράγματι, ας υποθέσουμε για αρχή ότι η τροχιά του $t\in K$ περιέχει περιοδικά σημεία και έστω $t'=\phi^{n_0}(t)$ το πρώτο σημείο της τροχιάς του $t$ που έχει περίοδο $p$, όπως στο επόμενο διάγραμμα.

$$\begin{tikzcd}
& & & \phi^{n_0-1}(t) \arrow[r, bend left] & \phi^{n_0}(t)=t' \arrow[dr] & \\
t \arrow[r, bend left] & \phi(t) \arrow[r, bend left] & \cdots \arrow[ur, bend left] & \phi^{p-1}(t') \arrow[ur] & & \phi(t') \arrow[dl] \\
& & & & \cdots \arrow[ul] &
\end{tikzcd}$$

Τότε η τροχιά του $t$ είναι το πεπερασμένο σύνολο

$$orb(t)=\{t,\dots,\phi^{n_0-1}(t),t',\dots,\phi^{p-1}(t')\},$$

και επάγει μια οικογένεια προβολών $\{P_{n_0},P_0,\dots,P_{p-1}\}$, έτσι ώστε $I=P_{n_0}\oplus P_0\oplus\cdots\oplus P_{p-1}$. Τότε, η άλγεβρα $\mathcal{C}_t$ είναι το (γραμμικό) ευθύ άθροισμα $(\mathfrak{L}P_{n_0})\oplus(\mathcal{T}P_0)\oplus$

$\cdots \oplus (\mathcal{T}P_{p-1})$, όπου $\mathfrak{L}$ η άλγεβρα των «κάτω τριγωνικών πινάκων» στον $\mathcal{B}(\ell^2(\mathbb{Z}_+))$, $\mathcal{T}$ η άλγεβρα των αναλυτικών Toeplitz τελεστών και $P_{n_0}, P_0, \ldots, P_{p-1}$ οι προβολές που επάγονται από την τροχιά του $t$.

**Θεώρημα 4.4.5 (K).** *Η άλγεβρα $\mathcal{C}_t$ είναι ανακλαστική.* $\square$

Η συγκεκριμένη γραφή της $\mathcal{C}_t$, χρησιμοποιώντας τις προβολές που επάγει η τροχιά του σημείου μας επιτρέπει να προχωρήσουμε στον υπολογισμό του ριζικού ιδεώδους Jacobson.

**Θεώρημα 4.4.10 (K).** *Το ριζικό ιδεώδες της $\mathcal{C}_t$ είναι η $w^*$-κλειστή γραμμική θήκη των «αναλυτικών πολυωνύμων» $\sum_{n=0}^{m} s^n \pi_t(f_n)$, όπου $f_0 = 0$ και $f_n(\phi^k(t)) = 0$, για κάθε $k \geq n_0$.* $\square$

Επομένως, το ριζικό ιδεώδες της $\mathcal{C}_t$ ισούται με $s\mathfrak{L}P_0$. Δηλαδή, είναι w*-κλειστός χώρος και περιέχει μόνο μηδενοδύναμα στοιχεία του ίδιου βαθμού $n_0$.

## Summary

### Chapter 1: Preliminaries

In section 1.1 we present some selected topics from [**7, 34**] concerning non-selfadjoint operator theory: the BRS theorem, Arveson's Extension theorem, Stinespring's Dilation theorem, the enveloping operator algebra of a Banach algebra (with respect to a class of representations), the example of Kaisjer-Varopoulos. In section 1.2, following [**2, 15**], we provide a detailed proof of the existence of the C*-envelope $\mathrm{C}^*_e(\mathcal{A})$ of an operator algebra $\mathcal{A}$, and we show some basic properties of the Šilov ideal. As an example, we compute the C*-envelope of a graph algebra, following the methods of [**24**]. In section 1.3 we make a brief report on the crossed products of a C*-algebra by a *-isomorphism. In the last section, we provide some basic constructions that are needed in chapter 2, concerning dynamical systems of the form $(\mathcal{C}, \alpha)$, where $\alpha$ is a *-endomorphism of a C*-algebra $\mathcal{C}$.

### Chapter 2: Semicrossed products of C*-algebras

We present four different choices for defining the semicrossed product of a unital C*-algebra $\mathcal{C}$ by a unital *-homomorphism $\alpha$ of $\mathcal{C}$. For this, we define a Banach algebra associated to the dynamical system $(\mathcal{C}, \alpha)$, and we take a supremum seminorm over a collection of its representations. Then a standard procedure gives the (non-selfadjoint) operator algebras that we examine.

Our initial point was the work of Peters (see [**36**] and [**37**]) and the objective was to find the C*-envelope of these operator algebras and to relate it to a crossed product in a canonical way. We are able to do this without making any assumptions on the dynamical system, thus generalizing previous work of other authors (for example, see [**37**]). Section 2.2 [**21**] answers a question posed by Peters in [**36**] and section 2.3 is a part of a joint work with Elias Katsoulis.

### Chapter 3: Semicrossed products of non-selfadjoint operator algebras

We consider semicrossed products of non-selfadjoint algebras. Let $\mathcal{A}$ be a unital operator algebra and let $\alpha$ be an automorphism of $\mathcal{A}$ that extends to a $*$-automorphism of its C*-envelope $\mathrm{C}^*_e(\mathcal{A})$. In this chapter we introduce the isometric semicrossed product $\mathcal{A} \times_\alpha^{is} \mathbb{Z}^+$ and we show that $\mathrm{C}^*_e(\mathcal{A} \times_\alpha^{is} \mathbb{Z}^+) \simeq \mathrm{C}^*_e(\mathcal{A}) \times_\alpha \mathbb{Z}$. In contrast with chapter 2, the C*-envelope of the familiar contractive semicrossed product $\mathcal{A} \times_\alpha \mathbb{Z}^+$ may not equal $\mathrm{C}^*_e(\mathcal{A}) \times_\alpha \mathbb{Z}$, as can be shown by using the (counter)example of Kaisjer-Varopoulos. Our main tool for calculating C*-envelopes for semicrossed products is the concept of a relative semicrossed product of an operator algebra, which we explore in the more general context of injective endomorphisms.

As an application, we extend the main result of **[13]** to tensor algebras of C*-correspondences. We show that if $\mathcal{T}_{\mathcal{X}}^+$ is the tensor algebra of a C*-correspondence $(\mathcal{X}, \mathfrak{A})$ and $\alpha$ is a $*$-extendible automorphism of $\mathcal{T}_{\mathcal{X}}^+$ that fixes the diagonal elementwise, then the contractive semicrossed product satisfies $\mathrm{C}_e^*(\mathcal{T}_{\mathcal{X}}^+ \times_\alpha \mathbb{Z}^+) \simeq \mathcal{O}_{\mathcal{X}} \times_\alpha \mathbb{Z}$, where $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$ denotes the Cuntz-Pimsner algebra of $(\mathcal{X}, \mathfrak{A})$. This is joint work with Elias Katsoulis (submitted, see **[22]**).

**Chapter 4: Semicrossed products of w*-closed algebras**

We examine the notion of a w*-closed semicrossed product and we give three possible choices. First of all given a w*-closed unital algebra $\mathcal{A}$ acting on $H_0$ and a contractive w*-continuous endomorphism $\beta$ of $\mathcal{A}$, there is a w*-closed (non-selfadjoint) unital algebra $\mathbb{Z}_+ \overline{\times}_\beta \mathcal{A}$ acting on $H_0 \otimes \ell^2(\mathbb{Z}_+)$, called the w*-semicrossed product of $\mathcal{A}$ by $\beta$. We prove that $\mathbb{Z}_+ \overline{\times}_\beta \mathcal{A}$ is a reflexive operator algebra provided $\mathcal{A}$ is reflexive and $\beta$ is unitarily implemented, and that $\mathbb{Z}_+ \overline{\times}_\beta \mathcal{A}$ has the bicommutant property if and only if $\mathcal{A}$ does. As a consequence, several known results follow as special cases. Also, we examine the relative w*-semicrossed product of a von Neumann algebra, i.e. the non-selfadjoint "part" of the von Neumann crossed product of $\mathcal{A}$ by $\mathbb{Z}$, which turns out to be reflexive in all case. Moreover, we show that the w*-semicrossed product generated by any orbit representation of a commutative C*-algebra and the unilateral shift is reflexive, and we compute its radical.

One of the main tools we use is a Féjer-type lemma. Sections 4.2 - 4.4 are from **[20]**. In Section 4.1 we make a short introduction to non-selfadjoint w*-theory giving the appropriate definitions and theorems needed.

**Appendix**

We briefly present some basic constructions in operator theory that are used in the text (such as the direct limit of Hilbert spaces, the direct limit of C*-algebras). Also we show the connection and the strong relation of our work with the theory of C*-correspondences. The appendix concludes with some proposals for further research.

# Περιεχόμενα

# Κεφάλαιο 1

# Εισαγωγικά

## 1.1 Θεωρία Χώρων Τελεστών

Θα ξεκινήσουμε παρουσιάζοντας στοιχεία του κλάδου της (μη-αυτοσυζυγούς) Θεωρίας Τελεστών. Τα παρακάτω επιλεγμένα θέματα βρίσκονται σε αρκετά βιβλία, όπως για παράδειγμα στα [**7, 34**]. Για αυτό το λόγο θα προσπαθήσουμε να είμαστε τόσο σύντομοι όσο και ακριβείς, αφήνοντας τις περισσότερες αποδείξεις στον αναγνώστη.

### 1.1.1 Χώροι Τελεστών

Έστω $\mathcal{X}$ και $\mathcal{Y}$ δύο γραμμικοί χώροι και $u : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ μια γραμμική απεικόνιση. Τότε για κάθε $\nu \geq 1$, ορίζουμε την απεικόνιση

$$1_\nu \otimes u := u_n : \mathcal{M}_\nu(\mathcal{X}) \to \mathcal{M}_\nu(\mathcal{Y}) : [x_{i,j}] \mapsto [u(x_{i,j})].$$

Με όμοιο τρόπο μπορούμε να ορίσουμε

$$u_{\nu,\kappa} : \mathcal{M}_{\nu,\kappa}(\mathcal{X}) \to \mathcal{M}_{\nu,\kappa}(\mathcal{Y}),$$

για κάθε $\nu, \kappa \geq 1$. Αν για κάθε $\nu$ οι γραμμικοί χώροι $\mathcal{M}_\nu(\mathcal{X})$ και $\mathcal{M}_\nu(\mathcal{Y})$ είναι εφοδιασμένοι με νόρμες $\|\cdot\|_\nu$, και κάθε $u_\nu$ είναι ισομετρία, τότε λέμε ότι η $u$ είναι *πλήρης ισομετρία*. Επίσης η $u$ θα καλείται *πλήρως φραγμένη* αν

$$\|u\|_{cb} := \sup\{\|[u(x_{i,j})]\|_\nu : \|[x_{i,j}]\|_\nu \leq 1, \nu \geq 1\} < \infty.$$

Αν $\|u\|_{cb} \leq 1$, τότε η $u$ καλείται *πλήρης συστολή*. Η σύνθεση πλήρως φραγμένων απεικονίσεων είναι μια πλήρως φραγμένη απεικόνιση και επίσης ισχύει ότι

$\|u \circ v\|_{cb} \leq \|u\|_{cb} \|v\|_{cb}$. Τέλος, αν η $u : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ είναι πλήρως φραγμένη 1-1 κι επί, και αν η αντίστροφη απεικόνιση είναι επίσης πλήρως φραγμένη, τότε λέμε ότι η $u$ είναι ένας *πλήρης ισομορφισμός*. Σε αυτήν την περίπτωση οι $\mathcal{X}$ και $\mathcal{Y}$ καλούνται *πλήρως ισόμορφοι.*

Ένας *χώρος τελεστών* είναι ένας κλειστός γραμμικός υπόχωρος $\mathcal{X}$ κάποιου $\mathcal{B}(H, K)$, όπου $H, K$ είναι χώροι Hilbert. Μάλιστα, αρκεί να θεωρούμε την περίπτωση $H = K$, αφού ο $\mathcal{B}(H, K)$ εμφυτεύεται (πλήρως) ισομετρικά στον $\mathcal{B}(H \oplus K)$. Όπως θα δούμε παρακάτω, κάθε χώρος τελεστών $\mathcal{X}$ καθορίζεται από τη δομή που προκύπτει από τις νόρμες $\|\cdot\|_{\nu,\kappa}$ με τις οποίες εφοδιάζεται ο $\mathcal{M}_{\nu,\kappa}(\mathcal{X})$ ως υπόχωρος του $\mathcal{M}_{\nu,\kappa}(\mathcal{B}(H, K))$, για κάθε $\nu, \kappa \geq 1$.

Ένας *αφηρημένος χώρος τελεστών* είναι ένα ζεύγος $(\mathcal{X}, \{\|\cdot\|_\nu\}_{\nu\geq 1})$, όπου ο $\mathcal{X}$ είναι ένας γραμμικός χώρος, η $\|\cdot\|_\nu$ είναι μια νόρμα στον $\mathcal{M}_\nu(\mathcal{X})$, για κάθε $\nu \geq 1$, και υπάρχει μια πλήρης ισομετρία $u : \mathcal{X} \to \mathcal{B}(H, K)$, όπου $H, K$ είναι χώροι Hilbert. Σε αυτήν την περίπτωση, λέμε ότι η ακολουθία $\{\|\cdot\|_\nu\}_{\nu\geq 1}$ ορίζει *μια δομή χώρου τελεστών στο γραμμικό χώρο* $\mathcal{X}$. *Μια δομή χώρου τελεστών* σε ένα χώρο με νόρμα $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$, θα σημαίνει μια ακολουθία από νόρμες πινάκων όπως πριν, με $\|\cdot\| = \|\cdot\|_1$.

Ένα παράδειγμα χώρων τελεστών είναι οι $C^*$-άλγεβρες. Εδώ θα εξηγήσουμε την απλότητα της δομής τους. Για αρχή υπενθυμίζουμε το παρακάτω λήμμα.

**Λήμμα 1.1.1** [**7**, Proposition A.5.8] *Έστω $\pi : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ ένας μορφισμός μεταξύ $C^*$-αλγεβρών. Τότε η $\pi$ είναι συστολή αν, και μόνο αν, η $\pi$ είναι *-μορφισμός. Επίσης η $\pi$ έχει κλειστή εικόνα. Ακόμα είναι ισομετρία αν, και μόνο αν, είναι 1-1.* □

Επίσης, αν θεωρήσουμε ότι η $\mathcal{C}$ δρα σε ένα χώρο Hilbert $H$ (το οποίο μπορούμε πάντα να το υποθέτουμε, λόγω του Θεωρήματος Gelfand-Naimark), τότε η $\mathcal{M}_\nu(\mathcal{C})$ είναι μια κλειστή *-υπάλγεβρα του $\mathcal{B}(H^{(\nu)})$. Η $\|\cdot\|_\nu$ είναι η μοναδική νόρμα που ορίζεται, έτσι ώστε η $\mathcal{M}_\nu(\mathcal{C})$ να είναι $C^*$-άλγεβρα. Επομένως, η $\mathcal{C}$ δέχεται μια «κανονική» δομή χώρου τελεστών. Η επόμενη πρόταση αναφέρεται σε αυτήν την κανονική δομή χώρου τελεστών που έχει κάθε $C^*$-άλγεβρα, και η απόδειξή της βασίζεται στο προηγούμενο λήμμα.

**Πρόταση 1.1.2** *Για ένα μορφισμό αλγεβρών $\pi : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ μεταξύ $C^*$-αλγεβρών, τα επόμενα είναι ισοδύναμα: i. η $\pi$ είναι συστολή, ii. η $\pi$ είναι πλήρης συστολή, και iii. η $\pi$ είναι *-μορφισμός. Επίσης, η $\pi$ είναι πλήρης ισομετρία αν, και μόνο αν, είναι 1-1.* □.

Επομένως, αν ο $\mathcal{X}$ είναι ένας γραμμικός υπόχωρος μιας $C^*$-άλγεβρας $\mathcal{C}$, τότε ο $\mathcal{X}$ έχει τουλάχιστον μια δομή χώρου τελεστών, αυτή που κληρονομεί από οποιαδήποτε πιστή αναπαράσταση της $\mathcal{C}$. Είναι εύκολο να δούμε ότι αυτή η δομή είναι ανεξάρτητη της επιλογής της πιστής αναπαράστασης. Πράγματι αν $\pi_i : \mathcal{C} \to \mathcal{B}(H_i)$, $i = 1, 2$, είναι πιστές αναπαραστάσεις έχουμε ότι η $\pi_1(\mathcal{C})$ είναι $^*$-ισόμορφη με την $\pi_2(\mathcal{C})$. Όμως στο επίπεδο των $C^*$-αλγεβρών κάθε $^*$-ισομορφισμός είναι πλήρως ισομετρικός ισομορφισμός, και άρα ο $\pi_1(\mathcal{X})$ είναι πλήρως ισομετρικά ισόμορφος με τον $\pi_2(\mathcal{X})$.

**Σχόλιο 1.1.3** Έστω, τώρα, ότι ο $\mathcal{X}$ είναι ένας υπόχωρος μιας $C^*$-άλγεβρας, ή γενικότερα ένος $\mathcal{B}(H, K)$. Τότε για $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathcal{X}$ ορίζουμε τις *νόρμες γραμμής και στήλης* να είναι

$$\left\| \begin{bmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{bmatrix} \right\|_{R_n(\mathcal{X})} = \left\| \sum_{k=1}^{n} x_k x_k^* \right\|^{\frac{1}{2}}, \quad \left\| \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \right\|_{C_n(\mathcal{X})} = \left\| \sum_{k=1}^{n} x_k^* x_k \right\|^{\frac{1}{2}}.$$

### Τα αξιώματα του Ruan

Αν $H, K$ είναι χώροι Hilbert και ο $\mathcal{X}$ είναι ένας υπόχωρος του $\mathcal{B}(H, K)$, τότε οι νόρμες $\|\cdot\|_{\nu,\kappa}$ έχουν κάποιες καλές ιδιότητες. Για παράδειγμα, η προσθήκη ή η διαγραφή μηδενικών γραμμών ή στηλών δεν επηρεάζει τη νόρμα ενός πίνακα τελεστών. Επομένως, αρκεί να καθορίζουμε τις νόρμες για $\nu = \kappa$. Επίσης, η εναλλαγή γραμμών ή στηλών δεν επηρεάζει τη νόρμα, και άρα οι κανονικοί γραμμικοί ισομορφισμοί (που προκύπτουν από κατάλληλη εναλλαγή γραμμών και στηλών[1])

$$\mathcal{M}_\nu(\mathcal{M}_k(\mathcal{X})) \simeq \mathcal{M}_\kappa(\mathcal{M}_\nu(\mathcal{X})) \simeq \mathcal{M}_{\kappa\nu}(\mathcal{X})$$

είναι ισομετρικοί. Εφόσον $\mathcal{M}_\lambda(\mathcal{M}_\nu(\mathcal{M}_m(\mathcal{X}))) \simeq \mathcal{M}_{\lambda\nu\kappa}(\mathcal{X})$, προκύπτει ότι οι παραπάνω χώροι είναι και πλήρως ισομετρικοί. Άρα, αν ο $\mathcal{X}$ είναι εφοδιασμένος με μια δομή χώρου τελεστών, τότε στον $\mathcal{M}_\nu(\mathcal{X})$ επάγεται μια δομή χώρου τελεστών. Επιπλέον, για κάθε χώρο τελεστών $\mathcal{X}$ έχουμε ότι

$(R_1)$ $\quad \|\alpha x \beta\|_\nu \leq \|\alpha\| \, \|x\|_\nu \, \|\beta\|$, για κάθε $\nu \geq 1, \alpha, \beta \in \mathcal{M}_\nu, x \in \mathcal{M}_\nu(\mathcal{X})$,

$(R_2)$ $\quad$ για κάθε $x \in \mathcal{M}_m(\mathcal{X}), y \in \mathcal{M}_\nu(\mathcal{X})$,

$$\left\| \begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{bmatrix} \right\|_{m+\nu} = \max\{\|x\|_m, \|y\|_\nu\}.$$

[1] Στο **[34]** αναφέρεται με τον όρο canonical shuffle.

Οι συνθήκες $(R_1)$ και $(R_2)$ καλούνται *τα αξιώματα του Ruan*. Το *Θεώρημα του Ruan* επάγει ότι αυτά τα αξιώματα αρκούν για να δώσουν δομή χώρου τελεστών σε ένα γραμμικό χώρο και χρησιμοποιείται για να δείξουμε πώς ορισμένες αφηρημένες κατασκευές χώρων τελεστών επάγουν επίσης χώρους τελεστών.

**Θεώρημα 1.1.4** (Ruan) *Έστω $\mathcal{X}$ ένας γραμμικός χώρος και για κάθε $\nu \geq 1$ μια νόρμα $\|\cdot\|_\nu$ στον $\mathcal{M}_\nu(\mathcal{X})$. Τότε ο $\mathcal{X}$ είναι πλήρως ισομετρικά ισόμορφος με έναν γραμμικό υπόχωρο του $\mathcal{B}(H)$, για κάποιον χώρο Hilbert $H$ αν, και μόνο αν, ισχύουν τα αξιώματα $(R_1)$ και $(R_2)$.* $\square$

Επομένως κάθε χώρος τελεστών $\mathcal{X}$ ταυτίζεται με κάποιον υπόχωρο ενός $\mathcal{B}(H)$. Θα λέμε ότι ο $\mathcal{X}$ είναι *χώρος τελεστών με μονάδα* αν μπορούμε να επιλέξουμε κατάλληλο $H$ έτσι ώστε $I_H \in \mathcal{X}$.

**Παράδειγμα 1.1.5** Έστω $\mathcal{Y} \subseteq \mathcal{X}$ ένας κλειστός γραμμικός υπόχωρος του χώρου τελεστών $\mathcal{X}$. Τότε από το Θεώρημα του Ruan ο $\mathcal{X}/\mathcal{Y}$ είναι ένας χώρος τελεστών, όπως προκύπτει από την ταύτιση $\mathcal{M}_\nu(\mathcal{X}/\mathcal{Y}) \simeq \mathcal{M}_n(\mathcal{X})/\mathcal{M}_\nu(\mathcal{Y})$. Δηλαδή, οι νόρμες πινάκων είναι οι

$$\|[x_{i,j} + \mathcal{Y}]\|_\nu = \inf\{[x_{i,j} + y_{i,j}] : y_{i,j} \in \mathcal{Y}\}.$$

Αν, λοιπόν, η $u : \mathcal{X} \to \mathcal{Z}$ είναι πλήρως φραγμένη και αν ο $\mathcal{Y}$ είναι ένας κλειστός υπόχωρος του $\ker u$, τότε η κανονική απεικόνιση $\widetilde{u} : \mathcal{X}/\mathcal{Y} \to \mathcal{Z}$ είναι επίσης πλήρως φραγμένη με $\|\widetilde{u}\|_{cb} = \|u\|_{cb}$. Στην ειδική περίπτωση όπου $\mathcal{Y} = \ker u$ έχουμε ότι η $u$ απεικονίζει την ανοικτή μοναδιαία μπάλα του $\mathcal{X}$ στην ανοικτή μοναδιαία μπάλα του $\mathcal{Z}$ αν, και μόνο αν, η $\widetilde{u}$ είναι πλήρως ισομετρική.

Επομένως, αν $\{\rho_\nu\}_\nu$ είναι μια οικογένεια ημινορμών στους $\mathcal{M}_\nu(\mathcal{X})$ που ικανοποιούν τα αξιώματα του Ruan, και θέσουμε $\mathcal{N} = \{x \in \mathcal{X} : \rho_1(x) = 0\}$, τότε ο πυρήνας κάθε $\rho_\nu$ είναι ο $\mathcal{M}_\nu(\mathcal{N})$. Πράγματι, αν $\rho_\nu([x_{i,j}]) = 0$, τότε $\rho_1(x_{i,j}) = \rho_1(E_{i,i}[x_{i,j}]E_{j,j}) \leq \rho_\nu([x_{i,j}]) = 0$, από το αξίωμα $(R_1)$. Άρα η οικογένεια $\{\rho_\nu\}_\nu$ επάγει μια δομή χώρου τελεστών στον $\mathcal{X}/\mathcal{N}$ κατά φυσιολογικό τρόπο.

Ένα παράδειγμα της παραπάνω κατασκευής προκύπτει όταν χρησιμοποιούμε οικογένειες απεικονίσεων ενός γραμμικού χώρου $\mathcal{X}$. Έστω, λοιπόν, $\mathcal{F} = \{T_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ μια τέτοια οικογένεια, όπου $T_\lambda : \mathcal{X} \to \mathcal{Z}_\lambda$, $\lambda \in \Lambda$. Υποθέτουμε ότι $\sup_\lambda \|T_\lambda(x)\| < \infty$ για κάθε $x \in \mathcal{X}$ και ορίζουμε τις ημινόρμες

$$[x_{i,j}] \mapsto \sup_\lambda \|[T_\lambda(x_{i,j})]\|_\nu .$$

Τότε $\mathcal{N} = \cap_\lambda \ker T_\lambda$. Παρατηρούμε ότι κάθε $T_\lambda$ είναι πλήρως φραγμένος ως προς αυτή τη δομή.

### 1.1.2 Συστήματα Τελεστών

Ένα *σύστημα τελεστών* είναι ένας υπόχωρος $\mathcal{S}$ μιας $C^*$-άλγεβρας $\mathcal{C}$, με $1_{\mathcal{C}} \in \mathcal{S}$, που είναι επιπλέον *αυτοσυζυγής*, δηλαδή $x^* \in \mathcal{S}$ αν, και μόνο αν, $x \in \mathcal{S}$. Κάθε σύστημα τελεστών, επομένως, είναι εφοδιασμένο με την ενέλιξη και τη συνήθη διάταξη των τελεστών. Συμβολικά έχουμε

$$\mathcal{S}_{sa} = \{x \in S : s^* = s\}, \quad \mathcal{S}_+ = \{x \in S : x \geq 0\}.$$

Είναι εύκολο να δούμε ότι κάθε $x \in \mathcal{S}$ γράφεται ως $h_1 + ih_2$, για $h_1, h_2 \in \mathcal{S}_{sa}$. Επιπλέον, κάθε $h \in \mathcal{S}_{sa}$ γράφεται ως το ημιάθροισμα των θετικών στοιχείων $\|h\| 1 + h$ και $\|h\| 1 - h$ στον $\mathcal{S}$.

Μια απεικόνιση $\phi : \mathcal{S} \to \mathcal{S}'$ μεταξύ δύο συστημάτων τελεστών καλείται *θετική* αν $\phi(\mathcal{S}_+) \subseteq \mathcal{S}'_+$. Σε αυτήν την πείπτωση η $\phi$ διατηρεί την ενέλιξη, δηλαδή $\phi(x^*) = \phi(x)^*$. Εφόσον, το $\mathcal{S}$ είναι ένας υπόχωρος μιας $C^*$-άλγεβρας κληρονομεί μια δομή χώρου τελεστών. Η $\phi$ θα καλείται *πλήρως θετική* απεικόνιση αν κάθε $\phi_\nu : \mathcal{M}_\nu(\mathcal{S}) \to \mathcal{M}_\nu(\mathcal{S}')$ είναι θετική. Εφόσον $\mathcal{S}_{sa} = \mathcal{S}_+ - \mathcal{S}_+$, μπορούμε να δείξουμε ότι

> μια μοναδιαία γραμμική απεικόνιση $\phi : \mathcal{S} \to \mathcal{S}'$ είναι πλήρως θετική, αν και μόνο αν, είναι πλήρης συστολή.

Ένα παράδειγμα πλήρως θετικής απεικόνισης ενός συστήματος τελεστών είναι οποιοσδήποτε *-μορφισμός $\pi$ μιας $C^*$-άλγεβρας $\mathcal{C}$. Προφανώς, για τους *-μορφισμούς ισχύει ότι $\pi(c)^*\pi(c) = \pi(c^*c)$, για κάθε $c \in \mathcal{C}$. Γενικά όμως, για τις πλήρως θετικές απεικονίσεις ισχύει κάτι λιγότερο.

**Θεώρημα 1.1.6** (Ανισότητα Schwarz) *Έστω $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ δύο $C^*$-άλγεβρες και $\phi : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ μια μοναδιαία απεικόνιση, ώστε η $\phi_2$ να είναι θετική. Τότε $\phi(c)^*\phi(c) \leq \phi(c^*c)$, για κάθε $c \in \mathcal{C}$.*

*Απόδειξη.* Παρατηρούμε ότι $0 \leq \begin{bmatrix} 1 & c \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^* \begin{bmatrix} 1 & c \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & c \\ c^* & c^*c \end{bmatrix}$. Συνεπώς, $\begin{bmatrix} 1 & \phi(c) \\ \phi(c)^* & \phi(c^*c) \end{bmatrix} \geq 0$, από το οποίο προκύπτει η ανισότητα. □

**Παράδειγμα 1.1.7** Έστω $\mathcal{M}_2$ η άλγεβρα των $2 \times 2$ πινάκων και $\{E_{ij}\}_{i,j=1}^2$, το σύνηθες σύστημα των matrix units, όπου σε κάθε πίνακας $E_{ij}$ το $(i,j)$-στοιχείο είναι 1 και τα υπόλοιπα 0. Θεωρούμε την απεικόνιση $\phi : \mathcal{M}_2 \to \mathcal{M}_2$ που αναστρέφει τους πίνακες. Τότε η $\phi$ είναι θετική (και μάλιστα ισομετρία). Θα δείξουμε ότι δεν είναι πλήρως θετική. Έστω, λοιπόν, ο πίνακας

$$0 \leq A = \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} \\ E_{21} & E_{22} \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathcal{M}_2).$$

Όμως, ο πίνακας

$$T = \phi_2(A) = \phi_2\left(\begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} \\ E_{21} & E_{22} \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \phi(E_{11}) & \phi(E_{12}) \\ \phi(E_{21}) & \phi(E_{22}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

δεν είναι θετικός. Πράγματι είναι εύκολο να δούμε ότι

$$\langle T(0,1,-1,0),(0,1,-1,0)\rangle = \langle (0,-1,1,0),(0,1,-1,0)\rangle = -2 < 0.$$

Επίσης, παρατηρούμε ότι $\|T\| = 1$, ενώ $\|\phi_2(T)\| = \|A\| = 2$, και άρα $\|\phi_2\| \geq 2$. Επομένως, η $\phi_2$ δεν είναι ισομετρία, και άρα η $\phi$ δεν είναι πλήρης ισομετρία.

Το επόμενο θεώρημα μας δίνει μια εικόνα για το «πόσο απέχει» μια πλήρως θετική απεικόνιση μιας $C^*$-άλγεβρας από το να είναι *-μορφισμός.

**Θεώρημα 1.1.8** (Choi) *Έστω $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ μοναδιαίες $C^*$-άλγεβρες και $\phi : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ μια πλήρως θετική μοναδιαία απεικόνιση. Τότε*
i. *το σύνολο $\{c \in \mathcal{C} : \phi(c)^*\phi(c) = \phi(c^*c)\} = \{c \in \mathcal{C} : \phi(b)\phi(c) = \phi(bc), \forall\, b \in \mathcal{C}\}$ είναι μια υπάλγεβρα της $\mathcal{C}$ και ο περιορισμός της $\phi$ σε αυτήν είναι μορφισμός.*
ii. *το σύνολο $\{c \in \mathcal{C} : \phi(c)\phi(c)^* = \phi(cc^*)\} = \{c \in \mathcal{C} : \phi(c)\phi(b) = \phi(cb), \forall\, b \in \mathcal{C}\}$ είναι μια υπάλγεβρα της $\mathcal{C}$ και ο περιορισμός της $\phi$ σε αυτήν είναι μορφισμός.*
iii. *το σύνολο $\{c \in \mathcal{C} : \phi(c)^*\phi(c) = \phi(c^*c)$ και $\phi(c)\phi(c)^* = \phi(c^*c)\} = \{c \in \mathcal{C} : \phi(b)\phi(c) = \phi(bc)$ και $\phi(c)\phi(b) = \phi(cb), \forall\, b \in \mathcal{C}\}$ είναι μια $C^*$-υπάλγεβρα της $\mathcal{C}$ και ο περιορισμός της $\phi$ σε αυτήν είναι *-μορφισμός.* □

Η $C^*$-υπάλγεβρα της $\mathcal{C}$ που ορίζεται στο (iii) του προηγούμενου θεωρήματος ονομάζεται *πολλαπλασιαστικό πεδίο της $\phi$*.

### 1.1.3 Θεωρήματα Επέκτασης και Διαστολής

Έστω $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{Z}$ υπόχωροι μιας $C^*$-άλγεβρας $\mathcal{C}$ και η απεικόνιση $\phi : \mathcal{X} \to \mathcal{B}(H)$. Αν υπάρχει $\widetilde{\phi} : \mathcal{Z} \to \mathcal{B}(H)$ έτσι ώστε $\widetilde{\phi}|_{\mathcal{X}} = \phi$, τότε θα λέμε ότι η $\phi$ *επεκτείνεται* *στην* $\widetilde{\phi}$. Επίσης, αν υπάρχει $\psi : \mathcal{X} \to \mathcal{B}(K)$, όπου $K$ είναι ένας χώρος Hilbert που περιέχει ως υπόχωρο τον $H$, έτσι ώστε $P|_H\psi(\cdot)|_H = \phi$, τότε θα λέμε ότι η $\phi$ *διαστέλλεται στην* $\psi$ ή ότι η $\psi$ *είναι διαστολή της* $\phi$. Συμβολικά, θα γράφουμε $\phi \leq \psi$.

**Σχόλια 1.1.9** Παρατηρούμε ότι η σχέση «$\leq$» είναι μεταβατική και συμμετρική. Άρα η «$\leq$» ορίζει μερική διάταξη μεταξύ των απεικονίσεων του $\mathcal{X}$. Προφανώς υπάρχει ένας τετριμμένος τρόπος να κατασκευάζουμε διαστολές για κάθε απεικόνιση $\phi$ παίρνοντας ευθύ άθροισμα της $\phi$ με μια οποιαδήποτε απεικόνιση του $\mathcal{X}$. Επίσης, αν η $\phi$ είναι (πλήρης) ισομετρία και έχει μια διαστολή $\psi$, η οποία είναι (πλήρης) συστολή τότε η $\psi$ είναι (πλήρης) ισομετρία.

Θα δείξουμε ότι για κάθε μοναδιαία πλήρη συστολή, μπορούμε πάντα να βρούμε μια «καλή» διαστολή. Αυτό επιτυγχάνεται με μια σειρά θεωρημάτων.

**Θεώρημα 1.1.10** *Έστω $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ $C^*$-άλγεβρες με μονάδα και $\mathcal{X}$ ένας υπόχωρος της $\mathcal{C}$, με $1_{\mathcal{C}} \in \mathcal{X}$. Αν η $\phi : \mathcal{X} \to \mathcal{D}$ είναι μοναδιαία και πλήρης συστολή, τότε, για το σύστημα τελεστών $\mathcal{S} = \mathcal{X} + \mathcal{X}^*$, η απεικόνιση $\widetilde{\phi} : \mathcal{X} + \mathcal{X}^* \to \mathcal{D}$ με $\widetilde{\phi}(x + y^*) := \phi(x) + \phi(y)^*$ είναι πλήρως θετική. Επιπλέον, είναι η μοναδική θετική επέκταση της $\phi$ στον $\mathcal{X} + \mathcal{X}^*$.* $\square$

**Θεώρημα 1.1.11** (Θεώρημα Επέκτασης του Arveson). *Έστω $\mathcal{C}$ μια $C^*$-άλγεβρα με μονάδα, $\mathcal{S}$ ένα σύστημα τελεστών στην $\mathcal{C}$ και $\phi : \mathcal{S} \to \mathcal{B}(H)$ μια πλήρως θετική απεικόνιση. Τότε υπάρχει μια πλήρως θετική απεικόνιση $\psi : \mathcal{C} \to \mathcal{B}(H)$ που την επεκτείνει.* $\square$

Το παραπάνω θεώρημα δεν υπονοεί ότι η $\psi$ είναι μοναδική ή ότι θα είναι *-μορφισμός της $\mathcal{C}$. Παρόλα αυτά κάθε τέτοια $\psi$ διαστέλλεται σε *-μορφισμό.

**Θεώρημα 1.1.12** (Θεώρημα Διαστολής του Stinespring). *Έστω $\mathcal{C}$ μια μοναδιαία $C^*$-άλγεβρα και έστω $\phi : \mathcal{C} \to \mathcal{B}(H)$ μια πλήρως θετική απεικόνιση. Τότε υπάρχει ένας χώρος Hilbert $K$, ένας μοναδιαίος *-μορφισμός $\pi : \mathcal{C} \to \mathcal{B}(K)$ και ένας φραγμένος τελεστής $V : H \to K$ με $\|\phi(1)\| = \|V\|^2$ έτσι ώστε*

$$\phi(c) = V^*\pi(c)V, \text{ για κάθε } c \in \mathcal{C}. \quad \square$$

**Σχόλια 1.1.13** Η απόδειξη του Θεωρήματος Διαστολής του Stinespring βασίζεται στην ίδια ιδέα με αυτή της κατασκευής GNS (για την ακρίβεια είναι γενίκευσή της) και στηρίζεται στην κατασκευή ενός κατάλληλου χώρου Hilbert. Επομένως, πρέπει να κατασκευασθεί ένας κατάλληλος γραμμικός χώρος εφοδιασμένος με μια ημι-διγραμμική θετικά ημιορισμένη απεικόνιση. Ξεκινώντας, λοιπόν, με το αλγεβρικό τανυστικό γινόμενο $\mathcal{C} \otimes H$, ορίζουμε την ημιδιγραμμική μορφή $\langle \cdot, \cdot \rangle$, έτσι ώστε

$$\langle c \otimes \xi, b \otimes \eta \rangle = \langle \phi(b^* c)\xi, \eta \rangle .$$

Το θετικά ημιορισμένο εξασφαλίζεται ακριβώς από το γεγονός ότι η $\phi$ είναι πλήρως θετική. Πράγματι, επειδή το εσωτερικό γινόμενο στον $H^{(\nu)}$ είναι

$$\left\langle \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_\nu \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \vdots \\ \eta_\nu \end{pmatrix} \right\rangle = \langle \xi_1, \eta_1 \rangle + \cdots + \langle \xi_\nu, \eta_\nu \rangle ,$$

έχουμε ότι

$$\left\langle \sum_{k=1}^{\nu} c_k \otimes \xi_k, \sum_{m=1}^{\nu} c_m \otimes \xi_m \right\rangle = \left\langle \phi_\nu([c_m^* c_k]) \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_\nu \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_\nu \end{pmatrix}, \right\rangle \geq 0,$$

διότι $[c_m^* c_n] \geq 0$. Μια ακόμη παρατήρηση είναι πως, αν η πλήρως θετική απεικόνιση $\phi$ είναι μοναδιαία, τότε ο $V$ είναι ισομετρία. Έτσι, ταυτίζοντας τον $H$ με την εικόνα $VH$, μπορούμε να θεωρούμε ότι ο $H$ είναι ένας κλειστός υπόχωρος του $K$ και τελικά $V^*\pi(c)V = P|_H \pi(c)|_H$. Συνεπώς η $\pi$ είναι μια διαστολή της $\phi$.

Μια τριάδα $(\pi, V, K)$ που έχει τις ιδιότητες του Θεωρήματος Διαστολής του Stinespring θα καλείται διαστολή *Stinespring της* $\phi$. Για κάθε τέτοια τριάδα θέτουμε $K_1 = [\pi(\mathcal{C})VH]$, ο οποίος είναι ανάγων υπόχωρος της $\pi(\mathcal{C})$ και άρα η $(\pi|_{K_1}, V, K_1)$ είναι επίσης μια Stinespring διαστολή της $\phi$. Από την άλλη, αν για μια τριάδα $(\pi, V, K)$ ισχύει ότι ο $K$ είναι η κλειστή γραμμική θήκη της $\pi(\mathcal{C})VH$, αυτή θα καλείται επιπλέον *ελαχιστική*. Δεν είναι δύσκολο να αποδείξουμε ότι οι ελαχιστικές διαστολές Stinespring είναι μοναδικές, ως προς τη σχέση της ορθομοναδιαίας ισοδυναμίας.

**Πρόταση 1.1.14** *Έστω $\mathcal{C}$ μια $C^*$-άλγεβρα με μονάδα, $\phi : \mathcal{C} \to \mathcal{B}(H)$ μια πλήρως θετική απεικόνιση και έστω $(\pi_i, V_i, K_i)$, $i = 1, 2$, δύο ελαχιστικές Stinespring διαστολές. Τότε υπάρχει ένας ορθομοναδιαίος $U : K_1 \to K_2$ έτσι ώστε $UV_1 = V_2$ και $U\pi_1 U^* = \pi_2$.*

*Απόδειξη.* Ορίζουμε $U\bigg(\sum_k \pi_1(c_k)V_1\xi_k\bigg) = \sum_k \pi_2(c_k)V_2\xi_k$ και επεκτείνουμε στην κλειστή γραμμική θήκη, παίρνοντας τον ορθομοναδιαίο $U$. $\square$

**Σχόλιο 1.1.15** Συνοψίζοντας τα προηγούμενα αποτελέσματα έχουμε την ακόλουθη κατασκευή:

Έστω $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{C}$ ένας χώρος τελεστών με $1_{\mathcal{C}} \in \mathcal{X}$ και $\phi : \mathcal{X} \to \mathcal{B}(H)$ μια μοναδιαία πλήρης συστολή. Τότε η $\phi$ επεκτείνεται μοναδικά σε μια μοναδιαία πλήρως θετική απεικόνιση $\widetilde{\phi}$ του συστήματος τελεστών $S = \mathcal{X} + \mathcal{X}^*$. Το Θεώρημα Επέκτασης του Arveson τότε επάγει ότι υπάρχει μια μοναδιαία πλήρως θετική απεικόνιση $\psi : C^*(S) = C^*(\mathcal{X}) \to \mathcal{B}(H)$ που επεκτείνει την $\widetilde{\phi}$. Εφαρμόζοντας το Θεώρημα Διαστολής του Stinespring στην $\psi$, παίρνουμε ένα χώρο Hilbert $K \supseteq H$ και ένα μοναδιαίο *-μορφισμό $\pi : C^*(\mathcal{X}) \to \mathcal{B}(K)$ έτσι ώστε $\psi(c) = P_H\pi(c)|_H$, για κάθε $c \in C^*(\mathcal{X})$ (μάλιστα μπορούμε πάντα να θεωρούμε ότι η $\pi$ είναι ελαχιστική, δηλαδή ότι $K = [\pi(\mathcal{C})H]$). Τότε η $\pi|_{\mathcal{X}}$ είναι μια διαστολή της $\phi$.

### Το Θεώρημα Διαστολής Sz.-Nagy

Εφαρμόζοντας το Θεώρημα Διαστολής του Stinespring, έχουμε το εξής θεώρημα.

**Θεώρημα 1.1.16** (Θεώρημα Διαστολής Sz.-Nagy). *Έστω $T \in \mathcal{B}(H)$ μια συστολή. Τότε υπάρχει ένας χώρος Hilbert $K$ που περιέχει ως υπόχωρο τον $H$ και ένας ορθομοναδιαίος $U \in \mathcal{B}(K)$ με την ιδιότητα ο $K$ να είναι ο μικρότερος κλειστός ανάγων υπόχωρος του $U$ που περιέχει τον $H$, έτσι ώστε*

$$T^n = P_H U^n|_H, \text{ για κάθε } n \geq 0.$$

*Απόδειξη.* Εφαρμόζουμε τα προηγούμενα για την υπάλγεβρα των αναλυτικών πολυωνύμων της $C(\mathbb{T})$ και την απεικόνιση $\phi(p) = p(T)$. $\square$

**Πόρισμα 1.1.17** (Ανισότητα von Neumann) *Έστω $T \in \mathcal{B}(H)$ συστολή. Τότε για κάθε πολυώνυμο $p$, ισχύει η ανισότητα*

$$\|p(T)\| \leq \sup\{|p(z)| : z \in \mathbb{T}\}.$$

*Απόδειξη.* Από το Θεώρημα Διαστολής Sz.-Nagy έχουμε για τον ορθομοναδιαίο $U$ ότι $p(T) = P|_H p(U)|_H$, για κάθε αναλυτικό πολυώνυμο $p$. Επομένως $\|p(T)\| \leq \|p(U)\|$. Εφόσον όμως ο $U$ είναι ορθομοναδιαίος, έχουμε ότι

$$\|p(U)\| = \sup\{|p(\lambda)| : \lambda \in \sigma(U)\} \leq \sup\{|p(z)| : z \in \mathbb{T}\},$$

αφού $\sigma(U) \subseteq \mathbb{T}$. $\square$

Υπάρχει, όμως, και ένας εναλλακτικός τρόπος απόδειξης του Θεωρήματος Διαστολής Sz.-Nagy, κατά τον οποίο κατασκευάζουμε τον ορθομοναδιαίο τελεστή $U$.

Έστω $T$ μια συστολή στον $H$ και $D_T = (I - T^*T)^{\frac{1}{2}}$. Τότε, $\|T\xi\|^2 + \|D_T\xi\|^2 = \langle TT^*\xi, \xi\rangle + \langle D_T^2\xi, \xi\rangle = \|\xi\|^2$. Θέτουμε $K = \ell^2 \otimes H \equiv \ell^2(H)$ και $S : K \to K$, έτσι ώστε $S(\xi_1, \xi_2, \dots) = (T\xi_1, D_T\xi_1, \xi_2, \dots)$. Τότε ο $S$ είναι ισομετρία στον $K$ και, αν ταυτίσουμε τον $H$ με τον υπόχωρο $H \oplus 0 \oplus \cdots$ του $K$, τότε $T^n = P_H V^n|_H$, για κάθε $n \geq 0$. Ο $S$ ονομάζεται *Schäffer ισομετρική διαστολή της* $T$.

Το δεύτερο βήμα είναι να κατασκευάσουμε μια *ορθομοναδιαία διαστολή μιας ισομετρίας* $S$. Αν, λοιπόν, η $S$ δρα σε ένα χώρο Hilbert $K$, ορίζουμε την προβολή $P = I_K - SS^*$. Ορίζουμε τον τελεστή $U$ στον $K \oplus K$ να είναι ο τελεστής

$$U = \begin{pmatrix} S & P \\ 0 & S^* \end{pmatrix}.$$

Τότε ο $U$ είναι ορθομοναδιαίος, και, αν ταυτίσουμε τον $K$ με τον υπόχωρο $K \oplus 0$ του $K \oplus K$, έχουμε ότι $S^n = P_K U^n|_K$, για κάθε $n \geq 0$. Επομένως, συνδυάζοντας τις προηγούμενες δύο κατασκευές, έχουμε

$$P_H U^n|_H = P_H P_K U^n P_K|_H = P_H(P_K U^n|_K)|_H = P_H S^n|_H = T^n,$$

για κάθε $n \geq 0$.

### Μετατιθέμενες Συστολές

Σε αυτήν την ενότητα παρουσιάζουμε πότε μπορούμε να διαστείλουμε ένα σύνολο από $n$ συστολές που μετατίθενται σε $n$ ορθομοναδιαίους τελεστές που μετατίθενται. Συγκεκριμένα θα δείξουμε ότι κάτι τέτοιο ισχύει για $n$ ισομετρίες ή 2 συστολές, ενώ θα δούμε γιατί ένα τέτοιο θεώρημα δεν μπορεί να ισχύει γενικά για 3 και πάνω συστολές.

**Θεώρημα 1.1.18** *Έστω $\{S_1, \dots, S_n\}$ ένα σύνολο από ισομετρίες που μετατίθενται μεταξύ τους, σε ένα χώρο Hilbert $H$. Τότε υπάρχει ένας χώρος Hilbert $K$ που περιέχει τον $H$ και ένα σύνολο από ορθομοναδιαίους τελεστές του $K$ που μετατίθενται μεταξύ τους, έτσι ώστε*

$$S_1^{m_1} \cdots S_n^{m_n} = P_H U_1^{m_1} \cdots U_n^{m_n}|_H,$$

*για κάθε σύνολο μη-αρνητικών ακεραίων $\{m_1, \dots, m_n\}$.* $\square$

**Θεώρημα 1.1.19** (Θεώρημα Διαστολής του Ando) *Έστω $T_1$ και $T_2$ δύο συστολές που μετατίθενται σε ένα χώρο Hilbert $H$. Τότε υπάρχουν ένας χώρος Hilbert $K$ που περιέχει τον $H$ ως υπόχωρο, και δύο ορθομοναδιαίοι $U_1, U_2$ που μετατίθενται στον $K$ έτσι ώστε*

$$T_1^m T_2^n = P_H U_1^m U_2^n|_H,$$

*για κάθε $m, n \geq 0$.* □

Ο συνδυασμός των προηγουμένων δύο θεωρημάτων δίνει τα εξής πορίσματα.

**Πόρισμα 1.1.20** *Έστω μια συστολή $T$ που δρα σε ένα χώρο Hilbert $H$ και $(K, U)$ η ελαχιστική ορθομοναδιαία διαστολή του. Αν ένας $V$ μετατίθεται με την $T$, τότε υπάρχει ένας τελεστής $R \in \mathcal{B}(K)$, έτσι ώστε $\|V\| = \|R\|$, $RV = VR$ και $VT^n = P_H RU^n|_H$, για κάθε $n \geq 0$.* □

**Πόρισμα 1.1.21** *Έστω $T_1, T_2$ δύο συστολές σε χώρο Hilbert $H$, με ελαχιστικές ορθομοναδιαίες διαστολές $(K_1, U_1)$ και $(K_2, U_2)$. Αν $V$ είναι ένας τελεστής έτσι ώστε $T_1 V = V T_2$, τότε υπάρχει τελεστής $R$ έτσι ώστε*

$$\begin{aligned} &i.\ U_1 R = R U_2, \quad ii.\ \|R\| = \|V\| \ \text{και} \\ &iii.\ U_1^m R = R U_2^m = P_{H_2} U_1^m R|_{H_1} = P_{H_1} R U_2^m|_{H_2}. \end{aligned}$$

*Απόδειξη.* Εφαρμόζουμε το προηγούμενο πόρισμα για τις συστολές $\hat{T} = \begin{pmatrix} T_1 & 0 \\ 0 & T_2 \end{pmatrix}$ και $\hat{V} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ V & 0 \end{pmatrix}$. □

**Πόρισμα 1.1.22** *Έστω $T_1, T_2$ δύο συστολές που μετατίθενται σε ένα χώρο Hilbert $H$ και έστω $p_{i,j}$, με $i, j = 1, \ldots m$, πολυώνυμα δύο μεταβλητών. Τότε,*

$$\|[p_{i,j}(T_1, T_2)]\|_{\mathcal{B}(H^{(m)})} \leq \sup\{\|[p_{i,j}(z_1, z_2)]\|_{\mathcal{M}_m} : |z_1| \leq 1, |z_2| \leq 1\}.$$

*Απόδειξη.* Η απόδειξη γίνεται με τα ίδια επιχειρήματα όπως στην απόδειξη της Ανισότητας von Neumann. □

Αξίζει να αναφέρουμε εδώ ότι, ενώ μπορούμε να διαστέλλουμε απεριόριστο αριθμό μετατιθέμενων ισομετριών σε μετατιθέμενους ορθομοναδιαίους τελεστές, κάτι τέτοιο δεν ισχύει εν γένει στην περίπτωση απεριορίστου αριθμού συστολών. Αν αυτό συνέβαινε, θα μπορούσαμε να αποδείξουμε μια ανισότητα τύπου von Neumann για πολυώνυμα οσωνδήποτε μεταβλητών. Το επόμενο παράδειγμα μας δείχνει πως ακόμα και για τρεις μεταβλητές αυτό είναι λάθος!

**Παράδειγμα 1.1.23** (Kaijser-Varopoulos [**46**]) Στον $\mathbb{C}^5$, θεωρούμε τους εξής πίνακες :

$$T_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{3} & 0 \end{pmatrix},$$

$$T_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{3} & 0 \end{pmatrix},$$

$$T_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 0 \end{pmatrix}.$$

Τότε οι $T_i$ είναι συστολές και μετατίθενται μεταξύ τους. Θεωρούμε το πολυώνυμο

$$p(z_1, z_2, z_3) = z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 - 2z_1z_2 - 2z_1z_3 - 2z_2z_3,$$

για το οποίο έχουμε ότι $\|p\|_\infty = \sup\{|p(z_1, z_2, z_3)| : |z_i| \leq 1\} = 5$. Όμως,

$$p(T_1, T_2, T_3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3\sqrt{3} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

κι εφόσον $3\sqrt{3} > 5$, το ανάλογο της ανισότητας von Neumann δεν ισχύει.

### 1.1.4 Άλγεβρες Τελεστών

Μια *άλγεβρα τελεστών* $\mathcal{A}$ είναι μια υπάλγεβρα ενός $\mathcal{B}(H)$, για κάποιο χώρο Hilbert $H$. Προφανώς, η $\mathcal{A}$ είναι ένας χώρος τελεστών. Αντίστροφα, αν μια $\mathcal{A}$ είναι ταυτόχρονα ένας χώρος τελεστών και άλγεβρα, τότε θα καλείται *αφηρημένη άλγεβρα* *τελεστών* αν υπάρχει ένας χώρος Hilbert $H$ και ένας πλήρως ισομετρικός μορφισμός αλγεβρών $\rho : \mathcal{A} \to \mathcal{B}(H)$. Σε αυτήν την περίπτωση, ταυτίζουμε την $\mathcal{A}$ με την $\rho(\mathcal{A})$. Γενικότερα, αν $\mathcal{A}$ και $\mathcal{B}$ είναι δύο άλγεβρες τελεστών, θα λέμε ότι είναι *πλήρως ισομετρικά ισόμορφες* αν υπάρχει πλήρως ισομετρικός μορφισμός αλγεβρών της $\mathcal{A}$ επί της $\mathcal{B}$.

Θα λέμε ότι μια άλγεβρα τελεστών $\mathcal{A}$ είναι *μοναδιαία* αν έχει μονάδα νόρμας 1. Επίσης, θα λέμε ότι είναι *προσεγγιστικά μοναδιαία* αν υπάρχει δίκτυο $(e_t)_t$, έτσι ώστε $\lim_t ae_t = \lim_t e_t a = a$, για κάθε $a \in \mathcal{A}$, και $\|e_t\|_{\mathcal{A}} \leq 1$. Το δίκτυο $(e_t)_t$ καλείται *προσεγγιστική μονάδα* της $\mathcal{A}$.

**Σχόλιο 1.1.24** Εξ ορισμού κάθε άλγεβρα τελεστών είναι, καταρχάς, χώρος τελεστών. Αντίστροφα, αν $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{B}(H)$ είναι χώρος τελεστών, τότε ο υπόχωρος

$$\left\{ \begin{bmatrix} 0 & x \\ 0 & 0 \end{bmatrix} : x \in \mathcal{X} \right\}$$

του $\mathcal{B}(H \oplus H)$ είναι ένας χώρος τελεστών πλήρως ισομετρικά ισόμορφος προς τον $\mathcal{X}$. Επίσης, είναι και μια υπάλγεβρα του $\mathcal{B}(H \oplus H)$. Άρα κάθε χώρος τελεστών είναι πλήρως ισομετρικά (γραμμικά) ισόμορφος προς τον υποκείμενο χώρο μιας άλγεβρας τελεστών.

### Αναπαραστάσεις

Μια *αναπαράσταση* $\rho : \mathcal{A} \to \mathcal{B}(H)$ της άλγεβρας τελεστών $\mathcal{A}$ είναι κάθε μορφισμός αλγεβρών που είναι πλήρης συστολή. Παρατηρούμε ότι κάθε $C^*$-άλγεβρα είναι μια άλγεβρα τελεστών και ότι μια απεικόνιση σε ένα $\mathcal{B}(H)$ είναι αναπαράσταση της αν, και μόνο αν, είναι *-μορφισμός. Ενώ, όμως οι *-μορφισμοί $C^*$-αλγεβρών έχουν κλειστή εικόνα, δεν ισχύει εν γένει το ίδιο με τις αναπαραστάσεις αλγεβρών τελεστών.

Το επόμενο λήμμα μας εξασφαλίζει ότι, για κάθε αναπαράσταση, μπορούμε να πάρουμε κατάλληλο περιορισμό και να περάσουμε σε μια μη-εκφυλισμένη αναπαράσταση.

**Λήμμα 1.1.25** *Έστω $\mathcal{A}$ μια άλγεβρα Banach με προσεγγιστική μονάδα $(e_t)_t$ και $\rho : \mathcal{A} \to \mathcal{B}(H)$ ένας μορφισμός, που είναι επιπλέον συστολή. Θέτουμε $p$ την προβολή στον $[\rho(\mathcal{A})H]$. Τότε $\rho(e_t) \xrightarrow{w^*} p$ στον $\mathcal{B}(H)$. Επιπλέον, $\rho(a) = p\rho(a)p$ για κάθε $a \in \mathcal{A}$.* $\square$

### Το Θεώρημα BRS

Αξίζει επίσης να αναφέρουμε ότι υπάρχει το ανάλογο του Θεωρήματος του Ruan για τις άλγεβρες τελεστών, το οποίο μας επιτρέπει να εξετάζουμε αν ορισμένες αφηρημένες κατασκευές δίνουν άλγεβρες τελεστών. Τα αρχικά BRS αναφέρονται στους Blecher, Ruan και Sinclair.

**Θεώρημα 1.1.26** (Θεώρημα BRS) *Έστω $\mathcal{A}$ ένας χώρος τελεστών που είναι επιπλέον μια προσεγγιστικά μοναδιαία άλγεβρα Banach. Έστω $m : \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ ο πολλαπλασιασμός στην $\mathcal{A}$. Τότε τα επόμενα είναι ισοδύναμα:*

i. *η $\mathcal{A}$ είναι μια άλγεβρα τελεστών, δηλαδή, υπάρχει ένας χώρος Hilbert $H$ και ένας πλήρως ισομετρικός μορφισμός αλγεβρών $\rho : \mathcal{A} \to \mathcal{B}(H)$.*

ii. *Για κάθε $\nu \geq 1$, η $\mathcal{M}_\nu(\mathcal{A})$ είναι μια άλγεβρα Banach. Δηλαδή,*

$$\left\| [\sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,j}] \right\|_{\mathcal{M}_\nu(\mathcal{A})} \leq \|[a_{i,j}]\|_{\mathcal{M}_\nu(\mathcal{A})} \|[b_{i,j}]\|_{\mathcal{M}_\nu(\mathcal{A})},$$

*για κάθε $a_{i,j}, b_{i,j} \in \mathcal{A}$.* □

**Παράδειγμα 1.1.27** Έστω $\mathcal{A}$ μια άλγεβρα με νόρμα, η οποία υποθέτουμε (για λόγους ευκολίας) ότι έχει μονάδα. Έστω $\mathcal{F}$ ένα σύνολο από μοναδιαίες συστολές $\rho : \mathcal{A} \to \mathcal{B}(H_\rho)$ της $\mathcal{A}$ σε χώρο Hilbert. Για κάθε $\nu \geq 1$ και κάθε πίνακα $A \in \mathcal{M}_\nu(\mathcal{A})$, ορίζουμε τις ημινόρμες

$$\|A\|_\nu = \sup\{\|\rho_\nu(A)\|_{\mathcal{M}_\nu(\mathcal{B}(H_\rho))} : \rho \in \mathcal{F}\}.$$

Ακολουθώντας τότε τα επιχειρήματα του παραδείγματος 1.1.5, χρησιμοποιώντας όμως το Θεώρημα BRS αντί για το Θεώρημα του Ruan, κατασκευάζουμε μια νέα άλγεβρα τελεστών. Αυτή προκύπτει παίρνοντας την $\|\cdot\|_1$-πλήρωση του πηλίκου με τον πυρήνα της $\|\cdot\|_1$. Παρατηρούμε ότι κάθε αναπαράσταση $\rho \in \mathcal{F}$ είναι πλήρης συστολή για τη καινούργια άλγεβρα τελεστών. Αυτή θα συμβολίζεται με $\mathcal{O}(\mathcal{A}, \mathcal{F})$ και θα καλείται η *enveloping άλγεβρα τελεστών της $\mathcal{A}$ ως προς την $\mathcal{F}$*. Μπορούμε να δούμε ότι υπάρχει ένας μοναδιαίος μορφισμός $\iota_{\mathcal{F}} : \mathcal{A} \to \mathcal{O}(\mathcal{A}, \mathcal{F})$, με πυκνή εικόνα, που είναι πλήρης συστολή.

Ένας ισοδύναμος τρόπος για να έχουμε την προηγούμενη κατασκευή είναι ο εξής. Θεωρούμε το ευθύ άθροισμα των χώρων Hilbert $\mathcal{H} = \oplus_{\rho \in \mathcal{F}} H_\rho$ για $\rho \in \mathcal{F}$. Παρατηρούμε ότι αυτό ορίζεται καλά, αφού το $\mathcal{F}$ έχει υποτεθεί σύνολο. Τότε η $\mathcal{O}(\mathcal{A}, \mathcal{F})$ είναι η άλγεβρα Banach που παράγεται από την κλειστή θήκη των εικόνων των $\rho \in \mathcal{F}$ στον $\mathcal{H}$. Μπορούμε να δούμε ότι η δομή χώρου τελεστών που κληρονομεί από τον $\mathcal{B}(H)$ ταυτίζεται με αυτήν που προκύπτει από την προηγούμενη διαδικασία.

Τέλος η $\mathcal{O}(\mathcal{A}, \mathcal{F})$ έχει την εξής καθολική ιδιότητα: κάθε συστολή $\phi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}(H)$, όπου $H \in \{H_\rho : \rho \in \mathcal{F}\}$, επεκτείνεται μοναδικά σε πλήρη συστολή $\widetilde{\phi} : \mathcal{O}(\mathcal{A}, \mathcal{F}) \to \mathcal{B}(H)$ έτσι ώστε $\widetilde{\phi} \circ \iota = \phi$.

**Παράδειγμα 1.1.28** Έστω μια άλγεβρα $\mathcal{A}$ όπως στο προηγούμενο παράδειγμα. Τότε υπάρχει μια καθολική άλγεβρα τελεστών $(\mathcal{O}(\mathcal{A}), \iota)$ με την εξής καθολική ιδιότητα: *για κάθε μοναδιαία άλγεβρα τελεστών $\mathcal{B}$ και κάθε μοναδιαίο μορφισμό $\phi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$, που είναι πλήρης συστολή, υπάρχει ένας (αναγκαστικά μοναδικός) μοναδιαίος μορφισμός, $\widetilde{\phi} : \mathcal{O}(\mathcal{A}) \to \mathcal{B}$, που είναι πλήρης συστολή, έτσι ώστε $\widetilde{\phi} \circ \iota = \phi$.*

Εφόσον δεν ορίζεται το σύνολο όλων των $|\cdot|_1$-αναπαραστάσεων της $\mathcal{A}$ χρησιμοποιούμε το εξής βοηθητικό σύνολο. Έστω ότι η πληθικότητα της $\mathcal{A}$ είναι μικρότερη ή ίση από ένα διατακτικό αριθμό $\beta$, τον οποίο επιλέγουμε έτσι ώστε $\beta^{\aleph_0} = \beta$. Τότε ορίζεται το σύνολο $\mathcal{F}$ των $|\cdot|_1$-συστολών αναπαραστάσεων $(\rho, H_\rho)$ της $\mathcal{A}$ όπου $H_\rho = \ell^2_J$ και η πληθικότητα του $J$ είναι μικρότερη ή ίση του $\beta$. Αρκεί να δείξουμε ότι η $\mathcal{O}(\mathcal{A}, \mathcal{F})$ που κατασκευάζεται όπως στο προηγούμενο παράδειγμα έχει την καθολική ιδιότητα που ισχυριζόμαστε.

Πράγματι, έστω $\pi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}(H)$ συστολή της $\mathcal{A}$ και $J_0$ σύνολο πληθικότητας ίσης με $\dim H$. Θεωρούμε το σύνολο $\mathfrak{F}$ των ζευγών $(J, \{K_j\}_{j\in J})$ όπου $J \subseteq J_0$, κάθε $K_j$ είναι χώρος Hilbert με $\dim K_j \le \beta$, και κάθε $K_j$ είναι ανάγων υπόχωρος για την $\pi(A)$. Εφοδιάζουμε το σύνολο $\mathfrak{F}$ με τη διάταξη $(J, \{K_j\}_{j\in J}) \le (J', \{K'_j\}_{j\in J'})$ αν $J \subseteq J'$ και $K_j = K'_j$ για κάθε $j \in J$. Εφαρμόζοντας τότε το λήμμα του Zorn προκύπτει ένα μεγιστικό στοιχείο $(J, \{K_j\}_{j\in J})$ της $\mathfrak{F}$. Προκειμένου να δείξουμε ότι $\oplus_j K_j = H$ θα χρησιμοποιήσουμε το γεγονός ότι $Card(A) \le \beta$ και ότι $\beta^{\aleph_0} = \beta$. Πράγματι, έστω $\xi \in H$ που είναι κάθετο σε κάθε $K_j$. Αν $\mathcal{C}$ είναι η $C^*$-άλγεβρα που παράγει η $\pi(A)$ στον $\mathcal{B}(H)$, λόγω της υπόθεσης για τον $\beta$ έχουμε ότι $Card(\mathcal{C}) \le \beta$ και άρα ο χώρος Hilbert $[\mathcal{C}\xi]$ έχει διάσταση μικρότερη ή ίση του $\beta$. Επιπλέον ο $[\mathcal{C}\xi]$ είναι ανάγων χώρος της $\pi(A)$, και καταλήγουμε σε άτοπο λόγω της μεγιστικότητας του στοιχείου $(J, \{K_j\}_{j\in J})$. Επομένως η αναπαράσταση $(H, \pi)$ διασπάται σε ευθύ άθροισμα αναπαραστάσεων, έστω $(K_j, \pi_j)$ που ανήκουν στο σύνολο $\mathcal{F}$. Τότε η ζητούμενη πλήρης συστολή $\widetilde{\pi}$ που αναφέρεται στην καθολική ιδιότητα είναι το ευθύ άθροισμα $\oplus_j \widetilde{\pi}_j$.

### Μοναδοποίηση

Πολλές φορές είναι πιο εύκολο να αποδεικνύουμε ορισμένους ισχυρισμούς όταν η άλγεβρα τελεστών έχει μονάδα κι έπειτα, χρησιμοποιώντας την ακόλουθη κατασκευή, να επεκτείνουμε το αποτέλεσμα. Ας υποθέσουμε, λοιπόν, ότι η $\mathcal{A}$ είναι μια άλγεβρα τελεστών χωρίς μονάδα, και ότι είναι υπάλγεβρα ενός $\mathcal{B}(K)$. Τότε η $\mathcal{A}^1 = \mathrm{span}\{\mathcal{A}, I_K\}$ είναι *μια μοναδοποίηση της* $\mathcal{A}$, η οποία είναι επίσης μια άλγεβρα τελεστών.

**Θεώρημα 1.1.29** (Meyer) *Έστω $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}(K)$ μια άλγεβρα τελεστών και ας υποθέσουμε ότι $I_K \notin \mathcal{A}$. Έστω $\pi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}(H)$ ένας μορφισμός που είναι συστολή (αντ. πλήρης συστολή, ισομετρία ή πλήρης ισομετρία), και $H$ ένας χώρος Hilbert. Επεκτείνουμε την $\pi$ στην $\pi^1 : \mathcal{A}^1 \to \mathcal{B}(H)$ ορίζοντας*

$$\pi^1(a + \lambda I_K) = \pi(a) + \lambda I_H, \quad a \in \mathcal{A}, \lambda \in \mathbb{C}.$$

*Τότε η $\pi^1$ είναι επίσης μορφισμός και συστολή (αντ. πλήρης συστολή, ισομετρία ή πλήρης ισομετρία).* □

Επομένως, ως προς πλήρεις ισομετρικούς ισομορφισμούς, η μοναδοποίηση δεν εξαρτάται από την εμφύτευση $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}(K)$. Συνεπώς, η $\mathcal{A}^1$ θα καλείται *η μοναδοποίηση της* $\mathcal{A}$ και συνήθως χρησιμοποιείται χωρίς αναφορά στην εμφύτευση της $\mathcal{A}$ στον $\mathcal{B}(K)$. Επίσης, έστω $\mathcal{A}$ και $\mathcal{B}$ δύο άλγεβρες τελεστών με $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$. Είναι σαφές, πως αν η $\mathcal{B}$ έχει μονάδα $1_{\mathcal{B}}$, τότε η $\mathcal{A}^1$ μπορεί να θεωρηθεί να είναι η $\mathrm{span}\{\mathcal{A}, 1_{\mathcal{B}}\} \subseteq \mathcal{B}$. Αν ειδικότερα, οι $\mathcal{A}$ και $\mathcal{B}$ είναι χωρίς μονάδα, τότε μπορούμε να ταυτίζουμε τις μονάδες των $\mathcal{A}^1$ και $\mathcal{B}^1$ και η $\mathcal{A}^1$ μπορεί να θεωρείται μοναδιαία υπάλγεβρα της $\mathcal{B}^1$.

### 1.1.5 Άλγεβρες Γραφημάτων

Εδώ θα παρουσιάσουμε εν συντομία την άλγεβρα τελεστών που παράγεται από ένα γράφημα. Ένα κατευθυνόμενο γράφημα $G$, αποτελείται από το σύνολο των κορυφών $G_0$ (οι οποίες θα συμβολίζονται με τα γράμματα $x, y, \dots$), το σύνολο των κατευθυνομένων ακμών $G_1$ (οι οποίες θα συμβολίζονται με τα γράμματα $e, f, \dots$) και δύο απεικονίσεις $s, r : G_1 \to G_0$ έτσι ώστε $s(e)$ να είναι η αρχή και $r(e)$ να είναι το πέρας μιας κατευθυνόμενης ακμής $e \in G_1$. Χάριν απλότητας, θεωρούμε ότι τα γραφήματα είναι πεπερασμένα, δηλαδή τα $G_0$ και $G_1$ είναι πεπερασμένα, και ότι δεν υπάρχουν πηγές, δηλαδή δεν υπάρχουν κορυφές στις οποίες να μην καταλήγει κάποια ακμή. Για τη γενική περίπτωση, ο αναγνώστης μπορεί να αντρέξει στα **[24, 41]**.

Η οικογένεια όλων των πεπερασμένων μονοπατιών (στην οποία συμπεριλαμβάνεται και το τετριμμένο) στο $G$ συμβολίζεται με $\mathbb{F}^+(G)$. Κάθε μονοπάτι

$$\mu : x \xrightarrow{e_1} y \xrightarrow{e_2} \cdots \xrightarrow{e_n} z$$

θα συμβολιζεται με την ακολουθία $ze_n \cdots e_2 y e_1 x$. Με $|\mu|$ συμβολίζουμε το πλήθος των ακμών που περιλαμβάνονται σε ένα μονοπάτι $\mu$.

Μια οικογένεια *Toeplitz-Cuntz-Krieger* $\big\{\{P_x\}, \{S_e\} : x \in G_0, e \in G_1\big\}$ αποτελείται από ένα σύνολο προβολών $\{P_x\}_{x\in G_0}$ και ένα σύνολο μερικών ισομετριών $\{S_e\}_{e\in G_1}$ που δρουν σε ένα χώρο Hilbert $H$, έτσι ώστε να ικανοποιούνται τα εξής:

i. $P_x P_y = 0$, για $x \neq y$,

ii. $S_e^* S_e = P_{s(e)}$, $e \in G$, και

iii. $\sum_{r(e)=x} S_e S_e^* \leq P_x$, για $x \in G_0$.

Αν στην (iii.) έχουμε ισότητα, τότε η οικογένεια θα καλείται *Cuntz-Krieger*.

**Ορισμοί 1.1.30** Η καθολική $C^*$-άλγεβρα που παράγεται από τις οικογένειες Cuntz-Krieger, θα καλείται *η $C^*$-άλγεβρα του γραφήματος, $C^*(G)$.*

Η καθολική $C^*$-άλγεβρα που παράγεται από τις οικογένειες Toeplitz-Cuntz-Krieger, θα καλείται *η Toeplitz άλγεβρα του γραφήματος, $\mathcal{T}(G)$.*

*Η άλγεβρα του γραφήματος $\mathcal{A}_G$* ορίζεται να είναι η κλειστή υπάλγεβρα της $\mathcal{T}(G)$ που παράγεται από τις προβολές $p_x$ και τις ισομετρίες $s_e$.

Για κάθε $x \in G_0$ θα συμβολίζουμε με $p_x$ το ευθύ άθροισμα των προβολών $P_{x,i}$, όπου $\big\{\{P_{x,i}\}, \{S_{e,i}\} : x \in G_0, e \in G_1\big\}_i$ είναι οι οικογένειες Toeplitz-Cuntz-Krieger. Τότε η $\mathcal{A}_G$ είναι μια άλγεβρα τελεστών με μονάδα την $\sum_x p_x$ (το άθροισμα εδώ είναι πεπερασμένο).

**Παράδειγμα 1.1.31** Έστω ο χώρος Hilbert $H_G = \ell^2(\mathbb{F}^+(G))$ με ο.κ. βάση $\mathbb{B} = \{\xi_w : w \in \mathbb{F}^+(G)\}$. Ορίζουμε τους τελεστές

$$L_u : H_G \to H_G : \ \xi_w \mapsto L_u \xi_w := \begin{cases} \xi_{uw} & , \text{αν } r(w) = s(u) \\ 0 & , \text{διαφορετικά,} \end{cases}$$

όπου $s(u)$ η αρχή του μονοπατιού $u$ και $r(w)$ το τέλος του μονοπατιού $w$. Ακόμα, για κάθε κορυφή $x \in G_0$, ορίζουμε $P_x$ την προβολή στο χώρο $L_x := \{\xi_w : r(u) = x\}$. Η προβολή $P_{s(u)}$ είναι *ο αρχικός χώρος της $L_u$*. Παρατηρούμε ότι οι $\{P_x\}$ και $\{L_e\}$ ορίζουν μια οικογένεια Toeplitz-Cuntz-Krieger και ονομάζουμε την $C^*$-άλγεβρα που παράγουν $\mathcal{T}_G$. Μάλιστα, παρατηρούμε ότι δεν είναι Cuntz-Krieger. Επίσης, έχουμε ότι $\mathcal{K}(H_G) \subseteq \mathcal{T}_G$ και ορίζουμε $\mathcal{O}_G = \mathcal{T}_G / \mathcal{K}(H_G)$. Τότε η οικογένεια $\big\{\{\widehat{P_x}\}, \{\widehat{S_e}\}, x \in G_0, e \in G_1\big\}$, όπου $\widehat{P_x} = P_x + \mathcal{K}(H_G)$ και $\widehat{L_e} = L_e + \mathcal{K}(H_G)$, είναι μια οικογένεια Cuntz-Krieger, και η $C^*$-άλγεβρα που παράγει θα συμβολίζεται με $\mathcal{O}_G$.

**Παράδειγμα 1.1.32** ([11]) Αν θεωρήσουμε το γράφημα $G$ με $G^0 = \{x\}$ και $G_1 = \{e_1, \dots, e_n\}$, τότε η $\mathcal{A}_G$ καλείται *η μη-μεταθετική άλγεβρα του δίσκου.* Αν $n = 1$, τότε η $\mathcal{T}_G$ του παραδείγματος είναι η Toeplitz άλγεβρα και άρα $\mathcal{O}_G = C(\mathbb{T})$.

Ένας ισοδύναμος τρόπος ορισμού της μη-μεταθετικής άλγεβρας του δίσκου, προκύπτει θεωρώντας την καθολική άλγεβρα τελεστών που προκύπτει ως προς όλες τις $n$-άδες τελεστών $\begin{bmatrix} T_1 & \cdots & T_n \end{bmatrix}_{R_n(\mathcal{X})}$ που είναι συστολές, ως προς τη νόρμα γραμμών.

Παρατηρούμε ότι η $C^*(G)$ και η Toeplitz άλγεβρα του γραφήματος ικανοποιούν από μία καθολική ιδιότητα. Για παράδειγμα, για την Toeplitz άλγεβρα του γραφήματος ισχύει ότι αν $\mathcal{C} = C^*(P_x, S_e)$ είναι η $C^*$-άλγεβρα που παράγεται από μια οικογένεια Toeplitz-Cuntz-Krieger, τότε υπάρχει ένας φυσιολογικός *-επιμορφισμός $\Phi : \mathcal{T}(G) \to \mathcal{C}$, έτσι ώστε $\Phi(p_x) = P_x$, $x \in G^0$ και $\Phi(s_e) = S_e$, $e \in G^1$.

Μέσω της καθολικής ιδιότητας μπορούμε να ορίσουμε μια οικογένεια από αυτομορφισμούς $\{\gamma_z\}_{z\in\mathbb{T}}$, με $\gamma_z(p_x) = p_x$ και $\gamma_z(s_w) = z^{|w|}s_\mu$, η οποία είναι επιπλέον point-norm συνεχής[2]. Από την άλλη, μπορεί επίσης να οριστεί μια αντίστοιχη οικογένεια αυτομορφισμών για την οικογένεια του παραδείγματος 1.1.31. Αυτή προκύπτει θέτοντας $\beta_z = Ad_{u_z}$, όπου $u_z$ ο ορθομοναδιαίος τελεστής στον $H_G$ με $u_z(\xi_w) = z^{|w|}\xi_w$. Είναι προφανές ότι αν $\Phi : \mathcal{T}(G) \to \mathcal{T}_G$ είναι ο φυσιολογικός *-επιμορφισμός, τότε $\beta_z \circ \Phi = \Phi \circ \gamma_z$. Παρόμοια αποτελέσματα έχουμε φυσικά για την $C^*(G)$ και την $\mathcal{O}_G$.

Η ύπαρξη της point-norm συνεχούς οικογένειας αυτομορφισμών μας επιτρέπει να ορίζουμε την απεικόνιση

$$E(T) = \int_{\mathbb{T}} \beta_z(T)dz,$$

όπου $dz$ το μέτρο Lebesgue στην περιφέρεια. Η $E$ καλείται conditional expectation και δεν είναι δύσκολο να δείξουμε ότι είναι πιστή συστολή. Χρησιμοποιώντας την conditional expectation αποδεικνύεται το παρακάτω θεώρημα.

**Θεώρημα 1.1.33** ([41]) *Η $C^*$-άλγεβρα (αντ. η Toeplitz άλγεβρα) του γραφήματος είναι *-ισόμορφη με την $\mathcal{O}_G$ (αντ. την $T_G$).* □

## 1.2 $C^*$-envelope και Šilov ιδεώδες

Θα προσπαθήσουμε να δώσουμε μια σύντομη περιγραφή για το $C^*$-envelope ενός μοναδιαίου χώρου τελεστών $\mathcal{X}$, όπως επίσης και να αποδείξουμε την ύπαρξη του.

[2] Δηλαδή, για κάθε $T$, $\|\gamma_{z_n}(T) - \gamma_{z_0}(T)\| \to 0$, όταν $z_n \to z_0$.

Μια ακόμα έννοια που θα αναλύσουμε είναι αυτή του Šilov ιδεώδους, και θα δείξουμε ότι η ύπαρξη του είναι ισοδύναμη με την ύπαρξη του $C^*$-envelope. Τα παρακάτω βασίζονται στα **[2]** και **[15]**.

### 1.2.1 Μεγιστικές Απεικονίσεις

Στα επόμενα με τον όρο *διαστολή μιας πλήρους συστολής απεικόνισης* θα εννοούμε μια διαστολή της πλήρους συστολής η οποία είναι επιπλέον μοναδιαία πλήρης συστολή. Από το σχόλιο 1.1.15 βλέπουμε ότι υπάρχει τουλάχιστον μία τέτοια.

**Ορισμοί 1.2.1** 1. (**[2]**) Έστω $\mathcal{X}$ ένας χώρος τελεστών με μονάδα. Μια μοναδιαία πλήρης συστολή $\phi : \mathcal{X} \to \mathcal{B}(H)$ καλείται *μεγιστική* αν δεν έχει μη τετριμμένες διαστολές, δηλαδή: αν $\phi' \geq \phi$, τότε $\phi' = \phi \oplus \psi$, για κάποια πλήρη συστολή $\psi$.
2. (**[2]**) Έστω $\mathcal{X}$ ένας χώρος τελεστών με μονάδα. Μια μοναδιαία πλήρης συστολή $\pi : \mathcal{X} \to \mathcal{B}(H)$ έχει την *ιδιότητα της μοναδικής επέκτασης* αν

i. η $\pi$ έχει μοναδική μοναδιαία πλήρως θετική επέκταση $\tilde{\pi} : C^*(\mathcal{X}) \to \mathcal{B}(H)$,

ii. η $\tilde{\pi} : C^*(\mathcal{X}) \to \mathcal{B}(H)$ είναι μια αναπαράσταση της $C^*(\mathcal{X})$ στον $\mathcal{H}$.

**Σχόλιο 1.2.2** Η ιδιότητα της μοναδικής επέκτασης για την $\pi : \mathcal{X} \to \mathcal{B}(H)$ είναι ισοδύναμη με την απαίτηση κάθε επέκταση της $\pi$ σε μια μοναδιαία πλήρως θετική απεικόνιση $\phi : C^*(\mathcal{X}) \to \mathcal{B}(H)$ να είναι αναπαράσταση της $C^*(\mathcal{X})$.

**Πρόταση 1.2.3** *Μια μοναδιαία πλήρης συστολή $\phi : \mathcal{X} \to \mathcal{B}(H)$ είναι μεγιστική αν, και μόνο αν, έχει την ιδιότητα της μοναδικής επέκτασης.*

*Απόδειξη.* Υποθέτουμε πρώτα ότι η $\phi$ είναι μεγιστική και έστω $\widetilde{\phi} : C^*(\mathcal{X}) \to B(H)$ μια μοναδιαία πλήρως θετική επέκταση της. Πρέπει να δείξουμε ότι η $\widetilde{\phi}$ είναι ένας *-μορφισμός. Από το Θεώρημα του Stinespring, υπάρχει μια αναπαράσταση $\pi : C^*(\mathcal{X}) \to B(K)$ σε ένα χώρο Hilbert $K \supseteq H$ έτσι ώστε $\widetilde{\phi}(x) = P_H\pi(x)|_H, x \in C^*(\mathcal{X})$. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι η διαστολή είναι ελαχιστική, με την έννοια ότι $K = [\pi(C^*(\mathcal{X}))H] = [C^*(\pi(\mathcal{X}))H]$. Λόγω της μεγιστικότητας της $\phi$ τότε, $K = H$ και η $\widetilde{\phi} = \pi$ είναι ένας *-μορφισμός.

Αντίστροφα, έστω ότι η $\phi$ έχει την ιδιότητα της μοναδικής επέκτασης και έστω $\psi : \mathcal{X} \to \mathcal{B}(K)$ μια διαστολή της $\phi$, έτσι ώστε $K = [C^*(\psi(\mathcal{X}))H]$. Αρκεί να δείξουμε ότι $K = H$, αφού τότε $\psi = \phi$. Από το Θεώρημα Επέκτασης του Arveson, η $\psi$ μπορεί να επεκταθεί σε μια μοναδιαία πλήρως θετική απεικόνιση $\tilde{\psi} : C^*(\mathcal{X}) \to \mathcal{B}(K)$. Εφόσον η συμπίεση της $\tilde{\psi}$ στον $H$ ορίζει μια μοναδιαία πλήρως θετική απεικόνιση της $C^*(\mathcal{X})$ στον $\mathcal{B}(H)$ που, όταν περιοριστεί στον $\mathcal{X}$ ισούται με την $\phi$, η ιδιότητα της μοναδικής επέκτασης επάγει ότι η $P_H\tilde{\psi}(\cdot)P_H$ είναι ένας *-μορφισμός της $C^*(\mathcal{X})$. Άρα για κάθε $c \in C^*(\mathcal{X})$, έχουμε ότι

$$P_H\tilde{\psi}(c)^*P_H\tilde{\psi}(c)P_H = P_H\tilde{\psi}(c^*c)P_H \geq P_H\tilde{\psi}(c)^*\tilde{\psi}(c)P_H,$$

εφόσον $\tilde{\psi}(c^*c) \geq \tilde{\psi}(c)^*\tilde{\psi}(c)$. Συνεπώς, αν $A = (I - P_H)\tilde{\psi}(c)P_H$, η προηγούμενη ανισότητα επάγει ότι $A^*A \leq 0$, και άρα $A^*A = 0$. Επομένως $(I - P_H)\tilde{\psi}(c)P_H = 0$. Άρα, ο $H$ είναι αναλλοίωτος για το σύνολο των τελεστών $\tilde{\psi}(C^*(\mathcal{X})) \supseteq \psi(\mathcal{X})$, κι επομένως για την $C^*(\psi(\mathcal{X}))$. Συνεπώς $K = [C^*(\psi(\mathcal{X}))H] = H$ από το οποίο προκύπτει ότι $\psi = \phi$. □

**Πρόταση 1.2.4** (*Η Αρχή του Αναλλοιώτου* [**2**, Theorem 3.1]). *Έστω $\mathcal{X}_k \subseteq C^*(\mathcal{X}_k)$, $k = 1, 2$, δύο χώροι τελεστών με μονάδα κι έστω $\theta : \mathcal{X}_1 \to \mathcal{X}_2$ μια μοναδιαία πλήρως ισομετρική απεικόνιση που είναι επιπλέον επί. Για κάθε μοναδιαία μεγιστική πλήρως ισομετρική απεικόνιση $\phi_1 : \mathcal{X}_1 \to \mathcal{B}(H)$, η μοναδιαία πλήρως ισομετρική απεικόνιση $\phi_2 : \mathcal{X}_2 = \theta(\mathcal{X}_1) \to \mathcal{B}(H)$, που ορίζεται μέσω της σχέσης $\phi_2 \circ \theta = \phi_1$ είναι επίσης μεγιστική.* □

Το κρίσιμο σημείο είναι να αποδείξουμε το εξής θεώρημα.

**Θεώρημα 1.2.5** ([**2**, Theorem 1.3]) *Έστω $\mathcal{X}$ ένας χώρος τελεστών με μονάδα. Τότε κάθε μοναδιαία πλήρως ισομετρική απεικόνιση $\phi : \mathcal{X} \to \mathcal{B}(H_0)$ διαστέλλεται σε μια μεγιστική μοναδιαία πλήρως ισομετρική απεικόνιση $\rho : \mathcal{X} \to \mathcal{B}(H)$.*

**Σχόλιο 1.2.6** Πριν προχωρήσουμε στην απόδειξη είναι απαραίτητες ορισμένες παρατηρήσεις.

Έστω $T_n \in \mathcal{B}(H_n)$ μια ακολουθία τελεστών, έτσι ώστε $H_n \subseteq H_{n+1}$, $\sup\{\|T_n\| : n \in \mathbb{N}\} < +\infty$ και $T_n = P_{H_n}T_{n+1}|_{H_n}$. Τότε μπορούμε να ορίσουμε ένα *μοναδικό* τελεστή $T \in \mathcal{B}(H_\infty)$, όπου $H_\infty = \overline{\cup_n H_n}$, έτσι ώστε $P_{H_n}T|_{H_n}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, και με $\|T\| = \sup_n \|T_n\|$.

Πράγματι, αν $H_0 = \cup_n H_n$, ορίζουμε μια ημιδιγραμμική μορφή $s : H_0 \times H_0 \to \mathbb{C}$ με τον εξής τρόπο: για $\xi, \eta \in H_0$ υπάρχει τουλάχιστον ένα $n \geq 1$ έτσι ώστε $\xi, \eta \in H_n$. Επιλέγουμε το μικρότερο τέτοιο $n$ και θέτουμε $s(\xi, \eta) = \langle T_n\xi, \eta\rangle$. Η $s$ είναι καλά ορισμένη, αφού αν επιλέξουμε $m \geq n$, τότε $\xi, \eta \in H_m$ και έχουμε ότι

$$\langle T_m\xi, \eta\rangle = \langle T_mP_n\xi, P_n\eta\rangle = \langle P_nT_mP_n\xi, \eta\rangle = \langle T_n\xi, \eta\rangle .$$

Επίσης, μπορούμε να δείξουμε ότι είναι μια ημιδιγραμμική μορφή. Επιπλέον, είναι φραγμένη αφού $|s(\xi, \eta)| \leq \sup_n \|T_n\| \|\xi\| \|\eta\|$. Άρα επεκτείνεται σε μια ημιδιγραμμική μορφή (που θα συμβολίζουμε με το ίδιο γράμμα) στον $H_\infty \times H_\infty$. Άρα από το

Θεώρημα του Riesz, υπάρχει μοναδικός $T \in \mathcal{B}(H_\infty)$ με $\psi(\xi,\eta) = \langle T\xi, \eta\rangle$, για κάθε $\xi, \eta \in H_\infty$. Τότε $\|T\| = \|s\| = \sup_n \|T_n\|$ και προφανώς $P_n T|_{P_n} = T_n$.

Επομένως, αν υπάρχει μια αλυσίδα από μοναδιαίες πλήρως ισομετρικές απεικονίσεις $\phi_1 \leq \phi_2 \leq \cdots$ με $H_1 \subseteq H_2 \subseteq \cdots$, τότε μπορούμε να ορίσουμε μια μοναδιαία πλήρως ισομετρική απεικόνιση $\phi_\infty$ στον $H_\infty = \overline{\cup_n H_n}$ έτσι ώστε $P_{H_n}\phi_\infty(\cdot)|_{H_n} = \phi_n$. Πράγματι, θέτουμε $T_n = \phi_n(x)$ και $\phi_\infty(x) := T$. Η μοναδικότητα τότε επάγει την ύπαρξη της $(H_\infty, \phi_\infty)$. Επίσης για κάθε $x_{ij} \in \mathcal{X}$, έχουμε ότι

$$\|[\phi_n(x_{ij})]\| = \|[x_{ij}]\|,$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$, εφόσον $\phi_n$ είναι μοναδιαίες πλήρως ισομετρικές απεικονίσεις. Συνεπώς, παίρνοντας supremum έχουμε ότι $\|[\phi_\infty(x_{ij})]\| = \|[x_{ij}]\|$, άρα η $\phi_\infty$ είναι μοναδιαία πλήρως ισομετρική.

Το ίδιο ισχύει αν, αντί για $\mathbb{N}$ έχουμε ένα διατακτικό αριθμό $\lambda$, και μια αλυσίδα από μοναδιαίες πλήρεις συστολές $(H_\alpha, \phi_\alpha)$, με την έννοια ότι για κάθε $\alpha, \beta < \lambda$ με $\alpha \leq \beta$, τότε $\phi_\alpha \leq \phi_\beta$.

**Ορισμός 1.2.7** Έστω $\phi : \mathcal{X} \to \mathcal{B}(H)$ μια πλήρως ισομετρική απεικόνιση και έστω $\mathcal{F}$ ένα (πιθανώς κενό) υποσύνολο του $\mathcal{X} \times H$. Θα λέμε ότι η $\phi$ είναι μεγιστική στο $\mathcal{F}$ αν, για κάθε διαστολή $\psi$ της $\phi$ που δρα σε $K \supseteq H$, έχουμε

$$\psi(x)\xi = \phi(x)\xi, \quad (x,\xi) \in \mathcal{F}.$$

Μια πλήρως ισομετρική απεικόνιση $\phi : \mathcal{X} \to \mathcal{B}(H)$ είναι μεγιστική αν, και μόνο αν, είναι μεγιστική στο $\mathcal{X} \times H$. Αν η $\phi$ είναι μεγιστική στο $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{X} \times H$ και $\psi \geq \phi$, τότε η $\psi$ είναι μεγιστική στο $\mathcal{F}$.

**Λήμμα 1.2.8** *Για κάθε πλήρως ισομετρική απεικόνιση $\phi : \mathcal{X} \to \mathcal{B}(H)$ και για κάθε $(x,\xi) \in \mathcal{X} \times H$, υπάρχει μια διαστολή της $\phi$ που είναι μεγιστική στο $(x,\xi)$.*

*Απόδειξη.* Εφόσον για κάθε διαστολή $\psi \geq \phi$ έχουμε $\|\psi(x)\xi\| \leq \|x\|\,\|\xi\| < +\infty$, μπορούμε να βρούμε μια διαστολή $\phi_1$ της $\phi$ για την οποία ο $\|\phi_1(x)\xi\|$ είναι μεγαλύτερος από

$$\sup\{\|\psi(x)\xi\| : \psi \geq \phi, \psi \text{ μοναδιαία πλήρης συστολή}\} - 1.$$

Παρατηρούμε ότι η $\phi_1$ θα είναι επίσης μια μοναδιαία πλήρως ισομετρική απεικόνιση του $\mathcal{X}$. Συνεχίζοντας επαγωγικά, βρίσκουμε μια ακολουθία από μοναδιαίες πλήρως ισομετρικές απεικονίσεις $\phi \leq \phi_1 \leq \phi_2 \leq \cdots$, έτσι ώστε $\phi_n : \mathcal{X} \to \mathcal{B}(H_n)$, $H \subseteq H_1 \subseteq H_2 \subseteq \cdots$, και

$$\|\phi_{n+1}(x)\xi\| \geq \sup_{\psi \geq \phi_n} \|\psi(x)\xi\| - 1/n.$$

Έστω $H_\infty$ η κλειστή θήκη της ένωσης $\cup_n H_n$ και έστω $\phi_\infty : \mathcal{X} \to \mathcal{B}(H_\infty)$ η μοναδική μοναδιαία πλήρως ισομετρική απεικόνιση που η συμπίεσή της στον $H_n$ είναι η $\phi_n$. Παρατηρούμε ότι η $\phi_\infty$ είναι μεγιστική στο $(x,\xi)$. Πράγματι, αν $\psi \geq \phi_\infty$ τότε $\psi \geq \phi_n$, για κάθε $n \geq 1$, και

$$\|\phi_\infty(x)\xi\| \geq \left\|P_{H_{n+1}}\phi_\infty(x)\xi\right\| = \|\phi_{n+1}(x)\xi\| \geq \|\psi(x)\xi\| - 1/n.$$

Επομένως, $\|\phi_\infty(x)\xi\| \geq \|\psi(x)\xi\|$. Χρησιμοποιώντας το Πυθαγόρειο Θεώρημα, έχουμε ότι

$$\begin{aligned}\|\psi(x)\xi - \phi_\infty(x)\xi\|^2 &= \|\psi(x)\xi - P_{H_\infty}\psi(x)\xi\|^2 \\ &= \|\psi(x)\xi\|^2 - \|\phi_\infty(x)\xi\|^2 \leq 0,\end{aligned}$$

και άρα $\psi(x)\xi = \phi_\infty(x)\xi$, όπως ισχυριστήκαμε. □

*Απόδειξη του Θεωρήματος 1.2.5.* Πρώτα θα δείξουμε ότι η $\phi \equiv \phi_0$ διαστέλλεται σε μια μοναδιαία πλήρως ισομετρική απεικόνιση $\phi_1 : \mathcal{X} \to \mathcal{B}(H_1)$ που είναι μεγιστική στον $\mathcal{X} \times H_0$. Για αυτό, έστω $\lambda$ ένας διατακτικός αριθμός αρκετά μεγάλος ώστε να υπάρχει επί αντιστοιχία $\alpha \in \lambda \mapsto x_\alpha \in \mathcal{X} \times \mathcal{H}_0$. Άρα, $\mathcal{X} \times H_0 = \{x_\alpha : \alpha \in \lambda\}$. Ισχυριζόμαστε ότι υπάρχει μια οικογένεια από μοναδιαίες πλήρως ισομετρικές απεικονίσεις $\phi_\alpha : \mathcal{X} \to \mathcal{B}(H_\alpha)$, παραμετρικοποιημένες από τους $\alpha \leq \lambda$, που ικανοποιούν $\phi_\alpha \geq \phi_0$ και επίσης

*i.* $\phi_\alpha$ είναι μεγιστική στο $\{x_\beta : \beta < \alpha\}$,

*ii.* $\alpha \leq \beta \Rightarrow \phi_\alpha \leq \phi_\beta$.

Μόλις αποδειχτεί η ύπαρξη αυτή της οικογένειας, μπορούμε να θέσουμε $\phi_1 = \phi_\lambda$.

Προχωρώντας επαγωγικά, για $\alpha = 0$ θέτουμε $\phi_\alpha = \phi_0$, παρατηρώντας ότι η $(i)$ ισχύει τετριμμένα για $\alpha = 0$. Υποθέτουμε ότι ο $\alpha \leq \lambda$ είναι ένας διατακτικός αριθμός για τον οποίο η οικογένεια $\{\phi_\beta : \beta < \alpha\}$ έχει οριστεί και ικανοποιεί τις $(i)$ και $(ii)$ στο διάστημα $\{\beta < \alpha\}$. Τότε για τον $\alpha$ διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

1. αν ο $\alpha$ έχει αμέσως προηγούμενο $\alpha - 1$, τότε το προηγούμενο λήμμα επάγει ότι η $\phi_{\alpha-1}$ μπορεί να διασταλεί σε μια μοναδιαία πλήρως ισομετρική απεικόνιση $\phi_\alpha : \mathcal{X} \to \mathcal{B}(H_\alpha)$, που είναι μεγιστική στο $x_\alpha$.

2. αν ο $\alpha$ είναι οριακός, τότε οι χώροι Hilbert $H_\beta$, $\beta < \alpha$, διατάσσονται ολικά μέσω της σχέσης του περιέχεσθαι. Ορίζουμε $H_\alpha$ την κλειστή θήκη της ένωσής τους και θέτουμε $\phi_\alpha : \mathcal{X} \to \mathcal{B}(H_\alpha)$ τη μοναδική μοναδιαία πλήρως ισομετρική απεικόνιση που η συμπίεσή της στον $H_\beta$ ισούται με $\phi_\beta$, για κάθε $\beta < \alpha$ (βλ. σχόλιο 1.2.6).

Σε οποιαδήποτε περίπτωση, οι σχέσεις $(i)$ και $(ii)$ ισχύουν για την οικογένεια $\{\phi_\beta : \beta \leq \alpha\}$. Αυτή ορίζει την $\{\phi_\alpha : \alpha \leq \lambda\}$.

Τώρα, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε επαγωγή στο προηγούμενο αποτέλεσμα για να βρούμε μια αύξουσα ακολουθία από χώρους Hilbert $H_0 \subseteq H_1 \subseteq H_2 \subseteq \cdots$ και μοναδιαίες πλήρως ισομετρικές απεικονίσεις $\phi_n : \mathcal{X} \to \mathcal{B}(H_n)$, έτσι ώστε η $\phi_{n+1}$ να είναι διαστολή της $\phi_n$ στον $\mathcal{X} \times H_n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ . Έστω $H_\infty$ η κλειστή θήκη της $\cup_n H_n$ και $\phi_\infty : \mathcal{X} \to \mathcal{B}(H_\infty)$ η μοναδική μοναδιαία πλήρως ισομετρική απεικόνιση που όταν συμπιεστεί στον $H_n$ ισούται με $\phi_n$, για κάθε $n \geq 1$. Παρατηρούμε ότι για κάθε διαστολή $\psi : \mathcal{X} \to \mathcal{B}(K)$ της $\phi_\infty$ και για κάθε $n \geq 1$, οι $\psi$ και $\phi_\infty$ είναι διαστολές της $\phi_{n+1}$, και άρα, λόγω της μεγιστικότητας της $\phi_{n+1}$ στον $\mathcal{X} \times H_n$ έχουμε

$$\psi(x)\xi = \phi_{n+1}(x)\xi = \phi_\infty(x)\xi, \quad (x, \xi) \in \mathcal{X} \times H_n.$$

Επόμένως η $\phi_\infty$ είναι μεγιστική στο $\mathcal{X} \times \cup_n H_n$, και άρα στο $\mathcal{X} \times H_\infty$. □

### 1.2.2 Θεωρήματα ύπαρξης

Έστω $\mathcal{X}$ ένας χώρος τελεστών με μονάδα και $\iota : \mathcal{X} \to \mathcal{B}(H)$ μια μοναδιαία πλήρως ισομετρική απεικόνιση. Τότε η $C^*(\iota(\mathcal{X})) \subseteq \mathcal{B}(H)$ καλείται ένα $C^*$-*κάλυμμα του* $\mathcal{X}$. Μπορούμε να ορίσουμε ένα $C^*$-κάλυμμα του $\mathcal{X}$ με την ακόλουθη καθολική ιδιότητα. Θα αποδείξουμε ότι αυτό το $C^*$-κάλυμμα υπάρχει.

**Ορισμός 1.2.9** Έστω $\mathcal{X}$ ένας χώρος τελεστών με μονάδα. Το $C^*$-*envelope* $C^*_e(\mathcal{X}) = C^*(\iota(\mathcal{X}))$ είναι το $C^*$-κάλυμμα του $\mathcal{X}$ με την (καθολική) ιδιότητα:
*για κάθε μοναδιαία πλήρως ισομετρική απεικόνιση $\phi : \mathcal{X} \to C^*(\phi(\mathcal{X})) = \mathcal{C}$ υπάρχει ένας (αναγκαστικά μοναδικός) *-μορφισμός $\pi : \mathcal{C} \to C^*_e(\mathcal{X})$, έτσι ώστε η $\pi$ να είναι επί και $\pi(\phi(x)) = \iota(x)$, για κάθε $x \in \mathcal{X}$.*

**Ορισμός 1.2.10** Έστω $\mathcal{X} \subseteq C^*(\mathcal{X})$ ένας χώρος τελεστών με μονάδα. Ένα *συνοριακό ιδεώδες για τον* $\mathcal{X}$, είναι ένα ιδεώδες $J \subseteq C^*(\mathcal{X})$ με την ιδιότητα ο περιορισμός στον $\mathcal{X}$ της απεικόνισης πηλίκο $C^*(\mathcal{X})$ επί της $C^*(\mathcal{X})/J$ να είναι πλήρως ισομετρική απεικόνιση. Το *Šilov ιδεώδες* (αν υπάρχει) είναι το μέγιστο συνοριακό ιδεώδες.

Μπορούμε να δούμε ότι αν το $C^*_e(\mathcal{X})$ υπάρχει, τότε είναι μοναδικό ως προς ισομορφισμούς. Επίσης, αν το Šilov ιδεώδες υπάρχει, τότε είναι μοναδικό. Παρακάτω αποδεικνύουμε την ύπαρξη του $C^*$-envelope για ένα μοναδιαίο χώρο τελεστών και άρα την ύπαρξη του Šilov ιδεώδους.

**Θεώρημα 1.2.11** *Κάθε χώρος τελεστών με μονάδα έχει ένα $C^*$-envelope. Επομένως το Šilov ιδεώδες υπάρχει.*

*Απόδειξη.* Έστω ένας χώρος τελεστών με μονάδα $\mathcal{X}$ που δρα σε ένα χώρο Hilbert $K$. Τότε η εμφύτευση $\iota : \mathcal{X} \to \mathcal{B}(K)$ είναι μια μοναδιαία πλήρως ισομετρική απεικόνιση και άρα διαστέλλεται σε μια μεγιστική απεικόνιση $\gamma : \mathcal{X} \to \mathcal{B}(H)$. Θα δείξουμε ότι η $C^*(\gamma(\mathcal{X}))$ είναι ισόμορφη με το $C^*_e(\mathcal{X})$.

Πράγματι, έστω ότι η $\psi : \mathcal{X} \to \mathcal{B}(H_\psi)$ είναι μια μοναδιαία πλήρως ισομετρική απεικόνιση. Τότε και η $\sigma : \psi(\mathcal{X}) \to \mathcal{B}(H) : \psi(x) \mapsto \gamma(x)$ είναι επίσης μια μοναδιαία πλήρως ισομετρική απεικόνιση (και άρα καλά ορισμένη). Λόγω της *Αρχής του Αναλλοιώτου*, έχουμε ότι η $\sigma$ είναι μεγιστική για το μοναδιαίο χώρο τελεστών $\psi(\mathcal{X})$, και άρα, από την πρόταση 1.2.3, επεκτείνεται μοναδικά σε έναν *-μορφισμό $\widetilde{\sigma} : C^*(\psi(\mathcal{X})) \to \mathcal{B}(H)$. Τότε $\widetilde{\sigma}(\psi(x)) = \sigma(\psi(x)) = \gamma(x)$, για κάθε $x \in \mathcal{X}$. Επίσης $\widetilde{\sigma}(C^*(\psi(\mathcal{X}))) = C^*(\widetilde{\sigma}(\psi(\mathcal{X}))) = C^*(\gamma(\mathcal{X}))$, άρα η $\widetilde{\sigma}$ είναι επί. Συνεπώς, η $C^*(\gamma(\mathcal{X}))$ έχει την καθολική ιδιότητα του $C^*$-envelope.

Έστω τώρα, $\mathcal{X} \subseteq C^*(\mathcal{X})$. Τότε υπάρχει ένας *-επιμορφισμός $\pi : C^*(\mathcal{X}) \to C^*(\gamma(\mathcal{X}))$. Θα αποδείξουμε ότι ο $\ker\pi$ είναι το Šilov ιδεώδες. Πρώτα από όλα, είναι ένα συνοριακό ιδεώδες, αφού η $\tilde{\pi} : C^*(\mathcal{X})/\ker\pi \to C^*(\gamma(\mathcal{X}))$ είναι ένας *-ισομορφισμός, άρα πλήρως ισομετρική, και $\pi(x) = \gamma(x)$. Επίσης παρατηρούμε ότι, εφόσον $\pi(x) = \gamma(x) = \gamma \circ id(x)$ και η $\gamma$ είναι μια μεγιστική απεικόνιση, τότε από την *Αρχή του Αναλλοιώτου* έχουμε ότι η $\pi|_{\mathcal{X}}$ είναι επίσης μια μεγιστική απεικόνιση. Ας υποθέσουμε ότι το $I$ είναι κάποιο άλλο συνοριακό ιδεώδες και έστω $q_I$ ο φυσικός *-επιμορφισμός της $C^*(\mathcal{X})$ επί της $C^*(\mathcal{X})/I$. Ορίζουμε την απεικόνιση $\psi : q_I(\mathcal{X}) \to \mathcal{B}(H)$, έτσι ώστε $\psi(q_I(x)) = \pi(x)$. Αυτή η απεικόνιση είναι μοναδιαία πλήρως ισομετρική και άρα έχει μια μοναδιαία πλήρως θετική επέκταση $\tilde{\psi} : C^*(\mathcal{X})/I \to \mathcal{B}(H)$. Τότε η $\tilde{\psi} \circ q_I$ είναι μια μοναδιαία πλήρως θετική επέκταση της $\pi_{\mathcal{X}}$. Όμως η $\pi_{\mathcal{X}}$ είναι μεγιστική, και άρα $\pi(c) = \tilde{\psi}(q_I(c))$, για κάθε $c \in C^*(\mathcal{X})$. Επομένως, για $c \in I$ έχουμε ότι $\pi(c) = \tilde{\psi}(q_I(c)) = 0$, άρα $c \in \ker\pi$. Συνεπώς $I \subseteq \ker\pi$. □

Μπορούμε όμως να ακολουθήσουμε και την αντίστροφη πορεία.

**Θεώρημα 1.2.12** *Έστω $\mathcal{X} \subseteq C^*(\mathcal{X})$ ένας χώρος τελεστών με μονάδα. Τότε το Šilov ιδεώδες υπάρχει και άρα το $C^*$-envelope του $\mathcal{X}$ υπάρχει.*

*Απόδειξη.* Έστω ότι ο $\mathcal{X}$ δρα σε ένα χώρο Hilbert $K$. Τότε η εμφύτευση $\iota : \mathcal{X} \to \mathcal{B}(K)$ είναι μια μοναδιαία πλήρως ισομετρική απεικόνιση και άρα διαστέλλεται σε μια μεγιστική απεικόνιση $\gamma : \mathcal{X} \to \mathcal{B}(H)$. Επομένως η $\gamma$ έχει την ιδιότητα της μοναδικής επέκτασης. Έστω $\pi : C^*(\mathcal{X}) \to \mathcal{B}(H)$ η επέκταση της που είναι *-μορφισμός. Θα δείξουμε ότι το $\ker\pi$ είναι το Šilov ιδεώδες.

Πρώτα από όλα, έχουμε ότι $\|x + \ker\pi\| = \|\pi(x)\| = \|\gamma(x)\| = \|x\|$ (το ίδιο επιχείρημα λειτουργεί για τις νόρμες πινάκων), επομένως το $\ker\pi$ είναι ένα συνοριακό ιδεώδες. Τώρα υποθέτουμε ότι το $I$ είναι κάποιο άλλο συνοριακό ιδεώδες και έστω $q_I$ ο φυσικός *-επιμορφισμός της $C^*(\mathcal{X})$ επί της $C^*(\mathcal{X})/I$. Ορίζουμε την απεικόνιση $\psi : q_I(\mathcal{X}) \to \mathcal{B}(H)$, έτσι ώστε $\psi(q_I(x)) = \pi(x) = \gamma(x)$. Αυτή η απεικόνιση είναι μοναδιαία πλήρως ισομετρική και άρα έχει μια πλήρως θετική επέκταση $\widetilde{\psi} : C^*(\mathcal{X})/I \to \mathcal{B}(H)$. Τότε η $\widetilde{\psi} \circ q_I$ είναι μια μοναδιαία πλήρως θετική επέκταση της $\pi|_{\mathcal{X}} = \gamma$. Όμως η $\gamma$ είναι μεγιστική, και άρα $\pi(c) = \widetilde{\psi}(q_I(c))$, για κάθε $c \in C^*(\mathcal{X})$. Επομένως, για $c \in I$ έχουμε ότι $\pi(c) = \widetilde{\psi}(q_I(c)) = 0$, άρα $c \in \ker\pi$. Συνεπώς $I \subseteq \ker\pi$.

Για να ολοκληρώσουμε την απόδειξη, πρέπει να δείξουμε ότι η $C^*(\mathcal{X})/\ker\pi$ έχει την καθολική ιδιότητα. Έχουμε ότι η $\tilde{\pi} : C^*(\mathcal{X})/\ker\pi \to \mathcal{B}(H)$ είναι πιστή, και άρα μοναδιαία πλήρως ισομετρική. Έστω $\phi : \mathcal{X} \to C^*(\phi(\mathcal{X}))$ μια μοναδιαία πλήρως ισομετρική απεικόνιση και θεωρούμε την μοναδιαία πλήρως ισομετρική απεικόνιση $\tilde{\pi} \circ q \circ \phi^{-1} : \phi(\mathcal{X}) \to \mathcal{B}(H)$, όπου $q : C^*(\mathcal{X}) \to C^*(\mathcal{X})$ η απεικόνιση πηλίκο. Εφόσον $\tilde{\pi} \circ q(x) = \pi(x)$, για κάθε $x \in \mathcal{X}$ και η $\pi$ είναι μεγιστική, τότε από την *Αρχή του Αναλλοιώτου*, η $\tilde{\pi} \circ q \circ \phi^{-1}$ είναι επίσης μεγιστική. Έστω ότι η $\sigma_0 : C^*(\phi(\mathcal{X})) \to \mathcal{B}(H)$ είναι η μοναδική της επέκταση. Τότε $\sigma_0(\phi(x)) = \tilde{\pi}(q(x))$, για κάθε $x \in \mathcal{X}$, και άρα

$$\sigma_0(\phi(x)\phi(x)^*) = \sigma_0(\phi(x))\sigma_0(\phi(x))^* = \tilde{\pi}(q(x))\tilde{\pi}(q(x))^* = \tilde{\pi}(q(xx^*)).$$

Επίσης $\sigma_0(\phi(x)^*\phi(x)) = \tilde{\pi}(q(x^*x))$. Επομένως, από το θεώρημα 1.1.8, η $\sigma_0$ είναι *-μορφισμός και

$$\begin{aligned}\sigma_0(C^*(\phi(\mathcal{X}))) = C^*(\sigma_0 \circ \phi(\mathcal{X})) &= C^*(\tilde{\pi}(q(\mathcal{X}))) \\ &= \tilde{\pi} \circ q(C^*(\mathcal{X})) = \tilde{\pi}(C^*(\mathcal{X})/\ker\pi).\end{aligned}$$

Άρα η απεικόνιση $\sigma : C^*(\phi(\mathcal{X})) \to C^*(\mathcal{X})/\ker\pi$ που ορίζεται ως $\sigma = \tilde{\pi}^{-1} \circ \sigma_0$ είναι ένας *-μορφισμός επί της $C^*(\mathcal{X})/\ker\pi$ με $\sigma(\phi(x)) = \tilde{\pi}^{-1} \circ \sigma_0(\phi(x)) = \tilde{\pi}^{-1} \circ \tilde{\pi}(x) = q(x)$. $\square$

### 1.2.3 $C^*$-envelope Αλγεβρών Τελεστών

Θα αναδείξουμε τη σύνδεση του $C^*$-envelope με μια συγκεκριμένη κατηγορία αναπαραστάσεων στην περίπτωση που έχουμε μια άλγεβρα τελεστών $\mathcal{A}$. Αρχικά θα περιοριστούμε στην περίπτωση που η άλγεβρα τελεστών έχει μονάδα.

**Ορισμοί 1.2.13** 1. ([**15**]) Μια αναπαράσταση $\phi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}(H)$ καλείται *∂-αναπαρά-
σταση* αν, για οποιαδήποτε διαστολή $\psi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}(K)$ της $\phi$, ο $H$ ανάγει την $\psi(\mathcal{A})$.
2. ([**15**]) Έστω ένας πλήρως ισομετρικός μορφισμός $\phi : \mathcal{A} \to \mathcal{C}$, όπου $\mathcal{C} = C^*(\phi(\mathcal{A}))$. Η $\pi : \mathcal{C} \to \mathcal{B}(H)$ καλείται *συνοριακή αναπαράσταση* της $\mathcal{A}$ αν η μοναδική πλήρως θετική απεικόνιση της $\mathcal{C}$ που ισούται με την $\pi$ στην $\phi(\mathcal{A})$ είναι η $\pi$.

**Θεώρημα 1.2.14** ([**15**, Theorem 1.1]) *Έστω $\mathcal{A}$ μια άλγεβρα τελεστών με μονάδα. Μια απεικόνιση $\rho : \mathcal{A} \to \mathcal{B}(H)$ είναι ∂-αναπαράσταση αν, και μόνο αν, για κάθε μοναδιαία πλήρως ισομετρική απεικόνιση $\phi : \mathcal{A} \to \mathcal{C}$, όπου $\mathcal{C} = C^*(\phi(\mathcal{A}))$, υπάρχει μια συνοριακή αναπαράσταση $\pi : C^*(\phi(\mathcal{A})) \to \mathcal{B}(H)$, έτσι ώστε $\pi \circ \phi = \rho$.*

*Απόδειξη.* Υποθέτουμε πρώτα ότι η $\phi : \mathcal{A} \to C^*(\phi(\mathcal{A})) = \mathcal{C}$ είναι μια μοναδιαία πλήρως ισομετρική απεικόνιση και έστω $\pi : \mathcal{C} \to \mathcal{B}(H)$ μια συνοριακή αναπαράσταση. Θέτουμε $\rho = \pi \circ \phi$. Τότε η $\rho$ είναι μια αναπαράσταση και επίσης μια μοναδιαία πλήρως συστολή. Έστω $\nu : \mathcal{A} \to \mathcal{B}(K)$ μια διαστολή της $\rho$. Θα δείξουμε ότι ο $H$ ανάγει την $\nu(\mathcal{A})$.

Έστω, λοιπόν, η απεικόνιση $\gamma : \phi(\mathcal{A}) \to \mathcal{B}(K)$ με $\gamma(\phi(a)) = \nu(a)$, $a \in \mathcal{A}$. Η απεικόνιση αυτή είναι μοναδιαία πλήρως συστολή, αφού $\|\gamma(\phi(a))\| = \|\nu(a)\| \leq \|a\| = \|\phi(a)\|$. Άρα, από το Θεώρημα Επέκτασης του Arveson, επεκτείνεται σε μια μοναδιαία πλήρως θετική απεικόνιση $\tilde{\gamma} : \mathcal{C} \to \mathcal{B}(K)$, με $\tilde{\gamma} \circ \phi = \gamma \circ \phi = \nu$. Τώρα, η απεικόνιση $c \mapsto P_H\tilde{\gamma}(c)|_H$, $c \in \mathcal{C}$, είναι μοναδιαία πλήρως θετική και εξ ορισμού, $P_H\gamma(\phi(a))|_H = P_H\nu(a)|_H = \rho(a) = \pi(\phi(a))$, για κάθε $a \in \mathcal{A}$. Όμως, αφού η $\pi$ *είναι μια συνοριακή αναπαράσταση*, έχουμε ότι $P_H\tilde{\gamma}(c)|_H = \pi(c)$, για κάθε $c \in \mathcal{C}$. Συνεπώς, για κάθε $a \in \mathcal{A}$, παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned}
\rho(a)\rho(a)^* &= \pi(\phi(a))\pi(\phi(a))^* = \pi(\phi(a)\phi(a)^*) \\
&= P_H\tilde{\gamma}(\phi(a)\phi(a)^*)|_H \geq P_H\tilde{\gamma}(\phi(a))\tilde{\gamma}(\phi(a)^*)|_H \\
&= P_H\nu(a)\nu(a)^*|_H \geq P_H\gamma(\phi(a))P_H\gamma(\phi(a)^*)|_H \\
&= P_H\nu(a)P_H\nu(a)^*|_H = \rho(a)\rho(a)^*.
\end{aligned}$$

Επομένως, $P_H\nu(a)\nu(a)^*|_H = P_H\nu(a)P_H\nu(a)^*|_H$, άρα $\nu(a)^*H \subseteq H$. Ένα παρόμοιο επιχείρημα δίνει ότι $\nu(a)H \subseteq H$. Άρα, ο $H$ ανάγει την $\nu(\mathcal{A})$.

Για το αντίστροφο, έστω ότι η $\rho : \mathcal{A} \to \mathcal{B}(H)$ είναι *∂-αναπαράσταση* και η $\phi : \mathcal{A} \to C^*(\phi(\mathcal{A})) = \mathcal{C}$ μοναδιαία πλήρως ισομετρική απεικόνιση. Τότε, μπορούμε να ορίσουμε την μοναδιαία πλήρως ισομετρική απεικόνιση $\phi^{-1} : \phi(\mathcal{A}) \to \mathcal{A}$ και θεωρούμε την $\rho \circ \phi^{-1} : \phi(\mathcal{A}) \to \mathcal{B}(H)$, που είναι μοναδιαία πλήρως συστολή. Συνεπώς, από το Θεώρημα Επέκτασης του Arveson, υπάρχει μια μοναδιαία πλήρως θετική απεικόνιση $\pi : \mathcal{C} \to \mathcal{B}(H)$, έτσι ώστε $\pi \circ \phi = \rho$. Θα δείξουμε ότι η $\pi$ είναι μια συνοριακή αναπαράσταση.

Έστω, λοιπόν, $\tilde{\pi} : \mathcal{C} \to \mathcal{B}(K)$ η (ελαχιστική) διαστολή Stinespring της $\pi$. Τότε η $\tilde{\pi} \circ \phi$ είναι μια διαστολή της $\rho$ και αφού η $\rho$ είναι μια $\partial$-αναπαράσταση, ο $H$ ανάγει την $\tilde{\pi} \circ \phi(\mathcal{A})$. Επομένως,

$$\begin{aligned}\pi(\phi(a)\phi(a)^*) &= P_H\tilde{\pi}(\phi(a)\phi(a)^*)|_H = P_H\tilde{\pi}(\phi(a))\tilde{\pi}(\phi(a)^*)|_H \\ &= P_H\tilde{\pi}(\phi(a))P_H\tilde{\pi}(\phi(a)^*)|_H = \pi(\phi(a))\pi(\phi(a)^*).\end{aligned}$$

Παρομοίως παίρνουμε ότι $\pi(\phi(a)^*\phi(a)) = \pi(\phi(a)^*)\pi(\phi(a))$. Συνεπώς, η $\phi(\mathcal{A})$ είναι στο πολλαπλασιαστικό πεδίο της $\pi$. Άρα η $\pi$ είναι μια αναπαράσταση της $\mathcal{C}$, αφού η $\phi(\mathcal{A})$ παράγει τη $\mathcal{C}$ (βλ. θεώρημα 1.1.8). Τώρα, έστω $r : \mathcal{C} \to \mathcal{B}(H)$ μια μοναδιαία πλήρως θετική απεικόνιση, έτσι ώστε $r(\phi(a)) = \pi(\phi(a))(= \rho(a))$, για κάθε $a \in \mathcal{A}$. Τότε, (το ίδιο επιχείρημα δίνει ότι) η $r$ είναι επίσης μια αναπαράσταση, επομένως $r = \pi$, αφού $r|_{\phi(\mathcal{A})} = \pi|_{\phi(\mathcal{A})}$ και η $\phi(\mathcal{A})$ παράγει τη $\mathcal{C}$. □

Η έννοια της $\partial$-αναπαράστασης δεν διαφέρει από αυτή της μεγιστικής μοναδιαίας πλήρως συστολής. Μάλιστα έχουμε το εξής.

**Πρόταση 1.2.15** *Μια μοναδιαία πλήρως συστολή $\rho : \mathcal{A} \to \mathcal{B}(H)$ είναι $\partial$-αναπαράσταση αν, και μόνο αν, η $\rho$ είναι μεγιστική.*

*Απόδειξη.* Έστω ότι η $\rho : \mathcal{A} \to \mathcal{B}(H)$ είναι μια $\partial$-αναπαράσταση. Έστω η μοναδιαία πλήρως ισομετρική απεικόνιση $id : \mathcal{A} \to C^*(\mathcal{A})$. Τότε από το προηγούμενο θεώρημα, υπάρχει μια συνοριακή αναπαράσταση $\pi : C^*(\mathcal{A}) \to \mathcal{B}(H)$, έτσι ώστε $\pi \circ id = \rho$. Συνεπώς, η $\pi$ επεκτείνει την $\rho$. Αφού η $\pi$ είναι συνοριακή αναπαράσταση, είναι η μοναδική μοναδιαία πλήρως θετική επέκταση της $\rho$ (και επίσης μια αναπαράσταση της $\mathcal{C}$). Άρα η $\rho$ έχει την ιδιότητα της μοναδικής επέκτασης.

Αντίστροφα, έστω ότι η $\rho : \mathcal{A} \to \mathcal{B}(H)$ είναι μεγιστική μοναδιαία πλήρως συστολή. Τότε η $\rho$ έχει την ιδιότητα της μοναδικής επέκτασης. Έστω $\pi : C^*(\mathcal{A}) \to B(H)$ η μοναδική επέκταση της $\rho$ (που είναι, αναγκαστικά, *-μορφισμός). Τότε η $\rho = \pi|_{\mathcal{A}}$ είναι μορφισμός. Τώρα, έστω $\nu : \mathcal{A} \to \mathcal{B}(K)$ μια διαστολή της $\rho$. Τότε, λόγω της μεγιστικότητας της $\rho$, έχουμε ότι $\nu = \rho \oplus \psi$ για κάποια $\psi : \mathcal{A} \to B(K \ominus H)$. Επομένως ο $H$ ανάγει την $\nu(\mathcal{A})$. Άρα η $\rho$ είναι $\partial$-αναπαράσταση. □

Το ακόλουθο είναι άμεσο.

**Θεώρημα 1.2.16** ([**15**, Theorem 1.2]) *Κάθε μοναδιαία πλήρως ισομετρική αναπαράσταση $\rho : \mathcal{A} \to \mathcal{B}(H)$ διαστέλλεται σε μια μοναδιαία πλήρως ισομετρική ∂-αναπαράσταση $\rho' : \mathcal{A} \to \mathcal{B}(K)$.* $\square$

**Σχόλιο 1.2.17** Όπως είδαμε στην απόδειξη της ύπαρξης του C*-envelope, το $C_e^*(\mathcal{A})$ είναι ένα $C^*$-κάλυμμα της $\mathcal{A}$, έστω $C^*(\iota(\mathcal{A}))$, όπου $\iota$ είναι μια μοναδιαία πλήρως ισομετρική μεγιστική απεικόνιση. Η προηγούμενη πρόταση επάγει ότι η $\iota$ είναι επίσης μια $\partial$-αναπαράσταση, επομένως η $\iota$ είναι ένας μορφισμός της $\mathcal{A}$.

Έστω τώρα ότι η $\mathcal{A}$ είναι μια άλγεβρα τελεστών που δεν έχει μονάδα. Θα δείξουμε ότι και σε αυτήν την περίπτωση, μπορούμε να εξασφαλίσουμε την ύπαρξη ενός $C^*$-καλύμματος που έχει την ίδια καθολική ιδιότητα με αυτήν που έχει το C*-envelope μιας άλγεβρας τελεστών με μονάδα. Αυτό το $C^*$-κάλυμμα θα το ονομάσουμε φυσικά *το $C^*$-envelope της άλγεβρας τελεστών*.

**Σχόλιο 1.2.18** Έστω $\mathcal{C}$ ένα $C^*$-κάλυμμα μιας άλγεβρας τελεστών $\mathcal{A}$. Τότε είναι εύκολο να δούμε ότι κάθε προσεγγιστική μονάδα της $\mathcal{A}$ είναι και προσεγγιστική μονάδα της $\mathcal{C}$ (αφού, για κάθε $a \in \mathcal{A}$ έχουμε ότι $e_t a \to a \Rightarrow a^* e_t \to a^*$, βλ. [**7**, Theorem 1.2.6]). Επομένως, αν η $\mathcal{A}$ είναι προσεγγιστικά μοναδιαία, τότε η $\mathcal{C}$ είναι μια μοναδιαία $C^*$-άλγεβρα αν, και μόνο αν, η $\mathcal{A}$ είναι μοναδιαία. Πράγματι, αν η $\mathcal{A}$ έχει μονάδα, τότε, όπως είδαμε, η $\mathcal{C}$ έχει επίσης (την ίδια) μονάδα. Από την άλλη, αν η $\mathcal{C}$ έχει μονάδα και η $\mathcal{A}$ έχει προσεγγιστική μονάδα $(e_t)$, τότε η $(e_t)$ είναι προσεγγιστική μονάδα της $\mathcal{C}$. Άρα, $e_t = e_t 1_{\mathcal{C}} \to 1_{\mathcal{C}}$. Αφού η $\mathcal{A}$ είναι κλειστή, έπεται ότι $1_{\mathcal{C}} \in \mathcal{A}$.

**Σχόλιο 1.2.19** Υπάρχει η περίπτωση ένα $C^*$-κάλυμμα μιας άλγεβρας τελεστών χωρίς μονάδα να έχει μονάδα. Για παράδειγμα, έστω $U$ το bilateral shift του $\ell^2(\mathbb{Z})$ και $\mathcal{A}$ η κλειστή γραμμική θήκη των πολυωνύμων $\sum_{n=1}^k \lambda_n U^n$. Τότε η $\mathcal{A}$ δεν έχει μονάδα, όμως το $C^*$-κάλυμμά της έχει μονάδα, αφού $U^*U = 1$.

Για αυτό το λόγο θα ακολουθούμε την εξής σύμβαση. Έστω $(\mathcal{C}, j)$ ένα $C^*$-κάλυμμα μιας άλγεβρας τελεστών χωρίς μονάδα $\mathcal{A}$, και έστω $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{B}(H)$ και $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}(K)$, για κάποιους χώρους Hilbert $H, K$. Αν η $\mathcal{C}$ δεν έχει μονάδα, τότε χρησιμοποιώντας το Θεώρημα του Meyer, έχουμε ότι η $j : \mathcal{A} \to \mathcal{C} \subseteq \mathcal{B}(H)$ επεκτείνεται μοναδικά στην μοναδιαία πλήρως ισομετρική απεικόνιση $j^1 : \mathcal{A}^1 \to \mathcal{C}^1 \subseteq \mathcal{B}(H)$. Από την άλλη, αν η $\mathcal{C}$ έχει μονάδα, τότε ταυτίζουμε τη $\mathcal{C}$ με τη $\mathcal{C}^1$, και η $j : \mathcal{A} \to \mathcal{B}(H)$ επεκτείνεται μοναδικά στην $j^1 : \mathcal{A}^1 \to \mathcal{B}(H)$, έτσι ώστε $j^1(1_{\mathcal{A}}) = j^1(I_K) = I_H = 1_{\mathcal{C}}$. Άρα $j^1(A^1) \subseteq \mathcal{C}$.

**Ορισμός 1.2.20** *Ένα $C^*$-envelope μιας άλγεβρας τελεστών χωρίς μονάδα $\mathcal{A}$* είναι ένα ζεύγος $(\mathcal{C}, \iota)$, όπου $\mathcal{C}$ είναι η $C^*$-υπάλγεβρα που παράγεται από το αντίγραφο $\iota(\mathcal{A})$ της $\mathcal{A}$ μέσα στο $C^*$-envelope $(C_e^*(\mathcal{A}^1), \iota)$ της μοναδοποίησης $\mathcal{A}^1$ της $\mathcal{A}$.

Το επόμενο θεώρημα εξασφαλίζει ότι το $C^*$-envelope μιας άλγεβρας τελεστών χωρίς μονάδα είναι μοναδικό ως προς *-ισομορφισμούς. Επομένως, μπορούμε να αναφερόμαστε σε αυτό ως *το* $C^*$-envelope.

**Θεώρημα 1.2.21** *Έστω $\mathcal{A}$ μια άλγεβρα τελεστών και έστω $(C_e^*(\mathcal{A}), \iota)$ ένα $C^*$-envelope της $\mathcal{A}$. Τότε η $\iota$ είναι μορφισμός και το $C_e^*(\mathcal{A})$ έχει την (καθολική) ιδιότητα: για κάθε $C^*$-κάλυμμα $(\mathcal{C}, j)$ της $\mathcal{A}$, υπάρχει ένας (αναγκαστικά μοναδικός) *-επιμορφισμός $\pi : \mathcal{C} \to C_e^*(\mathcal{A})$, έτσι ώστε $\pi \circ j = \iota$.*

*Απόδειξη.* Αν η $\mathcal{A}$ έχει μονάδα, τότε αυτό έχει ήδη αποδειχθεί. Τώρα, έστω ότι η $\mathcal{A}$ δεν έχει μονάδα και έστω $(\mathcal{C}, j)$ ένα $C^*$-κάλυμμα της $\mathcal{A}$. Τότε η $j$ επεκτείνεται σε έναν πλήρως ισομετρικό μοναδιαίο μορφισμό $j^1 : \mathcal{A}^1 \to \mathcal{C}^1$ του οποίου η εικόνα παράγει την $\mathcal{C}^1$, ως $C^*$-άλγεβρα. Συνεπώς, υπάρχει ένας μοναδικός *-επιμορφισμός $\rho : \mathcal{C}^1 \to C_e^*(\mathcal{A}^1)$, έτσι ώστε $\rho \circ j^1 = \iota$, όπου $\iota : \mathcal{A}^1 \to C_e^*(\mathcal{A}^1)$ είναι η κανονική εμφύτευση. Έστω $\pi = \rho|_{\mathcal{C}}$, τότε ο $\pi$ είναι ένας *-μορφισμός με

$$\pi(j(a)) = \rho(j^1(a)) = \iota(a) \in C_e^*(\mathcal{A}),$$

για κάθε $a \in \mathcal{A}$. Εφόσον ο $\pi$ είναι *-μορφισμός, $\mathcal{C} = C^*(j(\mathcal{A}))$ και $\pi(j(\mathcal{A})) \subseteq C_e^*(\mathcal{A})$, έπεται ότι $\pi(\mathcal{C}) \subseteq C_e^*(\mathcal{A})$. Επίσης, αφού $C_e^*(\mathcal{A}) = C^*(\iota(\mathcal{A})) \subseteq C_e^*(\mathcal{A}^1)$, έχουμε ότι $C_e^*(\mathcal{A}) = C^*(\iota(\mathcal{A})) = C^*(\pi \circ j(\mathcal{A})) = \pi(C^*(j(\mathcal{A}))) = \pi(\mathcal{C})$. Άρα, η $\pi$ είναι επί. □

Εφόσον εξασφαλίσαμε την ύπαρξη του $C^*$-envelope μιας άλγεβρας τελεστών χωρίς μονάδα, δεν είναι δύσκολο να αποδείξουμε και την ύπαρξη του Šilov ιδεώδους. Αν, λοιπόν, $(C^*(\mathcal{A}), j)$ είναι ένα $C^*$-κάλυμμα της $\mathcal{A}$ και $\pi : C^*(\mathcal{A}) \to C_e^*(\mathcal{A})$ είναι ο *-επιμορφισμός με $\pi(j(a)) = \iota(a)$, για κάθε $a \in \mathcal{A}$, το Šilov ιδεώδες θα είναι ο $\ker \pi$.

**Πόρισμα 1.2.22** *Έστω $\mathcal{A} \subseteq C^*(\mathcal{A})$ μια άλγεβρα χωρίς μονάδα. Τότε υπάρχει το Šilov ιδεώδες $J$.* □

Ακόμα, δεν είναι δύσκολο να δούμε ότι αν η $\mathcal{A}$ είναι μια άλγεβρα τελεστών χωρίς μονάδα, τότε η $\rho : \mathcal{A} \to \mathcal{B}(H)$ είναι μια $\partial$-αναπαράσταση αν, και μόνο αν, η $\rho^1 : \mathcal{A}^1 \to$

$\mathcal{B}(H)$ είναι μια $\partial$-αναπαράσταση. Πράγματι, αν η $\rho$ είναι $\partial$-αναπαράσταση, και $\psi \geq \rho^1$, τότε η $\psi$ είναι διαστολή της $\rho$ και άρα ο $H$ είναι $\psi(\mathcal{A})$-αναλλοίωτος. Επομένως, είναι και $\psi(\mathcal{A}^1)$-αναλλοίωτος. Αντίστροφα, έστω ότι η $\rho^1$ είναι $\partial$-αναπαράσταση και $\psi \geq \rho$. Τότε $\psi^1 \geq \rho^1$, συνεπώς ο $H$ είναι $\psi(\mathcal{A}^1)$-αναλλοίωτος. Άρα είναι $\psi(\mathcal{A})$-αναλλοίωτος. Επομένως προκύπτει το εξής.

**Πόρισμα 1.2.23** *Έστω $\mathcal{A}$ μια άλγεβρα τελεστών χωρίς μονάδα και $\rho : \mathcal{A} \to \mathcal{B}(H)$ μια μοναδιαία πλήρως ισομετρική αναπαράσταση. Τότε η $\rho$ διαστέλλεται σε μια $\partial$-αναπαράσταση.*

*Απόδειξη.* Έστω $\rho^1 : \mathcal{A}^1 \to \mathcal{B}(H)$ η μοναδοποίηση της $\rho$, η οποία είναι πλήρως ισομετρική. Επομένως διαστέλλεται σε μια $\partial$-αναπαράσταση $\psi$ της $\mathcal{A}^1$. Από τα προηγούμενα σχόλια τότε, προκύπτει ότι η $\psi|_{\mathcal{A}}$ είναι $\partial$-αναπαράσταση για την $\rho$ (και προφανώς διαστολή της $\rho$). □

### 1.2.4 Ιδιότητες του ιδεώδους Šilov

Σε αυτήν την ενότητα συγκεντρώνουμε μερικές βασικές ιδιότητες του Šilov ιδεώδους μιας άλγεβρας τελεστών.

**Πρόταση 1.2.24** *Έστω $\beta$ ένας *-αυτομορφισμός της $C^*$-άλγεβρας $C^*(\mathcal{A})$ έτσι ώστε $\beta(\mathcal{A}) = \mathcal{A}$. Τότε το Šilov ιδεώδες $J$ είναι $\beta$-αναλλοίωτο.*

*Απόδειξη.* Αρκεί να δούμε ότι το παρακάτω διάγραμμα ορίζεται καλά και είναι μεταθετικό, λόγω των ιδοτήτων της $\beta$:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{A} \arrow[r, leftrightarrow, "\beta"] \arrow[d] & \beta(\mathcal{A}) = \mathcal{A} \arrow[d] \\
\mathcal{C}^*(\mathcal{A}) \arrow[r, leftrightarrow, "\beta"] \arrow[d] & \beta(\mathcal{C}^*(\mathcal{A})) = \mathcal{C}^*(\beta(\mathcal{A})) \arrow[d] \\
\mathcal{C}^*(\mathcal{A})/J \arrow[r] & \beta(\mathcal{C}^*(\mathcal{A}))/\beta(J) = \mathcal{C}^*(\mathcal{A})/\beta(J).
\end{tikzcd}$$

Έστω $a, b \in \mathcal{A}$ έτσι ώστε $\beta(b) = a$. Τότε

$$\begin{aligned}
\|a\| &= \|\beta(b)\| = \|b\| = \|b + J\| \\
&= \left\|\beta^{-1}(\beta(b)) + \beta^{-1}(\beta(J))\right\| \\
&\leq \|\beta(b) + \beta(J)\| = \|a + \beta(J)\| \leq \|a\|.
\end{aligned}$$

Εφαρμόζοντας το ίδιο επιχείρημα για όλες τις $\|\cdot\|_\nu$ νόρμες έχουμε τελικά ότι το $\beta(J)$ είναι ένα συνοριακό ιδεώδες της $\beta(\mathcal{A}) = \mathcal{A}$ στην $C^*(\beta(\mathcal{A})) = \mathcal{C}$. Άρα $\beta(J) \subseteq J$. Ομοίως αποδεικνύεται ότι $\beta^{-1}(J) \subseteq J$ και ολοκληρώνεται η απόδειξη. □

**Πρόταση 1.2.25** *Το $C^*$-envelope μιας άλγεβρας τελεστών δεν έχει μη-τετριμμένα συνοριακά ιδεώδη.*

*Απόδειξη.* Έστω $\mathcal{A}$ μια άλγεβρα τελεστών και $J$ ένα συνοριακό ιδεώδες της $\mathcal{A}$ στο $C^*$-envelope του. Τότε ο φυσικός *-επιμορφισμός $q : \mathcal{C}_e^*(\mathcal{A}) \to \mathcal{C}_e^*(\mathcal{A})/J$ είναι πλήρως ισομετρική απεικόνιση όταν περιορίζεται στην $\mathcal{A}$. Άρα, το $(C_e^*(\mathcal{A}), q)$ είναι $C^*$-κάλυμμα της $\mathcal{A}$. Επομένως, λόγω της καθολικής ιδιότητας που έχει το $C^*$-envelope, υπάρχει ένας *-επιμορφισμός $\pi : \mathcal{C}_e^*(\mathcal{A})/J \to C_e^*(\mathcal{A})$, έτσι ώστε $\pi(q(a)) = a$, για κάθε $a \in \mathcal{A}$. Τότε η $C^*$-άλγεβρα που παράγεται από το σύνολο $\{x \in \mathcal{C}_e^*(\mathcal{A}) : \pi \circ q(x) = x\}$ περιέχει την $\mathcal{A}$, και άρα είναι η $C_e^*(\mathcal{A})$. Άρα $\pi \circ q = id$. Έστω $x \in J$. Τότε $x = \pi(q(x)) = \pi(0) = 0$, συνεπώς $J = (0)$. □

**Πρόταση 1.2.26** *Έστω $\mathcal{A} \subseteq C^*(\mathcal{A}) = \mathcal{C}$ μια άλγεβρα τελεστών και $J$ το Šilov ιδεώδες της $\mathcal{A}$ στην $\mathcal{C}$. Τότε για κάθε συνοριακό ιδεώδες $I$ της $\mathcal{A}$ στην $\mathcal{C}$, το Šilov ιδεώδες της $q(\mathcal{A})$ στην $\mathcal{C}/I$ είναι το $J/I$, όπου $q : \mathcal{C} \to \mathcal{C}/I$ ο φυσικός *-επιμορφισμός.*

*Απόδειξη.* Πρώτα παρατηρούμε ότι το $I$ είναι ένα συνοριακό ιδεώδες, συνεπώς $I \subseteq J$ και άρα το $J/I$ έχει νόημα. Τότε το $J/I$ είναι ένα συνοριακό ιδεώδες της $q(\mathcal{A})$ στην $\mathcal{C}/I$. Πράγματι,

$$\|a + I\| = \|a\| = \|a + J\| = \|(a + I) + J/I\|,$$

εφόσον $(\mathcal{C}/I)/(J/I) \simeq (\mathcal{C}/J)$, και το ίδιο επιχείρημα χρησιμοποιείται για τις νόρμες $\|\cdot\|_\nu$. Τώρα, έστω ότι το $J'/I$ είναι το Šilov ιδεώδες στην $\mathcal{C}/I$. Τότε ένα παρόμοιο επιχείρημα μας δίνει ότι το $J'$ είναι ένα συνοριακό ιδεώδες της $\mathcal{A}$ στην $\mathcal{C}$. Επομένως, $J' \subseteq J$, άρα $J'/I \subseteq J/I$. Επίσης το $J/I$ είναι ένα συνοριακό ιδεώδες της $q(\mathcal{A})$ στην $\mathcal{C}/I$, συνεπώς $J/I \subseteq J'/I$. □

Για το επόμενο λήμμα και κυρίως για λόγους ευκολίας, διευρύνουμε τον όρισμο των συνοριακών ιδεωδών. Αν $\mathcal{A}$ είναι μια υπάλγεβρα τελεστών μιας $C^*$-άλγεβρας $\mathcal{C}$ (δίχως να υποθέτουμε ότι $\mathcal{C} = C^*(\mathcal{A})$), τότε ένα ιδεώδες $I$ της $\mathcal{C}$ καλείται συνοριακό ιδεώδες της $\mathcal{A}$ αν ο περιορισμός του φυσικού *-επιμορφισμού $q : \mathcal{C} \to \mathcal{C}/I$ στην $\mathcal{A}$ είναι ένας πλήρως ισομετρικός μορφισμός. Δηλαδή $\|[a_{ij}]\| = \inf\{\|[a_{ij}] + [x_{ij}]\| : x_{ij} \in I\}$ για κάθε $[a_{ij}] \in \mathcal{M}_\nu(\mathcal{A})$, για κάθε $\nu \geq 1$.

**Λήμμα 1.2.27** *Έστω $\mathcal{A}$ μια υπάλγεβρα τελεστών μιας $C^*$-άλγεβρας $\mathcal{C}$ και $\psi : \mathcal{C} \to \mathcal{B}$ ένας *-μονομορφισμός σε μια $C^*$-άλγεβρα $\mathcal{B}$. Αν $I$ είναι ένα συνοριακό ιδεώδες της $\psi(\mathcal{A})$ στην $\psi(\mathcal{C})$ τότε το ιδεώδες $\langle c \rangle$ που παράγει το $c$, είναι ένα συνοριακό ιδεώδες της $\mathcal{A}$ στη $\mathcal{C}$, για κάθε $c \in \mathcal{C}$ με $\psi(c) \in I$.*

*Απόδειξη.* Υποθέτουμε για λόγους ευκολίας ότι η $\mathcal{C}$ είναι μοναδιαία (αν δεν είναι τότε περνάμε στη μοναδοποίηση της $\mathcal{C}^1$). Πρώτα παρατηρούμε ότι, αν $\psi(c) \in I$, τότε το $\langle \psi(c) \rangle$ είναι ένα συνοριακό ιδεώδες της $\psi(\mathcal{A})$. Πράγματι, για κάθε $[a_{ij}] \in \mathcal{M}_\nu(\mathcal{A})$, και για κάθε $\nu \geq 1$ έχουμε ότι

$$\begin{aligned}\|[a_{ij}]\| &= \inf\{\|[a_{ij}] + [c_{ij}]\| : c_{ij} \in I\} \\ &\leq \inf\{\|[a_{ij}] + [c_{ij}]\| : c_{ij} \in \langle \psi(c) \rangle\} \leq \|[a_{ij}]\| .\end{aligned}$$

Επίσης, έχουμε ότι $\psi(\langle c \rangle) \subseteq \langle \psi(c) \rangle$, με την ισότητα να ισχύει όταν η $\psi$ είναι επίσης επί. Πράγματι, έχουμε ότι $\langle c \rangle = \overline{\mathrm{span}}\{acb + fc^*d : a, b, f, d \in \mathcal{C}\}$, εφόσον η $\mathcal{C}$ είναι μοναδιαία. Εφόσον η $\psi$ είναι (πλήρως) ισομετρική, έχουμε ότι

$$\begin{aligned}\psi(\langle c \rangle) &= \psi(\overline{\mathrm{span}}\{acb + fc^*d : a, b, f, d \in \mathcal{C}\}) \\ &= \overline{\mathrm{span}}\psi(\{acb + fc^*d : a, b, f, d \in \mathcal{C}\}) \\ &= \overline{\mathrm{span}}\{\psi(a)\psi(c)\psi(b) + \psi(f)\psi(c)^*\psi(d) : a, b, f, d \in \mathcal{C}\}) \\ &\subseteq \overline{\mathrm{span}}\{a'\psi(c)b' + f'\psi(c)^*d' : a', b', f', d' \in \mathcal{B}\} = \langle \psi(c) \rangle .\end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι το σύνολο $\psi(\langle c \rangle)$ μπορεί να μην είναι ιδεώδες της $\mathcal{B}$. Η $\psi$ είναι πλήρως ισομετρική, άρα έχουμε ότι $\|[a_{ij}] + [c_{ij}]\| = \|[\psi(a_{ij})] + [\psi(c_{ij})]\|$ για κάθε $a_{ij} \in \mathcal{A}, c_{ij} \in \langle c \rangle$, και για κάθε $\nu \in \mathbb{Z}_+$. Επομένως

$$\begin{aligned}\|[a_{ij}]\| &\geq \inf\{\|[a_{ij}] + [c_{ij}]\| : c_{ij} \in \langle c \rangle\} \\ &= \inf\{\|[\psi(a_{ij})] + [\psi(c_{ij})]\| : c_{ij} \in \langle c \rangle\} \\ &\geq \inf\{\left\|[\psi(a_{ij})] + [c'_{ij}]\right\| : c'_{ij} \in \langle \psi(c) \rangle\} = \|[a_{ij}]\| .\end{aligned}$$

Άρα το $\langle c \rangle$ είναι ένα συνοριακό ιδεώδες της $\mathcal{A}$ στη $\mathcal{C}$. □

### 1.2.5 Αυτομορφισμοί Αλγεβρών Τελεστών

Θα παρουσιάσουμε δυο παρατηρήσεις που θα χρησιμοποιηθούν στα επόμενα κεφάλαια. Οι αποδείξεις βασίζονται στην έννοια των μεγιστικών αναπαραστάσεων. Για λόγους ευκολίας, υποθέτουμε ότι η άλγεβρα τελεστών είναι μοναδιαία.

**Πρόταση 1.2.28** *Κάθε μοναδιαίος πλήρως ισομετρικός αυτομορφισμός μιας άλγεβρας τελεστών $\mathcal{A}$ επεκτείνεται σε έναν *-αυτομορφισμό του $C^*$-envelope.*

*Απόδειξη.* Έστω $\alpha : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ όπως στην εκφώνηση. Τότε το $(C_e^*(\mathcal{A}), \alpha)$ είναι $C^*$-κάλυμμα της $\mathcal{A}$. Άρα υπάρχει *-επιμορφισμός $\pi : C_e^*(\mathcal{A}) \to C_e^*(\mathcal{A})$ έτσι ώστε $\pi(\alpha(a)) = a$, για κάθε $a \in \mathcal{A}$. Επιπλέον, πάλι από τις ιδότητες της $\alpha$ έχουμε ότι το $(C_e^*(\mathcal{A}), \alpha^{-1})$ είναι $C^*$-κάλυμμα της $\mathcal{A}$ και άρα υπάρχει ένας *-επιμορφισμός $\phi : C_e^*(\mathcal{A}) \to C_e^*(\mathcal{A})$, με $\phi(\alpha^{-1}(a)) = a$. Εφόσον ο $\phi$ είναι επί, ορίζεται ο *-μορφισμός $\pi \circ \phi : C_e^*(\mathcal{A}) \to C_e^*(\mathcal{A})$ και παρατηρούμε ότι $\pi \circ \phi|_{\mathcal{A}} = id_{\mathcal{A}}$. Επομένως, $\pi \circ \phi = id_{C_e^*(\mathcal{A})}$ και άρα ο $\phi$ είναι *-ισομορφισμός. Τέλος, έχουμε ότι $\phi|_{\mathcal{A}} = \alpha$. □

Αυτό, λοιπόν, που προκύπτει από την παραπάνω πρόταση είναι ότι κάθε μοναδιαίος πλήρως ισομετρικός αυτομορφισμός $\alpha$ μιας άλγεβρας τελεστών $\mathcal{A}$ επεκτείνεται σε *-ισομορφισμό $\widetilde{\alpha}$ του $C_e^*(\mathcal{A})$.

**Πόρισμα 1.2.29** *Ένας αυτομορφισμός μιας άλγεβρας τελεστών $\mathcal{A}$ είναι πλήρως ισομετρική απεικόνιση αν, και μόνο αν, επεκτείνεται (μοναδικά) στο $C^*$-envelope της.* □

### 1.2.6 Κι ένα Παράδειγμα

Έστω $\mathcal{A}_G$ η άλγεβρα ενός γραφήματος $G$, όπως ορίστηκαν στην παράγραφο 1.1.5. Θα δείξουμε ότι το $C^*$-envelope της $\mathcal{A}_G$ είναι ακριβώς η $C^*$-άλγεβρα του γραφήματος $C^*(G)$. Ορισμένα επιχειρήματα στην παρακάτω απόδειξη αναφέρονται επιγραμματικά και αυτό γιατί είναι παρόμοια με αυτά που θα χρησιμοποιήσουμε στην περίπτωση των ημισταυρωτών γινομένων, όπου και παρουσιάζονται αναλυτικά.

Όπως έχουμε παρατηρήσει, η $\mathcal{T}_G$ είναι ένα $C^*$-κάλυμμα της $\mathcal{A}_G$ και $C^*(G) \simeq \mathcal{O}_G \simeq \mathcal{T}_G/\mathcal{K}(H_G)$. Το πρώτο βήμα, λοιπόν, είναι να αποδείξουμε ότι η $\mathcal{O}_G$ είναι ένα $C^*$-κάλυμμα της $\mathcal{A}_G$, δηλαδή ότι το $\mathcal{K}(H_G)$ είναι ένα συνοριακό ιδεώδες για την $\mathcal{A}_G$.

**Λήμμα 1.2.30** *Έστω $\mathcal{A}$ μια άλγεβρα τελεστών που δρά σε ένα χώρο Hilbert $H$. Έστω ότι η $\mathcal{A}'$ (ο μεταθέτης της $\mathcal{A}$) περιέχει μια ακολουθία από ισομετρίες $R_n$, έτσι ώστε $R_n \overset{WOT}{\longrightarrow} 0$. Τότε, το $\mathcal{K}(H)$ είναι ένα συνοριακό ιδεώδες της $\mathcal{A}$.*

*Απόδειξη.* Εφόσον $R_n \overset{WOT}{\longrightarrow} 0$, τότε $KR_n \overset{SOT}{\longrightarrow} 0$, για κάθε $K \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$. Για $\xi \in H$ με $\|\xi\| = 1$ έχουμε

$$\|A\xi\| = \|R_nA\xi\| = \|AR_n\xi\| \leq \|(A+K)R_n\xi\| + \|KR_n\xi\| \leq \|A+K\| + \|KR_n\xi\|.$$

Συνεπώς $\|A\| \leq \|A+K\|$, και άρα $\|A\| \leq \|A+\mathcal{K}(\mathcal{H})\|$. Από την άλλη, εξ ορισμού $\|A+\mathcal{K}(\mathcal{H})\| = \inf\{\|A+K\| : K \in \mathcal{K}(\mathcal{H})\|\} \leq \|A\|$. Εφαρμόζοντας το ίδιο επιχείρημα στον $\mathcal{B}(H^\nu)$, για κάθε $\nu \geq 1$ έχουμε ότι

$$\|[A_{ij}]\| = \|[A_{ij}] + \mathcal{K}(H^\nu)\| = \|[A_{ij} + \mathcal{K}(H)]\|,$$

και άρα ο $\mathcal{K}(H)$ είναι συνοριακό ιδεώδες. □

Στην περίπτωση μας, για κάθε μονοπάτι $u$, ορίζουμε τους τελεστές

$$R_u : \mathcal{H}_G \to H_G : \ \xi_w \mapsto R_u\xi_w := \begin{cases} \xi_{wu} \text{ , αν } r(u) = s(w), \\ 0 \text{ , διαφορετικά.} \end{cases}$$

Θέτοντας τότε $R_n = R_e^n$, για μια ακμή $e \in G^1$, προκύπτει από το προηγούμενο λήμμα ότι το $\mathcal{K}(H_G)$ είναι συνοριακό ιδεώδες. Άρα η $\mathcal{O}_G$ είναι ένα $C^*$-κάλυμμα της $\mathcal{A}_G$. Επομένως, υπάρχει ένας *-επιμορφισμός $\Phi : \mathcal{O}_G \to C_e^*(\mathcal{A}_G)$, έτσι ώστε $\Phi(P_x + \mathcal{K}(H_G)) = p_x$, για κάθε $x \in G^0$.

Παρατηρούμε ότι, αν $\{\hat{\beta}_z\}_{z\in\mathbb{T}}$ είναι η gauge action της $\mathcal{O}_G$, τότε κάθε $\hat{\beta}_z$ είναι αυτομορφισμός της $\mathcal{A}_G$. Επομένως, αν $\mathcal{J} = \ker\Phi$ είναι το Šilov ιδεώδες, τότε $\hat{\beta}_z(\mathcal{J}) = \mathcal{J}$. Συνεπώς, το $\mathcal{J}$ πρέπει να τέμνει την (fixed point algebra)

$$\mathcal{F}_G = \overline{\bigcup_n \mathcal{F}_{G,n}},$$

όπου $\mathcal{F}_{G,n}$, $n \in \mathbb{Z}_+$, είναι η *-υπάλγεβρα της $\mathcal{O}_G$ που παράγεται από όλα τα στοιχεία της μορφής $S_w S_u^*$, $|w| = |u| = n$. Εφόσον όμως η $\mathcal{F}_G$ είναι AF, το $\mathcal{J}$ θα τέμνει κάθε $\mathcal{F}_{G,n}$, άρα και την $\mathcal{F}_{G,0}$. Όμως η $\mathcal{F}_{G,0} = \operatorname{span}\{P_x : x \in G^0\}$, αφού οι $P_x$ είναι ανά δύο κάθετες. Συνεπώς για $\sum \lambda_k P_{x_k} \in \mathcal{F}_{G,0}$, θα έχουμε ότι

$$\left\|\sum \lambda_k P_{x_k}\right\| = \left\|\sum \lambda_k P_{x_k} + \mathcal{K}(H_G)\right\| = 0.$$

Τότε $P_{x_k} = 0$, για κάθε $k$, που είναι άτοπο.

**Πόρισμα 1.2.31** *Το $C^*$-envelope της μη-μεταθετικής άλγεβρας του δίσκου $\mathcal{A}_n$ είναι η άλγεβρα Cuntz $\mathcal{O}_n$.* □

## 1.3 Σταυρωτά Γινόμενα $C^*$-αλγεβρών

Θεωρούμε μια μοναδιαία $C^*$-άλγεβρα $\mathcal{C}$ και έστω $\alpha : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ ένας μοναδιαίος *-ισομορφισμός. Συμβολίζουμε με $\ell^1(\mathbb{Z}, \mathcal{C}, \alpha)$ την πλήρωση της γραμμικής θήκης των μονωνύμων $\delta_n \otimes c$, $n \in \mathbb{Z}$, $c \in \mathcal{C}$, ως προς τη νόρμα

$$\left| \sum_{n=-k}^{k} \delta_n \otimes c_n \right|_1 = \sum_{n=-k}^{k} \|c_n\|_{\mathcal{C}}.$$

Επομένως, $\ell^1(\mathcal{C}, \alpha, \mathbb{Z}) = \{\sum_{-\infty}^{\infty} \delta_n \otimes c_n : \sum_{-\infty}^{\infty} \|c_n\|_{\mathcal{C}} < \infty\}$.

Υπάρχουν δύο φυσιολογικοί τρόποι ώστε ο χώρος Banach που προκύπτει να εφοδιαστεί με (προσεταιριστικό) πολλαπλασιασμό. Αυτοί είναι, ο αριστερός πολλαπλασιασμός

$$(\delta_n \otimes c) *_l (\delta_m \otimes y) = \delta_{n+m} \otimes (a^m(c)y),$$

και ο δεξιός πολλαπλασιασμός

$$(\delta_n \otimes c) *_r (\delta_m \otimes y) = \delta_{n+m} \otimes (ca^n(y)).$$

Επίσης ορίζουμε την ενέλιξη $(\delta_n \otimes c)^* = \delta_{-n} \otimes \alpha^{-n}(c^*)$.

Οι προκύπτουσες *-άλγεβρες Banach θα συμβολίζονται αντίστοιχα με $\ell^1(\mathbb{Z}, \mathcal{C}, \alpha)_l$ και $\ell^1(\mathbb{Z}, \mathcal{C}, \alpha)_r$. Για ευκολία, τα στοιχεία της $\ell^1(\mathbb{Z}, \mathcal{C}, \alpha)_r$ θα γράφονται ως $c \otimes \delta_n$ αντί για $\delta_n \otimes c$. Αυτή η γραφή δίνει και έναν εύκολο τρόπο απομνημόνευσης του κανόνα πολλαπλασιασμού, αφού

$$(c \otimes \delta_n) *_r (y \otimes \delta_m) = (ca^n(y)) \otimes \delta_{n+m}.$$

**Σχόλιο 1.3.1** Κάθε μία από τις παραπάνω *-άλγεβρες Banach περιέχει ένα αντίγραφο της μοναδιαίας $C^*$-άλγεβρας $\mathcal{C}$. Πράγματι, θεωρώντας τον *-μορφισμό

$$\iota : \mathcal{C} \to \ell^1(\mathbb{Z}, \mathcal{C}, \alpha)_l : c \mapsto \delta_0 \otimes c$$

παρατηρούμε ότι ο περιορισμός της νόρμας $|\cdot|_1$ στην *-υπάλγεβρα που παράγεται από τα στοιχεία $\delta_0 \otimes c$, $c \in \mathcal{C}$, ταυτίζεται με τη νόρμα $\|\cdot\|_{\mathcal{C}}$. Επομένως η $\iota$ είναι *-μονομορφισμός.

**Σχόλιο 1.3.2** Λόγω του ορισμού του αριστερού πολλαπλασιασμού, έχουμε ότι τα στοιχεία της μορφής $\delta_n \otimes \alpha^n(c)$ μπορούν να παραγοντοποιηθούν με δύο τρόπους. Πράγματι

$$(\delta_n \otimes e) *_l (\delta_0 \otimes \alpha^n(c)) = \delta_n \otimes \alpha^n(c) = (\delta_0 \otimes c) *_l (\delta_n \otimes e),$$

όπου $e$ είναι η μονάδα της $\mathcal{C}$. Αντίστοιχα, για το δεξιό πολλαπλασιασμό έχουμε

$$(\alpha^n(c) \otimes \delta_0) *_r (e \otimes \delta_n) = \alpha^n(c) \otimes \delta_n = (e \otimes \delta_n) *_r (c \otimes \delta_0).$$

Μπορεί να μοιάζει ότι η μία άλγεβρα είναι η opposite της άλλης αλλά αυτό δεν είναι πάντα αλήθεια. Υπενθυμίζουμε ότι αν $\mathcal{B}$ είναι μια άλγεβρα, τότε η $\mathcal{B}^{opp}$ είναι ο γραμμικός χώρος $\mathcal{B}$ εφοδιασμένος με τον πολλαπλασιασμό $c \odot y := yc$, για κάθε $c, y \in \mathcal{B}$. Μπορούμε να δούμε ότι

$$(\ell^1(\mathbb{Z}, \mathcal{C}, \alpha)_l)^{opp} = \ell^1(\mathbb{Z}, \mathcal{C}^{opp}, \alpha)_r,$$

κι επομένως, στην περίπτωση που $\mathcal{C}$ είναι μεταθετική, η μία άλγεβρα είναι η opposite της άλλης.

Αυτό που ισχύει είναι ότι οι δύο αυτές *-άλγεβρες Banach είναι *-ισομετρικά ισόμορφες. Πράγματι, αν ορίσουμε

$$\Psi(\delta_n \otimes c) = a^{-n}(c) \otimes \delta_{-n},$$

τότε μπορούμε να δούμε ότι ο $\Psi$ επεκτείνεται σε ισομετρικό *-μορφισμό της $\ell^1(\mathbb{Z}, \mathcal{C}, \alpha)_l$ επί της $\ell^1(\mathbb{Z}, \mathcal{C}, \alpha)_r$. Επίσης, είναι προφανές ότι οι $(\ell^1(\mathbb{Z}, \mathcal{C}, \alpha)_l)^{opp}$ και $(\ell^1(\mathbb{Z}, \mathcal{C}, \alpha)_r)^{opp}$ είναι *-ισομετρικά ισόμορφες (μέσω της ίδιας $\Psi$). Επομένως, οι $\ell^1(\mathbb{Z}, \mathcal{C}, \alpha)_l$ και $\ell^1(\mathbb{Z}, \mathcal{C}, \alpha)_r$ έχουν τις ίδιες αναπαραστάσεις και άρα τα αποτελέσματα που θα αποδείξουμε για τη $\ell^1(\mathbb{Z}, \mathcal{C}, \alpha)_l$, θα ισχύουν και για την $\ell^1(\mathbb{Z}, \mathcal{C}, \alpha)_r$.

Έστω λοιπόν μια $|\cdot|_1$-συνεχής *-αναπαράσταση $\rho : \ell^1(\mathbb{Z}, \mathcal{C}, \alpha)_l \to \mathcal{B}(H)$, της $\ell^1(\mathbb{Z}, \mathcal{C}, \alpha)_l$ σε έναν χώρο Hilbert $H$. Είναι προφανές ότι $\|\rho\| = 1$. Επίσης, η $(H, \rho \circ \iota)$ είναι *-αναπαράσταση της $\mathcal{C}$, και τη συμβολίζουμε με $(H, \pi)$. Ακόμα, ο τελεστής $\rho(\delta_1 \otimes e)$ είναι ορθομοναδιαίος του $\mathcal{B}(H)$, και συμβολίζεται με $U$. Πράγματι,

$$U^*U = \rho((\delta_1 \otimes e)^* *_l \delta_1 \otimes e) = \rho(\delta_0 \otimes e) = I_H,$$

και ομοίως $UU^* = I_H$. Επομένως $\rho(\delta_n \otimes e) = U^n$.

Επειδή τα στοιχεία $\delta_n \otimes a^n(c)$ μπορούν να παραγοντοποιηθούν με δύο τρόπους και η $\rho$ είναι μορφισμός, το ζεύγος $(\pi, U)$ ικανοποιεί την εξής συναλλοίωτη σχέση:

$$\begin{aligned}\pi(c)U^n &= \rho(\delta_0 \otimes c)\rho(\delta_n \otimes e) = \rho((\delta_0 \otimes c) *_l (\delta_n \otimes e)) = \\ &= \rho(\delta_n \otimes a^n(c)) = \rho((\delta_n \otimes e) *_l (\delta_0 \otimes a^n(c))) = U^n \pi(a^n(c)).\end{aligned}$$

Ένα ζεύγος $(\pi, U)$, όπου η $(H, \pi)$ είναι *-αναπαράσταση της $\mathcal{C}$ και $U$ ορθομοναδιαίος τελεστής του $\mathcal{B}(H)$, έτσι ώστε να ικανοποιείται η προηγούμενη σχέση καλείται *αριστερά συναλλοίωτο ορθομοναδιαίο ζεύγος (αρ-συν. ορθ. ζεύγος)*. Επομένως, μια συνεχής *-αναπαράσταση της $\ell^1(\mathbb{Z}, \mathcal{C}, \alpha)_l$ επάγει ένα αριστερά συναλλοίωτο ορθομοναδιαίο ζεύγος $(\pi, U)$.

Το αντίστροφο είναι επίσης αληθές. Πράγματι, αν $(\pi, U)$ είναι ένα αρ-συν. ορθ. ζεύγος, τότε επάγει μια συνεχή *-αναπαράσταση της $\ell^1(\mathbb{Z}, \mathcal{C}, \alpha)_l$, η οποία θα συμβολίζεται με $(U \times \pi)$. Διότι, αν θέσουμε $(U \times \pi)(\sum_{n=-k}^{k} \delta_n \otimes c_n) := \sum_{n=-k}^{k} U^n \pi(c_n)$, τότε η $\rho$ είναι *-αναπαράσταση της άλγεβρας των «τριγωνομετρικών πολυωνύμων» που επεκτείνεται στην $\ell^1(\mathbb{Z}, \mathcal{C}, \alpha)_l$, αφού

$$\begin{aligned}\left\|(U \times \pi)(\sum_{n=-k}^{k} \delta_n \otimes c_n)\right\|_{\mathcal{B}(H)} &= \left\|\sum_{n=-k}^{k} U^n \pi(c_n)\right\|_{\mathcal{B}(H)} \\ &\leq \sum_{n=-k}^{k} \|U^n \pi(c_n)\|_{\mathcal{B}(H)} = \sum_{n=-k}^{k} \|\pi(c_n)\|_{\mathcal{B}(H)} \\ &\leq \sum_{n=-k}^{k} \|c_n\|_{\mathcal{C}} = |\sum_{n=-k}^{k} \delta_n \otimes c_n|_1.\end{aligned}$$

Αντίστοιχα, ορίζουμε *δεξιά συναλλοίωτα ορθομοναδιαία ζεύγη (δεξ-συν. ορθ. ζεύγη)* $(\pi, U)$, όπου η $(H, \pi)$ είναι *-αναπαράσταση της $\mathcal{C}$ και $U$ ορθομοναδιαίος τελεστής του $\mathcal{B}(H)$, από τη σχέση

$$U^n \pi(c) = \pi(a^n(c)) U^n \text{ για κάθε } c \in \mathcal{C}.$$

Πάλι, παρατηρούμε ότι υπάρχει μια 1-1 και επί αντιστοιχία μεταξύ των συνεχών *-αναπαραστάσεων της $\ell^1(\mathbb{Z}, \mathcal{C}, \alpha)_r$ και των δεξ-συν. ορθ. ζευγών. Η επαγόμενη *-αναπαράσταση ενός τέτοιου ζεύγους θα συμβολίζεται αντίστοιχα με $(\pi \times U)$, όπου $(\pi \times U)(\sum_{n=-k}^{k} c_n \otimes \delta_n) = \sum_{n=-k}^{k} \pi(c_n) U^n$.

**Σχόλιο 1.3.3** Παρατηρούμε ότι αν το $(\pi, U)$ είναι αρ-συν. ορθ. ζεύγος τότε $\pi(c)U = U\pi(\alpha(c))$ για κάθε $c \in \mathcal{C}$ και άρα παίρνοντας τους συζυγείς τελεστές,

$U^*\pi(c) = \pi(\alpha(c))U^*$, εφόσον η $\mathcal{C}$ είναι αυτοσυζυγής. Επομένως η $(U \times \pi)$ είναι $*$-αναπαράσταση της $\ell^1(\mathbb{Z}, \mathcal{C}, \alpha)_l$ αν, και μόνο αν, η $(\pi \times U^*)$ είναι $*$-αναπαράσταση της $\ell^1(\mathbb{Z}, \mathcal{C}, \alpha)_r$.

**Παράδειγμα 1.3.4** Ένα παράδειγμα αρ-συν. ορθ. ζεύγους είναι αυτό που προκύπτει από τη left regular representation. Έστω $(H_0, \pi)$ μια (πιστή) αναπαράσταση της $\mathcal{C}$ και $H = H_0 \otimes \ell^2(\mathbb{Z})$. Ορίζουμε $\widehat{\pi} : \mathcal{C} \to \mathcal{B}(H)$, έτσι ώστε $\widehat{\pi}(c) = \text{diag}\{\pi(\alpha^n(c)) : n \in \mathbb{Z}\}$ και $U = 1_{H_0} \otimes u$, όπου $u$ είναι ο bilateral shift του $\ell^2(\mathbb{Z})$. Επομένως, μπορούμε να θεωρούμε ότι έχουν την εξής μορφή σε πίνακες

$$\widehat{\phi}(x) = \begin{bmatrix} \ddots & & & & \\ & \phi(\alpha^{-1}(c)) & & & \\ & & \phi(c) & & \\ & & & \phi(\alpha(c)) & \\ & & & & \ddots \end{bmatrix}, \quad c \in \mathcal{C}, \text{ και}$$

$$U = \begin{bmatrix} \ddots & & & & \\ \ddots & 0 & & & \\ & \mathbf{1}_{\mathcal{H}_0} & 0 & & \\ & & \mathbf{1}_{\mathcal{H}_0} & 0 & \\ & & & \ddots & \ddots \end{bmatrix}.$$

Τότε το $(\widehat{\pi}, U)$ είναι ένα αρ-συν. ορθ. ζεύγος. Η $C^*$-υπάλγεβρα του $\mathcal{B}(H)$ που παράγεται από τα στοιχεία $\widehat{\pi}(c)$, $c \in \mathcal{C}$, και $U$, καλείται (αριστερή) $C^*$-reduced, και συμβολίζεται με $C_l^*$. Παρατηρούμε ότι, η αριστερά συναλλοίωτη σχέση μας επιτρέπει να περιγράψουμε τη $C_l^*$ ως τη norm-κλειστή γραμμική θήκη των «τριγωνομετρικών πολυωνύμων» $\sum_{n=-k}^{k} U^n \widehat{\pi}(c_n)$, $c_n \in \mathcal{C}$.

Από το προηγούμενο σχόλιο, έχουμε επίσης το δεξ-συν. ορθ. ζεύγος $(\widehat{\pi}, U^*)$. Τότε η $C^*$-υπάλγεβρα του $\mathcal{B}(H)$ που παράγεται από τα στοιχεία $\widehat{\pi}(c)$, $c \in \mathcal{C}$, και $U^* = 1_{H_0} \otimes u^*$ (όπου $u^*$ είναι ο backwards bilateral shift) καλείται (δεξιά) $C^*$-reduced και συμβολίζεται[3] με $C_r^*$. Αυτή η $C^*$-άλγεβρα είναι ακριβώς η norm-κλειστή γραμμική θήκη των «τριγωνομετρικών πολυωνύμων» $\sum_{n=-k}^{k} \widehat{\pi}(c_n)(U^*)^n$, $c_n \in \mathcal{C}$.

Ορίζουμε *το αριστερό $C^*$-crossed product με $*$-ισομορφισμό* $\mathbb{Z} \rtimes_\alpha \mathcal{C}$ να είναι η enveloping άλγεβρα τελεστών της $*$-άλγεβρας Banach $\ell^1(\mathbb{Z}, \mathcal{C}, \alpha)_l$ ως προς την

[3] Στην βιβλιογραφία το σύμβολο $C_r^*$ χρησιμοποιείται για την left $C^*$-reduced άλγεβρα. Εδώ, η παράμετρος "r" αναφέρεται στο δεξί πολλαπλασιασμό.

οικογένεια των $|\cdot|_1$-συστολών αναπαραστάσεών της. Όπως έχουμε αναφέρει, αυτή προκύπτει ορίζοντας τις ημινόρμες

$$\|[F_{i,j}]\|_\nu = \sup\{\|[(U \times \pi)(F_{i,j})]\| : (\pi, U) \text{ αρ-συν. ορθ. ζεύγος}\}.$$

για κάθε $[F_{i,j}] \in \mathcal{M}_\nu(\ell^1(\mathbb{Z}, \mathcal{C}, \alpha)_l)$, $\nu \in \mathbb{Z}_+$. Εφόσον η $\|F\|_1$ είναι μια $C^*$-ημινόρμα, η enveloping άλγεβρα τελεστών θα είναι μια $C^*$-άλγεβρα και άρα η επαγόμενη δομή θα είναι μοναδική. Θα δείξουμε ότι στην πραγματικότητα η $\|\cdot\|_1$ είναι νόρμα και άρα ταυτίζεται με τη $\|\cdot\|_\infty$. Για να το πετύχουμε αυτό, αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχει τουλάχιστον μια πιστή αναπαράσταση $(U \times \pi)$.

Έστω $H = H_0 \otimes \ell^2(\mathbb{Z})$ και $z \in \mathbb{T}$. Ορίζουμε $U_z \in \mathcal{B}(H)$ έτσι ώστε $U_z(\xi \otimes e_m) = z^m \xi \otimes e_m$. Τότε οι $U_z$ είναι ορθομοναδιαίοι και επάγουν τους *-αυτομορφισμούς $\beta_z = Ad_{U_z}$ της $\mathcal{B}(H)$. Επίσης, έχουμε ότι $\beta_z(\widehat{\pi}(c)) = \widehat{\pi}(c)$, για κάθε $c \in \mathcal{C}$ και ότι $\beta_z(U^m) = z^m U^m$, για κάθε $m \in \mathbb{Z}$. Συνεπώς οι $\beta_z$ ορίζουν *-αυτομορφισμούς της $C_l^*$. Αν $\lim_n z_n = z_0$, τότε για το μονώνυμο $U^m\widehat{\pi}(c)$ ισχύει ότι $\lim_n \beta_{z_n}(U^m\widehat{\pi}(c) = \beta_{z_0}(U^m\widehat{\pi}(c))$. Το ίδιο ισχύει και για κάθε πολυώνυμο $\sum_{n=-k}^{k} U^n\widehat{\pi}(c_n)$, και ένα $\epsilon/3$-επιχείρημα επάγει ότι η $\{\beta_z\}_{z\in\mathbb{T}}$ είναι point-norm συνεχής οικογένεια *-αυτομορφισμών της $C_l^*$. Άρα, για κάθε $m \in \mathbb{Z}$ ορίζονται οι *συντελεστές Fourier*,

$$E_m(A) = \int_{\mathbb{T}} \beta_z(A) z^{-m} dz, \quad A \in C_l^*,$$

όπου $dz$ το κανονικοποιημένο μέτρο Lebesgue στην περιφέρεια $\mathbb{T}$. Ένας απλός υπολογισμός δίνει ότι, αν $F = \sum_{-\infty}^{\infty} \delta_n \otimes c_n$ και $A = (U \times \widehat{\pi})(F)$, τότε $E_m(A) = \widehat{\pi}(c_m)$. Η εικόνα της $E_0$ ονομάζεται fixed-point άλγεβρα και συμβολίζεται με $E^\beta$. Εδώ έχουμε ότι $E^\beta = \widehat{\pi}(\mathcal{C})$.

**Πρόταση 1.3.5** *Έστω $(H_0, \pi)$ μια πιστή αναπαράσταση της $\mathcal{C}$. Τότε η left regular αναπαράσταση $(U \times \widehat{\pi})$ είναι πιστή αναπαράσταση της $\ell^1(\mathcal{C}, \alpha, \mathbb{Z})_l$.*

*Απόδειξη.* Έστω $F = \sum_{-\infty}^{\infty} \delta_n \otimes c_n \in \ell^1(\mathcal{C}, \alpha, \mathbb{Z})_l$ και $(U \times \widehat{\pi})(F) = 0$. Τότε $\|\widehat{\pi}(c_m)\| = \|E_m(U \times \widehat{\pi})(F)\| \leq \|(U \times \widehat{\pi})(F)\| = 0$ για κάθε $m \in \mathbb{Z}$. Επομένως $c_m = 0$, για κάθε $m \in \mathbb{Z}$. Άρα $F = 0$. □

Συνεπώς μπορούμε να δώσουμε τους εξής ορισμούς.

**Ορισμός 1.3.6** 1. *Το αριστερό σταυρωτό γινόμενο με *-ισομορφισμό $\mathbb{Z} \times_\alpha \mathcal{C}$* είναι η $C^*$-άλγεβρα που προκύπτει από την πλήρωση της *-άλγεβρας Banach $\ell^1(\mathbb{Z}, \mathcal{C}, \alpha)_l$, ως προς τη νόρμα

$$\|F\|_{\infty,l} = \sup\{\|(U \times \pi(F))\| : (\pi, U) \text{ αρ-συν. ορθ. ζεύγος}\}.$$

2. *Το δεξιό σταυρωτό γινόμενο με *-ισομορφισμό* $\mathcal{C} \rtimes_\alpha \mathbb{Z}$ είναι η $C^*$-άλγεβρα που προκύπτει από την πλήρωση της *-άλγεβρας Banach $\ell^1(\mathbb{Z}, \mathcal{C}, \alpha)_r$, ως προς τη νόρμα

$$\|F\|_{\infty,r} = \sup\{\|(\pi \times U)(F)\| : (\pi, U) \text{ δεξ-συν. ορθ. ζεύγος}\}.$$

Επομένως η $\mathbb{Z} \ltimes_\alpha \mathcal{C}$ είναι η εικόνα της καθολικής αναπαράστασης που προκύπτει από το ευθύ άθροισμα (αρκετών) αναπαραστάσεων της $\ell^1(\mathcal{C}, \alpha, \mathbb{Z})_l$, την οποία και θα συμβολίζουμε με $(U_u \times \pi_u)$. Άρα η $\mathbb{Z} \ltimes_\alpha \mathcal{C}$ είναι η κλειστή γραμμική θήκη των «τριγωνομετρικών πολυωνύμων» $\sum_{n=-k}^{k} U_u^m \pi_u(c_n)$.

Συνεπώς το αριστερό (αντ. δεξιό) σταυρωτό γινόμενο έχει την εξής καθολική ιδιότητα:

> για κάθε αρ-συν. ορθ ζεύγος (αντ. δεξ-συν. ορθ. ζεύγος) $(\pi, U)$ υπάρχει *-επιμορφισμός $\Phi : \mathbb{Z} \ltimes_\alpha \mathcal{C} \to C^*(\pi, U)$ έτσι ώστε $\Phi(\pi_u(c)) = \pi(c)$, για κάθε $c \in \mathcal{C}$, και $\Phi(U_u^m) = U^m$, για κάθε $m \in \mathbb{Z}$.

**Θεώρημα 1.3.7** *Το αριστερό σταυρωτό γινόμενο είναι *-ισόμορφο προς το δεξί σταυρωτό γινόμενο.*

*Απόδειξη.* Αρκεί να παρατηρήσουμε ότι ο μορφισμός

$$\Psi : \ell^1(\mathcal{C}, \alpha, \mathbb{Z})_l \to \ell^1(\mathcal{C}, \alpha, \mathbb{Z})_r : \delta_n \otimes c \mapsto a^{-n}(c) \otimes \delta_{-n},$$

είναι $\|\cdot\|_{\infty,l}$-$\|\cdot\|_{\infty,r}$-ισομετρία. Αυτό όμως είναι προφανές αφού η $\rho$ είναι αναπαράσταση της $\ell^1(\mathcal{C}, \alpha, \mathbb{Z})_l$ αν και μόνο αν η $\rho \circ \Psi^{-1}$ είναι αναπαράσταση της $\ell^1(\mathcal{C}, \alpha, \mathbb{Z})_r$. □

Η καθολική ιδιότητα μας επιτρέπει να ορίσουμε τη δυική δράση στο σταυρωτό γινόμενο $\mathbb{Z} \ltimes_\alpha \mathcal{C}$. Πράγματι, θέτουμε $\gamma_z(\pi_u(c)) = \pi_u(c)$ και $\gamma_z(U_u^m) = z^m U_u^m$. Εφόσον το $(\pi_u(c), zU_u)$ είναι αρ-συν. ορθ. ζεύγος προκύπτει ότι η $\gamma_z$ ορίζει *-ενδομορφισμό του $\mathbb{Z} \ltimes_\alpha \mathcal{C}$, για κάθε $z \in \mathbb{T}$. Επομένως είναι *-αυτομορφισμός της. Τέλος, η $\{\gamma_z\}_{z\in\mathbb{T}}$ είναι μια point-norm συνεχής οικογένεια, λόγω του ότι κάθε στοιχείο του σταυρωτού γινομένου είναι όριο τριγωνομετρικών πολυωνύμων. Επομένως μπορούμε να ορίσουμε την πιστή συστολή

$$\mathcal{E}(F) = \int_z \gamma_z(F) dz, \quad F \in \mathbb{Z} \ltimes_\alpha \mathcal{C}.$$

Παρατηρούμε ότι η εικόνα της απεικόνισης $\mathcal{E}$ (δηλαδή η fixed point άλγεβρα $\mathcal{E}^\gamma$) είναι η $\mathcal{C}$.

**Θεώρημα 1.3.8** *Το αριστερό (αντ. δεξιό) σταυρωτό γινόμενο $\mathbb{Z} \rtimes_\alpha \mathcal{C}$ (αντ. $\mathcal{C} \rtimes_\alpha \mathbb{Z}$) είναι *-ισόμορφο με την $\mathcal{C}_l^*$ (αντ. $\mathcal{C}_r^*$).*

*Απόδειξη.* Θα χρησιμοποιήσουμε ένα κλασσικό επιχείρημα που στηρίζεται στη δυϊκή δράση. Έστω $(H, \pi)$ μια πιστή αναπαράσταση της $\mathcal{C}$, $(U \times \widehat{\pi})$ η left regular αναπαράσταση και $\Phi : \mathbb{Z} \rtimes_\alpha \mathcal{C} \to \mathcal{C}_l^*$ ο φυσικός *-επιμορφισμός. Τότε ο περιορισμός της $\Phi$ στην fixed-point άλγεβρα $\mathcal{E}^\gamma$ ισούται με $\widehat{\pi}$ και άρα είναι πιστή. Παρατηρούμε ότι $\Phi \circ \gamma_z = \beta_z \circ \Phi$. Επομένως, αν $F \in \ker \Phi$, τότε $F^*F \in \ker \Phi$, και έχουμε ότι

$$\begin{aligned}\Phi(\mathcal{E}(F^*F)) &= \Phi\left(\int_z \gamma_z(F^*F)dz\right)\\ &= \int_z \Phi(\gamma_z(F^*F))dz = \int_z \beta_z(\Phi(F^*F))dz = 0.\end{aligned}$$

Άρα, $\mathcal{E}(F^*F) = 0$, συνεπώς $F^*F = 0$. □

**Πόρισμα 1.3.9** *Η $\mathcal{C}_l^*$ είναι *-ισόμορφη προς την $\mathcal{C}_r^*$.* □

### 1.3.1 Fourier-αναλλοίωτα ιδεώδη

Αξίζει να αναφέρουμε κάποια αποτελέσματα που συνδέουν το δυναμικό σύστημα με ορισμένα ιδεώδη του σταυρωτού γινομένου. Στα επόμενα ταυτίζουμε το σταυρωτό γινόμενο με την $C_l^*$.

**Ορισμός 1.3.10** Έστω το δυναμικό σύστημα $(\mathcal{C}, \alpha)$, όπου $\alpha$ *-αυτομορφισμός. Ένα ιδεώδες $I$ στη $\mathcal{C}$ θα καλείται *$\alpha$-δι-αναλλοίωτο* αν $\alpha(I) \subseteq I$ και $\alpha^{-1}(I) \subseteq I$. Επιπλέον, το δυναμικό σύστημα θα καλείται *bi-minimal* αν δεν έχει μη τετριμμένα $\alpha$-δι-αναλλοίωτα ιδεώδη.

Χρησιμοποιούμε την δυϊκή σράση $\{\beta_z\}_{z\in\mathbb{T}}$ προκειμένου να ορίσουμε τους *συντελεστές Fourier* ενός στοιχείου $F \in \mathcal{C} \rtimes_\alpha \mathbb{Z}$. Αυτοί είναι οι

$$E_m(F) = \int_{z\in\mathbb{T}} \beta_z(F) z^{-m} dz, \quad m \in \mathbb{Z}.$$

**Πρόταση 1.3.11** *Για κάθε $F \in C \rtimes_\alpha \mathbb{Z}$ έχουμε ότι $E_m(F) = E(U^{-m}F)$ για κάθε $m \in \mathbb{Z}$.*

*Απόδειξη.* Αρκεί να δείξουμε ότι ο πυρήνας των δύο ολοκληρωμάτων είναι ίδιος. Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι $\beta_z(F)z^{-m} = \beta_z(U^{-m}F)$, για κάθε $F \in \mathcal{C} \rtimes_\alpha \mathbb{Z}$. Εφόσον όμως το σταυρωτό γινόμενο είναι η κλειστή γραμμική θήκη των μονωνύμων $U^n\widehat{\pi}(c)$ αρκεί να δείξουμε την ισότητα για κάθε μονώνυμο $F$ αυτής της μορφής, το οποίο ισχύει. $\square$

Επομένως κάθε συντελεστής Fourier είναι ένα στοιχείο της $\mathcal{C}$. Ειδικότερα αν $F = \sum_{n=-k}^{k} U^n\widehat{\pi}(c_n)$, τότε $E_m(F) = \widehat{\pi}(c_m)$. Το επόμενο λήμμα δείχνει πώς οι συντελεστές Fourier ενός στοιχείο «ανοικοδομούν» το αυτό στοιχείο.

**Λήμμα 1.3.12** (Λήμμα Féjer) *Έστω $F \in \mathcal{C} \rtimes_\alpha \mathbb{Z}$ και $z \in \mathbb{T}$. Θέτουμε*

$$\mu_n(F) = \sum_{m=-n}^{n} U^m E_m(T)\ ,\ \sigma_l(F) = \frac{1}{l+1}\sum_{m=0}^{l} \mu_n(F).$$

*Τότε $\sigma_l(F) \xrightarrow{\|\cdot\|} F$.* $\square$

Έστω $\mathcal{I}$ ένα μη μηδενικό ιδεώδες του $\mathcal{C} \rtimes_\alpha \mathbb{Z}$. Τότε ο χώρος $E_n(\mathcal{I})$ είναι ένα μη-μηδενικό $\alpha$-δι-αναλλοίωτο ιδεώδες της $\mathcal{C}$. Για παράδειγμα, για $c \in \mathcal{C}$ και $F \in \mathcal{I}$ έχουμε

$$\begin{aligned}\widehat{\pi}(c)\cdot E_n(F) = \widehat{\pi}(c)\cdot E(U^{-n}F) &= \int_{\mathbb{T}} \widehat{\pi}(c)\beta_z(U^{-n}F)dz\\ &= \int_{\mathbb{T}} \beta_z(\widehat{\pi}(c)U^{-n}F)dz = \int_{\mathbb{T}} \beta_z(U^{-n}\widehat{\pi}(\alpha^{-n}(c))F)dz\\ &= E_n(\widehat{\pi}(\alpha^{-n}(c))F) \in E_n(\mathcal{I}).\end{aligned}$$

Ομοίως έχουμε ότι $E_n(F)c = E_n(Fc) \in E_n(\mathcal{I})$. Επιπλέον,

$$\begin{aligned}\alpha(E_n(F)) = UE_n(F)U^* = UE(U^{-n}F)U^* &= \int_{\mathbb{T}} U\beta_z(U^{-n}F)U^*dz\\ &= \int_{\mathbb{T}} \beta_z(UU^{-n}FU^*)dz = \int_{\mathbb{T}} \beta_z(U^{-n+1}FU^*)dz \in E_n(\mathcal{I}).\end{aligned}$$

Ομοίως, έχουμε $\alpha^{-1}(E_n(F)) = U^*E_n(F)U \in E_n(\mathcal{I})$.

Τέλος, αν $E_n(\mathcal{I}) = (0)$ τότε $E(U^{-n}F^*F) = E_n(F^*F) = 0$, για κάθε $0 \neq F \in \mathcal{I}$. Όμως η $E$ είναι πιστή, επομένως $U^{-n}F^*F = 0$. Συνεπώς $F^*F = 0$, αφού ο $U$ είναι ορθομοναδιαίος. Άρα $F = 0$, που οδηγεί στην αντίφαση ότι $\mathcal{I} = (0)$.

**Ορισμός 1.3.13** Έστω $(\mathcal{C}, \alpha)$ δυναμικό σύστημα όπου $\alpha : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ είναι *-αυτομορφισμός. Ένα ιδεώδες $\mathcal{I}$ του $\mathcal{C} \rtimes_\alpha \mathbb{Z}$ καλείται *Fourier-αναλλοίωτο* αν $E_n(F) \in \mathcal{I}$ για κάθε $n \in \mathbb{Z}$.

Παρατηρούμε ότι το παραπάνω είναι ισοδύναμο με το γεγονός ότι τα μονώνυμα Fourier $U^n E_n(F) \in \mathcal{I}$, για κάθε $F \in \mathcal{I}$ και $n \in \mathbb{Z}$.

**Θεώρημα 1.3.14** *Το δυναμικό σύστημα $(\mathcal{C}, \alpha)$ είναι bi-minimal αν και μόνο αν δεν έχει μη-τετριμμένα Fourier-αναλλοίωτα ιδεώδη.*

*Απόδειξη.* Έστω $J$ ένα γνήσιο $\alpha$-δι-αναλλοίωτο ιδεώδες της $\mathcal{C}$. Τότε το σταυρωτό γινόμενο $\mathcal{J} \rtimes_{\alpha|_\mathcal{J}} \mathbb{Z}$ είναι ένα γνήσιο Fourier-αναλλοίωτο ιδεώδες του σταυρωτού γινομένου. Πράγματι, εξ ορισμού είναι Fourier-αναλλοίωτο. Αν δεν ήταν γνήσιο, τότε αναγκαστικά ταυτίζεται με το σταυρωτό γινόμενο (δεν μπορεί να είναι το μηδενικό, γιατί τότε το $\mathcal{J} = (0)$). Επομένως $\mathcal{J} \rtimes_{\alpha|_\mathcal{J}} \mathbb{Z} = \mathcal{C} \rtimes_\alpha \mathbb{Z}$. Χρησιμοποιώντας τη δυϊκή σράση έχουμε ότι αντίστοιχες fixed point άλγεβρες πρέπει να ταυτίζονται και άρα $\mathcal{J} = \mathcal{C}$, που είναι άτοπο.

Για το αντίστροφο, υποθέτουμε ότι το δυναμικό σύστημα $(\mathcal{C}, \alpha)$ είναι bi-minimal και έστω $\mathcal{I}$ ένα μη-τετριμμένο Fourier-invariant ιδεώδες του σταυρωτού γινομένου $\mathcal{C}_\infty \rtimes_{\alpha_\infty} \mathbb{Z}$. Τότε κάθε $E_n(\mathcal{I})$ είναι ένα μη-μηδενικό $\alpha$-δι-αναλλοίωτο ιδεώδες της $\mathcal{C}$. Συνεπώς $E_n(\mathcal{I}) = \mathcal{C}$ για κάθε $n \in \mathbb{Z}$. Εφαρμόζοντας το Λήμμα Féjer 1.3.12 έχουμε ότι $\mathcal{I} = \mathcal{C} \rtimes_\alpha \mathbb{Z}$. □

**Σχόλιο 1.3.15** Η έννοια της bi-minimality δεν εγγυάται απλότητα για το παραγόμενο σταυρωτό γινόμενο ακόμα και στις πιο απλές περιπτώσεις. Το παρακάτω αποτελεί ένα τέτοιο αντιπαράδειγμα.

Έστω $(\mathcal{C}, \alpha)$ το δυναμικό σύστημα που προκύπτει όταν $\mathcal{C} = C(\{x\})$ και $\alpha = \mathrm{id}$. Είναι προφανές ότι αυτό το δυναμικό σύστημα είναι bi-minimal. Παρόλα αυτά το σταυρωτό γινόμενο $C \rtimes_\alpha \mathbb{Z}$ είναι ισόμορφο με τη $C(\mathbb{T})$, και άρα δεν είναι απλή $C^*$-άλγεβρα (περιέχει δηλαδή μη-τετριμμένα ιδεώδη).

### 1.3.2 Κατασκευές δυναμικών συστημάτων

Σε αυτήν την ενότητα θα δούμε πώς από ένα δυναμικό σύστημα μιας μοναδιαίας $C^*$-άλγεβρας με έναν μοναδιαίο *-μορφισμό μπορούμε να κατασκευάζουμε δυναμικά συστήματα μιας νέας $C^*$-άλγεβρας ώστε ο επαγόμενος *-μορφισμός να είναι 1-1 ή *-αυτομορφισμός.

Έστω, λοιπόν, $\mathcal{C}$ μια μοναδιαία $C^*$-άλγεβρα και $\alpha : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ ένας μοναδιαίος *-μορφισμός. Τότε μπορούμε να ορίσουμε το ιδεώδες $\mathcal{R}_\alpha$ του δυναμικού συστήματος να είναι το σύνολο $\overline{\cup_n \ker \alpha^n}$. Το $\mathcal{R}_\alpha$ καλείται το *ριζικό του δυναμικού συστήματος*.

**Πρόταση 1.3.16** *Το ιδεώδες* $\mathcal{R}_\alpha$ *είναι ίσο με* $\{c \in \mathcal{C} : \lim_n \alpha^n(c) = 0\}$.

*Απόδειξη.* Έστω $c \in \mathcal{R}_\alpha$ και $\epsilon > 0$. Τότε, υπάρχει $n_0$ και $y \in \mathcal{C}$, έτσι ώστε $\alpha^{n_0}(y) = 0$ και $\|c - y\| < \epsilon$. Εφόσον ο $\alpha^m$ είναι *-μορφισμός, έπεται ότι για κάθε $m \geq n_0$,

$$\|\alpha^m(c)\| = \|\alpha^m(c) - \alpha^m(y)\| \leq \|c - y\| < \epsilon,$$

και άρα $\lim_n \alpha^n(c) = 0$.

Για το αντίστροφο, έστω $c$ με $\lim_n \alpha^n(c) = 0$ και υποθέτουμε ότι το $c$ δεν ανήκει στο $\mathcal{R}_\alpha$. Έστω $\epsilon > 0$· τότε υπάρχει $n_0$ έτσι ώστε $\|\alpha^{n_0}(c)\| < \epsilon$. Για τον *-μορφισμό $\alpha^{n_0} : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$, έχουμε ότι το $c$ δεν ανήκει στο $\ker \alpha^{n_0}$. Επομένως,

$$\|c + \ker \alpha^{n_0}\| = \|\alpha^{n_0}(c)\| < \epsilon.$$

Εφόσον $\mathcal{R}_\alpha \supseteq \ker \alpha^{n_0}$, έπεται ότι $\|c + \mathcal{R}_\alpha\| \leq \|c + \ker \alpha^{n_0}\| < \epsilon$, για κάθε $\epsilon > 0$. Συνεπώς $c \in \mathcal{R}_\alpha$, και καταλήγουμε σε αντίφαση. □

Από την προηγούμενη πρόταση προκύπτει ότι το ιδεώδες $\mathcal{R}_\alpha$ είναι $\alpha$-αναλλοίωτο και ότι $\alpha^{-1}(\mathcal{R}_\alpha) = \mathcal{R}_\alpha$. Επομένως μπορούμε να ορίσουμε τον *-μορφισμό

$$\dot{\alpha} : \mathcal{C}/\mathcal{R}_\alpha \to \mathcal{C}/\mathcal{R}_\alpha : c + \mathcal{R}_\alpha \mapsto \alpha(c) + \mathcal{R}_\alpha.$$

Είναι προφανές ότι ο $\dot{\alpha}$ είναι *-μονομορφισμός.

**Σχόλιο 1.3.17** Σε μερικές περιπτώσεις το $\mathcal{R}_\alpha$ είναι αρκετά μεγάλο, ώστε η $\mathcal{C}/\mathcal{R}_\alpha$ να είναι η τετριμμένη άλγεβρα $\mathbb{C}$. Για παράδειγμα, έστω $X = \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$, η συμπαγοποίηση ενός σημείου του $\mathbb{R}^+$ και $\mathcal{C} = C(X)$. Τότε η $\mathcal{C}$ είναι η μοναδοποίηση της $C_0(\mathbb{R}^+)$. Έστω $\alpha : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ ο *-μορφισμός που προκύπτει από την $\phi : X \to X$ με $\phi(x) = x + 1$. Έστω $f \in C_0(\mathbb{R}^+)$. Τότε για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $n_0$ έτσι ώστε $\left\|f \cdot \chi_{[n,+\infty]}\right\| < \epsilon$, για κάθε $n \geq n_0$. Όμως,

$$\|\alpha^n(f)\| = \|f \circ \phi^n\| = \sup\{|f(x+n)| : x \in \mathbb{R}^+\} = \left\|f \cdot \chi_{[n,+\infty]}\right\|.$$

Επομένως για κάθε $f \in C_0(\mathbb{R}^+)$ έπεται ότι $\alpha^n(f) \to 0$ και άρα $f \in \mathcal{R}_\alpha$. Εφόσον $\mathcal{C} = C_0(\mathbb{R}^+) \oplus \mathbb{C}$, έπεται ότι $\mathcal{R}_\alpha = C_0(\mathbb{R}^+)$. Άρα $\mathcal{C}/\mathcal{R}_\alpha = \mathbb{C}$.

Τώρα, ας δούμε μια άλλη κατασκευή που μας επιτρέπει να φτιάχνουμε δυναμικά συστήματα με *-αυτομορφισμό. Αν, λοιπόν, $\mathcal{C}$ είναι μια μοναδιαία $C^*$-άλγεβρα και $\alpha : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ ένας μοναδιαίος *-μορφισμός, ονομάζουμε $\mathcal{C}_\infty$ το ευθύ όριο

$$\mathcal{C} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{C} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{C} \xrightarrow{\alpha} \cdots$$

Δηλαδή, $\mathcal{C}_\infty = \varinjlim(\mathcal{C}_n, \alpha_n)$, όπου $\mathcal{C}_n = \mathcal{C}$ και $\alpha_n = \alpha$. Αν $\iota_n : \mathcal{C}_n \to \mathcal{C}_\infty$ είναι ο επαγόμενος *-μορφισμός, τότε $\ker \iota_n = \mathcal{R}_\alpha$. Πράγματι, για κάθε $n$ έχουμε

$$\iota_n : \mathcal{C}_n \to \mathcal{C}_\infty : c \mapsto [0, \dots, c, \alpha(c), \dots]$$

όπου $[0, \dots, c, \alpha(c), \dots]$ είναι η κλάση ισοδυναμίας που ορίζεται στην $\mathcal{C}_\infty$ από το στοιχείο $(0, \dots, c, \alpha(c), \dots)$. Αν $[0, \dots, c, \alpha(c), \dots] = 0$, τότε $\lim_m \|\alpha^m(c)\| = 0$ και άρα $\lim_m \alpha^m(c) = 0$. Συνεπώς $c \in \mathcal{R}_\alpha$. Για το αντίστροφο, παρατηρούμε ότι $\iota_n(\mathcal{R}_\alpha) = [0, 0, \dots]$.

Στο ευθύ όριο ορίζουμε τον *-μορφισμό $\alpha_\infty : \mathcal{C}_\infty \to \mathcal{C}_\infty$ έτσι ώστε

$$\alpha_\infty[0, \dots, c, \alpha(c), \dots] = [0, \dots, \alpha(c), \alpha^2(c), \dots].$$

Ο $\alpha_\infty$ είναι *-αυτομορφισμός. Πράγματι, προφανώς είναι επί και αν

$$\alpha_\infty[0, \dots, c, \alpha(c), \dots] = [0, \dots, \alpha(c), \alpha^2(c), \dots] = 0,$$

τότε $[0, \dots, c, \alpha(c), \dots] = [0, \dots, c, 0, 0, \dots] = 0$.

**Σχόλια 1.3.18** Υπάρχει περίπτωση το ευθύ όριο να είναι η τετριμμένη άλγεβρα $\mathbb{C}$. Πράγματι, θεωρώντας την $\mathcal{C}$ όπως στο σχόλιο 1.3.17, παρατηρούμε ότι $\mathcal{C}_n = \mathbb{C}$, για κάθε $n$, και άρα $\mathcal{C}_\infty = \mathbb{C}$.

Στην περίπτωση όμως που η $\alpha : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ είναι *-μονομορφισμός, η $\mathcal{C}_\infty$ περιέχει ένα αντίγραφο της $\mathcal{C}$ και $\alpha_\infty|_{\mathcal{C}} = \alpha$. Σε αυτήν την περίπτωση επομένως μπορούμε να επεκτείνουμε το δυναμικό σύστημα $(\mathcal{C}, \alpha)$, όπου ο $\alpha$ είναι *-μονομορφισμός, στο δυναμικό σύστημα $(\mathcal{C}_\infty, \alpha_\infty)$, με $\alpha_\infty$ *-ισομορφισμό.

# Κεφάλαιο 2

# Ημισταυρωτά Γινόμενα $C^*$-αλγεβρών

Στο παρόν κεφάλαιο εξετάζουμε τα ημισταυρωτά γινόμενα που προκύπτουν από μια $C^*$-άλγεβρα $\mathcal{C}$ με μονάδα και ένα μοναδιαίο *-ενδομορφισμό $\alpha : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$. Ειδικότερα, τα ημισταυρωτά γινόμενα ενός ζεύγους $(\mathcal{C}, \alpha)$ θα είναι άλγεβρες τελεστών που ορίζονται χρησιμοποιώντας διάφορες οικογένειες αναπαραστάσεων κατάλληλων αλγεβρών Banach. Ο στόχος είναι σε κάθε περίπτωση να βρούμε το $C^*$-envelope, όπως επίσης και να δούμε περιπτώσεις που τα ημισταυρωτά γινόμενα ταυτίζονται. Στα παρακάτω θα γίνει συνεχής χρήση του παραδείγματος 1.1.27. Επίσης παραπέμπουμε τον αναγνώστη στην ενότητα 5.1.

## 2.1 Ορισμοί

Έστω, λοπόν, $\mathcal{C}$ μια $C^*$-άλγεβρα με μονάδα και $\alpha : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ ένας μοναδιαίος *-ενδομορφισμός. Μιμούμενοι την κατασκευή του σταυρωτού γινομένου, εφοδιάζουμε το χώρο $c_{00}(\mathbb{Z}_+) \odot \mathcal{C}$ (αλγεβρικό τανυστικό γινόμενο) με τον αριστερό πολλαπλασιασμό

$$(\delta_n \otimes c) *_l (\delta_m \otimes y) = \delta_{n+m} \otimes a^m(c)y,$$

και συμβολίζουμε με $\ell^1(\mathcal{C}, \alpha, \mathbb{Z}_+)_l$ την άλγεβρα Banach που προκύπτει από την πλήρωση ως προς τη νόρμα

$$\left| \sum_{n=0}^{k} \delta_n \otimes c_n \right|_1 = \sum_{n=0}^{k} \|c_n\|_{\mathcal{C}}.$$

Με όμοιο τρόπο, εφοδιάζουμε το χώρο $\mathcal{C} \odot c_{00}(\mathbb{Z}_+)$ (αλγεβρικό τανυστικό γινόμενο) με τον δεξί πολλαπλασιασμό

$$(c \otimes \delta_n) *_r (c \otimes \delta_m) = ca^n(y) \otimes \delta_{n+m},$$

και με $\ell^1(\mathcal{C}, \alpha, \mathbb{Z}_+)_r$ συμβολίζουμε την πλήρωση ως προς τη νόρμα

$$\left| \sum_{n=0}^{k} c_n \otimes \delta_n \right|_1 = \sum_{n=0}^{k} \|c_n\|_{\mathcal{C}}.$$

Παρατηρούμε ότι η $(\ell^1(\mathcal{C}, \alpha, \mathbb{Z}_+)_l)^{opp}$ είναι ακριβώς η $\ell^1(\mathcal{C}^{opp}, \alpha, \mathbb{Z}_+)_r$.

Στην ενότητα 1.3 είδαμε ότι, στην περίπτωση της ομάδας $\mathbb{Z}$, υπάρχει μια 1-1 και επί αντιστοιχία μεταξύ των αναπαραστάσεων της άλγεβρας Banach που κατασκευάστηκε και στα covariant unitary ζεύγη. Στην περίπτωση της $\ell^1(\mathcal{C}, \alpha, \mathbb{Z}_+)$ θα δούμε ότι υπάρχουν περισσότερες επιλογές, κάτι που θα μας οδηγήσει σε διαφορετικές κατασκευές αλγεβρών τελεστών.

Έστω $\rho : \ell^1(\mathcal{C}, \alpha, \mathbb{Z}_+)_l \to \mathcal{B}(H)$ μια $|\cdot|_1$-συνεχής αναπαράσταση. Τότε ο περιορισμός της $(H, \rho)$ στη $C^*$-άλγεβρα $\mathcal{C}$ ορίζει μια αναπαράσταση της $\mathcal{C}$. Θέτοντας $V = \rho(\delta_1 \otimes 1_{\mathcal{C}})$, παρατηρούμε ότι $\|V\| \leq 1$, άρα η $V$ είναι συστολή. Λόγω του ορισμού του αριστερού πολλαπλασιασμού είναι εύκολο να δούμε ότι το ζεύγος $(\pi, V)$ ικανοποιεί την *αριστερά συναλλοίωτη σχέση*

$$\pi(c)V = V\pi(\alpha(c)),\ c \in \mathcal{C}.$$

Αντίστροφα, έστω $(H, \pi)$ μια αναπαράσταση της $\mathcal{C}$ και $V$ μια συστολή στον $\mathcal{B}(H)$ έτσι ώστε το ζεύγος $(\pi, V)$ να ικανοποιεί την αριστερά συναλλοίωτη σχέση. Τότε η απεικόνιση $(V \times \pi)$ που ορίζεται από τη σχέση

$$(V \times \pi)\left(\sum_{n=0}^{k} \delta_n \otimes c_n\right) := \sum_{n=0}^{k} V^n \pi(c_n),$$

είναι μια αναπαράσταση της $\ell^1(\mathcal{C}, \alpha, \mathbb{Z}_+)_l$ στον $\mathcal{B}(H)$. Όπως βλέπουμε, λοιπόν, δεν έχουμε περιορισμό ως προς την επιλογή του τελεστή $V$, σε αντίθεση με την περίπτωση του σταυρωτού γινομένου όπου το αντίστοιχο σύμβολο ήταν de facto ορθομοναδιαίος.

Τα ζεύγη $(\pi, V)$ που ικανοποιούν την αριστερά συναλλοίωτη σχέση, με $(H, \pi)$ μια αναπαράσταση της $\mathcal{C}$ και $V$ συστολή, ισομετρία, γνήσια ισομετρία, co-isometry ή ορθομοναδιαίος τελεστής, θα καλούνται *left covariant contractive, isometric, purely isometric*[1]*, co-isometric ή unitary ζεύγη.*

Ομοίως, τα ζεύγη $(\pi, V)$ που ικανοποιούν τη δεξιά συναλλοίωτη σχέση

$$V\pi(c) = \pi(\alpha(c))V, \ c \in \mathcal{C}$$

με $(H, \pi)$ μια αναπαράσταση της $\mathcal{C}$ και $V$ συστολή, ισομετρία, γνήσια ισομετρία, co-isometry ή ορθομοναδιαίος τελεστής, θα καλούνται *right covariant contractive, isometric, purely isometric, co-isometric ή unitary ζεύγη.*

**Σχόλιο 2.1.1** Επειδή η $\mathcal{C}$ είναι αυτοσυζυγής, υπάρχει μια αντιστοιχία μεταξύ των αριστερών και των δεξιών συναλλοιώτων ζευγών. Έχουμε ότι

1. το $(\pi, V)$ είναι ένα l-cov.contractive ζεύγος αν, και μόνο αν, το $(\pi, V^*)$ είναι ένα r-cov.contractive ζεύγος,
2. το $(\pi, V)$ είναι ένα l-cov.isometric ζεύγος αν, και μόνο αν, το $(\pi, V^*)$ είναι ένα r-cov. co-isometric ζεύγος,
3. το $(\pi, V)$ είναι ένα l-cov.co-isometric ζεύγος αν, και μόνο αν, το $(\pi, V^*)$ είναι ένα r-cov. isometric ζεύγος,
4. το $(\pi, V)$ είναι ένα l-cov.unitary ζεύγος αν, και μόνο αν, το $(\pi, V^*)$ είναι ένα r-cov. unitary ζεύγος.

Η προηγούμενη παρατήρηση, εκ πρώτης όψεως, μπορεί άμεσα να οδηγήσει στον ισχυρισμό ότι αρκεί κάθε φορά να εξετάζουμε μία περίπτωση κάθε κατηγορίας. Παρόλο που αυτό είναι αληθές, χρειάζεται λίγη δουλειά για να αποδειχτεί. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι μας ενδιαφέρει η δομή που προκύπτει από τις νόρμες πινάκων και έτσι πρέπει να αποδείξουμε ότι ο δυϊσμός μεταξύ των αριστερά συναλλοιώτων ζευγών και των δεξιά συναλλοιώτων ζευγών λειτουργεί σε κάθε επίπεδο $\nu \times \nu$ πινάκων.

Για ευκολία, συμβολίζουμε κάθε οικογένεια από τις παραπάνω με $\mathcal{F}_{t,l}$ για τα αριστερά συναλλοίωτα ζεύγη και με $\mathcal{F}_{t,r}$ για τα δεξιά συναλλοίωτα ζεύγη $t = 1, 2, 3, 4$.

[1] μια ισομετρία $V \in \mathcal{B}(H)$ καλείται pure isometry αν έχει την ιδιότητα $\cap_{n\geq 0} V^n H = (0)$.

Έτσι, για παράδειγμα, η $\mathcal{F}_{1,l}$ είναι η οικογένεια των l-cov.contractive ζευγών. Ο πολύπλοκος αυτός συμβολισμός θα καταργηθεί στα επόμενα κεφάλαια, αφού θα είναι σαφές σε ποια οικογένεια αναφερόμαστε. Ορίζουμε την (αντιγραμμική) 1-1 και επί αντιστοιχία

$$^{\#} : c_{00}(bbZ_+) \odot \mathcal{C} \to \mathcal{C} \odot c_{00}(bbZ_+),$$

έτσι ώστε $(\delta_n \otimes c)^{\#} = c^* \otimes \delta_n$, για κάθε $c \in \mathcal{C}$. Χρησιμοποιώντας το ίδιο σύμβολο για την αντίστροφή της, παρατηρούμε ότι $(F^{\#})^{\#} = F$, για κάθε $F \in c_{00}(\mathbb{Z}_+) \odot \mathcal{C}$. Επίσης, είναι ισομετρία αφού

$$\begin{aligned}
\left| (\sum_{n=0}^{k} \delta_n \otimes c_n)^{\#} \right|_1 &= \left| \sum_{n=0}^{k} c_n^* \otimes \delta_n \right|_1 \\
&= \sum_{n=0}^{k} \|c_n^*\|_{\mathcal{C}} = \sum_{n=0}^{k} \|c_n\|_{\mathcal{C}} = \left| \sum_{n=0}^{k} \delta_n \otimes c_n \right|_1 .
\end{aligned}$$

Άρα επεκτείνεται σε μια ισομετρία από την $\ell^1(\mathcal{C}, \alpha, \mathbb{Z}_+)_l$ επί της $\ell^1(\mathcal{C}, \alpha, \mathbb{Z}_+)_r$, για την οποία θα χρησιμοποιούμε το ίδιο σύμβολο.

Επιπλέον, για κάθε αναπαράσταση $(H, \rho)$ της $\ell^1(\mathcal{C}, \alpha, \mathbb{Z}_+)_r$ ορίζουμε

$$\rho^{\#} : \ell^1(\mathcal{C}, \alpha, \mathbb{Z}_+)_l \to \mathcal{B}(H) : \rho^{\#}(F) = \rho(F^{\#})^*.$$

*Ισχυρισμός. Η $(H, \rho^{\#})$ είναι μια $|\cdot|_1$-συνεχής αναπαράσταση της άλγεβρας Banach $\ell^1(\mathcal{C}, \alpha, \mathbb{Z}_+)_l$.*
*Απόδειξη του Ισχυρισμού.* Έστω $\lambda \in \mathbb{C}$ και $c, y \in \mathcal{C}$. Τότε

$$\begin{aligned}
\rho^{\#}\Big(\lambda(\delta_n \otimes c) + \delta_m \otimes y\Big) &= \rho\Big((\delta_n \otimes \lambda c + \delta_m \otimes y)^{\#}\Big)^* \\
&= \rho\Big((\lambda c)^* \otimes \delta_n\Big)^* + \rho\Big(y^* \otimes \delta_n\Big)^* \\
&= \lambda \rho(c^* \otimes \delta_n)^* + \rho(y^* \otimes \delta_n)^* \\
&= \lambda \rho^{\#}(\delta_n \otimes c) + \rho^{\#}(\delta_m \otimes y).
\end{aligned}$$

Άρα η $(H, \rho^{\#})$ είναι γραμμική. Επίσης, έχουμε ότι

$$\begin{aligned}\rho^{\#}\Big((\delta_n \otimes c)(\delta_m \otimes y)\Big) &= \rho^{\#}\Big(\delta_{n+m} \otimes (\alpha^m(c)y)\Big) = \\ &= \rho\Big((\delta_{n+m} \otimes (\alpha^m(c)y))^{\#}\Big)^* = \rho\Big((y^*\alpha^m(c)^*) \otimes \delta_{n+m}\Big)^* = \\ &= \Big(\rho(y^* \otimes \delta_m)\rho(c^* \otimes \delta_n)\Big)^* = \rho(c^* \otimes \delta_n)^*\rho(y^* \otimes \delta_m)^* = \\ &= \rho^{\#}(\delta_n \otimes c)\rho^{\#}(\delta_m \otimes y).\end{aligned}$$

Επομένως ο $(H, \rho^{\#})$ είναι ένας μορφισμός της $\ell^1(\mathcal{C}, \alpha, \mathbb{Z}_+)_l$. Τέλος, έχουμε ότι

$$\begin{aligned}\left\|\rho^{\#}(\sum_{n=0}^{k}\delta_n \otimes c_n)\right\|_{\mathcal{B}(H)} &= \left\|\sum_{n=0}^{k}\rho(c_n^* \otimes \delta_n)^*\right\|_{\mathcal{B}(H)} = \left\|\sum_{n=0}^{k}\rho(c_n^* \otimes \delta_n)\right\|_{\mathcal{B}(H)} \\ &\leq \sum_{n=0}^{k}\|c_n^*\|_{\mathcal{C}} = \sum_{n=0}^{k}\|c_n\|_{\mathcal{C}} = \|\sum_{n=0}^{k}\delta_n \otimes c_n\|_1.\end{aligned}$$

Άρα ο μορφισμός (αλγεβρών) $(H, \rho^{\#})$ είναι συστολή. $\square$

Είναι προφανές ότι ο $\rho = (\pi \times V)$ ανήκει στην $\mathcal{F}_{t,r}$ αν και μόνο αν ο $\rho^{\#} = (\pi \times V)^{\#} = (V^* \times \pi)$ ανήκει στην $\mathcal{F}_{t,l}$. Υπενθυμίζουμε ότι η απεικόνιση $A \mapsto A^\tau$ που αναστρέφει τους πίνακες είναι ισομετρική[2]. Επομένως για κάθε $[F_{ij}] \in \mathcal{M}_\nu(\ell^1(\mathcal{C}, \alpha, \mathbb{Z}_+))$, έχουμε ότι

$$\begin{aligned}\left\|\left[\rho^{\#}(F_{ij}^{\#})\right]\right\| &= \|[\rho(F_{ij})^*]\| = \|[\rho(F_{ij})^*]^*\| \\ &= \|[\rho(F_{ji})]\| = \|[\rho(F_{ji})]^\tau\| = \|[\rho(F_{ij})]\|.\end{aligned}$$

Επομένως έχουμε αποδείξει το παρακάτω λήμμα.

**Λήμμα 2.1.2** *Έστω $\rho \in \mathcal{F}_{t,l}$, $t = 1, 2, 3, 4$ και $[F_{i,j}] \in \mathcal{M}_\nu(\ell^1(\mathcal{C}, \alpha, \mathbb{Z}_+)_l)$, $\nu \geq 1$. Τότε, με τους προηγούμενους συμβολισμούς, για $[F_{i,j}^{\#}] \in \mathcal{M}_\nu(\ell^1(\mathcal{C}, \alpha, \mathbb{Z}_+)_r)$ και $\rho^{\#} \in \mathcal{F}_{t,r}$ έχουμε*

$$\left\|[\rho^{\#}(F_{i,j}^{\#})]\right\|_{\mathcal{B}(H^\nu)} = \|[\rho(F_{i,j}]\|_{\mathcal{B}(H^\nu)}. \quad \square$$

[2] Αλλά δεν είναι πλήρως ισομετρική (βλ. παράδειγμα 1.1.7).

Προκειμένου να κατασκευάσουμε τα ημισταυρωτά γινόμενα, θα χρησιμοποιήσουμε τις οικογένειες αναπαραστάσεων ως προς τα covariant contractive, isometric, co-isometric και unitary ζεύγη. Μέσω αυτών θα ορίσουμε τις αντίστοιχες νόρμες πινάκων που θα δώσουν τη δομή άλγεβρας τελεστών, όπως στο παράδειγμα 1.1.27.

## 2.2 Αριστερά συναλλοίωτα co-isometric και unitary ζεύγη

### Αριστερά συναλλοίωτα co-isometric ζεύγη

Όπως αναφέραμε, από το λήμμα 2.1.2 επάγεται ένας δυϊσμός που μας επιτρέπει να εξετάζουμε μόνο τα αριστερά ή τα δεξιά συναλλοίωτα ζεύγη κάθε κατηγορίας. Εδώ ενδιαφερόμαστε για την οικογένεια των δεξιά συναλλοιώτων ισομετρικών (r-cov.is.) ζευγών $(\pi, V)$. Δηλαδή η $(H, \pi)$ είναι μια αναπαράσταση της $\mathcal{C}$, ο $V$ μια ισομετρία του $\mathcal{B}(H)$ και ισχύει ότι

$$V\pi(c) = \pi(\alpha(c))V, \quad \text{για κάθε } c \in \mathcal{C}.$$

Ακολουθώντας της κατασκευή που αναλύσαμε στο παράδειγμα 1.1.27, ορίζουμε τις ημινόρμες

$$\omega_\nu([F_{i,j}]) = \sup\{\|[(\pi \times V)(F_{i,j})]\|_{\mathcal{B}(H^\nu)} : (\pi, V) \text{ r-cov.is. ζεύγος } \},$$

για κάθε $F_{i,j} \in \ell^1(\mathcal{C}, \alpha, \mathbb{Z}_+)_r$, $1 \leq i, j \leq \nu$ και $\nu = 1, 2, \dots$. Έστω $\mathcal{N} = \{F \in \ell^1(\mathcal{C}, \alpha, \mathbb{Z}_+)_r : \omega_1(F) = 0\}$. Τότε η ημινόρμα $\omega_1$ επάγει μια νόρμα στην άλγεβρα πηλίκο $\ell^1(\mathcal{C}, \alpha, \mathbb{Z}_+)_r/\mathcal{N}$, έτσι ώστε $\|F + \mathcal{N}\|_\infty := \omega_1(F)$.

**Ορισμός 2.2.1** Με τους παραπάνω συμβολισμούς, η άλγεβρα τελεστών που προκύπτει θεωρώντας την πλήρωση του πηλίκου ως προς την $\|\cdot\|_\infty$ θα καλείται *το ημισταυρωτό γινόμενο του* $(\mathcal{C}, \alpha)$ *ως προς τα right covariant isometric ζεύγη* και θα συμβολίζεται με $\mathfrak{A}(\mathcal{C}, \alpha, \mathrm{is})_r$.

**Σχόλιο 2.2.2** Εν γένει οι $\omega_\nu$ δεν είναι νόρμες. Για παράδειγμα, έστω ότι ο *-μορφισμός $\alpha$ έχει μη-τετριμμένο πυρήνα και $c \in \ker\alpha$. Τότε $V\pi(c) = \pi(\alpha(c))V = 0$ για κάθε r-cov.is. ζεύγος $(\pi, V)$. Εφόσον ο $V$ είναι μια ισομετρία, έπεται ότι $\pi(c) = 0$. Επομένως $\omega_1(c \otimes \delta_0) = 0$. Το ίδιο ισχύει για κάθε $c \in \mathcal{R}_\alpha$, με $\mathcal{R}_\alpha$ όπως ορίστηκε στο πρώτο κεφάλαιο.

**Πρόταση 2.2.3** *Έστω* $\mathcal{N} = \{F \in \ell^1(\mathcal{C}, \alpha, \mathbb{Z}_+)_r : \omega_1(F) = 0\}$. *Τότε* $\mathcal{N} = \ell^1(\mathcal{R}_a, \alpha, \mathbb{Z}_+)_r$.

*Απόδειξη.* Παρατηρούμε πρώτα ότι η άλγεβρα $\ell^1(\mathcal{R}_a, \alpha, \mathbb{Z}_+)_r$ είναι ένα $|\cdot|_1$-κλειστό ιδεώδες της $\ell^1(\mathcal{C}, \alpha, \mathbb{Z}_+)_r$ και περιέχεται στο $\mathcal{N}$. Έστω το σταυρωτό γινόμενο $\mathcal{C}_\infty \rtimes_{\alpha_\infty} \mathbb{Z}$ (το οποίο μπορεί να είναι και τετριμμένο) όπως ορίστηκε στην ενότητα 1.3.2. Τότε η right regular αναπαράσταση $(\pi \times U)$ του σταυρωτού γινομένου, επάγει ένα r.-cov.is. ζεύγος του $(\mathcal{C}, \alpha)$. Πράγματι, το μόνο που αρκεί να δείξουμε είναι ότι η $\pi$ επάγει μια αναπαράσταση της $\mathcal{C}$. Έστω ο φυσιολογικός *-επιμορφισμός $q : \mathcal{C} \to \mathcal{C}/\mathcal{R}_\alpha$ και υπενθυμίζουμε ότι η $\mathcal{C}/\mathcal{R}_\alpha$ εμφυτεύεται στην $\mathcal{C}_\infty$. Επομένως το $(\pi \circ q, U)$ είναι ένα r.cov.is. ζεύγος του $(\mathcal{C}, \alpha)$. Έστω $F \in \mathcal{N}$ με $F = |\cdot|_1 - \lim_N \sum_{n=0}^N c_n \otimes \delta_n$. Τότε

$$\lim_N \sum_{n=0}^N \pi(q(c_n))U^n = \lim_N \sum_{n=0}^N ((\pi \circ q) \times U)(c_n \otimes \delta_n) = ((\pi \circ q) \times U)(F).$$

Όμως $F \in \mathcal{N}$ και άρα $((\pi \circ q) \times U)(F) = 0$. Επομένως

$$\langle \pi(q(c_n))\xi, \eta \rangle = \langle ((\pi \circ q) \times U)\,(F)(\xi \otimes e_n), \eta \otimes e_0 \rangle$$

για $\xi, \eta \in H$, άρα $\pi(q(c_n)) = 0$. Συνεπώς $q(c_n) = 0$ και τελικά $c_n \in \mathcal{R}_\alpha$. □

**Πόρισμα 2.2.4** *Αν ο* $\alpha : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ *είναι *-μονομορφισμός, τότε* $\omega_1 \cdot = \|\cdot\|_\infty$. □

Όπως αποδεικνύουμε στην ενότητα 1.3.2, για τη $\mathcal{C}/\mathcal{R}_\alpha$ ορίζεται ένας *-μονομορφισμός $\dot{\alpha} : \mathcal{C}/\mathcal{R}_\alpha \to \mathcal{C}/\mathcal{R}_\alpha$ με $\dot{\alpha}(c + \mathcal{R}_\alpha) = \alpha(c) + \mathcal{R}_\alpha$.

**Θεώρημα 2.2.5** *Το ημισταυρωτό γινόμενο* $\mathfrak{A}(\mathcal{C}, \alpha, is)_r$ *είναι πλήρως ισομετρικά ισόμορφο (ως άλγεβρα τελεστών) προς το ημισταυρωτό γινόμενο* $\mathfrak{A}(\mathcal{C}/\mathcal{R}_\alpha, \dot{\alpha}, is)_r$.

*Απόδειξη.* Θα δείξουμε ότι η απεικόνιση

$$\begin{gathered} \ell^1(\mathcal{C}, \alpha, \mathbb{Z}_+)_r/\mathcal{N} \to \ell^1(\mathcal{C}/\mathcal{R}_\alpha, \dot{\alpha}, \mathbb{Z}_+)_r : \\ c \otimes \delta_n + \mathcal{N} \mapsto (c + \mathcal{R}_\alpha) \otimes \delta_n, \end{gathered}$$

είναι ένας καλά ορισμένος πλήρως ισομετρικός μορφισμός αλγεβρών. Είναι προφανές ότι είναι καλά ορισμένος μορφισμός. Επομένως αρκεί να δείξουμε ότι είναι πλήρως ισομετρικός.

Έστω $F = \sum_{n=0}^{k} c_n \otimes \delta_n$ και $G = \sum_{n=0}^{k} (c_n + \mathcal{R}_\alpha) \otimes \delta_n$, η εικόνα του $F$. Αν το $(\pi, V)$ είναι ένα r.cov.is. ζεύγος της $\ell^1(\mathcal{C}, \alpha, \mathbb{Z}_+)_r$ τότε $\pi(\mathcal{R}_\alpha)\mathcal{H} = 0$ όπως προκύπτει από το σχόλιο 2.2.2. Άρα η $\pi$ επάγει μια αναπαράσταση $\sigma : \mathcal{C}/\mathcal{R}_\alpha \to \mathcal{B}(H)$ με $\sigma(c + \mathcal{R}_\alpha) = \pi(c)$. Συνεπώς το $(\sigma, V)$ είναι ένα r.cov.is. ζεύγος της $\ell^1(\mathcal{C}/\mathcal{R}_\alpha, \dot{\alpha}, \mathbb{Z}_+)_r$ και $(\pi \times V)(F) = (\sigma \times V)(G)$. Άρα,

$$\|(\pi \times V)(F)\| = \|(\sigma \times V)(G)\| \leq \|G\|_\infty .$$

Επομένως, $\|F\|_1 \leq \|G\|_\infty$ και άρα

$$\|F + \mathcal{N}\|_\infty = \omega_1(F) \leq \|G\|_\infty .$$

Αντίστροφα, έστω $(\rho, V)$ ένα r.cov.is. ζεύγος της $\ell^1(\mathcal{C}/\mathcal{R}_\alpha, \dot{\alpha}, \mathbb{Z}_+)_r$, τότε η $\pi = \rho \circ \sigma : \mathcal{C} \to \mathcal{B}(H) : c \mapsto \rho(c + \mathcal{R}_\alpha)$ είναι μια αναπαράσταση της $\mathcal{C}$. Είναι εύκολο να δούμε ότι το ζεύγος $(\pi, V)$ είναι τότε ένα r.cov.is. ζεύγος του $(\mathcal{C}, \alpha)$ και ότι $(\pi \times V)(F) = (\rho \times V)(G)$. Επομένως,

$$\|(\rho \times V)(G)\| = \|(\pi \times V)(F)\| \leq \omega_1(F) = \|F + \mathcal{N}\|_\infty .$$

Άρα $\|G\|_\infty \leq \|F + \mathcal{N}\|_\infty$.

Τα ίδια επιχειρήματα εφαρμόζονται για $[F_{ij}] \in \mathcal{M}_\nu(\ell^1(\mathbb{Z}_+, \mathcal{C}, \alpha)_r)$, για κάθε $\nu \geq 1$, και άρα η απεικόνιση είναι πλήρως ισομετρική. □

Επομένως, μπορούμε να υποθέτουμε στο εξής ότι ο $\alpha : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ είναι *-μονομορφισμός. Τότε $\|\cdot\|_1 = \|\cdot\|_\infty$ και επιπλέον η $\mathcal{C}$ είναι μια *-υπάλγεβρα της μη-τετριμμένης $\mathcal{C}_\infty$.

**Πρόταση 2.2.6** *Έστω $\alpha : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ ένας *-μονομορφισμός. Τότε το ημισταυρωτό γινόμενο $\mathfrak{A}(\mathcal{C}, \alpha, is)_r$ εμφυτεύεται πλήρως ισομετρικά στο σταυρωτό γινόμενο $\mathcal{C}_\infty \rtimes_{\alpha_\infty} \mathbb{Z}$.*

*Απόδειξη.* Είναι σαφές ότι $\ell^1(\mathcal{C}, \alpha, \mathbb{Z}_+)_r \subseteq \ell^1(\mathcal{C}_\infty, \alpha_\infty, \mathbb{Z}_+)_r$ και ότι περιορίζοντας κάθε right covariant unitary ζεύγος του $(\mathcal{C}_\infty, \alpha_\infty)$ παίρνουμε ένα right covariant unitary ζεύγος για το $(\mathcal{C}, \alpha)$. Συνεπώς

$$\|F\|_{\mathcal{C}_\infty \rtimes_{\alpha_\infty} \mathbb{Z}_+} \leq \|F\|_\infty ,$$

για κάθε $F$ στην $\ell^1(\mathbb{Z}_+, \mathcal{C}, \alpha)_r$.

Για το αντίστροφο, θα αποδείξουμε ότι κάθε right covariant isometric ζεύγος του $(\mathcal{C}, \alpha)$ διαστέλλεται σε ένα right covariant unitary ζεύγος του $(\mathcal{C}_\infty, \alpha_\infty)$. Η απόδειξη βασίζεται σε ένα επιχείρημα του Stacey [**45**]. Έστω $(\pi, V)$ ένα right covariant isometric ζεύγος, το σύστημα

$$\mathcal{C}_0 \xrightarrow{\alpha} \mathcal{C}_1 \xrightarrow{\alpha} \mathcal{C}_3 \xrightarrow{\alpha} \dots,$$

με $\mathcal{C}_n = \mathcal{C}$ για κάθε $n$, και $\mathfrak{H}$ ο χώρος Hilbert

$$H \xrightarrow{V} H \xrightarrow{V} \dots.$$

Έστω $U : \mathfrak{H} \to \mathfrak{H}$ έτσι ώστε $U[0,\dots,\xi,V\xi,\dots] = [0,\dots,V\xi,V^2\xi,\dots]$. Ακόμα, θεωρούμε τις ισομετρίες $W_m : H \to \mathfrak{H}$. Τότε, ταυτίζοντας τη $\mathcal{C}$ με τη $\mathcal{C}_0$, έχουμε ότι $UW_0 = W_0V$. Επεκτείνουμε την $\pi : \mathcal{C} \to \mathcal{B}(H)$ στην αναπαράσταση $\pi' : \mathcal{C} \to \mathcal{B}(\mathfrak{H})$ θέτοντας $\pi'(c)W_m h = W_m\pi(c)h$. Επίσης, για κάθε $n$, ορίζουμε την αναπαράσταση

$$\pi_n : \mathcal{C}_n \to \mathcal{B}(\mathfrak{H}), \quad \pi_n[0,\dots,c,\dots] = (U^*)^n\pi'(c)U^n.$$

Τότε $\pi_n(\alpha(c))W_m h = \pi_{n-1}(c)W_m h$. Επομένως οι $\pi_n$ ορίζουν μια αναπαράσταση $(\mathfrak{H}, \Pi)$ της $\mathcal{C}_\infty$. Ακόμα το ζεύγος $(\Pi, U)$ είναι right covariant unitary για το $(\mathcal{C}_\infty, \alpha_\infty)$. Επίσης,

$$W_0^*\left((\Pi \times U)(c \otimes \delta_n)\right)W_0 = (\pi \times V)(c \otimes \delta_n),$$

για κάθε $c \in \mathcal{C}$. Άρα,

$$\begin{aligned}\|(\pi \times V)(F)\| &= \|W_0^*(\Pi \times U)(F)W_0\| \\ &\leq \|(\Pi \times U)(F)\| \leq \|F\|_{\mathcal{C}_\infty \rtimes_{\alpha_\infty} \mathbb{Z}},\end{aligned}$$

για κάθε $F$ στην $\ell^1(\mathcal{C}, \alpha, \mathbb{Z}_+)_r$. Συνεπώς $\|F\|_\infty \leq \|F\|_{\mathcal{C}_\infty \rtimes_{\alpha_\infty} \mathbb{Z}}$.

Τα ίδια επιχειρήματα εφαρμόζονται για $[F_{ij}] \in \mathcal{M}_\nu(\ell^1(\mathbb{Z}_+, \mathcal{C}, \alpha)_r)$, για κάθε $\nu \geq 1$, και άρα η απεικόνιση είναι πλήρως ισομετρική. □

**Θεώρημα 2.2.7** *Έστω $\alpha : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ ένας *-μονομορφισμός. Τότε το $C^*$-envelope του ημισταυρωτού γινομένου $\mathfrak{A}(\mathcal{C}, \alpha, is)_r$ είναι το σταυρωτό γινόμενο $\mathcal{C}_\infty \rtimes_{\alpha_\infty} \mathbb{Z}$.*

*Απόδειξη.* Έστω $(\pi, U)$ η right regular αναπαράσταση του $\mathcal{C}_\infty \rtimes_{\alpha_\infty} \mathbb{Z}$. Προκειμένου να δείξουμε ότι το $\mathcal{C}_\infty \rtimes_{\alpha_\infty} \mathbb{Z}$ είναι ένα $C^*$-κάλυμμα του ημισταυρωτού γινομένου του $(\mathcal{C}, \alpha)$, αρκεί να δείξουμε ότι περιέχει όλα τα στοιχεία της μορφής $\pi[0,\dots,c,\alpha(c),\dots]$. Πράγματι, γνωρίζουμε ότι $\pi(\alpha_\infty(y)) = U\pi(y)U^*$ για κάθε $y \in$

$\mathcal{C}_\infty$. Εφόσον ο $\alpha_\infty$ είναι ένας *-αυτομορφισμός, έχουμε ότι $\pi(y) = U\pi(\alpha_\infty^{-1}(y))U^*$, για κάθε $y \in \mathcal{C}_\infty$. Επομένως

$$\pi[0, c, \alpha(c), \dots] = U\pi(\alpha_\infty^{-1}[0, c, \dots])U^* = U\pi[c, \alpha(c), \dots]U^*.$$

Χρησιμοποιώντας επαγωγή έχουμε τελικά ότι μπορούμε να παράγουμε κάθε στοιχείο της μορφής $\pi[0, \dots, c, \alpha(c), \dots]$.

Συνεπώς, αν $\mathcal{C}_e^*$ είναι το $C^*$-envelope του ημισταυρωτού γινομένου του $(\mathcal{C}, \alpha)$, λόγω της καθολικής ιδιότητας τού υπάρχει ένας *-επιμορφισμός $\Phi : \mathcal{C}_\infty \rtimes_{\alpha_\infty} \mathbb{Z} \to \mathcal{C}_e^*$, έτσι ώστε $\Phi(\pi[c, \alpha(c), \dots]) = c \otimes \delta_0$ για κάθε $c \in \mathcal{C}$. Έστω ότι το ιδεώδες Šilov $\mathcal{J}$ είναι μη-τετριμμένο. Τότε θα παραμένει αναλλοίωτο από τη δυϊκή δράση που ορίζεται στο σταυρωτό γινόμενο και άρα θα έχει μη-κενή τομή με την $\mathcal{C}_\infty$. Επειδή η $\mathcal{C}_\infty$ είναι ευθύ όριο, έπεται ότι το $\mathcal{J}$ έχει μη-μηδενική τομή με κάθε $\mathcal{C}_n$. Έστω $n_0$ και $c \in \mathcal{C}$ έτσι ώστε $\pi[0, \dots, c, \dots] \in \mathcal{J} \cap \mathcal{C}_{n_0}$. Συνεπώς $\pi[c, \alpha(c), \dots] = (U^*)^{n_0}\pi[0, \dots, c, \dots]U^{n_0}$, επομένως το $\mathcal{J}$ έχει μη κενή τομή με την $\mathcal{C}$. Τότε για $\pi[c, \alpha(c), \dots] \in \mathcal{C} \cap \mathcal{J}$, έχουμε ότι

$$0 = \|\pi[c, \alpha(c), \dots] + \mathcal{J}\| = \|\Phi(\pi[c, \alpha(c), \dots])\| = \|c \otimes \delta_0\| = \|c\|_{\mathcal{C}},$$

που είναι άτοπο. Επομένως $\mathcal{J} = (0)$. □

Το επόμενο θεώρημα έπεται άμεσα χρησιμοποιώντας το προηγούμενο και το θεώρημα 2.2.6.

**Θεώρημα 2.2.8** *Το $C^*$-envelope του ημισταυρωτού γινομένου $\mathfrak{A}(\mathcal{C}, \alpha, is)_r$ είναι το σταυρωτό γινόμενο του $\big((\mathcal{C}/\mathcal{R}_\alpha)_\infty, \dot{\alpha}_\infty\big)$.* □

Με παρόμοιο τρόπο μπορούμε να ορίσουμε *το ημισταυρωτό γινόμενο του* $(\mathcal{C}, \alpha)$ *ως προς τα left covariant co-isometric ζεύγη*, το οποίο θα συμβολίζεται με $\mathfrak{A}(\mathcal{C}, \alpha, \text{co-is})_l$. Θεωρούμε δηλαδή τα ζεύγη $(\pi, V)$ έτσι ώστε η $(H, \pi)$ να είναι μια αναπαράσταση της $\mathcal{C}$ και ο $V$ μια co-isometry του $\mathcal{B}(H)$ έτσι ώστε

$$\pi(c)V = V\pi(\alpha(c)), \quad \text{για κάθε } c \in \mathcal{C}.$$

Για κάθε $F_{i,j} \in \ell^1(\mathcal{C}, \alpha, \mathbb{Z}_+)_l$, $1 \leq i, j \leq \nu$ και $\nu = 1, 2, \dots$, ορίζουμε τις ημινόρμες

$$\omega_\nu([F_{i,j}]) = \sup\{\|[(V \times \pi)(F_{i,j})]\|_{\mathcal{B}(H^\nu)} : (\pi, V) \text{ l-cov.co-is. ζεύγος }\}.$$

Αν $\mathcal{N} = \{F \in \ell^1(\mathbb{Z}_+, \mathcal{C}, \alpha)_l : \|F\|_1 = 0\}$, τότε η ημινόρμα $\omega_1$ επάγει μια νόρμα στο πηλίκο $\ell^1(\mathcal{C}, \alpha, \mathbb{Z}_+)_l/\mathcal{N}$, έτσι ώστε $\|F + \mathcal{N}\|_\infty := \|F\|_1$. Το ημισταυρωτό γινόμενο του $(\mathcal{C}, \alpha)$ ως προς τα left covariant co-isometric ζεύγη θα είναι τότε η άλγεβρα τελεστών του παραδείγματος 1.1.27.

Χρησιμοποιώντας το λήμμα 2.1.2 μπορούμε να δείξουμε ότι $\mathcal{N} = \ell^1(\mathbb{Z}_+, \mathcal{R}_a, \alpha)_l$. Πράγματι, έστω $F \in \mathcal{N}$, τότε

$$\left\|(\pi \times V)(F^{\#})\right\|_{\mathcal{B}(H)} = \left\|(\pi \times V)^{\#}(F)\right\|_{\mathcal{B}(H)} = \|(V^* \times \pi)(F)\|_{\mathcal{B}(H)} = 0$$

για κάθε right covariant isometric ζεύγος $(\pi, V)$. Επομένως, $F^{\#} \in \ell^1(\mathcal{R}_\alpha, \alpha, \mathbb{Z}_+)_r$, και άρα $F^{\#} = |\cdot|_1 - \lim_N \sum_{n=0}^N c_n \otimes \delta_n$, για κάποια $c_n \in \mathcal{R}_\alpha$. Τότε όμως $F = |\cdot|_1 - \lim_N \sum_{n=0}^N \delta_n \otimes c_n^*$, αφού η απεικόνιση $F \mapsto F^{\#}$ είναι ισομετρία. Συνεπώς, $F \in \ell^1(\mathcal{R}_a, \alpha, \mathbb{Z}_+)$. Το αντίστροφο είναι προφανές.

Εφαρμόζοντας το λήμμα 2.1.2 έχουμε επίσης ότι

$$\|[F_{ij} + \mathcal{N}]\|_\nu = \left\|[F_{ij}^{\#} + \mathcal{N}]\right\|_\nu,$$

για κάθε $F_{i,j} \in \ell^1(\mathcal{C}, \alpha, \mathbb{Z}_+)_l$, $1 \leq i, j \leq \nu$ και $\nu \in \mathbb{N}$. Από αυτό έπεται το επόμενο θεώρημα.

**Θεώρημα 2.2.9** *Το ημισταυρωτό γινόμενο $\mathfrak{A}(\mathcal{C}, \alpha, co\text{-}is)_l$ είναι πλήρως ισομετρικά ισόμορφο προς το ημισταυρωτό γινόμενο $\mathfrak{A}((\mathcal{C}/\mathcal{R}_\alpha, \dot{\alpha}), co\text{-}is)_l$.* $\square$

**Θεώρημα 2.2.10** *Το $C^*$-envelope του ημισταυρωτού γινομένου $\mathfrak{A}(\mathcal{C}, \alpha, co\text{-}is)_l$ είναι το σταυρωτό γινόμενο του $\big((\mathcal{C}/\mathcal{R}_\alpha)_\infty, \dot{\alpha}_\infty\big)$.*

*Απόδειξη.* Αντικαθιστώντας το $(\mathcal{C}, \alpha)$ με το $(\mathcal{C}/\mathcal{R}_\alpha, \dot{\alpha})$ μπορούμε να υποθέσουμε ότι η $\alpha$ είναι *-μονομορφισμός. Το πρώτο βήμα είναι να δείξουμε ότι υπάρχει ένας πλήρης ισομετρικός ισομορφισμός από το ημισταυρωτό γινόμενο στο σταυρωτό γινόμενο $\mathcal{C}_\infty \rtimes_{\alpha_\infty} \mathbb{Z}$. Έστω, $F_{i,j} \in \mathcal{M}_\nu\big((\ell^1(\mathbb{Z}_+, \mathcal{C}, \alpha)_l\big)$ και $(\pi, V)$ ένα left covariant co-isometric ζεύγος. Τότε το ζεύγος $(\pi, V^*)$ είναι right covariant isometric και άρα, από την πρόταση 2.2.6, διαστέλλεται σε ένα $(\Pi, U)$ right covariant unitary ζεύγος του $(\mathcal{C}_\infty, \alpha_\infty)$. Επομένως η $(\Pi \times U)$ είναι διαστολή της $(\pi \times V^*) = (V \times \pi)^{\#}$. Άρα το ζεύγος $(\Pi, U^*)$ είναι ένα left covariant unitary ζεύγος του $(\mathcal{C}_\infty, \alpha_\infty)$. Συνεπώς η $(\Pi \times U)^{\#}$ είναι αναπαράσταση του σταυρωτού γινομένου $\mathcal{C}_\infty \rtimes_{\alpha_\infty} \mathbb{Z}$. Επομένως, έχουμε

$$\begin{aligned} \|[(V \times \pi)(F_{ij})]\| &= \left\|[(V \times \pi)^{\#}(F_{ij}^{\#})]\right\| \leq \left\|[(\Pi \times U)(F_{ij}^{\#})]\right\| \\ &= \left\|[(\Pi \times U)^{\#}(F_{ij})]\right\| \leq \|[F_{ij}]\|_{\mathcal{M}_\nu(\mathcal{C}_\infty \rtimes_{\alpha_\infty} \mathbb{Z})} . \end{aligned}$$

Άρα $\|[F_{ij}]\|_\nu \leq \|[F_{ij}]\|_{\mathcal{M}_\nu(\mathcal{C}_\infty \rtimes_{\alpha_\infty} \mathbb{Z})}$. Είναι εύκολο να δείξουμε την αντίστροφη ανισότητα, και άρα η απεικόνιση $\delta_n \otimes c \mapsto \delta_n \otimes c \in \mathcal{C}_\infty \rtimes_{\alpha_\infty} \mathbb{Z}$, επεκτείνεται στο ημισταυρωτό γινόμενο και είναι πλήρως ισομετρική.

Η απόδειξη ολοκληρώνεται με παρόμοιο τρόπο, όπως και στο θεώρημα 2.2.8. □

### Αριστερά συναλλοίωτα unitary ζεύγη

**Ορισμός 2.2.11** Ορίζουμε *το ημισταυρωτό γινόμενο του* $(\mathcal{C}, \alpha)$ *ως προς τα left covariant unitary ζεύγη* να είναι η άλγεβρα τελεστών του 1.1.27 που προκύπτει από τις ημινόρμες

$$\omega_\nu([F_{i,j}]) = \sup\{\|[(\pi \times V)(F_{i,j})]\|_{\mathcal{B}(H^\nu)} : (\pi, V) \textit{ l-cov.un. ζεύγος } \},$$

το οποίο θα συμβολίζεται με $\mathfrak{A}(\mathcal{C}, \alpha, \mathrm{un})_l$. Ομοίως ορίζεται *το ημισταυρωτό γινόμενο του* $(\mathcal{C}, \alpha)$ *ως προς τα right covariant unitary ζεύγη*, το οποίο θα συμβολίζεται με $\mathfrak{A}(\mathcal{C}, \alpha, \mathrm{un})_r$.

**Θεώρημα 2.2.12** *Το $C^*$-envelope των ημισταυρωτών γινομένων $\mathfrak{A}(\mathcal{C}, \alpha, un)_l$ και $\mathfrak{A}(\mathcal{C}, \alpha, un)_r$ είναι το σταυρωτό γινόμενο $\mathcal{C}_\infty \rtimes_{\dot{\alpha}_\infty} \mathbb{Z}$.*

*Απόδειξη.* Αρκεί να δείξουμε ότι το ημισταυρωτό γινόμενο ως προς τα right covariant unitary ζεύγη είναι πλήρως ισομετρικά ισόμορφο με το ημισταυρωτό γινόμενο ως προς τα right covariant isometric ζεύγη. Τότε θα έχουν το ίδιο $C^*$-envelope. Ειδικότερα, αρκεί να δείξουμε ότι οι αντίστοιχες ημινόρμες στους $\nu \times \nu$ πίνακες ταυτίζονται.

Έστω $(\pi, V)$ ένα right covariant isometric ζεύγος. Τότε, από την πρόταση 2.2.6, το $(\pi, V)$ διαστέλλεται σε ένα right covariant unitary ζεύγος $(\Pi, U)$ του $(\mathcal{C}_\infty, \alpha_\infty)$ και άρα επάγει ένα right covariant uintary ζεύγος για το $(\mathcal{C}, \alpha)$. Συνεπώς, για κάθε $[F_{i,j}] \in \mathcal{M}_\nu\left(\ell^1(\mathbb{Z}_+, \mathcal{C}, \alpha)_r\right)$, για κάθε $\nu \geq 1$, έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \|[(\pi \times V)(F_{ij})]\| &\leq \|[(\Pi \times U)(F_{ij})]\| \\ &\leq \sup\{\|[(\pi \times U)(F_{i,j})]\|_{\mathcal{B}(H^\nu)} : (\pi, U) \text{ r-cov.un. ζεύγος } \}. \end{aligned}$$

Επομένως,

$$\begin{aligned}&\sup\{\|[(\pi \times V)(F_{i,j})]\|_{\mathcal{B}(H^\nu)} : (\pi, V) \text{ r-cov.is. ζεύγος } \} \leq \\ &\leq \sup\{\|[(\pi \times U)(F_{i,j})]\|_{\mathcal{B}(H^\nu)} : (\pi, U) \text{ r-cov.un. ζεύγος } \}.\end{aligned}$$

Η αντίστροφη ανίσωση είναι προφανής. Επομένως οι άλγεβρες τελεστών είναι ισομετρικά ισόμορφες (κατά φυσιολογικό τρόπο).

Η απόδειξη ολοκληρώνεται για τα left covariant unitary ζεύγη εφαρμόζοντας το λήμμα 2.1.2. □

## 2.3 Αριστερά συναλλοίωτα contractive και isometric ζεύγη

### Αριστερά συναλλοίωτα contractive ζεύγη

**Ορισμός 2.3.1** Ορίζουμε *το ημισταυρωτό γινόμενο του* $(\mathcal{C}, \alpha)$ *ως προς τα left covariant contractive ζεύγη* να είναι η άλγεβρα τελεστών του 1.1.27 που προκύπτει από τις ημινόρμες

$$\omega_\nu[F_{i,j}] = \sup\{\|[(\pi \times V)(F_{i,j})]\|_{\mathcal{B}(H^\nu)} : (\pi, V) \textit{ l-cov.con. ζεύγος } \},$$

και θα συμβολίζεται με $\mathfrak{A}(\mathcal{C}, \alpha, \mathrm{contr})_l$. Ομοίως ορίζεται *το ημισταυρωτό γινόμενο του* $(\mathcal{C}, \alpha)$ *ως προς τα right covariant contractive ζεύγη*, το οποίο θα συμβολίζεται με $\mathfrak{A}(\mathcal{C}, \alpha, \mathrm{contr})_r$.

Παρακάτω θα ασχοληθούμε με τα left covariant contractive ζεύγη. Τα αποτελέσματα που θα αποδείξουμε ισχύουν επίσης για τα right covariant contractive ζεύγη, κάνοντας κατάλληλη χρήση του λήμματος 2.1.2, (όπως για παράδειγμα στο θεώρημα 2.2.10).

**Παράδειγμα 2.3.2** Έστω $(H_0, \pi)$ μια αναπαράσταση της $\mathcal{C}$. Ορίζουμε την αναπαράσταση $\widetilde{\pi}(c) = \mathrm{diag}\{\pi(\alpha^n(c)) : n \in \mathbb{Z}_+\}$ στο χώρο Hilbert $\ell^2(H_0) = H_0 \otimes \ell^2(\mathbb{Z}_+)$ και τον τελεστή $S = I_{H_0} \otimes s$, όπου $s$ ο unilateral shift. Μπορούμε να θεωρούμε ότι έχουν την εξής μορφή σε πίνακες

$$S = \begin{bmatrix} 0 & & & \\ \mathbf{1}_{\mathcal{H}_0} & 0 & & \\ & \mathbf{1}_{\mathcal{H}_0} & 0 & \\ & & & \ddots \end{bmatrix}, \widetilde{\pi}(c) = \begin{bmatrix} \pi(c) & & & \\ & \pi(\alpha(c)) & & \\ & & \pi(\alpha^2(c)) & \\ & & & \ddots \end{bmatrix}, c \in \mathcal{C}.$$

Τότε το ζεύγος $(\widetilde{\pi}, S)$ είναι ένα left covariant (pure) isometric ζεύγος.

*Αν επιπλέον η $(H_0, \pi)$ είναι πιστή, τότε η αναπαράσταση $(S\times\widetilde{\pi})$ της $\ell^1(\mathbb{Z}_+, \mathcal{C}, \alpha)_l$ που επάγεται είναι πιστή.*

Πράγματι, έστω $F = |\cdot|_1 - \lim_N \sum_{n=0}^N \delta_n \otimes c_n$, έτσι ώστε $(S \times \widetilde{\pi})(F) = 0$. Τότε για κάθε $\xi, \eta \in H_0$ έχουμε ότι

$$\begin{aligned}\langle \pi(c_m)\xi, \eta\rangle &= \lim_N \sum_{n=0}^N \langle S^n \widetilde{\pi}(c_n)(\xi\otimes e_0), \eta\otimes e_m\rangle \\ &= \langle (S\times\widetilde{\pi})(F)(\xi\otimes e_0), \eta\otimes e_m\rangle = 0.\end{aligned}$$

Εφόσον η $(H_0, \pi)$ είναι πιστή, έχουμε ότι $c_m = 0$, για κάθε $m$, επομένως $F = 0$.

Το γεγονός ότι υπάρχει μια πιστή αναπαράσταση $(S\times\widetilde{\pi})$ επάγει ότι οι ημινόρμες $\omega_\nu$ είναι τελικά νόρμες. Επομένως το ημισταυρωτό γινόμενο περιέχει ένα αντίγραφο της $\mathcal{C}$.

Ακόμα, όπως παρατηρήσαμε στην αρχή του κεφαλαίου, υπάρχει μια 1-1 και επί αντιστοιχία μεταξύ των l.cov.con ζευγών και των αναπαραστάσεων της $\ell^1(\mathbb{Z}_+, \mathcal{C}, \alpha)_l$. Επομένως το ημισταυρωτό γινόμενο ως προς τα left covariant contractive ζεύγη έχει την εξής καθολική ιδιότητα (βλ. το παράδειγμα 1.1.27):

> για κάθε μοναδιαία άλγεβρα τελεστών $\mathcal{B}$ και κάθε μοναδιαίο μορφισμό, που είναι συστολή, $\phi : \ell^1(\mathbb{Z}_+, \mathcal{C}, \alpha)_l \to \mathcal{B}$ υπάρχει ένας (αναγκαστικά μοναδικός) μοναδιαίος μορφισμός $\widetilde{\phi}$ που επεκτείνεται στο ημισταυρωτό γινόμενο και είναι πλήρης συστολή.

Το επόμενο βρίσκεται στο **[31]**.

**Πρόταση 2.3.3** *Κάθε left covariant contractive ζεύγος (αντ. right covariant contractive ζεύγος) διαστέλλεται σε ένα left covariant isometric ζεύγος (αντ. right covariant co-isometric ζεύγος).*

*Απόδειξη.* Έστω $(\pi, V)$ ένα left covariant contractive ζεύγος σε ένα χώρο Hilbert $H$. Θα κατασκευάσουμε ένα left covariant isometric ζεύγος $(\eta, W)$ σε ένα χώρο Hilbert $K$, έτσι ώστε $K \supseteq H$, $\eta(c)H \subseteq H$ και $\eta(c)|_H = \pi(c)$, για κάθε $c \in \mathcal{C}$, και $V^n = P_H W^n|_H$, για κάθε $n \in \mathbb{Z}_+$.

Λόγω της συναλλοίωτης σχέσης ο $V^*V$ μετατίθεται με την $\pi\circ\alpha(\mathcal{C})$. Επομένως και ο defect operator $\Delta = (I - V^*V)^{1/2}$ μετατίθεται με την $\pi\circ\alpha(\mathcal{C})$. Άρα η κλειστή θήκη της εικόνας του $\Delta$, έστω $\mathcal{D}$ (ο defect space του $V$), ανάγει την $\pi \circ \alpha(\mathcal{C})$. Θέτουμε $K := H \oplus \mathcal{D} \oplus \mathcal{D} \oplus \dots$ και ορίζουμε

$$W = \begin{bmatrix} V & & & \\ \Delta & 0 & & \\ & I_{\mathcal{D}} & 0 & \\ & & & \ddots \end{bmatrix}, \eta(c) = \begin{bmatrix} \pi(c) & & & \\ & \pi \circ \alpha(c)|_{\mathcal{D}} & & \\ & & \pi \circ \alpha^2(c)|_{\mathcal{D}} & \\ & & & \ddots \end{bmatrix}, c \in \mathcal{C}.$$

Τότε το $(\eta, W)$ είναι το ζητούμενο left covariant isometric ζεύγος. $\square$

Αν το ζεύγος που κατασκευάσαμε παραπάνω είναι *ελαχιστικό*, δηλαδή ο μικρότερος υπόχωρος του $K$ που περιέχει τον $H$ και είναι αναλλοίωτος από τον $W$, είναι ο $K$, τότε είναι μοναδικό (ως προς ορθομοναδιαία ισοδυναμία).

**Πρόταση 2.3.4** *Για κάθε $\nu \geq 1$ και για κάθε $F_{i,j} \in \mathcal{M}_\nu(\ell^1(\mathbb{Z}_+, \mathcal{C}, \alpha)_l)$, έχουμε ότι*

$$\begin{aligned} &\sup\{\|[(V \times \pi)(F_{ij})]\| : (\pi, V) \text{ l-cov.con. ζεύγος}\} \\ &\quad = \sup\{\|[(V \times \pi)(F_{ij})]\| : (\pi, V) \text{ l-cov.is. ζεύγος}\}. \end{aligned}$$

*Επίσης,*

$$\begin{aligned} &\sup\{\|[(\pi \times V)(F_{ij})]\| : (\pi, V) \text{ r-cov.con. ζεύγος}\} \\ &\quad = \sup\{\|[(\pi \times V)(F_{ij})]\| : (\pi, V) \text{ r-cov. co-is. ζεύγος}\}. \end{aligned}$$

*Απόδειξη.* Έστω $[F_{ij}] \in \mathcal{M}_\nu(\ell^1(\mathbb{Z}_+, \mathcal{C}, \alpha)_l)$, $\nu \geq 1$, και $(\pi, V)$ ένα left covariant contractive ζεύγος. Τότε από την πρόταση 2.3.3 υπάρχει ένα left covariant isometric ζεύγος $(\eta, W)$ έτσι ώστε $\|[(V \times \pi)(F_{ij})]\| \leq \|[(W \times \eta)(F_{ij})]\|$. Παίρνοντας supremum έχουμε ότι

$$\begin{aligned} &\sup\{\|[(V \times \pi)(F_{ij})]\| : (\pi, V) \text{ l-cov.con. ζεύγος}\} \\ &\quad \leq \sup\{\|[(V \times \pi)(F_{ij})]\| : (\pi, V) \text{ l-cov.is. ζεύγος}\}. \end{aligned}$$

Η αντίστροφη ανίσωση είναι προφανής.

Η απόδειξη ολοκληρώνεται για τα right covariant contractive ζεύγη εφαρμόζοντας το λήμμα 2.1.2. $\square$

Σύμφωνα με το προηγούμενο αποτέλεσμα μας, αρκεί να ασχοληθούμε με τα left covariant isometric ζεύγη.

### Αριστερά συναλλοίωτα isometric ζεύγη

Ορίζουμε *το ημισταυρωτό γινόμενο του* $(\mathcal{C}, \alpha)$ *ως προς τα left covariant isometric ζεύγη* να είναι η άλγεβρα τελεστών του 1.1.27 που προκύπτει από τις ημινόρμες

$$\|[F_{i,j}]\|_\nu = \sup\{\|[(\pi \times V)(F_{i,j})]\|_{\mathcal{B}(H^\nu)} : (\pi, V) \text{ l-cov.con. ζεύγος } \},$$

το οποίο θα συμβολίζεται με $\mathfrak{A}(\mathcal{C}, \alpha, \text{is})_l$ Ομοίως ορίζεται *το ημισταυρωτό γινόμενο του* $(\mathcal{C}, \alpha)$ *ως προς τα right covariant co-isometric ζεύγη*, το οποίο συμβολίζουμε με $\mathfrak{A}(\mathcal{C}, \alpha, \text{co-is})_r$.

Το επόμενο θεώρημα είναι άμεσο από την πρόταση 2.3.4.

**Θεώρημα 2.3.5** *Το ημισταυρωτό γινόμενο* $\mathfrak{A}(\mathcal{C}, \alpha, is)_l$ *(αντ.* $\mathfrak{A}(\mathcal{C}, \alpha, co\text{-}is)_r$*) είναι πλήρως ισομετρικά ισόμορφο με το ημισταυρωτό γινόμενο* $\mathfrak{A}(\mathcal{C}, \alpha, contr)_l$ *(αντ.* $\mathfrak{A}(\mathcal{C}, \alpha, contr)_r$*). Επομένως έχουν το ίδιο* $C^*$*-envelope.* □

Για τα left covariant isometric ζεύγη ισχύει μια διάσπαση τύπου Wold σε ένα left covariant pure isometric ζεύγος και σε ένα left covariant unitary ζεύγος (βλ. [**36**]).

Πράγματι, έστω $(\pi, V)$ ένα left covariant isometric ζεύγος που δρα σε ένα χώρο Hilbert $H$. Θέτουμε $H_1 = \cap_{n\geq 0} V^n H$ και $H_2 = H_1^\perp$. Τότε ο $H_1$ ανάγει τον $V$, επομένως ο $V$ διασπάται σε $V_1 \oplus V_2$ έτσι ώστε $V_1 = V|_{H_1}$ και $V_2 = V|_{H_2}$. Παρατηρούμε ότι αν ο $V_1$ είναι μη-τετριμμένος, τότε είναι ορθομοναδιαίος, και ο $V_2$ έχει την ιδιότητα $\cap_{n\geq 0} V_2^n H_2 = (0)$, άρα είναι μια pure isometry. Τώρα, έστω $K = (V_2 H_2)^\perp \cap H_2 = \ker V^* \cap H_2$. Ορίζουμε

$$W : K \otimes \ell^2(\mathbb{Z}_+) \to H_2 : (\xi_0, \xi_1, \dots) \mapsto \sum_{n\geq 0} V^n \xi_n.$$

*Ισχυρισμός.* Ο $W$ είναι ορθομοναδιαίος.
*Απόδειξη του Ισχυρισμού.* Πρώτα θα δείξουμε ότι είναι ισομετρία. Έστω $\xi_n, \eta_n \in K$, τότε

$$\begin{aligned} \langle W(\xi_0, \xi_1, \dots), W(\eta_0, \eta_1, \dots)\rangle &= \sum_{n,m\geq 0} \langle V^n \xi_n, V^m \eta_m\rangle \\ = \sum_{n=m} \langle V^n \xi_n, V^m \eta_m\rangle &+ \sum_{n>m} \langle V^n \xi_n, V^m \eta_m\rangle + \sum_{n<m} \langle V^n \xi_n, V^m \eta_m\rangle \end{aligned}$$

$$= \sum_{n\geq 0} \langle \xi_n, \eta_n \rangle + \sum_{n>m} \left\langle \xi_n, (V^{n-m})^* \eta_m \right\rangle + \sum_{n<m} \left\langle (V^{m-n})^* \xi_n, \eta_m \right\rangle$$
$$= \sum_{n\geq 0} \langle \xi_n, \eta_m \rangle = \langle (\xi_0, \xi_1, \dots), (\eta_0, \eta_1, \dots) \rangle ,$$

εφόσον $V^* \xi_n = 0 = V^* \eta_n$, για κάθε $n \geq 0$.

Επίσης ο $W$ είναι επί του $H_2 = K \oplus K^\perp$. Πράγματι, για $\xi \in K$, έχουμε $W(\xi, 0, 0, \dots) = \xi$. Ακόμα, για $\xi \in K^\perp = V_2 H_2$ υπάρχει $y_0 \in H_2$ έτσι ώστε $\xi = V_2 y_0$. Όμως, $y_0 = x_1 + y_1$, για $x_1 \in K$ και $y_1 \in K^\perp = V_2 H_2$. Επομένως $\xi = V_2 x_1 + V_2^2 y_1$. Συνεχίζοντας επαγωγικά έχουμε ότι για κάθε $n \in \mathbb{Z}_+$ υπάρχουν $x_k \in K$, $k = 1, \dots, n$ και $y_n \in H_2$, έτσι ώστε $\xi = V_2 x_1 + V_2^2 x_2 + \dots V_2^n x_n + V_2^n y_n$. Εφόσον $V_2^n y_n \in V_2^n H_2$ και[3] $V_2^n H_2 \searrow (0)$, έχουμε ότι $\xi = \lim_n (V_2 x_1 + V_2^2 x_2 + \dots V_2^n x_n) = \lim_n W(0, x_1, x_2, \dots, x_n, 0, 0, \dots)$. Επομένως $\xi \in \mathrm{range}(W)$. □

Έστω $S_K = I_K \otimes s$, όπου $s$ ο unilateral shift. Τότε είναι εύκολο να δούμε ότι $W S_K = V W$. Εφόσον $V_2 = V|_{H_2}$, έχουμε ότι $V_2 = W S_K W^*$.

Ακόμα έχουμε ότι ο $H_1$ ανάγει την $\pi(\mathcal{C})$. Πράγματι, έστω $\eta \in H_1$, τότε υπάρχουν $\eta_n \in H$ έτσι ώστε $V^n \eta_n = \eta$, για κάθε $n \in \mathbb{Z}_+$. Τότε $\pi(c)\eta = \pi(c) V^n \eta_n = V^n \pi(\alpha^n(c)) \eta_n$. Συνεπώς $\pi(c)\eta \in \mathrm{range}(V^n)$, για κάθε $n \in \mathbb{Z}_+$. Άρα $\pi(c)\eta \in H_1$. Επομένως η $\pi$ διασπάται σε $\pi_1 \oplus \pi_2$ έτσι ώστε τα ζεύγη $(\pi_i, V_i)$ να είναι l-cov.is, για $i = 1, 2$.

Παρατηρούμε επίσης ότι ο $K$ ανάγει την $\pi_2(\mathcal{C})$. Πράγματι, αν $\xi \in K$, τότε $V^* \pi_2(c) \xi = \pi_2(\alpha(c)) V^* \xi = 0$. Έστω, χάριν απλότητας, ότι $\rho$ είναι ο περιορισμός της $\pi_2$ στον $K$ και $\widetilde{\rho}(c) = \mathrm{diag}\{\rho(\alpha^n(c)) : n \in \mathbb{Z}_+\}$, $c \in \mathcal{C}$, όπως στο παράδειγμα 2.3.2. Τότε

$$W \widetilde{\rho}(c)(\xi_0, \xi_1, \dots) = W(\rho(c)\xi_0, \rho(\alpha(c))\xi_1, \dots) = \sum_{n\geq 0} V^n \rho(\alpha^n(c)) \xi_n$$
$$= \sum_{n\geq 0} V^n \pi_2(\alpha^n(c)) \xi_n = \sum_{n\geq 0} \pi_2(c) V^n \xi_n = \pi_2(c) W(\xi_0, \xi_1, \dots).$$

Επομένως έχουμε αποδείξει το ακόλουθο.

**Πρόταση 2.3.6** [**36**, Proposition I.4] *Έστω $(\pi, V)$ ένα left covariant isometric ζεύγος του $(\mathcal{C}, \alpha)$ σε ένα χώρο Hilbert $H$. Τότε ο $H$ διασπάται σε $H = H_1 \oplus H_2$,*

[3] Παρατηρούμε ότι η $V_2^n H_2$ είναι φθίνουσα και ότι $\cap_{n\geq 0} V_2^n H_2 = (0)$.

*όπου οι $H_i$, $i = 1, 2$, είναι $V$-αναλλοίωτοι και ανάγουν την $\pi(\mathcal{C})$, με $H_1 = \cap_{n\geq 0} V^n H$. Θέτουμε $V_i = V|_{H_i}$ και $\pi_i(c) = \pi(c)|_{H_i}$, για $i = 1, 2$. Αν $H_1 \neq 0$ τότε ο $V_1$ είναι ορθομοναδιαίος, και αν $H_2 \neq 0$ τότε ο $V_2$ είναι μια pure isometry, και τα ζεύγη $(\pi_i, V_i)$ ικανοποιούν την αριστερά συναλλοίωτη σχέση. Επιπλέον, ο $(V_2 \times \pi_2)$ είναι ορθομοναδιαία ισοδύναμος με μια αναπαράσταση όπως στο παράδειγμα 2.3.2.* □

Το επόμενο που θα δείξουμε είναι ότι τα left covariant unitary ζεύγη δεν επηρεάζουν τις νόρμες πινάκων.

**Πρόταση 2.3.7** *Έστω $[F_{ij}] \in \mathcal{M}_\nu \ell^1(\mathbb{Z}_+, \mathcal{C}, \alpha)_l$, $\nu \geq 1$. Τότε*

$$\|[F_{ij}]\|_\infty = \sup\{\|[(V \times \pi)(F_{ij})]\| : (\pi, V) \text{ l-cov. pure is. ζεύγος}\}.$$

*Απόδειξη.* Έστω $F_{ij} = \sum_{n=0}^{k} \delta_n \otimes c_n^{ij} \in \mathbb{Z}_+ \times \mathcal{C}$. Παρατηρούμε ότι μπορούμε να επιλέξουμε το ίδιο $k$ για όλα τα $F_{ij}$ προσθέτοντας μηδενικούς όρους. Έστω $(\pi, V)$ ένα left covariant unitary ζεύγος. Η αριστερά συναλλοίωτη σχέση δίνει $\pi(c) = V^n \pi(\alpha^n(c))(V^*)^n$, για κάθε $c \in \mathcal{C}$, αφού ο $V$ είναι ορθομοναδιαίος. Όπως έχουμε δείξει $\pi(c) = 0$, για κάθε $c \in \mathcal{R}_\alpha$. Συνεπώς αν διασπάσουμε την $(H, \pi)$ ως προς το ιδεώδες $\mathcal{R}_\alpha$, έχουμε ότι $H_{\mathcal{R}_\alpha} = H$ και $\pi'(c + \mathcal{R}_\alpha) = \pi(c)$. Επομένως το ζεύγος $(\pi, V)$ του $(\mathcal{C}, \alpha)$ επάγει ένα left covariant unitary ζεύγος $(V, \pi')$ του $(\mathcal{C}/\mathcal{R}_\alpha, \dot{\alpha})$. Συνεπώς

$$\|[(V \times \pi)(F_{ij})]\| = \left\|\left[(V \times \pi')(F'_{ij})\right]\right\|,$$

όπου $F'_{ij} = \sum_{n=0}^{k} \delta_n \otimes (c_n^{ij} + \mathcal{R}_\alpha)$.
Έστω $\mathcal{B} = \varinjlim(\mathcal{C}/\mathcal{R}_\alpha, \dot{\alpha}) = \overline{\cup_{n\in\mathbb{Z}_+} \beta^{-n}(\mathcal{C}/\mathcal{R}_\alpha)}$ και $\beta : \mathcal{B} \to \mathcal{B}$, όπως έχει οριστεί στο κεφάλαιο 1.4, έτσι ώστε $\beta|_{\mathcal{C}/\mathcal{R}_\alpha} = \dot{\alpha}$. Μπορούμε να επεκτείνουμε την $(H, \pi')$ σε μια αναπαράσταση της $\mathcal{B}$ ως εξής: έστω $c \in \mathcal{B}$ με $\beta^n(c) \in \mathcal{C}/\mathcal{R}_\alpha$. Ορίζουμε $\rho(c) = V^n \pi'(\beta^n(c))(V^*)^n$. Τότε η $\rho$ είναι καλά ορισμένη με την έννοια ότι δεν εξαρτάται από την επιλογή του $n$. Πράγματι, έστω $m > n$ έτσι ώστε $\beta^m(c) \in \mathcal{C}/\mathcal{R}_\alpha$. Τότε

$$\begin{aligned} V^m \pi'(\beta^m(c))(V^*)^m &= V^n V^{m-n} \pi'(\beta^{m-n}(\beta^n(c)))(V^*)^{m-n}(V^*)^n \\ &= V^n \pi'(\beta^n(c)) V^{m-n}(V^*)^{m-n}(V^*)^n \\ &= V^n \pi'(\beta^n(c))(V^*)^n, \end{aligned}$$

λόγω της αριστερά συναλλοίωτης σχέσης και εφόσον $\beta^n(c) \in \mathcal{C}/\mathcal{R}_\alpha$. Επειδή η $\rho$ είναι φραγμένη επεκτείνεται σε *-αναπαράσταση της $\mathcal{B}$. Επίσης, παρατηρούμε ότι

$\rho|_{\mathcal{C}/\mathcal{R}_\alpha} = \pi'$ και ότι το $(\rho, V)$ είναι ένα l-cov.un. ζεύγος. Πράγματι, για κάθε $c \in \mathcal{B}$ με $\beta^n(c) \in \mathcal{C}/\mathcal{R}_\alpha$ έχουμε ότι

$$\begin{aligned}\rho(c)V &= V^n\pi'(\beta^n(c))(V^*)^nV = V^n\pi'(\beta^n(c))V(V^*)^n \\ &= V^nV\pi'(\beta^{n+1}(c))(V^*)^n = VV^n\pi'(\beta^{n+1}(c))(V^*)^n = V\rho(\beta(c)).\end{aligned}$$

Άρα το ζεύγος $(\rho, V)$ επάγει έναν *-μορφισμό $(V \times \rho)$ του σταυρωτού γινομένου $\mathbb{Z} \rtimes_\beta \mathcal{B}$. Έστω $(K, \psi)$ μια πιστή αναπαράσταση της $\mathcal{B}$. Ορίζουμε το ζευγάρι $(\widehat{\psi}, U)$, όπως στο παράδειγμα 1.3.4, όπου $U = 1_K \otimes u$, όπου ο $u$ είναι ο bilateral shift στον $\ell^2(\mathbb{Z})$. Εφόσον η $\mathcal{B}$ περιέχει ένα αντίγραφο της $\mathcal{C}/\mathcal{R}_\alpha$, παρατηρούμε ότι $F'_{ij} \in \mathbb{Z} \rtimes_\beta \mathcal{B}$. Επομένως,

$$\left\| \left[(V \times \pi')(F'_{ij})\right] \right\| \leq \left\| [F'_{ij}] \right\|_{\mathcal{M}\nu(\mathbb{Z}\rtimes_\beta\mathcal{B})} = \left\| \left[(U \times \widehat{\psi})(F'_{ij})\right] \right\|_{K^{(n)}\otimes\ell^2(\mathbb{Z})}.$$

Υπενθυμίζουμε ότι $\ell^2(\mathbb{Z}) = \overline{\cup_{n<0}\mathcal{H}_n}$, όπου $\mathcal{H}_n = [e_k : k \geq n]$. Άρα, για κάθε $\epsilon > 0$, υπάρχει ένα $n < 0$, έτσι ώστε

$$\left\| \left[(U \times \widehat{\psi})(F'_{ij})\right] \right\|_{K^{(n)}\otimes\ell^2(\mathbb{Z})} - \epsilon < \left\| \left[(U \times \widehat{\psi})(F'_{ij})\right] |_{K^{(n)}\otimes\mathcal{H}_n} \right\|_{K^{(n)}\otimes\ell^2(\mathbb{Z})}.$$

Έστω $U_+ = U|_{K^{(n)}\otimes\mathcal{H}_n}$ και $\omega = (\widehat{\psi} \circ q)|_{K^{(n)}\otimes\mathcal{H}_n)}$, όπου $q : \mathcal{C} \to \mathcal{C}/\mathcal{R}_\alpha$ η απεικόνιση πηλίκο. Τότε ο $U_+$ είναι μια pure isometry[4] και το $(\omega, U_+)$ είναι ένα left covariant isometric ζεύγος του $(\mathcal{C}, \alpha)$. Συνεπώς, για κάθε left covariant unitary ζεύγος $(\pi, V)$ και $\epsilon > 0$, έχουμε κατασκευάσει ένα left covariant pure isometric ζεύγος $(U_+, \omega)$, έτσι ώστε

$$\begin{aligned}\|[(V \times \pi)(F_{ij})]\| &< \|[(U_+ \times \omega)(F_{ij})]\| + \epsilon \\ &\leq \sup\{\|[(V \times \pi)(F_{ij})]\| : (\pi, V) \text{ l-cov. pure is. ζεύγος}\} + \epsilon.\end{aligned}$$

Εφόσον κάθε l-cov.is. ζεύγος διασπάται σε ένα l-cov.un ζεύγος και ένα l-cov. pure is. ζεύγος, έχουμε ότι

$$\|[F_{ij}]\|_\infty \leq \sup\{\|[V \times \pi(F_{ij})]\| : (\pi, V) \text{ l-cov. pure is. ζεύγος}\}.$$

Από την άλλη, είναι εύκολο να δούμε ότι

$$\|[F_{ij}]\|_\infty \geq \sup\{\|[V \times \pi(F_{ij})]\| : (\pi, V) \text{ l-cov. pure is. ζεύγος}\},$$

και άρα έχουμε ισότητα. □

Συνδυάζοντας τα προηγούμενα αποτελέσματα έχουμε τελικά το εξής.

[4] εφόσον είναι ampliation του unilateral shift στον $\mathcal{H}_n$.

**Πόρισμα 2.3.8** *Έστω* $[F_{ij}] \in \mathcal{M}_\nu(\ell^1(\mathbb{Z}_+, \mathcal{C}, \alpha)_l)$, $\nu \geq 1$. *Τότε*

$$\|[F_{ij}]\|_\infty = \sup\{\|[(S_H \times \widetilde{\pi})(F_{ij})]\| : (H, \pi) \text{ αναπαράσταση της } \mathcal{C}\},$$

*όπου* $(\widetilde{\pi}, S_H)$ *όπως στο παράδειγμα 2.3.2.* □

Ο στόχος είναι να αποδείξουμε ότι το ημισταυρωτό γινόμενο ως προς τα left covariant isometric ζεύγη είναι πλήρως ισομετρικά ισόμορφο με την εικόνα μιας αναπαράστασης $(S \times \widetilde{\pi})$. Πρώτα όμως ας κάνουμε μερικές παρατηρήσεις για το ημισταυρωτό γινόμενο.

Έστω $H_u = \oplus_i H_i$, $\pi_u = \oplus_i \pi_i$ και $V_u = \oplus_i V_i$, για τα left covariant contractive ζεύγη $(\pi_i, V_i)$ που δρουν σε χώρο Hilbert $H_i$. Τότε το ημισταυρωτό γινόμενο είναι η κλειστή θήκη της άλγεβρας (τελεστών) που παράγεται από τα $\pi_u(c)$, $c \in \mathcal{C}$, και τις θετικές δυνάμεις του $V_u$ μέσα στον $\mathcal{B}(H_u)$. Λόγω της αριστερά συναλλοίωτης σχέσης, είναι η κλειστή γραμμική θήκη των πολυωνύμων

$$\sum_{n=0}^{k} V_u^n \pi_u(c_n), \quad c_n \in \mathcal{C}.$$

Ονομάζουμε $C^*(\pi_u, V_u)$ την (καθολική) *$C^*$-άλγεβρα που παράγεται από το ημισταυρωτό γινόμενο μέσα στον $\mathcal{B}(H_u)$.* Η καθολική ιδιότητα της $C^*(\pi_u, V_u)$ είναι η ακόλουθη:

> για κάθε left covariant contractive ζεύγος $(\pi, V)$ υπάρχει ένας *-επιμορφισμός $\Phi : C^*(\pi_u, V_u) \to C^*(\pi, V)$, όπου $C^*(\pi, V)$ η $C^*$-άλγεβρα που παράγεται από τα $\pi(c)$, $c \in \mathcal{C}$, και τον $V$, έτσι ώστε $\Phi \circ \pi_u = \pi$ και $\Phi \circ V_u = V$.

Ο *-επιμορφισμός $\Phi$ επάγεται από τον περιορισμό των $\pi_u$ και $V_u$ στον $H \subseteq H_u$. Επίσης, λόγω της αριστερά συναλλοίωτης σχέσης, κάθε $C^*(\pi, V)$ είναι η κλειστή γραμμική θήκη των τριγωνομετρικών πολυωνύμων

$$\sum_{n,m} V^n \pi(c_{n,m})(V^*)^m, \quad c_{n,m} \in \mathcal{C}.$$

Θα κατασκευάσουμε μια οικογένεια $\{\beta_z\}_{z \in \mathbb{T}}$ από *-αυτομορφισμούς της $C^*(\pi_u, V_u)$, που είναι επιπλέον point-norm συνεχής, έτσι ώστε $\beta_z(\pi_u(c)) = \pi_u(c)$, $c \in \mathcal{C}$ και $\beta_z(V^n) = z^n V^n$, $n \in \mathbb{Z}_+$.

Για $z \in \mathbb{T}$ παρατηρούμε ότι το ζεύγος $(\pi_u, zV_u)$ είναι επίσης left covariant contractive. Λόγω της καθολικής ιδιότητας της $C^*(\pi_u, V_u)$, υπάρχει ένας *-επιμορφισμός $\beta_z : C^*(\pi_u, V_u) \to C^*(\pi_u, zV_u)$ έτσι ώστε $\beta_z(\pi_u(c)) = \pi_u(c)$, $c \in \mathcal{C}$ και $\beta_z(V_u) = zV_u$. Εφόσον $C^*(\pi_u, zV_u) = C^*(\pi_u, V_u)$, η $\beta_z$ είναι *-επιμορφισμός της $C^*(\pi_u, V_u)$. Επίσης, αφού τα προηγούμενα ισχύουν για κάθε $z \in \mathbb{T}$, ο $\beta_z$ είναι *-αυτομορφισμός της $C^*(\pi_u, V_u)$. Τώρα, παρατηρούμε ότι αν $\lim_k z_k = z_0$, τότε για κάθε μονώνυμο $V_u^n \pi_u(c)(V_u^*)^m$

$$\begin{aligned}\lim_{z_k \to z_0} \beta_{z_k}(V_u^n \pi_u(c)(V_u^*)^m) &= \lim_{z_k \to z_0} z_k^{n-m} V_u^n \pi_u(c)(V_u^*)^m \\ &= z_0^{n-m} V_u^n \pi_u(c)(V_u^*)^m = \beta_{z_0}(V_u^n \pi_u(c)(V_u^*)^m).\end{aligned}$$

Εφόσον η $C^*(\pi_u, V_u)$ είναι η κλειστή θήκη των «τριγωνομετρικών πολυωνύμων» και κάθε $\beta_z$ είναι ισομετρία, ένα επιχείρημα τύπου $\epsilon/3$ δίνει ότι η $\{\beta_z\}_{z\in\mathbb{T}}$ είναι point-norm συνεχής.

Χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες της $\{\beta_z\}_{z\in\mathbb{T}}$ μπορούμε να ορίσουμε την απεικόνιση $\mathcal{E} : C^*(\pi_u, V_u) \to C^*(\pi_u, V_u)$ με

$$\mathcal{E}(X) := \int_{\mathbb{T}} \beta_z(F) dz, \quad F \in C^*(\pi_u, V_u),$$

όπου $dz$ είναι το κανονικοποιημένο μέτρο Lebesgue στην περιφέρεια $\mathbb{T}$, και το ολοκλήρωμα είναι το ολοκλήρωμα Riemann μιας norm-συνεχούς απεικόνισης.

Επίσης, ονομάζουμε $C^*(\pi_u, V_u)^\beta$ την fixed point algebra της $\{\beta_z\}_{z\in\mathbb{T}}$, η οποία ορίζεται ως το σύνολο $\{F \in C^*(\pi_u, V_u) : \beta_z(F) = F \text{ για κάθε } z \in \mathbb{T}\}$. Είναι προφανές ότι η $C^*(\pi_u, V_u)^\beta$ είναι $C^*$-άλγεβρα. Επίσης είναι εύκολο να δούμε ότι

$$C^*(\pi_u, V_u)^\beta = \overline{\mathrm{span}}\{\sum_{n=0}^{k} V_u^n \pi_u(c_n)(V_u^*)^n : c_n \in \mathcal{C}\}.$$

Πράγματι, εφόσον $\beta_z(V_u^m \widetilde{\pi}(c)(V_u^*)^m) = z^{n-m} V_u^m \widetilde{\pi(c)}(V_u^*)^m$, έχουμε ότι η

$$\overline{\mathrm{span}}\{\sum_{n=0}^{k} V_u^n \pi_u(c_n)(V_u^*)^n : c_n \in \mathcal{C}\}$$

περιέχεται στην $C^*(\pi_u, V_u)^\beta$. Για το αντίστροφο, έστω $F \in C^*(\pi_u, V_u)^\beta$. Τότε υπάρχει μια ακολουθία $F_\lambda$, με $F_\lambda = \sum_{m,k}^{N_\lambda} V_u^m \widetilde{\pi}(c_{m,k})(V_u^*)^k$, έτσι ώστε $F = \lim_\lambda F_\lambda$.

Άρα, $\mathcal{E}(F_\lambda) = \sum_{m=0}^{N_\lambda} V_u^m \widetilde{\pi}(c_{m,m})(V_u^*)^m$. Εφόσον το $F$ ανήκει στην fixed point άλγεβρα, έχουμε ότι $F = \mathcal{E}(F) = \lim_\lambda \mathcal{E}(F_\lambda)$.

**Πρόταση 2.3.9** *Η απεικόνιση* $\mathcal{E} : C^*(\pi_u, V_u) \to C^*(\pi_u, V_u)$ *με*

$$\mathcal{E}(X) := \int_{\mathbb{T}} \beta_z(F)dz, \quad F \in C^*(\pi_u, V_u),$$

*όπου* $dz$ *είναι το κανονικοποιημένο μέτρο Lebesgue στην περιφέρεια, και το ολοκλήρωμα είναι το ολοκλήρωμα Riemann μιας norm-συνεχούς απεικόνισης, είναι ταυτοδύναμη και πιστή συστολή, με* $\mathcal{E}(C^*(\pi_u, V_u)) = C^*(\pi_u, V_u)^\beta$. $\square$

*Απόδειξη.* Πρώτα από όλα για να δείξουμε ότι είναι πιστή, θεωρούμε $F \in C^*(\pi_u, V_u)$ με $\mathcal{E}(F^*F) = 0$, και θα δείξουμε ότι $F = 0$. Πράγματι, εφόσον $F^*F \geq 0$, έχουμε ότι $\beta_z(F^*F) \geq 0$, για κάθε $z \in \mathbb{T}$. Επομένως, αν $\mathcal{E}(F^*F) = 0$, τότε $\beta_z(F^*F) = 0$, για κάθε $z \in \mathbb{T}$. Άρα $F^*F = 0$, αφού κάθε $\beta_z$ είναι *-αυτομορφισμός, που δίνει ότι $F = 0$.
Έστω τώρα $w \in \mathbb{T}$. Τότε

$$\beta_w(\mathcal{E}(F)) = \beta_w(\int_{\mathbb{T}} \beta_z(F)dz) = \int_{\mathbb{T}} \beta_{wz}(F)dz = \int_{\mathbb{T}} \beta_z(F)dz = \mathcal{E}(F).$$

Άρα $\mathcal{E}(C^*(\pi_u, V_u)) \subseteq C^*(\pi_u, V_u)^\beta$. Από την άλλη, έστω $F \in C^*(\pi_u, V_u)^\beta$. Τότε

$$\mathcal{E}(F) = \int_{\mathbb{T}} \beta_z(F)dz = \int_{\mathbb{T}} F dz = F.$$

Συνεπώς, $\mathcal{E}(C^*(\pi_u, V_u)) = C^*(\pi_u, V_u)^\beta$, και άρα η απεικόνιση $\mathcal{E}$ είναι ταυτοδύναμη. $\square$

Προτού προχωρήσουμε στην απόδειξη του βασικού θεωρήματος ξετάζουμε τις ιδιότητες που έχουν τα συγκεκριμένα ζεύγη του παραδείγματος 2.3.2. Έστω, λοιπόν $(H_0, \pi)$ πιστή αναπαράσταση της $\mathcal{C}$ και $(\widetilde{\pi}, S)$, όπως ορίζεται στο παράδειγμα 2.3.2. Δηλαδή, $\widetilde{\pi} : \mathcal{C} \to \mathcal{B}(H)$, με $H = H_0 \otimes \ell^2(\mathbb{Z}_+)$, έτσι ώστε $\widetilde{\pi}(c) = \mathrm{diag}\{\pi(\alpha^n(c)) : n \in \mathbb{Z}_+\}$, και $S = I_{H_0} \otimes s$, με $s$ το unilateral shift στον $\ell^2(\mathbb{Z}_+)$. Για κάθε $z \in \mathbb{T}$ ορίζουμε τον ορθομοναδιαίο τελεστή $u_z : \ell^2(\mathbb{Z}_+) \to \ell^2(\mathbb{Z}_+)$, με $u_z(e_m) = z^m e_m$. Έστω $U_z = I_{H_0} \otimes u_z$. Τότε η $\gamma_z = ad_{U_z}$ είναι ένας *-αυτομορφισμός της $C^*(\widetilde{\pi}, S)$, εφόσον $\gamma_z(\widetilde{\pi}(c)) = \widetilde{\pi}(c)$, $c \in \mathcal{C}$ και $\gamma_z(S^n) = z^n S^n$, $n \in \mathbb{Z}_+$. Επιπλέον, όπως και στην περίπτωση των $\beta_z$, η οικογένεια $\{\gamma_z\}_{z\in\mathbb{T}}$ είναι μια point-norm συνεχής οικογένεια, και άρα επάγει την conditional expectation

$$E(F) := \int_{\mathbb{T}} \beta_z(F)dz, \quad F \in C^*(\widetilde{\pi}, S).$$

Ομοίως, η fixed point άλγεβρα $C^*(\widetilde{\pi}, S)^\gamma$ είναι η $\overline{\mathrm{span}}\{\sum_{n=0}^k S^n\pi(c_n)(S^*)^n : c_n \in \mathcal{C}\}$ και η $E : C^*(\widetilde{\pi}, S) \to C^*(\widetilde{\pi}, S)^\gamma$ είναι ταυτοδύναμη και πιστή συστολή, επί της $C^*(\pi, S)^\gamma$.

Έστω τώρα $\Phi : C^*(\pi_u, V_u) \to C^*(\widetilde{\pi}, S)$ ο φυσιολογικός *-επιμορφισμός. Τότε $\Phi \circ \beta_z = \gamma_z \circ \Phi$ και άρα $\Phi \circ \mathcal{E} = E \circ \Phi$. Επομένως, ο περιορισμός της $\Phi$ στην $C^*(\pi_u, V_u)^\beta$ είναι ένας *-μορφισμός επί της $C^*(\widetilde{\pi}, S)^\gamma$. Για την απόδειξη της επόμενης πρότασης θα χρησιμοποιήσουμε ότι η $C^*(\pi_u, V_u)^\beta$ γράφεται ως επαγωγικό όριο $\overline{\cup_n B_n}$ των C*-υπαλγεβρών $B_n = \overline{\mathrm{span}}\{\sum_{n=0}^k V_u^n\pi_u(c_n)(V_u^*)^n : c_n \in \mathcal{C}\}$.

**Πρόταση 2.3.10** *Με τους παραπάνω συμβολισμούς, ο περιορισμός του *-επιμορφισμού $\Phi : C^*(\pi_u, V_u) \to C^*(\widetilde{\pi}, S)$ στην $C^*(\pi_u, V_u)^\beta$ είναι *-ισομετρικός ισομορφισμός επί της $C^*(\widetilde{\pi}, S)^\gamma$.*

*Απόδειξη.* Έστω ότι το ιδεώδες $\ker(\Phi|_{\mathrm{C}^*(\pi_u,V_u)^\beta})$ είναι μη-τετριμμένο. Εφόσον η $\mathrm{C}^*(\pi_u, V_u)^\beta$ είναι το απαγωγικό όριο των $B_k$, $k = 0, 1, \ldots$, υπάρχει $k$ έτσι ώστε $B_k \cap \ker(\Phi|_{\mathrm{C}^*(\pi_u,V_u)^\beta}) \neq (0)$. Επομένως υπάρχει ένα μη-μηδενικό πολυώνυμο $F = \sum_{n=0}^k V_u^n\widetilde{\pi_u}(c_n)(V_u^*)^n$ τέτοιο ώστε $\Phi(F) = \sum_{n=0}^k S^n\widetilde{\pi}(c_n)(S^*)^n = 0$. Παρατηρούμε ότι

$$S^n\widetilde{\pi}(c)(S^*)^n = \mathrm{diag}\{\underbrace{0, \ldots, 0}_{\text{n-φορές}}, \pi(c), \pi(\alpha(c)), \ldots\},$$

συνεπώς το $(m, m)$-στοιχείο $(\Phi(F))_{m,m}$ του $\Phi(F)$ ισούται με

$$\begin{aligned}(\Phi(F))_{m,m} &= \begin{cases} \pi\left(\alpha^m(c_0) + \alpha^{m-1}(c_1) + \cdots + c_m\right) & , \text{ για } m < k, \\ \pi\left(\alpha^m(c_0) + \alpha^{m-1}(c_1) + \cdots + \alpha^{m-k}(c_k)\right) & , \text{ για } m \geq k, \end{cases} \\ &= \pi\left(\sum_{j=0}^{\min\{m,k\}} \alpha^{m-j}(c_{m-j})\right).\end{aligned}$$

Εφόσον $\Phi(F) = 0$, έχουμε ότι $(\Phi(F))_{0,0} = 0$, άρα $\pi(c_0) = 0$. Αφού η $(H_0, \pi)$ είναι πιστηή έπεται ότι $c_0 = 1$. Συνεπώς $(\Phi(F))_{1,1} = \pi(c_1)$ και επιχειρηματολογώντας όπως πριν έπεται ότι $c_1 = 0$. Επαγωγικά έχουμε ότι $c_m = 0$ για κάθε $m = 0, 1, \ldots, k$, άρα $F = \sum_{n=0}^k V_u^n\widetilde{\pi_u}(c_n)(V_u^*)^n = 0$, που είναι άτοπο. □

**Θεώρημα 2.3.11** *Ο *-επιμορφισμός $\Phi : C^*(\pi_u, V_u) \to C^*(\pi, S)$ είναι 1-1, και άρα *-ισομετρικός ισομορφισμός. Επομένως, το ημισταυρωτό γινόμενο $\mathfrak{A}(\mathcal{C}, \alpha, is)_l$ είναι πλήρως ισομετρικά ισόμορφο προς τη norm-κλειστή θήκη των πολυωνύμων $\sum_{n=0}^{k} S^n \widetilde{\pi}(c_n)$, $c_n \in \mathcal{C}$, για κάθε πιστή αναπαράσταση $(H, \pi)$ της $\mathcal{C}$.*

*Απόδειξη.* Έστω $F \in \ker \Phi$, τότε $F^*F \in \ker \Phi$. Επομένως,

$$\begin{aligned}\Phi(\mathcal{E}(F^*F)) &= \Phi(\int_z \beta_z(F^*F)dz \\ &= \int_z \Phi(\beta_z(F^*F))dz = \int_z \beta_z(\Phi(F^*F))dz = 0.\end{aligned}$$

Όμως, $\mathcal{E}(F^*F) \in C^*(\pi_u, V_u)^\beta$, άρα από την προηγούμενη πρόταση $\mathcal{E}(F^*F) = 0$. Συνεπώς $F = 0$, αφού η $\mathcal{E}$ είναι πιστή. □

Από την πρόταση 2.3.6 είναι άμεσο το επόμενο πόρισμα.

**Πόρισμα 2.3.12** *Το ημισταυρωτό γινόμενο $\mathfrak{A}(\mathcal{C}, \alpha, is)_l$ είναι πλήρως ισομετρικά ισόμορφο προς τη norm-κλειστή θήκη των πολυωνύμων $\sum_{n=0}^{k} V^n \pi(c_n)$, $c_n \in \mathcal{C}$, για κάθε left covariant purely isometric ζεύγος $(\pi, V)$, με $(H, \pi)$ πιστή αναπαράσταση της $\mathcal{C}$.* □

Χρησιμοποιώντας το λήμμα 2.1.2 όπως στην πρόταση 2.2.10, προκύπτει το επόμενο θεώρημα.

**Θεώρημα 2.3.13** *Το ημισταυρωτό γινόμενο $\mathfrak{A}(\mathcal{C}, \alpha, co\text{-}is)_r$ είναι πλήρως ισομετρικά ισόμορφο προς τη norm-κλειστή θηκή των πολυωνύμων $\sum_{n=0}^{k} \widetilde{\pi}(c_n)(S^*)^n$, $c_n \in \mathcal{C}$, για κάθε πιστή αναπαράσταση $(H, \pi)$ της $\mathcal{C}$ και $S = I_H \otimes s$, με $s$ ο unilateral shift.* □

**Παράδειγμα 2.3.14** Έστω $\mathcal{C} = C(K)$ μια αβελιανή $C^*$-άλγεβρα με μονάδα και $\alpha : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ ένας *-μορφισμός της. Τότε υπάρχει μια συνεχής απεικόνιση $\phi : K \to K$ έτσι ώστε $\alpha(f) = f \circ \phi$. Για κάθε $t \in K$ ορίζουμε την αναπαράσταση $\pi_t : C(K) \to \mathcal{B}(\ell^2(\mathbb{Z}_+))$ με $\pi_t(f) = \mathrm{diag}\{f(\phi^n(t)) : n \in \mathbb{Z}_+\}$. Τότε το $(\pi_t, s)$, όπου $s$ είναι το unilateral shift, είναι ένα left covariant pure isometric ζεύγος και άρα ορίζει μια αναπαράσταση του ημισταυρωτού γινομένου που είναι πλήρης συστολή. Άρα η norm-κλειστή άλγεβρα των πολυωνύμων $\sum_{n=0}^{k} s^n \pi_t(c_n)$, $c_n \in \mathcal{C}$, έστω $\mathcal{C}_t$, είναι μια completely contractive εικόνα του ημισταυρωτού γινομένου.

Επιπλέον, αν $K_0$ είναι ένα πυκνό υποσύνολο του $K$ και $\Pi = \oplus_{t\in K_0}\pi_t$, $\hat{S} = \oplus_{t\in K_0} s$ τότε το ημισταυρωτό γινόμενο του $(K,\phi)$ είναι πλήρως ισομετρικά ισόμορφο προς τη norm-κλειστή γραμμική θήκη των πολυωνύμων $\sum_{n=0}^{k} \hat{S}^n \Pi(c_n)$, $c_n \in \mathcal{C}$.

Ακόμα, αν ένα σημείο $t \in K$ έχει πυκνή τροχιά $\mathrm{orb}(t) = \{\phi^n(t) : n \in \mathbb{Z}_+\}$ στο $K$, τότε το ημισταυρωτό γινόμενο είναι πλήρως ισομετρικά ισόμορφο με τη norm-κλειστή γραμμική θήκη των πολυωνύμων $\sum_{n=0}^{k} s^n \pi_t(c_n)$, $c_n \in \mathcal{C}$. Η απόδειξη είναι παρόμοια με αυτή του θεωρήματος 2.3.11, εφόσον η $(\ell^2(\mathbb{Z}_+), \pi_t)$ είναι μια πιστή αναπαράσταση της $\mathcal{C}(K)$ όταν η $\mathrm{orb}(t)$ είναι πυκνή στο $K$.

### Προσθήκη Κεφαλής

Στην περίπτωση των left covariant co-isometric ζευγών είδαμε ότι υπάρχει ένας φυσιολογικός τρόπος να περνάμε από ένα ζεύγος $(\mathcal{C},\alpha)$ στο $(\mathcal{C}/\mathcal{R}_\alpha, \dot{\alpha})$ και άρα να υποθέτουμε ότι η $\alpha$ είναι *-μονομορφισμός. Αντιθέτως για τα left covariant isometric ζεύγη αυτό δεν ισχύει. Σε αυτή την ενότητα, ξεκινώντας από ένα ζεύγος $(\mathcal{C},\alpha)$ θα κατασκευάσουμε μια $C^*$-άλγεβρα $\mathcal{B}$ και έναν *-μονομορφισμό $\beta : \mathcal{B} \to \mathcal{B}$, έτσι ώστε το ζεύγος $(\mathcal{B},\beta)$ να είναι διαστολή του ζεύγους $(\mathcal{C},\alpha)$.

Πρώτα από όλα, έστω $\mathcal{M} \equiv \mathcal{M}(\ker\alpha)$ η $C^*$-άλγεβρα των πολλαπλασιαστών του $\ker\alpha$, και $\theta : \mathcal{C} \to \mathcal{M}$ ο μοναδικός μοναδιαίος *-μορφισμός που επεκτείνει τη φυσιολογική εμφύτευση $\ker\alpha \hookrightarrow \mathcal{M}$. Ορίζουμε τη $C^*$-άλγεβρα $\mathcal{B} = \mathcal{C} \oplus c_0(\theta(\mathcal{C}))$ και $\beta : \mathcal{B} \to \mathcal{B}$ έτσι ώστε

$$\beta(c,(x_n)) = (\alpha(c),(y_n)), \text{ όπου } y_1 = \theta(c),\ y_n = x_{n-1} \text{ για } n \geq 2,$$

για κάθε $c \in \mathcal{C}$, $(x_n) \in c_0(\theta(\mathcal{C}))$. Τότε η $\beta$ είναι ένας μοναδιαίος *-μονομορφισμός. Πράγματι, έστω $(c,(x_n)) \in \ker\beta$. Τότε $x_n = 0$, $\theta(c) = 0$ και $\alpha(c) = 0$. Επομένως, $c \in \ker\alpha$, άρα $c = \theta(c) = 0$. Συνεπώς $(c,(x_n)) = 0$.

Για ευκολία, στο εξής το στοιχείο $(0) \in c_0(\mathcal{M})$ θα συμβολίζεται ως $\vec{0}$.

**Σχόλια 2.3.15** Παρατηρούμε ότι ενώ $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{B}$, η $\beta$ δεν επεκτείνει την $\alpha$. Παρόλα αυτά έχουμε

$$(1,\vec{0})\beta(c,(x_n))(1,\vec{0}) = (\alpha(c),\vec{0}),$$

και άρα, με αυτήν την έννοια, η $\beta$ είναι μια διαστολή της $\alpha$. Επίσης, $\beta^m(c_1,(x_n))(c_2,\vec{0}) = (\alpha^m(c_1)c_2,\vec{0})$, για κάθε $c_1, c_2 \in \mathcal{C}$. Ειδικότερα,

$$\beta^m(1,\vec{0})(c,\vec{0}) = (1_{\mathcal{C}}, 1_{\mathcal{M}}, \ldots, 1_{\mathcal{M}}, 0, \ldots)(c,\vec{0}) = (c,\vec{0}), \tag{2.1}$$

για κάθε $m \in \mathbb{Z}_+$.

Εφόσον η $\beta$ είναι *-μονομορφισμός, το ζεύγος $(\mathcal{B},\beta)$ επεκτείνεται στο $(\mathcal{B}_\infty,\beta_\infty)$, όπως είδαμε στην ενότητα 1.3.2. Έστω το σταυρωτό γινόμενο

$$\mathcal{B}_\infty \rtimes_{\beta_\infty} \mathbb{Z} = \overline{\mathrm{span}}\{U^n\widehat{\pi}(y) : y \in \mathcal{B}_\infty, n \in \mathbb{Z}\},$$

όπου $(H_0,\pi)$ μια πιστή αναπαράσταση της $\mathcal{B}_\infty$ και $(\widehat{\pi},U)$ το ζεύγος που επάγει τη left regular αναπαράσταση του ζεύγους $(\mathcal{B}_\infty,\beta_\infty)$, όπως ορίστηκαν στην ενότητα 1.4. Εφόσον $\mathcal{B}_\infty = \overline{\cup_n \beta_\infty^{-n}(\mathcal{B})}$, και λόγω της συναλλοίωτης σχέσης, έχουμε ότι

$$\mathcal{B}_\infty \rtimes_{\beta_\infty} \mathbb{Z} = \overline{\mathrm{span}}\{U^n\widehat{\pi}(b)(U^*)^m : n,m \in \mathbb{Z}_+, b \in \mathcal{B}\}.$$

Ορίζουμε τη $C^*$-υπάλγεβρα $\mathfrak{U}$ του σταυρωτού γινομένου που παράγεται από τα $U\widehat{\pi}(1,\vec{0})$ και $\widehat{\pi}(c,\vec{0})$, $c \in \mathcal{C}$. Τότε η $\mathfrak{U}$ είναι κλειστή γραμμική θήκη των μονωνύμων $U^n\widehat{\pi}(c)(U^*)^m$, $n,m \in \mathbb{Z}_+$, $c \in \mathcal{C}$. Πράγματι, έστω $c_1,c_2 \in \mathcal{C}$, $n,m,k,l \in \mathbb{Z}_+$. Τότε

$$\begin{aligned}
(U^n\widehat{\pi}(c_1)(U^*)^m)(U^k\widehat{\pi}(c_2)(U^*)^l) &= U^n\widehat{\pi}(c_1)U^{k-m}\widehat{\pi}(c_2)(U^*)^l \\
&= \begin{cases} U^n\widehat{\pi}(c_1)\widehat{\pi}(\beta_\infty^{m-k}(c_2))U^{k-m}(U^*)^l & ,\ \text{αν } k-m \leq 0, \\ U^nU^{k-m}\widehat{\pi}(\beta_\infty^{k-m}(c_1))\widehat{\pi}(c_2)(U^*)^l & ,\ \text{αν } k-m > 0, \end{cases} \\
&= \begin{cases} U^n\widehat{\pi}(c_1)\widehat{\pi}(\beta^{m-k}(c_2))U^{k-m}(U^*)^l & ,\ \text{αν } k-m \leq 0, \\ U^nU^{k-m}\widehat{\pi}(\beta^{k-m}(c_1))\widehat{\pi}(c_2)(U^*)^l & ,\ \text{αν } k-m > 0, \end{cases} \\
&= \begin{cases} U^n\widehat{\pi}(c_3)U^{k-m}(U^*)^l & ,\ \text{αν } k-m \leq 0,\ \text{με } c_3 = c_1\beta^{m-k}(c_2), \\ U^nU^{k-m}\widehat{\pi}(c_3)(U^*)^l & ,\ \text{αν } k-m > 0,\ \text{με } c_3 = \beta^{k-m}(c_1)c_2, \end{cases} \\
&= \begin{cases} U^n\widehat{\pi}(c_3)(U^*)^{l+m-k} & ,\ \text{αν } k-m \leq 0,\ \text{με } c_3 = c_1\beta^{m-k}(c_2), \\ U^{n+k-m}\widehat{\pi}(c_3)(U^*)^l & ,\ \text{αν } k-m > 0,\ \text{με } c_3 = \beta^{k-m}(c_1)c_2. \end{cases}
\end{aligned}$$

Άρα η $\overline{\mathrm{span}}\{U^n\widehat{\pi}(c)(U^*)^m : n,m \in \mathbb{Z}_+, c \in \mathcal{C}\}$ είναι άλγεβρα, και αφού η $\mathcal{C}$ είναι αυτοσυζυγής, είναι *-υπάλγεβρα του σταυρωτού γινομένου. Επειδή περιέχει τους γεννήτορες της $\mathfrak{U}$ ταυτίζεται με αυτήν. Επίσης παρατηρούμε ότι

$$U\widehat{\pi}\Big(1,\vec{0}\Big) = \widehat{\pi}\Big(1,\vec{0}\Big)U\widehat{\pi}\Big(1,\vec{0}\Big).$$

**Λήμμα 2.3.16** *Κάθε στοιχείο της μορφής $U^n\widehat{\pi}(b)(U^*)^n$, $b \in \mathcal{B}$, μπορεί να γραφεί στη μορφή $A + \widehat{\pi}(0,(y_n))$, όπου $A \in \mathfrak{U}$.*

*Απόδειξη.* Για $n = 0$ έχουμε ότι $\widehat{\pi}(b) = \widehat{\pi}(c,(x_n)) = \widehat{\pi}(c,\vec{0}) + \widehat{\pi}(0,(x_n))$. Επίσης για $n = 1$ έχουμε ότι $U\widehat{\pi}(b)U^* = U\widehat{\pi}(c,(x_n))U^* = U\widehat{\pi}(c,\vec{0})U^* + U\widehat{\pi}(0,(x_n))U^*$.

Έστω $c' \in \mathcal{C}$ έτσι ώστε $\theta(c') = x_1$. Τότε

$$\begin{aligned}\beta_\infty(c', x_2, x_3, \dots) &= \beta(c', x_2, x_3, \dots) \\ &= (\alpha(c'), \theta(c'), x_2, \dots) = (\alpha(c'), \vec{0}) + (0, (x_n)).\end{aligned}$$

Επομένως $(c', x_2, x_3, \dots) = \beta_\infty^{-1}(\alpha(c'), \vec{0}) + \beta_\infty^{-1}(0, (x_n))$, άρα

$$\begin{aligned}U\widehat{\pi}(0, (x_n))U^* &= \widehat{\pi}(\beta_\infty^{-1}(0, (x_n))) = \widehat{\pi}(c', x_2, \dots) - \widehat{\pi}(\beta_\infty^{-1}(\alpha(c'), \vec{0})) \\ &= \widehat{\pi}(c', \vec{0}) - U\widehat{\pi}(\alpha(c'), \vec{0})U^* + \widehat{\pi}(0, x_2, \dots).\end{aligned}$$

Συνεπώς, $U\widehat{\pi}(b)U^* = A + \widehat{\pi}(0, x_2, \dots)$. Η απόδειξη ολοκληρώνεται χρησιμοποιώντας επαγωγή. □

**Πρόταση 2.3.17** *Το ημισταυρωτό γινόμενο $\mathfrak{A}(\mathcal{C}, \alpha, is)_l$ είναι πλήρως ισομετρικά ισόμορφο προς την κλειστή θήκη των αναλυτικών πολυωνύμων $\sum_{n=0}^k U^n\widehat{\pi}(c_n, \vec{0})$ στην $\mathfrak{U}$. Επομένως η $\mathfrak{U}$ είναι ένα $C^*$-κάλυμμα του ημισταυρωτού γινομένου.*

*Απόδειξη.* Έστω $(H_0, \pi)$ μια πιστή αναπαράσταση της $\mathcal{B}_\infty$ και $(\widehat{\pi}, U)$ το unitary covariant ζεύγος, όπως ορίζεται στην ενότητα 1.4. Στο χώρο Hilbert $H = H_0 \otimes \ell^2(\mathbb{Z})$, στον οποίο δρα το σταυρωτό γινόμενο, συμβολίζουμε (για ευκολία) με $\phi$ την αναπαράσταση

$$\phi(c) := \widehat{\pi}(c, \vec{0}) = \begin{bmatrix} \ddots & & & & \\ & \pi(\beta_\infty^{-1}(c, \vec{0})) & & & \\ & & \pi(c, \vec{0}) & & \\ & & & \pi(\beta_\infty(c, \vec{0})) & \\ & & & & \ddots \end{bmatrix}.$$

Τότε το ζεύγος $(\phi, U\phi(1))$ είναι ένα left covariant contractive ζεύγος για το ζεύγος $(\mathcal{C}, \alpha)$. Πράγματι,

$$\begin{aligned}\phi(c) \cdot U\phi(1) &= \widehat{\pi}(c, \vec{0})U\widehat{\pi}((1, \vec{0})) = U\widehat{\pi}(\beta_\infty(c, \vec{0}))\widehat{\pi}((1, \vec{0})) \\ &= U\widehat{\pi}(\beta(c, \vec{0})(1, \vec{0})) = U\widehat{\pi}(\alpha(c), \vec{0}) = U\phi(1) \cdot \phi(\alpha(c)).\end{aligned}$$

Επομένως, για κάθε $\nu \geq 1$ και $[F_{ij}] \in \mathcal{M}_\nu(\ell^1(\mathcal{C}, \alpha, \mathbb{Z}_+))$ έχουμε ότι

$$\left\| \left[ \left(U\phi(1) \times \phi\right)(F_{ij}) \right] \right\| \leq \left\| [F_{ij}] \right\|_\infty . \tag{2.2}$$

Παρατηρούμε ότι

$$(U\phi(1) \times \phi)(\delta_n \otimes c) = (U\phi(1))^n \phi(c) = U^n \phi(c),$$

για κάθε $n \in \mathbb{Z}_+$ και $c \in \mathcal{C}$. Επομένως, αρκεί να δείξουμε ότι η ανίσωση (2.2) είναι ισότητα, για κάθε $\nu \geq 1$.

Θέτουμε $K = [e_n : n \geq 0] \subseteq \ell^2(\mathbb{Z})$. Καταρχάς, είναι προφανές ότι ο $H_0 \otimes K$ ανάγει την $\phi$. Εφόσον η $(H_0, \pi)$ είναι πιστή αναπαράσταση της $\mathcal{B}_\infty$, έπεται ότι ο περιορισμός $\psi$ της $\phi$ στον $H_0 \otimes K$ είναι πιστή αναπαράσταση της $\mathcal{C}$, αφού

$$\psi(c) := \phi(c)|_{H_0 \otimes K} = \begin{bmatrix} \pi(c, \vec{0}) & & & \\ & \pi\big(\beta_\infty(c, \vec{0})\big) & & \\ & & \pi\big(\beta_\infty^2(c, \vec{0})\big) & \\ & & & \ddots \end{bmatrix}.$$

Επίσης, αν $V = P_{H_0 \otimes K} U\phi(1)|_{H_0 \otimes K}$, το ζεύγος $(V, \psi)$ ικανοποιεί τη συναλλοίωτη σχέση για το $(\mathcal{C}, \alpha)$, αφού για κάθε $c \in \mathcal{C}$ έχουμε

$$\begin{aligned} \psi(c) \cdot V &= P_{H_0 \otimes K} \phi(c) U\phi(1)|_{H_0 \otimes K} = P_{H_0 \otimes K} U\phi(1)\phi(\alpha(c))|_{H_0 \otimes K} \\ &= (P_{H_0 \otimes K} U\phi(1)|_{H_0 \otimes K}) \cdot \phi(\alpha(c))|_{H_0 \otimes K} = V \cdot \psi(\alpha(c)). \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι

$$P_{H_0 \otimes K} U|_{H_0 \otimes K} = (1_{H_0} \otimes P_K)(1_{H_0} \otimes u)(1_{H_0} \otimes P_K) = 1_{H_0} \otimes s = S,$$

και άρα

$$V = P_{H_0 \otimes K}\big(U\phi(1)\big)|_{H_0 \otimes K} = (P_{H_0 \otimes K} U P_{H_0 \otimes K}) \cdot \phi(1)|_{H_0 \otimes K} = S\psi(1).$$

Επαγωγικά, λοιπόν, χρησιμοποιώντας την ισότητα (2.1) προκύπτει ότι

$$V^n = (P_{H_0 \otimes K} U P_{H_0 \otimes K})^n \psi(1) = S^n \psi(1).$$

Έστω, λοιπόν, $\Phi$ ο *-επιμορφισμός από την $C^*(\pi_u, V_u)$ στην $\mathfrak{C} := C^*(\psi, V)$. Θεωρούμε την οικογένεια των *-αυτομορφισμών $\{\beta_z\}_{z \in \mathbb{T}}$, όπου $\beta_z = ad_{U_z}$, με $U_z(\xi \otimes e_k) = z^k \xi \otimes e_k$. Αυτή η οικογένεια ορίζει *-αυτομορφισμούς στην $\mathfrak{C}$, αφού

$$\begin{aligned} \beta_z(\psi(c)) &= \psi(c) \text{ και} \\ \beta_z(V) &= \beta_z(S\psi(1)) = \beta_z(S)\beta_z(\psi(1)) \\ &= zS\psi(1) = zV. \end{aligned}$$

Όπως και στην απόδειξη του θεωρήματος 2.3.11, αρκεί να δείξουμε ότι η $\Phi$ είναι 1-1 όταν περιορίζεται στην άλγεβρα σταθερού σημείου $\mathfrak{C}^\gamma$. Καταρχάς έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
&V^n\psi(c)V^n \\
&= S^n\psi(1)\psi(c)\psi(1)(S^*)^n = S^n\psi(c)(S^*)^n \\
&= \operatorname{diag}\{\underbrace{0,\ldots,0}_{\text{n-times}},\pi(c,\vec{0}),\pi(\beta_\infty(c,\vec{0})),\ldots\}.
\end{aligned}$$

Άρα η άλγεβρα σταθερού σημείου $\mathfrak{C}^\gamma$ είναι η κλειστή γραμμική θήκη των παραπάνω μονωνύμων. Εφόσον η $(H_0,\pi)$ είναι πιστή αναπαράσταση (και) για τη $\mathcal{C}$, μπορούμε να ακολουθήσουμε τα επιχειρήματα της πρότασης 2.3.9 πριν το θεώρημα 2.3.11 και να καταλήξουμε ότι η $\Phi$ είναι *-ισομορφισμός. Επομένως, για κάθε $F \in \ell^1(\mathcal{C},\alpha,\mathbb{Z}_+)_l$ έχουμε

$$\|F\|_\infty = \|(V\times\psi)(F)\|.$$

Όμως, αν $F=\sum\delta_n\otimes c_n$ τότε

$$(V\times\psi)(F) = \sum V^n\psi(c_n) = \sum S^n\psi(1)\psi(c_n) = P\sum(U\phi(1))^n\phi(c_n)P$$

$$\text{άρα}\quad \|(V\times\psi)(F)\| \le \left\|\sum(U\phi(1))^n\phi(c_n)\right\| = \|(U\phi(1)\times\phi)(F)\| \le \|F\|_\infty$$

και συνεπώς

$$\|F\|_\infty = \left\|\big(U\phi(1)\times\phi\big)(F)\right\|,\quad F\in\ell^1(\mathbb{Z}_+,\mathcal{C},\alpha)_l.$$

Το ίδιο επιχείρημα εφαρμόζεται σε κάθε πίνακα $[F_{ij}]$, με $F_{ij}\in\ell^1(\mathcal{C},\alpha,\mathbb{Z}_+)$, από το οποίο προκύπτει το συμπέρασμα. $\square$

Παρακάτω θα δείξουμε ότι η $\mathfrak{U}$ είναι ένα full corner του $\mathcal{B}_\infty\rtimes_{\beta_\infty}\mathbb{Z}$. Υπενθυμίζουμε ότι αν $p$ είναι μια προβολή στην άλγεβρα πολλαπλασιαστών μιας $C^*$-άλγεβρας $\mathfrak{C}$, τότε η $p\mathfrak{C}p$ είναι μια $C^*$-υπάλγεβρα της $\mathfrak{C}$, η οποία καλείται *corner* της $\mathfrak{C}$. Το corner καλείται *full* αν η γραμμική θήκη του συνόλου $\mathfrak{C}p\mathfrak{C}$ είναι πυκνός υπόχωρος της $\mathfrak{C}$. Ισοδύναμα, αν η $p\mathfrak{C}p$ δεν περιέχεται σε κανένα γνήσιο ιδεώδες της $\mathfrak{C}$.

**Πρόταση 2.3.18** *Αν $p=\widehat{\pi}(1,\vec{0})$, τότε*

1. *η $p$ είναι προβολή και ανήκει στην άλγεβρα των πολλαπλασιαστών του $\mathcal{B}_\infty\rtimes_{\beta_\infty}\mathbb{Z}$,*

2. $pU^n\widehat{\pi}(b) = U^n\widehat{\pi}(c, x_1, \ldots, x_n, \vec{0})$, *για κάθε* $b = (c, (x_n)) \in \mathcal{B}$,

3. $U^n\widehat{\pi}(b)p = U^n\widehat{\pi}(c, \vec{0})$, *για κάθε* $b = (c, (x_n)) \in \mathcal{B}$,

4. $p\widehat{\pi}(c, \vec{0}) = \widehat{\pi}(c, \vec{0}) = \widehat{\pi}(c, \vec{0})p$, *για κάθε* $c \in \mathcal{C}$,

5. $p\mathfrak{U}p = \mathfrak{U}$. □

**Θεώρημα 2.3.19** *Με τους παραπάνω συμβολισμούς, η* $\mathfrak{U}$ *είναι full corner του σταυρωτού γινομένου* $\mathcal{B}_\infty \rtimes_{\beta_\infty} \mathbb{Z}$.

*Απόδειξη.* Έστω $U^n\widehat{\pi}(b)(U^*)^m$ στοιχείο του σταυρωτού γινομένου. Αν $n = m$, τότε

$$p(U^n\widehat{\pi}(b)(U^*)^m)p = p(A + \widehat{\pi}(0, (y_n)))p = pAp = A$$

για κάποιο $A \in \mathfrak{U}$, από το λήμμα 2.3.16. Αν $n > m$, τότε

$$\begin{aligned} p(U^n\widehat{\pi}(b)(U^*)^m)p &= p(U^{n-m}U^m\widehat{\pi}(b)(U^*)^m)p \\ &= p(U^{n-m}(A + \widehat{\pi}(0, (y_n))))p = pU^{n-m}Ap = U^{n-m}A, \end{aligned}$$

για κάποιο $A \in \mathfrak{U}$. Με τον ίδιο τρόπο παίρνουμε ότι $p(U^n\widehat{\pi}(b)(U^*)^m)p = A(U^*)^{m-n}$, για κάποιο $A \in \mathfrak{U}$, για $n < m$. Συνεπώς $p(\mathcal{B}_\infty \rtimes_{\beta_\infty} \mathbb{Z})p \subseteq \mathfrak{U}$. Τώρα, αφού $p\mathfrak{U}p = \mathfrak{U}$ και $\mathfrak{U} \subseteq \mathcal{B}_\infty \rtimes_{\beta_\infty} \mathbb{Z}$, έχουμε ότι $\mathfrak{U} \subseteq p(\mathcal{B}_\infty \rtimes_{\beta_\infty} \mathbb{Z})p$. Επομένως η $\mathfrak{U}$ είναι corner του $\mathcal{B}_\infty \rtimes_{\beta_\infty} \mathbb{Z}$.

Για να αποδείξουμε ότι είναι full, θεωρούμε ένα ιδεώδες $\mathcal{I}$ του σταυρωτού γινομένου έτσι ώστε $\mathfrak{U} \subseteq \mathcal{I}$. Θα δείξουμε ότι το $\mathcal{I}$ δεν μπορεί να είναι γνήσιο ιδεώδες. Αρκεί να δείξουμε ότι $\widehat{\pi}(\mathcal{B}_\infty) \subseteq \mathcal{I}$. Εφόσον $\mathcal{B}_\infty = \overline{\cup\beta_\infty^{-n}(\mathcal{B})}$ και λόγω της συναλλοίωτης σχέσης, αρκεί να δείξουμε ότι $\widehat{\pi}(\mathcal{B}) \subseteq \mathcal{I}$. Έστω $c \in \mathcal{C}$, τότε $\widehat{\pi}(c) \in \mathfrak{U} \subseteq \mathcal{I}$. Για να δείξουμε ότι το $\widehat{\pi}(c_0(\theta(\mathcal{C})))$ είναι στο $\mathcal{I}$, αρκεί να δείξουμε ότι $\widehat{\pi}(0, \underbrace{0, \ldots, 0}_{n}, 1, 0, \ldots) \in \mathcal{I}$, για κάθε $n \in \mathbb{Z}_+$. Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} \widehat{\pi}(0, \underbrace{0, \ldots, 0}_{n}, 1, 0, \ldots) &= \widehat{\pi}(\beta^n(0, 1, \vec{0})) \\ &= \widehat{\pi}\Big((\beta_\infty)^n(0, 1, \vec{0})\Big) = (U^*)^n\widehat{\pi}(0, 1, \vec{0})U^n. \end{aligned}$$

Επομένως, αρκεί να δείξουμε ότι $\widehat{\pi}(0, 1, \vec{0}) \in \mathcal{I}$. Πράγματι, παρατηρούμε ότι $(0, 1, \vec{0}) = \beta(1, \vec{0}) - (1, \vec{0})$, άρα

$$\begin{aligned} \widehat{\pi}(0, 1, \vec{0}) &= \widehat{\pi}(\beta(1, \vec{0})) - \widehat{\pi}(1, \vec{0}) \\ &= \widehat{\pi}(\beta_\infty(1, \vec{0})) - \widehat{\pi}(1, \vec{0}) = U^*\widehat{\pi}(1, \vec{0})U - \widehat{\pi}(1, \vec{0}) \in \mathcal{I}, \end{aligned}$$

εφόσον $\widehat{\pi}(C) \subseteq \mathcal{I}$. $\square$

**Θεώρημα 2.3.20** *Κάθε ημισταυρωτό γινόμενο$\mathfrak{A}(\mathcal{C},\alpha,is)_l$ έχει ένα $C^*$-κάλυμμα, που είναι full corner ενός σταυρωτού γινομένου.* $\square$

### $C^*$-envelope

Έστω $E : \mathcal{B}_\infty \rtimes_{\beta_\infty} \mathbb{Z} \to (\mathcal{B}_\infty \rtimes_{\beta_\infty} \mathbb{Z})^\beta$ η conditional expectation που επάγεται από την οικογένεια των αυτομορφισμών $\{\beta_z\}_{z\in\mathbb{T}}$ και $E'$ ο περιορισμός της $E$ στην υπάλγεβρα $\mathfrak{U} = p(\mathcal{B}_\infty \rtimes_{\beta_\infty} \mathbb{Z})p$. Εφόσον $\beta_z(p) = p$, έχουμε ότι $E'(pAp) = pE(A)p$ για κάθε $A \in \mathcal{B}_\infty \rtimes_{\beta_\infty} \mathbb{Z}$. Συνεπώς $\operatorname{range} E' \subseteq p(\operatorname{range} E)p \subseteq \mathfrak{U}$.

Έστω $A \in \mathcal{B}_\infty \rtimes_{\beta_\infty} \mathbb{Z}$ έτσι ώστε $E(A) = A$. Τότε $E'(pAp) = pE(A)p = pAp$, και άρα $pAp \in \operatorname{range} E'$. Επομένως $p(\operatorname{range} E)p \subseteq \operatorname{range} E'$. Συνεπώς $\operatorname{range} E' = p(\operatorname{range} E)p$.

Όπως έχουμε δείξει στην ενότητα 1.3, $\operatorname{range} E = \mathcal{B}_\infty = \overline{\cup_n \widehat{\pi}(\beta_\infty^{-n}(\mathcal{B}))}$. Επομένως $\operatorname{range} E' = p\big(\overline{\cup_n \widehat{\pi}(\beta_\infty^{-n}(\mathcal{B}))}\big)p = \overline{\cup_n p\big(\widehat{\pi}(\beta_\infty^{-n}(\mathcal{B}))\big)p}$. Έστω $\mathcal{J}$ ένα ιδεώδες στην $\operatorname{range} E'$. Εφόσον η $\beta_\infty^{-n}(\mathcal{B})$ είναι αύξουσα, η $p\big(\widehat{\pi}(\beta_\infty^{-n}(\mathcal{B}))\big)p$ είναι επίσης αύξουσα. Άρα το $\mathcal{J}$ πρέπει να τέμνει κάποιο $p\big(\widehat{\pi}(\beta_\infty^{-n}(\mathcal{B}))\big)p$. Έστω $b = (c, (x_n)) \in \mathcal{B}$, έτσι ώστε $p\big(\widehat{\pi}(\beta_\infty^{-n}(b))\big)p \in \mathcal{J}$. Τότε

$$\begin{aligned}
(\widehat{\pi}(1,\vec{0})U^*)^n \cdot p\big(\widehat{\pi}(\beta_\infty^{-n}(b))\big)p \cdot (U\widehat{\pi}(1,\vec{0}))^n &= \\
&= \widehat{\pi}((1,\vec{0})(U^*)^n \widehat{\pi}(\beta_\infty^{-n}(b))U^n \widehat{\pi}(1,\vec{0}) \\
&= \widehat{\pi}(1,\vec{0})\widehat{\pi}(b)\widehat{\pi}(1,\vec{0}) = \widehat{\pi}(c,\vec{0}).
\end{aligned}$$

Άρα το $\mathcal{J}$ τέμνει την $\{\widehat{\pi}(c,\vec{0}) : c \in \mathcal{C}\}$.

**Θεώρημα 2.3.21** *Το $C^*$-envelope του ημισταυρωτού γινομένου ως προς τα left covariant isometric ζεύγη είναι το full corner $p\big(\mathcal{B}_\infty \rtimes_{\beta_\infty} \mathbb{Z}\big)p$ του σταυρωτού γινομένου $\mathcal{B}_\infty \rtimes_{\beta_\infty} \mathbb{Z}$, όπου $p = \widehat{\pi}(1,\vec{0})$.*

*Απόδειξη.* Έχουμε ήδη δείξει ότι η $\mathfrak{U} = p\big(\mathcal{B}_\infty \rtimes_{\beta_\infty} \mathbb{Z}\big)p$ είναι ένα $C^*$-κάλυμμα του ημισταυρωτού γινομένου. Έστω $\mathcal{J} \neq (0)$ το ιδεώδες Šilov. Αφού το $\mathcal{J}$ μένει αναλλοίωτο από τους $\beta_z$, υπάρχει $0 \neq x \in \mathcal{J} \cap \operatorname{range} E'$. Από τα προηγούμενα σχόλια τότε, υπάρχει ένα $0 \neq y \in C$, με $\widehat{\pi}(y) \in \mathcal{J}$. Επομένως το ιδεώδες $\langle \widehat{\pi}(y) \rangle$ είναι ένα συνοριακό ιδεώδες για το ημισταυρωτό γινόμενο. Άρα

$$\|y\| = \|\widehat{\pi}(y)\| = \|\widehat{\pi}(y) + \langle \widehat{\pi}(y) \rangle\| = 0,$$

που είναι άτοπο. Επομένως $\mathcal{J} = 0$. $\square$

## 2.4 Σχόλια

**Σχόλιο 2.4.1** *Υπάρχουν περιπτώσεις όπου τα ημισταυρωτά γινόμενα δεν είναι πλήρως ισομετρικά ισόμορφα.* Πράγματι, έστω το δυναμικό σύστημα $(\mathcal{C}, \alpha)$ του παραδείγματος 1.3.17. τότε τα ημισταυρωτά γινόμενα $\mathfrak{A}(\mathcal{C}, \alpha, \text{co-is})_l$ και $\mathfrak{A}(\mathcal{C}, \alpha, \text{un})_l$ είναι πλήρως ισομετρικά ισόμορφα προς την άλγεβρα του δίσκου $\mathbb{A}(\mathbb{D})$. Από την άλλη, από το θεώρημα 2.3.11, τα ημισταυρωτά γινόμενα $\mathfrak{A}(\mathcal{C}, \alpha, \text{contr})_l$ και $\mathfrak{A}(\mathcal{C}, \alpha, \text{is})_l$ περιέχουν ένα αντίγραφο της $\mathcal{C}$. Εφόσον η $\mathbb{A}(\mathbb{D})$ δεν μπορεί να περιέχει ένα αντίγραφο της $C(\mathbb{R}_+)$ (η μόνη $C^*$-άλγεβρα που «ζει» στην $\mathbb{A}(\mathbb{D})$ είναι η $\mathbb{C}$), προκύπτει ότι οι άλγεβρες τελεστών $\mathfrak{A}(\mathcal{C}, \alpha, \text{is})_l$ και $\mathfrak{A}(\mathcal{C}, \alpha, \text{co-is})_l$ δεν μπορούν να είναι πλήρως ισομετρικά ισόμορφες.

Η ακόλουθη πρόταση δείχνει ότι αυτό συμβαίνει ακριβώς επειδή ο *-μορφισμός δεν είναι 1-1.

**Πρόταση 2.4.2** *Για τα ημισταυρωτά γινόμενα $\mathfrak{A}(\mathcal{C}, \alpha, contr)_l$ και $\mathfrak{A}(\mathcal{C}, \alpha, co\text{-}is)_l$ υπάρχει ένας πλήρης ισομετρικός ισομορφισμός $\Phi : \mathfrak{A}(\mathcal{C}, \alpha, contr)_l \to \mathfrak{A}(\mathcal{C}, \alpha, co\text{-}is)_l$ έτσι ώστε η $\Phi(\delta_0 \otimes c) = \delta_0 \otimes c$, για κάθε $c \in \mathcal{C}$, αν και μόνο αν η $\alpha$ είναι 1-1.*

*Ομοίως, το ίδιο ισχύει για τα ημισταυρωτά γινόμενα που ορίζονται από right covariant ζεύγη.*

*Απόδειξη.* Έστω $\Phi : \mathfrak{A}(\mathcal{C}, \alpha, \text{contr})_l \to \mathfrak{A}(\mathcal{C}, \alpha, \text{co-is})_l$, έτσι ώστε $\Phi(\delta_0 \otimes c) = \delta_0 \otimes c$. Τότε για $c \in \mathcal{R}_\alpha$ έχουμε

$$0 = \|\delta_0 \otimes c\|_{\mathfrak{A}(\mathcal{C},\alpha,\text{co-is})_l} = \|\Phi(\delta_0 \otimes c)\|_{\mathfrak{A}(\mathcal{C},\alpha,\text{co-is})_l} = \|\delta_0 \otimes c\|_{\mathfrak{A}(\mathcal{C},\alpha,\text{contr})_l} = \|c\|_{\mathcal{C}}\,.$$

Επομένως $\mathcal{R}_\alpha = (0)$, ισοδύναμα η $\alpha$ είναι 1-1.

Για το αντίστροφο, υποθέτουμε ότι η $\alpha : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ είναι 1-1. Τότε $\mathcal{R}_\alpha = (0)$ και η $C^*$-άλγεβρα $\mathcal{B}$ ταυτίζεται με τη $\mathcal{C}$. Επομένως τα θεωρήματα 2.2.10 και 2.3.11 επάγουν ότι η απεικόνιση $\delta_n \otimes c \mapsto \delta_n \otimes c \in \mathcal{C}_\infty \rtimes_{\alpha_\infty} \mathbb{Z}$ επεκτείνεται σε ένα πλήρη ισομετρικό μορφισμό του $\mathfrak{A}(\mathcal{C}, \alpha, \text{contr})_l$ επί του $\mathfrak{A}(\mathcal{C}, \alpha, \text{co-is})_l$. □

**Σχόλιο 2.4.3** Από την προηγούμενη πρόταση έχουμε ότι η απεικόνιση $\delta_n \otimes c \mapsto \delta_n \otimes c$ επεκτείνεται σε πλήρη ισομετρικό ισομορφισμό μεταξύ όλων των ημισταυρωτών γινομένων αν και μόνο αν η $\alpha$ είναι 1-1. Επιπροσθέτως, όλα έχουν το ίδιο $C^*$-envelope, το σταυρωτό γινόμενο $\mathcal{C}_\infty \rtimes_{\alpha_\infty} \mathbb{Z}$.

Τέλος, παρατηρούμε ότι όταν ο $\alpha : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ είναι *-αυτομορφισμός, τότε $\mathcal{C}_\infty = \mathcal{C}$, και άρα το $C^*$-envelope των ημισταυρωτών γινομένων είναι το σταυρωτό γινόμενο $\mathcal{C} \rtimes_\alpha \mathbb{Z}$.

### Minimality

Σε αυτήν την ενότητα θα δείξουμε πώς συνδέεται ένα δυναμικό σύστημα με το $C^*$-envelope του ημισταυρωτού γινομένου. Υπάρχουν αρκετά αποτελέσματα προς αυτήν την κατεύθυνση. Για παράδειγμα, οι Davidson και Roydor έχουν αποδείξει ότι μια minimality έννοια για μεταθετικά δυναμικά συστήματα πολλών μεταβλητών είναι ισοδύναμη με το να είναι το $C^*$-envelope (του γενικευμένου ημισταυρωτού γινομένου που ορίζουν) απλή $C^*$-άλγεβρα (βλ. [**14**, Definition 5.1, Proposition 5.4]). Επιπλέον, ο Schweizer αποδεικνύει ότι μια $C^*$-correspondence είναι *minimal* και *non-peridioc* αν και μόνο αν η αντίστοιχη Cuntz-Pimsner άλγεβρα είναι απλή (βλ. [**44**, Definition 3.7, Theorem 3.9]). Πρώτα από όλα ας ορίσουμε την έννοια της minimality με την οποία θα ασχοληθούμε.

**Ορισμός 2.4.4** ένα δυναμικό σύστημα $(\mathcal{C}, \alpha)$ καλείται *minimal* αν δεν υπάρχουν μη-τετριμμένα $\alpha$-αναλλοίωτα ιδεώδη $\mathcal{J}$ της $\mathcal{C}$.

Παρατηρούμε ότι όταν η $\alpha$ δεν είναι 1-1, τότε η $\mathcal{B}$ δεν μπορεί να minimal, αφού η «κεφαλή» $T$ είναι ένα γνήσιο $\beta$-αναλλοίωτο ιδεώδες της $\mathcal{B}$.

**Πρόταση 2.4.5** *Το δυναμικό σύστημα $(\mathcal{C}, \alpha)$ είναι minimal αν και μόνο αν το δυναμικό σύστημα $(\mathcal{B}, \beta)$ είναι minimal αν και μόνο αν το δυναμικό σύστημα $(\mathcal{B}_\infty, \beta_\infty)$ είναι bi-minimal. Σε κάθε περίπτωση έχουμε ότι η $\alpha$ είναι 1-1 και άρα $(\mathcal{C}, \alpha) = (\mathcal{B}, \beta)$.*

*Απόδειξη.* Αν το $(\mathcal{C}, \alpha)$ είναι minimal, τότε η $\alpha$ είναι 1-1, διαφορετικά ο $\ker \alpha$ θα ήταν μη-τετριμμένο $\alpha$-αναλλοίωτο ιδεώδες. Επομένως η «κεφαλή» $T = 0$, άρα $(\mathcal{B}, \beta) = (\mathcal{C}, \alpha)$. Συνεπώς το $(\mathcal{B}, \beta)$ είναι minimal.

Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι το $(\mathcal{B}, \beta)$ είναι minimal. Τότε η «κεφαλή» $T = (0)$, αφού η $T$ θα ήταν ένα γνήσιο $\beta$-αναλλοίωτο ιδεώδες και δεν μπορεί να ισούται με τη $\mathcal{B}$. Επομένως $(\mathcal{B}, \beta) = (\mathcal{C}, \alpha)$, άρα το $(\mathcal{C}, \alpha)$ είναι minimal. Επομένως η $\alpha$ είναι 1-1.

Ας υποθέσουμε ότι το $(\mathcal{C}, \alpha)$ είναι minimal (άρα η $\alpha$ είναι 1-1), και έστω $\mathcal{J} \neq (0)$ ένα $\alpha_\infty$-δι-αναλλοίωτο ιδεώδες της $\mathcal{C}_\infty$. Τότε το $\mathcal{J}$ δεν έχει μη-τετριμμένη τομή με τη $\mathcal{C}$. Πράγματι, αν υποθέσουμε ότι $\mathcal{J} \cap \mathcal{C} = (0)$ και έστω $0 \neq c \in \mathcal{J} \cap \mathcal{C}_{n_0}$ (αν δεν υπάρχει τέτοιο $n_0$ τότε $\mathcal{J} = (0)$). Σε αυτήν την περίπτωση

$$\alpha_\infty^{n_0}(c) \in \alpha_\infty^{n_0}(\mathcal{J}) \cap \alpha_\infty^{n_0}(\mathcal{C}_{n_0}) \subseteq \mathcal{J} \cap \mathcal{C} = (0).$$

Συνεπώς $c \in \ker \alpha_\infty^{n_0}$, που οδηγεί την αντίφαση ότι $\ker \alpha_\infty \neq (0)$.

Τώρα, έστω $F = \mathcal{J} \cap \mathcal{C} \neq (0)$ η οποία είναι $C^*$-υπάλγεβρα της $\mathcal{C}$. Τότε

$$\alpha(F) = \alpha_\infty(F) \subseteq \alpha_\infty(\mathcal{J}) \cap \alpha_\infty(\mathcal{C}) \subseteq \mathcal{J} \cap \mathcal{C} = F,$$

επομένως, η $F$ είναι $\alpha$-αναλλοίωτη $C^*$-υπάλγεβρα της $\mathcal{C}$. Θέτουμε με $I = \overline{\mathcal{C}F\mathcal{C}}$ το ιδεώδες που παράγεται από την $F$ στη $\mathcal{C}$. Εφόσον ο $\alpha$ είναι *-μορφισμόσκαι οι $F$, $\mathcal{C}$ είναι $\alpha$-αναλλοίωτες, έχουμε ότι το $I$ είναι $\alpha$-αναλλοίωτο ιδεώδες της $\mathcal{C}$. Αν $I = (0)$, τότε $F = (0)$ και άρα $\mathcal{J} \cap \mathcal{C} = (0)$, που είναι άτοπο. Αν $I = \mathcal{C}$, τότε $\mathcal{J} \cap \mathcal{C} = F \subseteq I = \mathcal{C}$ και άρα $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{C}$. Εφόσον το $\mathcal{J}$ είνα $\alpha_\infty$-αναλλοίωτο, προκύπτει ότι είναι $\alpha$-αναλλοίωτο, άρα $\mathcal{J} = \mathcal{C}$, λόγω του ότι το δυναμικό σύστημα $(\mathcal{C}, \alpha)$ έχει υποτεθεί minimal. Επίσης, εφόσον το $\mathcal{J}$ είναι $\alpha_\infty^{-1}$-δι-αναλλοίωτο έχουμε ότι

$$\mathcal{C}_1 = \alpha_\infty^{-1}(\mathcal{C}) = \alpha_\infty^{-1}(\mathcal{J}) \subseteq \mathcal{J} = \mathcal{C},$$

και επαγωγικά $\mathcal{C} = \mathcal{C}_\infty$. Συνεπώς $(\mathcal{C}, \alpha) = (\mathcal{C}_\infty, \alpha_\infty)$, από το οποίο προκύπτει ότι το $(\mathcal{C}_\infty, \alpha_\infty)$ είναι minimal. Άρα $\mathcal{J} = \mathcal{C}_\infty$.

Τέλος, υποθέτουμε ότι το $(\mathcal{B}_\infty, \beta_\infty)$ είναι bi-minimal, και έστω $\mathcal{J} \neq (0)$ ένα $\beta$-αναλλοίωτο ιδεώδες της $\mathcal{B}$. Έστω $\mathcal{J}_\infty$ η $C^*$-υπάλγεβρα της $\mathcal{C}_\infty$ που πρκύπτει από το σύστημα

$$\mathcal{J} \xrightarrow{\beta} \mathcal{J} \xrightarrow{\beta} \mathcal{J} \xrightarrow{\beta} \dots.$$

Το παραπάνω είναι καλά ορισμένο αφού η $\beta$ περιορίζεται σε 1-1 *-μορφισμό του $\mathcal{J}$. Είναι εύκολο να δούμε ότι το $\mathcal{J}_\infty$ είναι ένα μη-μηδενικό ιδεώδες της $\mathcal{B}_\infty$ και επιπλέον είναι $\beta_\infty$-δι-αναλλοίωτο. Επομένως $\mathcal{J}_\infty = \mathcal{B}_\infty$. Άρα $\mathcal{J} = \mathcal{J}_\infty \cap \mathcal{B} = \mathcal{B}$. □

Η προηγούμενη πρόταση σε συνδυασμό με το θεώρημα 1.3.14 μας δίνει το ακόλουθο.

**Θεώρημα 2.4.6** *Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:*

1. *το δ.ς. $(\mathcal{C}, \alpha)$ είναι minimal,*
2. *το δ.ς. $(\mathcal{B}, \beta)$ είναι minimal,*
3. *το δ.ς. $(\mathcal{B}_\infty, \beta_\infty)$ είναι bi-minimal,*
4. *το σταυρωτό γινόμενο $\mathcal{B}_\infty \rtimes_{\beta_\infty} \mathbb{Z}$ δεν έχει μη-τετριμμένα Fourier-αναλλοίωτα ιδεώδη.*

*Αν κάποιο από τα παραπάνω ισχύει, τότε η $\alpha$ είναι 1-1 και $\mathcal{C} = \mathcal{B}$. Επιπλέον, τα ημισταυρωτά γινόμενα που ορίστηκαν ως προς τις οικογένειες $\mathcal{F}_{t,l}$, για $t = 1, 2, 3, 4$, είναι πλήρως ισομετρικά ισόμορφα.* □

### Βραχείες ακριβείς ακολουθίες

Έστω $I \lhd \mathcal{C}$. Τότε από τη θεωρία των αναπαραστάσεων των $C^*$-αλγεβρών, γνωρίζουμε ότι κάθε (πιστή) αναπαράσταση $(\pi, H)$ της $\mathcal{C}$ γράφεται ως ευθύ άθροισμα μιας (πιστής) αναπαράστασης του $I$ και μιας (πιστής) αναπαράστασης της $\mathcal{C}/I$, και αντίστροφα. Για παράδειγμα, αν $(\pi, H)$ είναι μια (πιστή) αναπαράσταση της και $K = [\pi(I)H]$, τότε η $(\pi|_I, H)$ είναι μια (πιστή) αναπαράσταση του $I$ και η $(\pi|_{K^\perp}, K^\perp)$ είναι μια (πιστή) αναπαράσταση της $\mathcal{C}/I$, αφού ο $K$ είναι $\pi(\mathcal{C})$-ανάγωγος.

Εδώ ασχολούμαστε με ιδεώδη της $\mathcal{C}$ που είναι $\alpha$-αναλλοίωτα. Έστω λοιπόν, $I \lhd \mathcal{C}$ τέτοιο ώστε $\alpha(I) \subseteq I$. Τότε μπορούμε να ορίσουμε έναν *-μορφισμό

$$\alpha_I : \mathcal{C}/I \to \mathcal{C}/I : c + I \mapsto \alpha(c) + I.$$

Επομένως έχουμε τα δυναμικά συστήματα $(\mathcal{C}, \alpha)$, $(I, \alpha|_I)$ και $(\mathcal{C}/I, \alpha_I)$.

Στα παρακάτω ασχολούμαστε με τα ημισταυρωτά γινόμενα των δυναμικών συστημάτων που προκύπτουν από τα αριστερά συναλλοίωτα contractive ζεύγη. Επίσης σταθεροποιούμε μια πιστή αναπαράσταση της $\mathcal{C}$, έστω $\pi : \mathcal{C} \to \mathcal{B}(H)$. Τότε αυτή γράφεται ως ευθύ άθροισμα δύο αναπαραστάσεων ως προς τη γραφή $H = K \oplus K^\perp$. Για ευκολία $\pi_1$ θα είναι η αναπαράσταση που επάγεται στο $I$ και $\pi_2$ η αναπαράσταση που επάγεται στη $\mathcal{C}/I$.

Από το θεώρημα 2.3.11 προκύπτει ότι το ημισταυρωτό γινόμενο του $(\mathcal{C}, \alpha)$ είναι πλήρως ισομετρικά ισόμορφο με την κλειστή θήκη των πολυωνύμων

$$\sum_{n=o}^{k} S^n \widetilde{\pi}(c_n), c_n \in \mathcal{C},$$

μέσα στη $C^*$-υπάλγεβρα $C^*(\widetilde{\pi}, S)$ του $\mathcal{B}(H_0 \otimes \ell^2(\mathbb{Z}_+))$. Επίσης το ημισταυρωτό γινόμενο του $(I, \alpha|_I)$ είναι πλήρως ισομετρικά ισόμορφο με την κλειστή θήκη των πολυωνύμων

$$\sum_{n=o}^{k} S^n \widetilde{\pi}_1(x_n), x_n \in I$$

μέσα στη $C^*$-υπάλγεβρα $C^*(\widetilde{\pi_1}, S)$ του $\mathcal{B}(H_0 \otimes \ell^2(\mathbb{Z}_+))$. Είναι προφανές ότι η $C^*(\widetilde{\pi}_1, S)$ είναι ιδεώδες της $C^*(\widetilde{\pi}, S)$. Ακόμα το ημισταυρωτό γινόμενο του $(\mathcal{C}/I, \alpha_I)$

είναι πλήρως ισομετρικά ισόμορφο με την κλειστή θήκη των πολυωνύμων

$$\sum_{n=o}^{k} S^n_{K^\perp}\widetilde{\pi}_2(y_n), y_n \in \mathcal{C}/I$$

μέσα στη $C^*$-υπάλγεβρα $C^*(\widetilde{\pi}_2, S_{K^\perp})$ του $\mathcal{B}(K^\perp \otimes \ell^2(\mathbb{Z}_+))$. Εφόσον $K^\perp \subseteq H$, μπορεί η $C^*(\widetilde{\pi}_2, S)$ να θεωρείται $C^*$-υπάλγεβρα της $\mathcal{B}(H_0 \otimes \ell^2(\mathbb{Z}_+))$.

**Θεώρημα 2.4.7** *Η $C^*$-άλγεβρα $C^*(\widetilde{\pi}_2, S_{K^\perp})$ είναι *-ισόμορφη προς το πηλίκο $C^*(\widetilde{\pi}, S_H)/C^*(\widetilde{\pi}_1, S_H)$.*

*Απόδειξη.* Έστω $\Phi : C^*(\widetilde{\pi}, S_H) \to \mathcal{B}(H \otimes \ell^2(\mathbb{Z}_+))$ η ταυτοτική αναπαράσταση και το ιδεώδες $C^*(\widetilde{\pi}_1, S_H)$. Για κάθε $n, m \in \mathbb{Z}_+$ και $c \in I$ έχουμε ότι

$$\begin{aligned} S^n\widetilde{\pi}_1(c)(S^*)^m(H \otimes \ell^2(\mathbb{Z}_+)) &\subseteq S^n\widetilde{\pi}(c)(H \otimes \ell^2(\mathbb{Z}_+)) \\ &\subseteq S^n(\overline{\pi(I)H} \otimes \ell^2(\mathbb{Z}_+)) \subseteq (\overline{\pi(I)H} \otimes \ell^2(\mathbb{Z}_+)). \end{aligned}$$

Επομένως $\overline{C^*(\widetilde{\pi}_1, S_H)(H \otimes \ell^2(\mathbb{Z}_+))} \subseteq (\overline{\pi(I)H}) \otimes \ell^2(\mathbb{Z}_+))$. Από την άλλη, έστω $\xi \in \overline{\pi(I)H}$ έτσι ώστε $\xi = \lim_n \pi(c_n)\xi_n$, για $c_n \in I$ και $\xi_n \in H$. Τότε

$$\begin{aligned} \xi \otimes e_0 &= \lim_n(\pi(c_n)\xi_n) \otimes e_0 \\ &= \lim_n(I - S_H S_H^*)\widetilde{\pi}(c_n)(\xi_n \otimes e_0) \in \overline{C^*(\widetilde{\pi}_1, S)(H \otimes \ell^2(\mathbb{Z}_+))}. \end{aligned}$$

Επιπλέον, για κάθε $k \in \mathbb{Z}_+$ έχουμε ότι $\xi \otimes e_k = S_H^k(\xi \otimes e_0)$. Συνεπώς

$$(\overline{\pi(I)H}) \otimes \ell^2(\mathbb{Z}_+) \subseteq \overline{C^*(\widetilde{\pi}_1, S_H)\,(H \otimes \ell^2(\mathbb{Z}_+))}.$$

Άρα, ο υπόχωρος

$$\overline{C^*(\widetilde{\pi}_1, S_H)\,(H \otimes \ell^2(\mathbb{Z}_+))} = K \otimes \ell^2(\mathbb{Z}_+),$$

είναι $C^*(\widetilde{\pi}, S_H)$-ανάγωγος. Επομένως ο περιορισμός στον υπόχωρο

$$\begin{aligned} \overline{C^*(\widetilde{\pi}_1, S)(H \otimes \ell^2(\mathbb{Z}_+))}^\perp &= (\overline{\pi(I)H}) \otimes \ell^2(\mathbb{Z}_+))^\perp \\ &= (\overline{\pi(I)H}^\perp) \otimes \ell^2(\mathbb{Z}_+) = K^\perp \otimes \ell^2(\mathbb{Z}_+), \end{aligned}$$

επάγει μια πιστή αναπαράσταση της $C^*(\widetilde{\pi}, S_H)/C^*(\widetilde{\pi}_1, S_H)$.

Όμως τότε $\widetilde{\pi}(c) + C^*(\widetilde{\pi}_1, S) \mapsto \widetilde{\pi}(c)|_{K^\perp \otimes \ell(\mathbb{Z}_+)} = \widetilde{(\pi|_{K^\perp})}(c) = \widetilde{\pi}_2(c + I) \in C^*(\widetilde{\pi}_2, S)$ και $(S_H)|_{K^\perp \otimes \ell^2(\mathbb{Z}_+)} = S_{K^\perp} \in C^*(\widetilde{\pi}_2, S)$. Επομένως αυτή η πιστή αναπαράσταση είναι επί της $C^*(\widetilde{\pi}_2, S)$. $\square$

Άρα, αν $I$ είναι ένα $\alpha$-αναλλοίωτο ιδεώδες της $\mathcal{C}$, τότε η βραχεία ακριβής ακολουθία

$$(0) \to I \to \mathcal{C} \to \mathcal{C}/I \to (0),$$

επεκτείνεται στην βραχεία ακριβή ακολουθία

$$(0) \to C^*(\widetilde{\pi}_1, S) \to C^*(\widetilde{\pi}, S) \to C^*(\widetilde{\pi}_2, S) \to (0).$$

# Κεφάλαιο 3

# Ημισταυρωτά Γινόμενα Αλγεβρών Τελεστών

Σε αυτό το κεφάλαιο θα προχωρήσουμε στη μελέτη ημισταυρωτών γινομένων που προκύπτουν από τη δράση ενός μορφισμού $\alpha$ σε μια, εν γένει μη-αυτοσυζυγή, άλγεβρα τελεστών $\mathcal{A}$. Τα παρακάτω μελετώνται στο **[22]**.

Έστω, λοιπόν, $\mathcal{A}$ μια μοναδιαία άλγεβρα τελεστών και $\alpha : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ ένας ενδομορφισμός της $\mathcal{A}$ που είναι επιπλέον συστολή. Στο γενικό πλαίσιο δεν απαιτούμε εκ των προτέρων ο $\alpha$ να είναι πλήρης συστολή. Αυτό θα προκύπτει αυτόματα στις επόμενες τρεις περιπτώσεις που θα εξετάσουμε. Όπως και στο δεύτερο κεφάλαιο, ορίζουμε την άλγεβρα Banach $\ell^1(\mathcal{A}, \alpha, \mathbb{Z}_+)_l$. Αυτή είναι η κλειστή γραμμική θήκη των μονωνύμων $\delta_n \otimes x$, $n \in \mathbb{Z}_+$, $x \in \mathcal{A}$, ως προς τη νόρμα

$$\left\| \sum_{n=0}^{k} \delta_n \otimes x_n \right\|_1 = \sum_{n=0}^{k} \|x_n\|_{\mathcal{A}},$$

με (αριστερό) πολλαπλασιασμό

$$(\delta_n \otimes x) *_l (\delta_m \otimes y) = \delta_{n+m} \otimes a^m(x)y, \quad x, y \in \mathcal{A}.$$

Ακολουθώντας την κατασκευή στο παράδειγμα 1.1.27, θα κατασκευάσουμε άλγεβρες τελεστών που ορίζονται από κατάλληλες (κάθε φορά) οικογένειες αναπαραστάσεων της άλγεβρας Banach $\ell^1(\mathcal{A}, \alpha, \mathbb{Z}_+)$.

## 3.1 Σχετικό Ημισταυρωτό Γινόμενο

Έστω $\mathcal{A}$ μια άλγεβρα τελεστών και $\mathcal{C}$ ένα $C^*$-κάλυμμα της $\mathcal{A}$. Έστω $\alpha$ ένας $*$-ενδομορφισμός της $\mathcal{C}$ που αφήνει αναλλοίωτη την $\mathcal{A}$. Τότε ο $\alpha|_{\mathcal{A}}$ είναι ένας μορφισμός της $\mathcal{A}$, που επιπλέον είναι πλήρης συστολή. Παρατηρούμε επίσης ότι η $\ell^1(\mathcal{A}, \alpha|_{\mathcal{A}}, \mathbb{Z}_+)_l$ είναι κλειστή υπάλγεβρα της $\ell^1(\mathcal{C}, \alpha, \mathbb{Z}_+)_l$. Επομένως αν θεωρήσουμε ένα left covariant ζεύγος $(\pi, V)$ του $(\mathcal{C}, \alpha)$, τότε ο περιορισμός της $(V \times \pi)$ στην $\ell^1(\mathcal{A}, \alpha|_{\mathcal{A}}, \mathbb{Z}_+)_l$ ορίζει μια αναπαράστασή της.

**Ορισμός 3.1.1** Το *σχετικό ημισταυρωτό γινόμενο* $\mathfrak{A}(\mathcal{A}, \alpha, relative)$ *του* $(\mathcal{A}, \alpha)$ *ως προς το* $(\mathcal{C}, \alpha)$, είναι η άλγεβρα τελεστών που παράγεται όπως στο παράδειγμα 1.1.27 ως προς την οικογένεια των αναπαραστάσεων

$$\mathcal{F} = \{(V \times \pi|_{\mathcal{A}}) : (\pi, V) \textit{ left covariant ζεύγος του } (\mathcal{C}, \alpha)\}.$$

Επομένως το σχετικό ημισταυρωτό γινόμενο του $(\mathcal{A}, \alpha)$ ως προς το $(\mathcal{C}, \alpha)$ είναι μια κλειστή υπάλγεβρα του ημισταυρωτού γινομένου του $(\mathcal{C}, \alpha)$ ως προς τα left covariant contractive ζεύγη.

Όπως έχουμε δείξει στο θεώρημα 2.3.11 το ημισταυρωτό γινόμενο του $(\mathcal{C}, \alpha)$ είναι πλήρως ισομετρικά ισόμορφο προς την κλειστή γραμμική θήκη των πολυωνύμων

$$\sum_{n=0}^{k} S^n \widetilde{\pi}(c_n), c_n \in \mathcal{C},$$

όπου $\pi : \mathcal{C} \to \mathcal{B}(H)$ πιστή αναπαράσταση της $\mathcal{C}$, $\widetilde{\pi}(c) = \mathrm{diag}\{\pi(\alpha^n(c)) : n \in \mathbb{Z}_+\}$ και $S = 1_H \otimes s$, όπου $s$ ο unilateral shift στον $\ell^2(\mathbb{Z}_+)$. Τότε αμέσως προκύπτει ότι το σχετικό ημισταυρωτό γινόμενο του $(\mathcal{A}, \alpha)$ ως προς το $(\mathcal{C}, \alpha)$ είναι πλήρως ισομετρικά ισόμορφο προς την κλειστή γραμμική θήκη των πολυωνύμων

$$\sum_{n=0}^{k} S^n \widetilde{\pi}(x_n), x_n \in \mathcal{A}.$$

Έστω $\mathcal{J}_{\mathcal{A}}$ το ιδεώδες Šilov $\mathcal{J}_{\mathcal{A}}$ της $\mathcal{A}$ στη $\mathcal{C}$ και $q : \mathcal{C} \to \mathcal{C}/\mathcal{J}_{\mathcal{A}}$ η απεικόνιση πηλίκο. Όπως έχουμε αναφέρει στο πρώτο κεφάλαιο ο $q|_{\mathcal{A}}$ είναι πλήρης ισομετρικός ισομορφισμός στην εικόνα του. Στα επόμενα υποθέτουμε ότι ο $\alpha$ αφήνει αναλλοίωτο το ιδεώδες Šilov $\mathcal{J}_{\mathcal{A}}$ της $\mathcal{A}$ στη $\mathcal{C}$. Τότε μπορούμε να ορίσουμε τον $*$-μορφισμό

$$\dot{\alpha} : \mathcal{C}/\mathcal{J}_{\mathcal{A}} \to \mathcal{C}/\mathcal{J}_{\mathcal{A}},$$

με $\dot{\alpha}(c + \mathcal{J}_\mathcal{A}) = \alpha(c) + \mathcal{J}_\mathcal{A}$, $c \in \mathcal{C}$. Ο $\dot{\alpha}$ διατηρεί μερικές από τις ιδιότητες του $\alpha$. Για παράδειγμα έχουμε το εξής.

**Λήμμα 3.1.2** *Έστω $\mathcal{A}$ μια άλγεβρα τελεστών, $\mathcal{C}$ ένα $C^*$-κάλυμμα της $\mathcal{A}$ και έστω $\alpha$ ένας *-μονομορφισμός της $\mathcal{C}$ που αφήνει αναλλοίωτους την $\mathcal{A}$ και το ιδεώδες Šilov $\mathcal{J}_\mathcal{A}$. Τότε ο $\dot{\alpha} : \mathcal{C}/\mathcal{J}_\mathcal{A} \to C/\mathcal{J}_\mathcal{A}$ είναι επίσης 1-1.*

*Απόδειξη.* Σε αυτήν την περίπτωση ο $\alpha$ είναι πλήρως ισομετρική απεικόνιση. Επομένως, αν $q : \mathcal{C} \to \mathcal{C}/\mathcal{J}_\mathcal{A}$ είναι η απεικόνιση πηλίκο και $x \in \mathcal{A}$, έχουμε ότι

$$\begin{aligned}\|q(x) + \ker \dot{\alpha}\| &= \|\dot{\alpha}(q(x))\| = \|\dot{\alpha}(x + \mathcal{J}_\mathcal{A})\| \\ &= \|\alpha(x) + \mathcal{J}_\mathcal{A}\| = \|\alpha(x)\| = \|x\|,\end{aligned}$$

εφόσον το $\mathcal{J}_\mathcal{A}$ είναι ένα συνοριακό ιδεώδες και $\alpha(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{A}$. Το ίδιο επιχείρημα εφαρμόζεται για τις νόρμες πινάκων $\|\cdot\|_\nu$, δηλαδή

$$\|[x_{ij}]\|_\nu = \|[q(x_{ij}) + \ker \dot{\alpha}]\|_\nu = \|[q(x_{ij})] + \mathcal{M}_\nu(\ker \dot{\alpha})\|_\nu, \text{ για } x_{ij} \in \mathcal{A},$$

επομένως ο πυρήνας $\ker \dot{\alpha}$ είναι ένα συνοριακό ιδεώδες της $q(\mathcal{A})$ στην $\mathcal{C}/\mathcal{J}_\mathcal{A}$. Εφόσον η $\mathcal{C}/\mathcal{J}_\mathcal{A}$ είναι το $C^*$-envelope της $\mathcal{A}$ έπεται ότι $\ker \dot{\alpha} = (0)$. □

Ένα παράδειγμα όπου ο $\alpha$ αφήνει αναλλοίωτο το ιδεώδες Šilov προκύπτει όταν ο $\alpha$ είναι *-αυτομορφισμός και $\alpha(\mathcal{A}) = \mathcal{A}$ (βλέπε κεφάλαιο 1). Στο επόμενο παράδειγμα βλέπουμε ότι υπάρχουν περιπτώσεις *-μορφισμών που δεν αφήνουν αναλλοίωτο το ιδεώδες Šilov.

**Παράδειγμα 3.1.3** Έστω $\mathcal{A} = \mathbb{A}(\mathbb{D}) \subseteq \mathcal{C}(\overline{\mathbb{D}})$. Γνωρίζουμε ότι το $C^*$-envelope της $\mathcal{A}$ είναι η $C(\mathbb{T})$. Πράγματι αυτό προκύπτει άμεσα από την παράγραφο 1.2.6. Παρατηρούμε ότι $C(\mathbb{T}) = C(\overline{\mathbb{D}} \setminus \mathbb{D}) \simeq C(\overline{\mathbb{D}})/C_0(\mathbb{D})$. Επομένως το ιδεώδες Šilov της $\mathcal{A}$ στη $\mathcal{C}$ είναι το $C_0(\mathbb{D})$ (οι συνεχείς συναρτήσεις που μηδενίζονται στην περιφέρεια $\mathbb{T}$). Έστω ένας μοναδιαίος *-μορφισμός $\alpha : \mathcal{C}(\overline{\mathbb{D}}) \to \mathcal{C}(\overline{\mathbb{D}})$. Τότε ο $\alpha$ επάγει μια συνεχή απεικόνιση $\theta : \overline{\mathbb{D}} \to \overline{\mathbb{D}}$, έτσι ώστε $\alpha(f) = f \circ \theta$.

*Ισχυρισμός. Το $C_0(\mathbb{D})$ είναι $\alpha$-αναλλοίωτο αν, και μόνο αν, η περιφέρεια $\mathbb{T}$ είναι $\theta$-αναλλοίωτη.*

*Απόδειξη του Ισχυρισμού.* Πράγματι, αν $\theta(\mathbb{T}) \subseteq \mathbb{T}$ και $f \in C_0(\mathbb{D})$, τότε για κάθε $z \in \mathbb{T}$ έχουμε ότι $\theta(z) \in \mathbb{T}$, άρα $f(\theta(z)) = 0$. Επομένως $\alpha(f) = f \circ \theta \in C_0(\mathbb{D})$.

Για το αντίστροφο, έστω $\alpha(C_0(\mathbb{D})) \subseteq C_0(\mathbb{D})$ και $w \in \mathbb{T}$, τέτοιο ώστε $|\theta(w)| < 1$. Έστω $f : \overline{\mathbb{D}} \to \overline{\mathbb{D}}$ με $f(re^{i\omega}) = 1 - r$. Τότε $f \in C_0(\mathbb{D})$, άρα $\alpha(f) = f \circ \theta \in C_0(\mathbb{D})$.

Συνεπώς $\alpha(f)(w) = 0$. Όμως $\alpha(f)(w) = f \circ \theta(w) = f(\theta(w)) = 1 - |\theta(w)| > 0$, που είναι άτοπο.

Επομένως, εκτός από τους *-αυτομορφισμούς που επάγονται από τις σύμμορφες απεικονίσεις του δίσκου, έχουμε και τους *-μορφισμούς που επάγονται από οποιαδήποτε ολόμορφη συνάρτηση του δίσκου αφήνει αναλλοίωτη την περιφέρεια. Παρατηρούμε επίσης ότι από τα προηγούμενα προκύπτει (χρησιμοποιώντας μόνο την έννοια του $C^*$-envelope) ότι μια συνάρτηση στην άλγεβρα του δίσκου είναι 1-1 και επί αν, και μόνο αν, διατηρεί την περιφέρεια.

Στην περίπτωση που $\alpha(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{A}$ και $\alpha(\mathcal{J}_{\mathcal{A}}) \subseteq \mathcal{J}_{\mathcal{A}}$, δημιουργούνται δύο σχετικά ημισταυρωτά γινόμενα, το σχετικό ημισταυρωτό γινόμενο $\mathfrak{A}(\mathcal{A}, \alpha, \text{relative})$ του $(\mathcal{A}, \alpha)$ ως προς το $(\mathcal{C}, \alpha)$, και το σχετικό ημισταυρωτό γινόμενο $\mathfrak{A}(q(\mathcal{A}), \dot{\alpha}, \text{relative})$ του $(q(\mathcal{A}), \dot{\alpha})$ ως προς το $(\mathcal{C}/\mathcal{J}_{\mathcal{A}}, \dot{\alpha})$.

**Πρόταση 3.1.4** *Έστω $\mathcal{A}$ μια άλγεβρα τελεστών, $\mathcal{C}$ ένα $C^*$-κάλυμμα της $\mathcal{A}$ και $\alpha$ ένας *-ενδομορφισμός της $\mathcal{C}$ που αφήνει αναλλοίωτους την $\mathcal{A}$ και το ιδεώδες Šilov $\mathcal{J}_{\mathcal{A}}$. Τότε τα σχετικά ημισταυρωτά γινόμενα $\mathfrak{A}(\mathcal{A}, \alpha, \textit{relative})$ και $\mathfrak{A}(q(\mathcal{A}), \dot{\alpha}, \textit{relative})$ είναι πλήρως ισομετρικά ισόμορφα.*

*Απόδειξη.* Έστω $F = \sum_{n=0}^{k} \delta_n \otimes x_n \in \mathfrak{A}(\mathcal{A}, \alpha, \text{relative})$ και $F' = \sum_{n=0}^{k} \delta_n \otimes (x_n + \mathcal{J}_{\mathcal{A}}) \in \mathfrak{A}(q(\mathcal{A}), \dot{\alpha}, \text{relative})$. Θα δείξουμε ότι ο μορφισμός $F \mapsto F'$ είναι πλήρης ισομετρία.

Έστω $\pi$ μια πιστή αναπαράσταση της $\mathcal{C}$ σε χώρο Hilbert $H$ και έστω $(\widetilde{\pi}, S)$ το ζεύγος που ορίζεται στο 2.3.2. Εφόσον η $\pi$ είναι πλήρης ισομετρία, η απεικόνιση

$$\phi : q(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathcal{B}(H) : x + \mathcal{J}_{\mathcal{A}} \longmapsto \pi(x), \quad x \in \mathcal{A},$$

είναι επίσης πλήρης ισομετρία. Τότε υπάρχει μια μεγιστική διαστολή $(K, \Phi)$ της $\phi$ η οποία επεκτείνεται μοναδικά σε αναπαράσταση της $\mathcal{C}/\mathcal{J}_{\mathcal{A}}$ και άρα (βλ. κεφάλαιο 1)

$$P_{\mathcal{H}} \Phi(x + \mathcal{J}_{\mathcal{A}})|_{H} = \phi(x + \mathcal{J}_{\mathcal{A}}) = \pi(x),$$

για κάθε $x \in \mathcal{A}$. Εφόσον $P_{H \otimes \ell^2(\mathbb{Z}_+)} = P_H \otimes I$, έχουμε ότι

$$P_{H \otimes \ell^2(\mathbb{Z}_+)} \widetilde{\Phi}(x + \mathcal{J}_{\mathcal{A}}))|_{H \otimes \ell^2(\mathbb{Z}_+)} = \widetilde{\pi}(x),$$

για κάθε $x \in \mathcal{A}$. Θέτοντας $S' = I_K \otimes s$, έπεται ότι $S_K|_{\mathcal{H}\otimes\ell^2(\mathbb{Z}_+)} = S_H$. Επομένως,

$$\left\| \sum_{n=0}^{k} S^n \widetilde{\pi}(x_n) \right\| = \left\| P_{H\otimes\ell^2(\mathbb{Z}_+)} \left( \sum_{n=0}^{k} S^n \widetilde{\Phi}(x_n + \mathcal{J}_{\mathcal{A}}) \right) |_{H\otimes\ell^2(\mathbb{Z}_+)} \right\|$$
$$\leq \left\| \sum_{n=0}^{k} S_K^n \widetilde{\Phi}(x_n + \mathcal{J}_{\mathcal{A}}) \right\| \leq \left\| F' \right\|.$$

Παίρνοντας supremum ως προς τα covariant ζεύγη $(\pi, V)$ του συστήματος $(\mathcal{A}, \alpha)$, έχουμε τελικά ότι $\|F\| \leq \|F'\|$. Το ίδιο ισχύει και για όλες τις νόρμες πινάκων, δηλαδή,

$$\|[F_{ij}]\|_\nu \leq \left\|[F'_{ij}]\right\|_\nu, \text{ για } F_{ij} \in \mathfrak{A}(\mathcal{A}, \alpha, \text{relative}),$$

και άρα η απεικόνιση $F' \mapsto F$ είναι καλά ορισμένη και πλήρης συστολή. Αντιστρέφοντας τους ρόλους των $\mathcal{A}$ και $q(\mathcal{A})$ στα προηγούμενα επιχειρήματα, μπορούμε να αποδείξουμε ότι και η απεικόνιση $F \mapsto F'$ είναι πλήρης συστολή. □

**Θεώρημα 3.1.5** *Έστω $\mathcal{A}$ μια άλγεβρα τελεστών, $\mathcal{C}$ ένα $C^*$-κάλυμμά της και $\alpha : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ έτσι ώστε $\alpha(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{A}$ και $\alpha(\mathcal{J}_\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{J}_\mathcal{A}$. Τότε το σχετικό ημισταυρωτό γινόμενο $\mathfrak{A}(\mathcal{A}, \alpha, relative)$ του $(\mathcal{A}, \alpha)$ ως προς το $(\mathcal{C}, \alpha)$ και το ημισταυρωτό γινόμενο του $(\mathcal{C}/\mathcal{J}_\mathcal{A}, \dot{\alpha})$ ως προς τα left covariant contractive ζεύγη έχουν το ίδιο $C^*$-envelope.*

*Απόδειξη.* Από την πρόταση 3.1.4 αρκεί να αποδείξουμε ότι το σχετικό ημισταυρωτό γινόμενο $\mathfrak{A}(q(\mathcal{A}), \dot{\alpha}, \text{relative})$ του $(q(\mathcal{A}), \dot{\alpha})$ ως προς το $(\mathcal{C}/\mathcal{J}_\mathcal{A}, \dot{\alpha})$, και το ημισταυρωτό γινόμενο του $(\mathcal{C}/\mathcal{J}_\mathcal{A}, \dot{\alpha})$ ως προς τα left covariant contractive ζεύγη έχουν το ίδιο $C^*$-envelope.

Όπως παρατηρήσαμε στην αρχή της ενότητας, η $\mathfrak{A}(q(\mathcal{A}), \dot{\alpha}, \text{relative})$ εμφυτεύεται πλήρως ισομετρικά στο ημισταυρωτό γινόμενο του $(\mathcal{C}/\mathcal{J}_\mathcal{A}, \dot{\alpha})$ ως προς τα left covariant contractive ζεύγη. Επίσης, αν $\mathfrak{C}$ είναι ένα $C^*$-κάλυμμα του ημισταυρωτού γινομένου $\mathfrak{A}(C/\mathcal{J}_A, \dot{\alpha}, \text{contr})_l$, τότε η $\mathfrak{C}$ είναι $C^*$-κάλυμμα της $\mathfrak{A}(q(\mathcal{A}), \dot{\alpha}, \text{relative})$. Άρα το $C^*$-envelope του ημισταυρωτού γινομένου του $(\mathcal{C}/\mathcal{J}_\mathcal{A}, \dot{\alpha})$ ως προς τα left covariant contractive ζεύγη, όπως αυτό υπολογίζεται στο θεώρημα 2.3.21, είναι ένα $C^*$-κάλυμμα για το σχετικό $\mathfrak{A}(q(\mathcal{A}), \dot{\alpha}, \text{relative})$.

Ας υποθέσουμε ότι το ιδεώδες Šilov $\mathfrak{J}$ της $\mathfrak{A}(q(\mathcal{A}), \dot{\alpha}, \text{relative})$ σε αυτό το $C^*$-κάλυμμα είναι μη-τετριμμένο. Τότε ακολουθώντας τους ίδιους συλλογισμούς όπως στην απόδειξη του θεωρήματος 2.3.21, υπάρχει $y \in \mathcal{C}/\mathcal{J}_\mathcal{A}$ έτσι ώστε το κλειστό ιδεώδες $\langle y \rangle$, που παράγει το στοιχείο $y$, να είναι συνοριακό ιδεώδες της $q(\mathcal{A})$ στην

$\mathcal{C}/\mathcal{J}_{\mathcal{A}}$. Αυτό όμως είναι άτοπο, αφού η $\mathcal{C}/\mathcal{J}_{\mathcal{A}}$ είναι το $C^*$-envelope της $q(\mathcal{A})$ και άρα έχει τετριμμένα συνοριακά ιδεώδη. Επομένως $\mathfrak{J} = (0)$. □

Το επόμενο πόρισμα είναι προφανές.

**Πόρισμα 3.1.6** *Έστω $\mathcal{A}$ μια άλγεβρα τελεστών και $\alpha$ ένας *-αυτομορφισμός του $C^*_{env}(\mathcal{A})$ έτσι ώστε $\alpha(\mathcal{A}) = \mathcal{A}$. Τότε*

$$C^*_{env}(\mathfrak{A}(\mathcal{A}, \alpha, raltive)) = C^*_{env}(\mathcal{A}) \rtimes_\alpha \mathbb{Z}. \quad \square$$

## 3.2 Ημισταυρωτό Γινόμενο με Ισομετρία

Ας επιστρέψουμε στο γενικό πλαίσιο. Έστω, λοιπόν, $\mathcal{A}$ μια άλγεβρα τελεστών και $\alpha : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ ένας ενδομορφισμός της. Ένα ζεύγος $(\pi, V)$ θα καλείται left covariant isometric ζεύγος του $(\mathcal{A}, \alpha)$ αν η $\pi$ είναι αναπαράσταση (δηλαδή, μορφισμός και πλήρης συστολή) της $\mathcal{A}$, η $V$ είναι ισομετρία και ικανοποιείται η αριστερά συναλλοίωτη σχέση

$$\pi(x)V = V\pi(\alpha(x)), \quad \text{για κάθε } x \in \mathcal{A}.$$

Προφανώς κάθε left covariant isometric ζεύγος επάγει μια αναπαράσταση $(V \times \pi)$ της $\ell^1(\mathcal{A}, \alpha, \mathbb{Z}_+)_l$.

**Ορισμός 3.2.1** Το *ημισταυρωτό γινόμενο με ισομετρία* $\mathfrak{A}(\mathcal{A}, \alpha, is)$ του $(\mathcal{A}, \alpha)$ είναι η άλγεβρα τελεστών που παράγεται όπως στο παράδειγμα 1.1.27 ως προς την οικογένεια αναπαραστάσεων

$$\mathcal{F} = \{(V \times \pi) : (\pi, V) \text{ left covariant isometric ζεύγος του } (\mathcal{A}, \alpha)\},$$

**Σχόλιο 3.2.2** Στην περίπτωση που η $\mathcal{A}$ είναι $C^*$-άλγεβρα και ο $\alpha$ είναι *-μορφισμός, είναι άμεσο ότι το $\mathfrak{A}(\mathcal{A}, \alpha, \mathrm{is})$ είναι ακριβώς το ημισταυρωτό γινόμενο ως προς τα left covariant isometric ζεύγη που ορίστηκε στο δεύτερο κεφάλαιο.

**Παράδειγμα 3.2.3** Έστω $\pi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}(H_0)$ ένας μορφισμός που είναι πλήρης συστολή της $\mathcal{A}$ (για παράδειγμα, μια μεγιστική αναπαράσταση). Αν θέσουμε με $\widetilde{\pi}(x) = \mathrm{diag}\{\pi(\alpha^n(x)) : n \in \mathbb{Z}_+\}$ και $S = 1_{H_0} \otimes s$, τότε η $\widetilde{\pi}$ είναι αναπαράσταση της $\mathcal{A}$ και το ζεύγος $(\widetilde{\pi}, S)$ είναι ένα left covariant isometric ζεύγος του $(\mathcal{A}, \alpha)$. Επομένως η οικογένεια $\mathcal{F}$ είναι μη-κενή. Αν επιπλέον, η $(H_0, \pi)$ είναι πλήρης ισομετρία, τότε η επαγόμενη αναπαράσταση $(S \times \widetilde{\pi})$ της $\ell^1(\mathcal{A}, \alpha, \mathbb{Z}_+)_l$ είναι πιστή (όπως ακριβώς αποδεικνύεται στο παράδειγμα 2.3.2). Άρα οι ημινόρμες που ορίζονται από την οικογένεια $\mathcal{F}$, όπως στο παράδειγμα 1.1.27, είναι νόρμες.

Στο δεύτερο μέρος του **[13]** οι Davidson και Κατσούλης αποδεικνύουν ότι

$$C^*_{env}(\mathfrak{A}(\mathcal{A}_n, \alpha, \mathrm{is})) = \mathcal{O}_n \rtimes_\alpha \mathbb{Z},$$

όπου $\mathcal{A}_n$ είναι η μη-μεταθετική άλγεβρα του δίσκου, ο $\alpha$ ένας πλήρως ισομετρικός αυτομορφισμός της $\mathcal{A}_n$ και η $\mathcal{O}_n$ η Cuntz άλγεβρα που παράγεται από $n$ ισομετρίες. Αυτό επιτυγχάνεται χρησιμοποιώντας συγκεκριμένες ιδιότητες των αναπαραστάσεων της $\mathcal{O}_n$. Το επόμενο αποτέλεσμα μας δείχνει ότι αυτό μπορεί να επιτευχθεί για *αφηρημένες* άλγεβρες τελεστών. Υπενθυμίζουμε ότι αν $\alpha$ είναι ένας πλήρως ισομετρικός αυτομορφισμός μιας άλγεβρας τελεστών $\mathcal{A}$ τότε επεκτείνεται σε $^*$-αυτομορφισμό του $C^*$-envelope $C^*_{env}(\mathcal{A})$, για την οποία επέκταση χρησιμοποιούμε το ίδιο σύμβολο.

**Θεώρημα 3.2.4** *Έστω $\mathcal{A}$ μια άλγεβρα τελεστών και $\alpha$ ένας πλήρως ισομετρικός αυτομορφισμός της. Τότε*

$$C^*_{env}(\mathfrak{A}(\mathcal{A}, \alpha, is)) \simeq C^*_{env}(\mathcal{A}) \rtimes_\alpha \mathbb{Z}.$$

*Απόδειξη.* Από το πόρισμα 3.1.6, αρκεί να δείξουμε ότι το $\mathfrak{A}(\mathcal{A}, \alpha, \mathrm{is})$ διαστέλλεται σε ένα σχετικό ημισταυρωτό γινόμενο. Έστω, λοιπόν, $\mathfrak{V} \in \mathfrak{A}(\mathcal{A}, \alpha, \mathrm{is})$ το στοιχείο που αντιστοιχεί στην (universal) ισομετρία και δρα σε ένα χώρο Hilbert $\mathfrak{H}$. Έστω $\mathcal{H}$ το ευθύ όριο χώρων Hilbert που προκύπτει από το επαγωγικό σύστημα

$$\mathfrak{H} \xrightarrow{\mathfrak{V}} \mathfrak{H} \xrightarrow{\mathfrak{V}} \mathfrak{H} \xrightarrow{\mathfrak{V}} \cdots .$$

Για κάθε $x \in \mathcal{A}$, το μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{array}{ccccccc}
\mathfrak{H} & \xrightarrow{\mathfrak{V}} & \mathfrak{H} & \xrightarrow{\mathfrak{V}} & \mathfrak{H} & \xrightarrow{\mathfrak{V}} & \cdots \mathcal{H} \\
{\scriptstyle x}\downarrow & & {\scriptstyle \alpha^{-1}(x)}\downarrow & & {\scriptstyle \alpha^{-2}(x)}\downarrow & & {\scriptstyle \pi(x)}\downarrow \\
\mathfrak{H} & \xrightarrow{\mathfrak{V}} & \mathfrak{H} & \xrightarrow{\mathfrak{V}} & \mathfrak{H} & \xrightarrow{\mathfrak{V}} & \cdots \mathcal{H}
\end{array}$$

ορίζει ένα στοιχείο $\pi(x) \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Με τη διαδικασία αυτή ορίζεται πλήρως ισομετρική αναπαράσταση $\pi$ της $\mathcal{A}$ στον $\mathcal{H}$. Θεωρούμε τον ορθομοναδιαίο τελεστή $U \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ που ορίζεται από τη σχέση

$$U[h_1, h_2, h_3, \dots] = [h_2, h_3, \dots], \quad h_i \in \mathfrak{H}, i \in \mathbb{N}.$$

Τότε, $\pi(\alpha(x)) = U^*\pi(x)U$, $x \in \mathcal{A}$. Αν ταυτίσουμε την $\mathcal{A}$ με την $\pi(\mathcal{A})$, ο $ad_U$ ορίζει ένα $^*$-αυτομορφισμό της $\mathcal{C} \equiv C^*(\pi(\mathcal{A}))$, που επεκτείνει τον $\alpha$ και θα συμβολίζεται με τον ίδιο σύμβολο. Συνεπώς

$$\mathfrak{A}(\mathcal{A}, \alpha, \mathrm{is}) \simeq \mathfrak{A}(\mathcal{A}, \alpha, \mathrm{relative}). \quad \square$$

## 3.3 Ημισταυρωτό Γινόμενο με Συστολή

Έστω τώρα $\mathcal{A}$ μια άλγεβρα τελεστών και $\alpha : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ ένας ενδομορφισμός της που επιπλέον είναι συστολή. Ένα ζεύγος $(\pi, V)$ θα καλείται left covariant contractive ζεύγος του $(\mathcal{A}, \alpha)$ αν η $\pi$ είναι αναπαράσταση (δηλαδή, μορφισμός και πλήρης συστολή) της $\mathcal{A}$, η $V$ είναι συστολή και ικανοποιείται η αριστερά συναλλοίωτη σχέση

$$\pi(x)V = V\pi(\alpha(x)), \quad \text{για κάθε } x \in \mathcal{A}.$$

Προφανώς κάθε left covariant contractive ζεύγος επάγει μια αναπαράσταση $(V \times \pi)$ της $\ell^1(\mathbb{Z}_+, \mathcal{A}, \alpha)_l$.

**Ορισμός 3.3.1** Το *ημισταυρωτό γινόμενο με συστολή* $\mathfrak{A}(\mathcal{A}, \alpha, contr)$ *του* $(\mathcal{A}, \alpha)$ είναι η άλγεβρα τελεστών που παράγεται όπως στο παράδειγμα 1.1.27, ως προς την οικογένεια αναπαραστάσεων

$$\mathcal{F} = \{(V \times \pi) : (\pi, V) \textit{ left covariant contractive ζεύγος του } (\mathcal{A}, \alpha)\},$$

Χρησιμοποιώντας το παράδειγμα 3.2.3 που αναλύσαμε στην περίπτωση του ημισταυρωτού γινομένου με ισομετρία, έχουμε ότι η οικογένεια $\mathcal{F}$ είναι μη-κενή και οι ημινόρμες που ορίζονται από την οικογένεια $\mathcal{F}$ είναι νόρμες.

Στην ειδική περίπτωση που η $\mathcal{A}$ είναι $C^*$-άλγεβρα και ο $\alpha$ $*$-ενδομορφισμός, μπορούμε να δούμε εύκολα ότι το $\mathfrak{A}(\mathcal{A}, \alpha, \mathrm{contr})$ είναι το ημισταυρωτό γινόμενο του $(\mathcal{A}, \alpha)$ ως προς τα left covariant contractive ζεύγη, όπως ορίζεται στο δεύτερο κεφάλαιο. Επομένως από την πρόταση 2.3.3 έπεται ότι $\mathfrak{A}(\mathcal{A}, \alpha, \mathrm{contr}) \simeq \mathfrak{A}(\mathcal{A}, \alpha, \mathrm{is})$. Όπως φαίνεται και στο επόμενο αντιπαράδειγμα, δεν ισχύει το ίδιο όταν έχουμε μη-αυτοσυζυγείς άλγεβρες τελεστών[1], ακόμα και στην περίπτωση που ο $\alpha$ είναι ο ταυτοτικός αυτομορφισμός της $\mathcal{A}$.

**Παράδειγμα 3.3.2** Έστω η bidisc άλγεβρα $\mathcal{A} = A(\mathbb{D}^2) \subseteq C(\mathbb{T}^2)$ και έστω $\alpha$ ο ταυτοτικός αυτομορφισμός id. Από το Θεώρημα του Ando (βλέπε θεώρημα 1.1.19) η $C(\mathbb{T}^2)$ είναι το $C^*$-envelope της $A(\mathbb{D}^2)$. Επίσης, κάθε αναπαράσταση της $A(\mathbb{D}^2)$ καθορίζεται από ένα ζεύγος $T_1, T_2$ από συστολές που μετατίθενται και αντίστροφα. Ένα left covariant contractive ζεύγος του $(A(\mathbb{D}^2), \mathrm{id})$ αποτελείται από ένα ζεύγος συστολών που μετατίθενται και μια τρίτη συστολή $T_3$ που επίσης μετατίθεται με τις $T_1$ και $T_2$.

[1] Υπενθυμίζουμε ότι στην απόδειξη της πρότασης 2.3.3 χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι η $C^*$-άλγεβρα είναι αυτοσυζυγής.

Αν, λοιπόν, ίσχυε ότι το $\mathfrak{A}(A(\mathbb{D}^2), \mathrm{id}, \mathrm{contr})$ είναι πλήρως ισομετρικά ισόμορφο με το $\mathfrak{A}(A(\mathbb{D}^2), \mathrm{id}, \mathrm{is})$, τότε το $C^*$-envelope του $\mathfrak{A}(A(\mathbb{D}^2), \mathrm{id}, \mathrm{contr})$ θα ήταν το σταυρωτό γινόμενο $C(\mathbb{T}^2) \rtimes_{\mathrm{id}} \mathbb{Z} \simeq C(\mathbb{T}^3)$. Τότε κάθε τριάδα από συστολές που μετατίθενται θα ικανοποιούσε την ανισότητα von Neumann. Όπως έχουμε δει στο παράδειγμα 1.1.23, κάτι τέτοιο δε συμβαίνει.

Από την άλλη στο **[13]** οι Davidson και Κατσούλης, μελετώντας την περίπτωση της μη-μεταθετικής άλγεβρας του δίσκου $\mathcal{A}_n$, όπου ο $\alpha$ είναι ένας πλήρως ισομετρικός αυτομορφισμός της, αποδεικνύουν ότι

$$\mathfrak{A}(\mathcal{A}_n, \alpha, \mathrm{contr}) \simeq \mathfrak{A}(\mathcal{A}_n, \alpha, \mathrm{is}),$$

και άρα έχουν το ίδιο $C^*$-envelope. Αυτό είναι όπως είδαμε το σταυρωτό γινόμενο $\mathcal{O}_n \rtimes_\alpha \mathbb{Z}$, όπου $\mathcal{O}_n$ είναι η Cuntz άλγεβρα που παράγεται από $n$ ισομετρίες. Επομένως υπάρχουν περιπτώσεις μη-αυτοσυζυγών αλγεβρών τελεστών που το ημισταυρωτό γινόμενο με ισομετρία είναι πλήρως ισομετρικά ισόμορφο με το ημισταυρωτό γινόμενο με συστολή. Στην επόμενη παράγραφο θα εξετάσουμε μια κλάση τέτοιων αλγεβρών (θεωρώντας μια επιπλέον συνθήκη για τον αυτομορφισμό που ικανοποιείται αυτομάτως για την $\mathcal{A}_n$), επεκτείνοντας έτσι το αποτέλεσμα του **[13]**.

### Ημισταυρωτό Γινόμενο Αλγεβρών Γραφημάτων με συστολή

Στα παρακάτω υποθέτουμε ότι η $\mathcal{A}$ είναι η άλγεβρα τελεστών $\mathcal{A}_G$ που προκύπτει από ένα γράφημα $G = (G^0, G^1, s, r)$ και $\alpha : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ αυτομορφισμός που επεκτείνεται στην $\mathcal{T}_G$ και ικανοποιεί $\alpha(p_x) = p_x$, $x \in G^0$. Ο στόχος είναι να αποδείξουμε ότι

$$C^*_{env}(\mathfrak{A}(\mathcal{A}_G, \alpha, \mathrm{contr})) = \mathcal{O}_G \rtimes_\alpha \mathbb{Z}.$$

Για να γίνει αυτό αρκεί να δείξουμε ότι

$$\mathfrak{A}(\mathcal{A}_G, \alpha, \mathrm{contr}) \simeq \mathfrak{A}(\mathcal{A}_G, \alpha, \mathrm{is}).$$

Πράγματι, αν αυτό ισχύει τότε

$$C^*_{env}(\mathfrak{A}(\mathcal{A}_G, \alpha, \mathrm{contr})) = C^*_{env}(\mathfrak{A}(\mathcal{A}_G, \alpha, \mathrm{is})) = C^*_{env}(\mathcal{A}_G) \rtimes_\alpha \mathbb{Z} = \mathcal{O}_G \rtimes_\alpha \mathbb{Z},$$

όπως προκύπτει από το θεώρημα 3.2.4 και την παράγραφο 1.2.6. Πρώτα θα δείξουμε μια σειρά από λήμματα. Για τους συμβολισμούς παραπέμπουμε στην παράγραφο 1.1.5. Επίσης, co-extension μιας αναπαράστασης $(H, \pi)$ καλείται μια διαστολή $(K, \phi)$ έτσι ώστε $P_H \phi(\cdot)|_{H^\perp} = 0$. Ισοδύναμα, όταν η $\phi(\cdot)$ γράφεται με τη μορφή κάτω τριγωνικού πίνακα ως προς τη διάσπαση $K = H \oplus H^\perp$.

**Λήμμα 3.3.3** *Έστω $\mathcal{A}_G$ η άλγεβρα ενός γραφήματος $G$ και $\alpha$ ένας πλήρως ισομετρικός αυτομορφισμός της $\mathcal{A}_G$ που επεκτείνεται στην $\mathcal{T}_G$, έτσι ώστε $\alpha(p_x) = p_x$ για κάθε $x \in G^0$. Έστω $(\pi, V)$ ένα left covariant contractive ζεύγος του $(\mathcal{A}_G, \alpha)$ σε ένα χώρο Hilbert $\mathcal{H}$, δηλαδή*

$$\pi(b)V = V\pi(\alpha(b)), \text{ για κάθε } b \in \mathcal{A}_G.$$

*Τότε υπάρχουν co-extensions $\pi'$ και $(\pi \circ \alpha)'$ των $\pi$ και $\pi \circ \alpha$ αντίστοιχα, που είναι αναπαραστάσεις της $\mathcal{T}(G)$, και μια ισομετρική co-extension $V'$ της $V$, που δρουν στον ίδιο χώρο Hilbert $\mathcal{H}'$ και ικανοποιούν*

$$\pi'(b)V' = V'(\pi \circ \alpha)'(b), \text{ για κάθε } b \in \mathcal{A}_G, \tag{3.1}$$

*και*

$$\pi'(p_x) = (\pi \circ \alpha)'(p_x), \text{ για κάθε } x \in G^0 \tag{3.2}$$

*Απόδειξη.* Πρώτα θα κατασκευάσουμε co-extensions $\hat{\pi}_1$ και $\hat{\pi}_2$, των $\pi$ και $\pi \circ \alpha$ αντίστοιχα, και μια ισομετρική co-extension $\hat{V}$ της $V$, έτσι ώστε

$$\hat{\pi}_1(p_x) = \hat{\pi}_2(p_x) \tag{3.3}$$

και

$$\hat{V}\hat{\pi}_i(p_x) = \hat{\pi}_i(p_x)\hat{V}, \quad i = 1, 2, \tag{3.4}$$

για κάθε $x \in G^0$. Για να το πετύχουμε αυτό παρατηρούμε ότι η $V$ μετατίθεται με κάθε $\pi(p_x)$, $x \in G^0$, αφού

$$\pi(p_x)V = V\pi(\alpha(p_x)) = V\pi(p_x).$$

Έστω $S_V$ η διαστολή Schaeffer (που είναι μια co-extension) της $V$

$$S_V = \begin{bmatrix} V & 0 & 0 & 0 & \dots \\ D_V & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & I & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & I & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \in B(\mathcal{H}^{(\infty)}),$$

όπου $D_V = (I - V^*V)^{1/2}$. Έστω $\pi^{(\infty)}$ η αντίστοιχη ampliation της $\pi$. Παρατηρούμε ότι η $S_V$ μετατίθεται με κάθε $\pi^{(\infty)}(p_x)$, $x \in G^0$. Από το [**30**, Theorem 3.3], υπάρχει ελαχιστική co-extension $\hat{\pi}$ της $\pi^{(\infty)}$, σε κάποιο χώρο Hilbert $\mathcal{K} = \mathcal{H}^{(\infty)} \oplus \mathcal{M}$, η οποία είναι αναπαράσταση της $\mathcal{T}(G)$. Έστω $\hat{\pi}_1 = \hat{\pi}$, $\hat{\pi}_2 = \hat{\pi} \circ \alpha$ και $\hat{V} = S_V \oplus I_{\mathcal{M}}$. Τότε οι $\hat{\pi}_1, \hat{\pi}_2$ και $\hat{V}$ ικανοποιούν την (3.3) και την (3.4).

Ορίζουμε τις οικογένειες $\widehat{\mathcal{F}}_i = \big\{\{\widehat{P^i_x}\}, \{\widehat{S^i_e}\} : x \in G_0, e \in G_1\big\}$, $i = 1, 2$, με

$$\widehat{P^1_x} = \hat{\pi}_1(p_x), \quad \widehat{S^1_e} = \hat{\pi}_1(s_e)\hat{V}$$
$$\widehat{P^2_x} = \hat{\pi}_2(p_x), \quad \widehat{S^2_e} = \hat{V}\hat{\pi}_2(s_e).$$

Εφόσον η $\hat{V}$ ικανοποιεί την (3.4) και είναι ισομετρία, οι οικογένεις $\widehat{\mathcal{F}}_i$, $i = 1, 2$ είναι Toeplitz-Cuntz-Krieger και άρα ορίζουν αναπαραστάσεις $\rho_i : \mathcal{T}(G) \to \mathcal{B}(\mathcal{K})$, $i = 1, 2$, της $\mathcal{T}(G)$. Εφόσον

$$P_{\mathcal{H}}\rho_1(L)|_{\mathcal{H}} = P_{\mathcal{H}}\rho_2(L)|_{\mathcal{H}}, \text{ για κάθε } L \in \mathcal{A}_G, \tag{3.5}$$

οι αναπαραστάσεις $\rho_i$ είναι co-extensions της ίδιας αναπαράστασης της $\mathcal{A}_G$ (που εμφανίζεται στην (3.5) ). Λόγω της μοναδικότητας της ελαχιστικής co-extension (βλέπε [**30**, Proposition 3.2]), υπάρχουν προβολές $Q_i$ που μετατίθενται με την $\rho_i(\mathcal{A}_G)$, $i = 1, 2$, (άρα μετατίθενται με τις $\hat{\pi}_i(p_x)$, $x \in G^0$, $i = 1, 2$) και ένας ορθομοναδιαίος $W : Q_1(\mathcal{K}) \to Q_2(\mathcal{K})$, έτσι ώστε

$$W\rho_1(L)|_{Q_1(\mathcal{K})}W^* = \rho_2(L)|_{Q_2(\mathcal{K})}, \text{ για κάθε } L \in \mathcal{A}_G. \tag{3.6}$$

Επιπλέον, για κάθε $i = 1, 2$, $\mathcal{H} \subseteq Q_i(\mathcal{K})$ και ο $W$ σταθεροποιεί τον $\mathcal{H}$ (δηλαδή $W\mathcal{H} = \mathcal{H}$), εφόσον και οι δύο αναπαραστάσεις $\rho_1$ και $\rho_2$ είναι co-extensions της ίδιας πλήρους συστολής της $\mathcal{A}_G$, που δρα στον $\mathcal{H}$.

Για κάθε $i = 1, 2$, έστω

$$\tilde{\pi}_i(L) = \hat{\pi}_i(L) \bigoplus \Big(\rho_1(L)|_{Q_1^\perp(\mathcal{K})}\Big)^{(\infty)} \bigoplus \Big(\rho_2(L)|_{Q_2^\perp(\mathcal{K})}\Big)^{(\infty)}, \ L \in \mathcal{A}_G,$$

και

$$\tilde{V} = \hat{V} \bigoplus I^{(\infty)}_{Q_1^\perp(\mathcal{K})} \bigoplus I^{(\infty)}_{Q_2^\perp(\mathcal{K})},$$

οι οποίοι δρουν στον χώρο

$$\mathcal{H}' = \mathcal{K} \bigoplus Q_1^\perp(\mathcal{K})^{(\infty)} \bigoplus Q_2^\perp(\mathcal{K})^{(\infty)}.$$

Λόγω της (3.6), υπάρχει ένας ορθομοναδιαίος $U \in B(\mathcal{H}')$ που σταθεροποιεί τον $\mathcal{H}$, μετατίθεται με τις $\tilde{\pi}_1(p_x) = \tilde{\pi}_2(p_x)$, $x \in G^0$ και ικανοποιεί

$$U\tilde{\pi}_1(L)\tilde{V}U^* = \tilde{V}\tilde{\pi}_2(L), \text{ για κάθε } L \in \mathcal{A}_G.$$

Συγκεκριμένα, γράφοντας $\mathcal{K} = Q_1(\mathcal{K}) \oplus Q_1^\perp(\mathcal{K}) = Q_2(\mathcal{K}) \oplus Q_2^\perp(\mathcal{K})$ και θεωρώντας τους τελεστές

$$\begin{aligned}
&T_1 : Q_1^\perp(\mathcal{K}) \to Q_1^\perp(\mathcal{K})^{(\infty)} : \xi \mapsto (\xi, 0, 0, \dots),\\
&T_2 : Q_2^\perp(\mathcal{K})^{(\infty)} \to Q_2^\perp(\mathcal{K}) : (\xi_1, \xi_2, \dots) \mapsto \xi_1,\\
&S_1 = 1_{Q_1^\perp(\mathcal{K})} \otimes s, \quad \text{και} \quad S_2 = 1_{Q_2^\perp(\mathcal{K})} \otimes s,
\end{aligned}$$

όπου $s$ ο unilateral shift, τότε ο $U$ θα είναι ο ορθομοναδιαίος τελεστής

$$\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{cccc} Q_1(\mathcal{K}) & Q_1^\perp(\mathcal{K}) & Q_1^\perp(\mathcal{K})^{(\infty)} & Q_2^\perp(\mathcal{K})^{(\infty)} \end{array} \\
\begin{array}{c} Q_2(\mathcal{K}) \\ Q_2^\perp(\mathcal{K}) \\ Q_1^\perp(\mathcal{K})^{(\infty)} \\ Q_2^\perp(\mathcal{K})^{(\infty)} \end{array} & \begin{pmatrix} W & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & T_2 \\ 0 & T_1 & S_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_2^* \end{pmatrix}.
\end{array}$$

Πράγματι,

$$\begin{aligned}
U^*U &= \begin{pmatrix} W^* & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & T_1^* & 0 \\ 0 & 0 & S_1^* & 0 \\ 0 & T_2^* & 0 & S_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & T_2 \\ 0 & T_1 & S_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_2^* \end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix} W^*W & 0 & 0 & 0 \\ 0 & T_1^*T_1 & T_1^*S_1 & 0 \\ 0 & S_1^*T_1 & S_1^*S_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & T_2^*T_2 + S_2S_2^* \end{pmatrix} = I_{\mathcal{H}'},
\end{aligned}$$

εφόσον $W^*W = I_{Q_1(\mathcal{K})}$, $T_1^*T_1 = I_{Q_1(\mathcal{K})^\perp}$, $S_1^*S_1 = I_{Q_1^\perp(\mathcal{K})^{(\infty)}}$, $S_1^*T_1 = 0$ και $T_2^*T_2 + S_2S_2^* = I_{Q_2^\perp(\mathcal{K})^{(\infty)}}$. Ομοίως έπεται ότι $UU^* = I_{\mathcal{H}'}$.

Επομένως, ορίζονται οι οικογένειες $\widetilde{\mathcal{F}_i} = \big\{\{\widetilde{P_x^i}\}, \{\widetilde{S_e^i}\} : x \in G_0, e \in G_1\big\}$, $i = 1, 2$, με

$$\begin{aligned}
\widetilde{P_x^1} = \widetilde{\pi}_1(p_x), \quad \widetilde{S_e^1} = \widetilde{\pi}_1(s_e)U\\
\widetilde{P_x^2} = \widetilde{\pi}_2(p_x), \quad \widetilde{S_e^2} = \widetilde{\pi}_2(s_e)U.
\end{aligned}$$

Λόγω των ιδιοτήτων του $U$, οι οικογένεις $\widetilde{\mathcal{F}^i}$, $i = 1, 2$, είναι Toeplitz-Cuntz-Krieger και έστω $\rho_i' : \mathcal{T}(G) \to \mathcal{B}(\mathcal{K})$, $i = 1, 2$, οι αναπαραστάσεις της $\mathcal{T}(G)$ που ορίζουν. Θέτουμε $V' = U^*\tilde{V}$ και παρατηρούμε ότι για κάθε $e \in G^1$, έχουμε

$$\rho_1'(s_e)V' = \widetilde{\pi}_1(s_e)UU^*\tilde{V} = \widetilde{\pi}_1(s_e)\tilde{V}$$

ενώ

$$V'\rho_2'(s_e) = U^*\tilde{V}\widetilde{\pi}_2(s_e)U = \widetilde{\pi}_1(s_e)\tilde{V}.$$

Άρα $\rho_1'(s_e)V' = V'\rho_2'(s_e)$. Επίσης,

$$\begin{aligned}\rho_1'(p_x)V' = \widetilde{\pi}_1(p_x)U^*\tilde{V} = U^*\widetilde{\pi}_1(p_x)\tilde{V} = \\ U^*\tilde{V}\widetilde{\pi}_1(p_x) = U^*\tilde{V}\widetilde{\pi}_2(p_x) = V'\rho_2'(p_x),\end{aligned}$$

για κάθε $x \in G^0$. Επομένως $\rho_1'(L)V' = V'\rho_2'(L)$, για κάθε $L \in \mathcal{A}_G$, αφού η $\mathcal{A}_G$ παράγεται από τις $p_x$, $x \in G^0$, και τα στοιχεία της μορφής $s_{e_n} \cdots s_{e_1}$, όπου $e_1, \ldots, e_n$ είναι ένα μονοπάτι στο γράφημα $G$. Τότε οι $\rho_1'$ και $\rho_2'$ είναι οι $\pi'$ και $(\pi \circ \alpha)'$, αντίστοιχα, της διατύπωσης του λήμματος. □

**Σχόλιο 3.3.4** Θα μπορούσαμε στο προηγούμενο λήμμα να επιλέξουμε η ισομετρική co-extension $V'$ να είναι η minimal ισομετρική co-extension $V_m$ της $V$. Σε αυτήν την περίπτωση όμως οι co-extensions $\pi'$ και $(\pi \circ \alpha)'$ θα είναι μόνο πλήρεις συστολές και όχι αναγκαστικά αναπαραστάσεις της $\mathcal{T}(G)$.

Πράγματι, από το λήμμα 3.3.3, παίρνουμε co-extensions $\pi', (\pi \circ \alpha)'$ και $V'$ σε κάποιο χώρο Hilbert $\mathcal{H}'$ που ικανοποιούν τις (3.1) και (3.2). Έστω $Q$ η reducing προβολή της $V'$ έτσι ώστε $QV'|_{Q(\mathcal{H}')} \simeq V_m$. Από την (3.2), η προβολή $Q$ μετατίθεται με τις $\pi'(p_x)$ και $(\pi \circ \alpha)'(p_x)$, $x \in G^0$, και άρα οι αντιστοιχίες

$$\begin{aligned} p_x &\longrightarrow \pi'(p_x)|_{Q(\mathcal{H}')} \quad \text{και } s_e \longrightarrow Q\pi'(s_e)|_{Q(\mathcal{H}')}, \\ p_x &\longrightarrow (\pi \circ \alpha)'(p_x)|_{Q(\mathcal{H}')} \quad \text{και } s_e \longrightarrow Q(\pi \circ \alpha)'(s_e)|_{Q(\mathcal{H}')},\end{aligned}$$

επεκτείνονται σε αναπαραστάσεις της $\mathcal{A}_G$, που ικανοποιούν τις ανάλογες των σχέσεων (3.1) και (3.2) με $V_m$ αντί για $V'$.

**Σχόλιο 3.3.5** Αν θεωρήσουμε $\alpha = \text{id}$ στο λήμμα 3.3.3, τότε παίρνουμε το Commutant Lifting Theorem των Muhly και Solel [**30**].

**Πόρισμα 3.3.6** *Έστω $G$ ένα γραφημα και $\pi : \mathcal{A}_G \to B(\mathcal{H})$ μια αναπαράσταση της άλγεβρας του γραφήματος. Έστω $V \in B(\mathcal{H})$ μια συστολή έτσι ώστε,*

$$\pi(L)V = V\pi(L), \text{ για κάθε } L \in \mathcal{A}_G.$$

*Αν $\pi_m$ είναι η minimal co-extension της $\pi$ σε αναπαράσταση της $\mathcal{T}(G)$, τότε υπάρχει μια συστολή $V'$ που είναι co-extension της $V$ και ικανοποιεί*

$$\pi_m(L)V' = V'\pi_m(L), \text{ για κάθε } L \in \mathcal{A}_G.$$

*Απόδειξη.* Από το λήμμα 3.3.3 παίρνουμε co-extensions $\pi', V''$ σε κάποιο χώρο Hilbert $\mathcal{H}'$ με $\pi'$ αναπαράσταση της $\mathcal{T}(G)$ και $V''$ ισομετρία. Όμως η $\pi'$ μπορεί να είναι «μεγαλύτερη» από την minimal co-extension. Αν $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{H}'$ ο reducing υπόχωρος της $\pi'$ έτσι ώστε $\pi'|_{\mathcal{K}} \equiv \pi_m$, θέτουμε $V'$ την compression της $V''$ στο $\mathcal{K}$ και η απόδειξη ολοκληρώθηκε. □

**Πόρισμα 3.3.7** *Έστω $\mathcal{A}_G$ η άλγεβρα ενός γραφήματος $G$ και $\alpha$ ένας πλήρως ισομετρικός αυτομορφισμός της $\mathcal{A}_G$ που επεκτείνεται στην $\mathcal{T}_G$, έτσι ώστε $\alpha(p_x) = p_x$ για κάθε $x \in G^0$. Έστω $(\pi, V)$ ένα left covariant contractive ζεύγος του $(\mathcal{A}_G, \alpha)$ σε ένα χώρο Hilbert $\mathcal{H}$, δηλαδή*

$$\pi(L)V = V\pi(\alpha(L)), \text{ για κάθε } L \in \mathcal{A}_G.$$

*Αν $\pi_m$ είναι η minimal co-extension της $\pi$ σε αναπαράσταση της $\mathcal{T}(G)$, τότε υπάρχει μια συστολή $V'$ που είναι co-extension της $V$ και ικανοποιεί*

$$\pi_m(L)V' = V'\pi_m(\alpha(L)), \text{ για κάθε } L \in \mathcal{A}_G.$$

*Απόδειξη.* Εφαρμόζοντας το πόρισμα 3.3.6 για την αναπαράσταση $\Pi$ και τη συστολή $V$, όπου

$$V = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ V & 0 \end{bmatrix}, \quad \Pi(L) = \begin{bmatrix} \pi(L) & 0 \\ 0 & \pi(\alpha(L)) \end{bmatrix}, \quad L \in \mathcal{A}_G,$$

έχουμε ότι υπάρχει $V'$ έτσι ώστε $\Pi_m(L)V' = V'\Pi_m(L)$. Από την άλλη, είναι εύκολο να δούμε ότι η αναπαράσταση

$$\Phi(L) = \begin{bmatrix} \pi_m(L) & 0 \\ 0 & \pi_m(\alpha(L)) \end{bmatrix}, \quad L \in \mathcal{A}_G,$$

είναι minimal co-extension της $\Pi$ και άρα είναι ισοδύναμη με την $\Pi_m$, μέσω κάποιου ορθομοναδιαίου τελεστή $U$. Τότε για τον τελεστή $T = UV'U^*$ θα έχουμε ότι

$$\Phi(L)T = U\Pi_m(L)U^*UV'U^* = U\Pi_m(L)V'U^* = UV'\Pi_m(L)U^* = T\Phi(L).$$

Η απόδειξη ολοκληρώνεται εξισώνοντας τα $(2,1)$-στοιχεία των πινάκων (παρατηρούμε ότι $T_{2,1} \neq 0$, αφού είναι διαστολή της $V$). □

Τώρα είμαστε σε θέση να αποδείξουμε το κεντρικό θεώρημα για αυτήν την ενότητα.

**Θεώρημα 3.3.8** *Έστω $\mathcal{A}_G$ η άλγεβρα ενός γραφήματος $G$ και $\alpha$ ένας πλήρως ισομετρικός αυτομορφισμός της $\mathcal{A}_G$ που επεκτείνεται στην $\mathcal{T}_G$, έτσι ώστε $\alpha(p_x) = p_x$ για κάθε $x \in G^0$. Έστω $(\pi, V)$ ένα left covariant contractive ζεύγος του $(\mathcal{A}_G, \alpha)$ σε ένα χώρο Hilbert $\mathcal{H}$, δηλαδή*

$$\pi(L)V = V\pi(\alpha(L)), \text{ για κάθε } L \in \mathcal{A}_G.$$

*Τότε υπάρχει co-extension $\pi'$ της $\pi$, που είναι αναπαράσταση της $\mathcal{A}_G$, και ισομετρική co-extension $V'$ της $V$, που δρουν στον ίδιο χώρο Hilbert $\mathcal{H}'$ έτσι ώστε το ζεύγος $(\pi', V')$ να είναι left covariant isometric, δηλαδή*

$$\pi'(L)V' = V'\pi'(\alpha(L)), \text{ για κάθε } L \in \mathcal{A}_G.$$

*Απόδειξη.* Εφαρμόζοντας το πόρισμα 3.3.7 παίρνουμε μια συστολή $V_0$ σε ένα χώρο Hilbert $\mathcal{H}_0$, έτσι ώστε

$$\pi_m(L)V_0 = V_0(\pi_m \circ \alpha)(L), \text{ για κάθε } L \in \mathcal{A}_G.$$

Έστω $V_{0,m}$ minimal διαστολή της $V_0$, δηλαδή

$$V_{0,m} = \begin{bmatrix} V_0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ D_{V_0} & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & I & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & I & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

όπου $D_{V_0} = (I - V_0^* V_0)^{1/2}$, η οποία δρα στο χώρο Hilbert $\mathcal{H}_1 = \oplus_i H_i$, με $H_i = \overline{D_{V_0} H_0}$ για $i \geq 1$. Εφαρμόζουμε το σχόλιο 3.3.4 και παίρνουμε αναπαραστάσεις $\widehat{\pi}_m$ και $\widehat{\pi_m \circ \alpha}$ της $\mathcal{A}_{\mathcal{G}}$, που είναι co-extensions των $\pi_m$ και $\pi_m \circ \alpha$, ταυτίζονται στα $p_x$, $x \in G^0$ και ικανοποιούν

$$\widehat{\pi}_m(L)V_{0,m} = V_{0,m}(\widehat{\pi_m \circ \alpha})(L) \text{ για κάθε } L \in \mathcal{A}_G. \tag{3.7}$$

Εφόσον οι $\pi_m$ και $\pi_m \circ \alpha$ είναι ήδη αναπαραστάσεις της $\mathcal{T}(G)$, ορίζουν αναπαραστάσεις της $C^*$-άλγεβρας που παράγεται από τα $p_x$, $x \in G^0$. Άρα οι $\widehat{\pi}_m(p_x)$ και $\widehat{\pi_m \circ \alpha}(p_x)$ γράφονται ως

$$\widehat{\pi}_m(p_x) = \begin{bmatrix} \pi_m(p_x) & 0 \\ 0 & [Y_{jk}^{(p_x)}]_{j,k \geq 1} \end{bmatrix} \text{ και } \widehat{\pi_m \circ \alpha}(p_x) = \begin{bmatrix} \pi_m \circ \alpha(p_x) & 0 \\ 0 & [Z_{jk}^{(p_x)}]_{j,k \geq 1} \end{bmatrix},$$

για κάθε $x \in G^0$. Από την άλλη, οι $\widehat{\pi}_m$ και $(\widehat{\pi \circ \alpha})_m$ είναι co-extensions των $\pi_m$ και $\pi_m \circ \alpha$. Επομένως θα έχουμε ότι

$$\widehat{\pi}_m(s_e) = \begin{bmatrix} \pi_m(s_e) & 0 \\ A^{(s_e)} & [Y_{jk}^{(s_e)}]_{j,k\geq 1} \end{bmatrix} \text{ και } \widehat{\pi_m \circ \alpha}(s_e) = \begin{bmatrix} \pi_m \circ \alpha(s_e) & 0 \\ B^{(s_e)} & [Z_{jk}^{(s_e)}]_{j,k\geq 1} \end{bmatrix},$$

για κάθε $e \in G^1$.

Θα αποδείξουμε καταρχάς ότι $A^{(s_e)} = 0$ και $B^{(s_e)} = 0$, για κάθε $e \in G^1$. Σταθεροποιούμε, λοιπόν, μία $e \in G^1$. Εφόσον η $\widehat{\pi}_m$ είναι πλήρης συστολή, από το Θεώρημα Επέκτασης του Arveson, υπάρχει (τουλάχιστον μία και όχι αναγκαστικά μοναδική) πλήρως θετική επέκτασή της στην $\mathcal{T}(G)$, έστω $\Phi$. Τότε από την ανισότητα Schwarz για πλήρως θετικές απεικονίσεις ισχύει ότι

$$\widehat{\pi}_m(s_e)^*\widehat{\pi}_m(s_e) = \Phi(s_e)^*\Phi(s_e) \leq \Phi(s_e^* s_e) = \Phi(p_x) = \widehat{\pi}_m(p_x).$$

Παίρνοντας compression στον χώρο Hilbert $\mathcal{H}_0$ που δρα η $\pi_m$ προκύπτει ότι

$$P_{\mathcal{H}_0}\left(\widehat{\pi}_m(s_e)^*\widehat{\pi}_m(s_e)\right)|_{\mathcal{H}_0} \leq P_{\mathcal{H}_0}\widehat{\pi}_m(p_x)|_{\mathcal{H}_0}.$$

Συνεπώς,

$$\pi_m(s_e)^*\pi_m(s_e) + (A^{(s_e)})^*A^{(s_e)} \leq \pi_m(p_x).$$

Εφόσον όμως η $\pi_m$ είναι αναπαράσταση της $\mathcal{T}(G)$ έχουμε ότι $\pi_m(s_e)^*\pi_m(s_e) = \pi_m(p_x)$ και άρα $(A^{(s_e)})^*A^{(s_e)} \leq 0$. Συνεπώς $A^{(s_e)} = 0$. Ομοίως αποδεικνύεται ότι $B^{(s_e)} = 0$. Επομένως

$$\widehat{\pi}_m(L) = \begin{bmatrix} \pi_m(L) & 0 \\ 0 & [Y_{jk}^{(L)}]_{j,k\geq 1} \end{bmatrix} \text{ και } \widehat{\pi_m \circ \alpha}(L) = \begin{bmatrix} \pi_m \circ \alpha(L) & 0 \\ 0 & [Z_{jk}^{(L)}]_{j,k\geq 1} \end{bmatrix},$$

για κάθε $L \in \mathcal{A}_G$. Συγκρίνοντας τα $(2,i)$-στοιχεία, $i = 3, 4, \ldots$ στη συναλλοίωτη σχέση (3.7) παίρνουμε ότι

$$Y_{1,k}^{(L)} = 0, \quad \text{για κάθε } k \geq 2.$$

Επιπλέον, συγκρίνοντας τα $(i,1)$-στοιχεία $i = 3, 4, \ldots$ στη σχέση (3.7) έχουμε ότι

$$Y_{j,1}^{(L)} D_{V_0} = 0, \quad \text{για κάθε } j \geq 2,$$

και άρα $Y_{j,1}^{(L)} = 0$, για κάθε $j \geq 2$. Αυτό επάγει ότι η δεύτερη γραμμή και η δεύτερη στήλη της $\widehat{\pi}_m(L)$, $L \in \mathcal{A}_G$, είναι μηδέν, εκτός ίσως από το $Y_{1,1}^{(L)}$. Άρα ο χώρος Hilbert $D_{V_0}(\mathcal{H}_0)$ είναι $\widehat{\pi}_m(\mathcal{A}_G)$-αναλλοίωτος. Επομένως η απεικόνιση

$$\rho : \mathcal{A}_G \longrightarrow B\big(\overline{D_{V_0}(\mathcal{H}_0)}\big),\ L \longrightarrow Y_{1,1}^{(L)}$$

είναι αναπαράσταση (ως περιορισμός μιας αναπαράστασης) της $\mathcal{A}_G$. Συγκρίνοντας τα $(2,1)$-στοιχεία στη συναλλοίωτη σχέση (3.7), παίρνουμε ότι

$$\rho(L)D_{V_0} = D_{V_0}(\pi_m \circ \alpha)(L), L \in \mathcal{A}_G.$$

Τώρα μπορούμε να ορίσουμε

$$\pi'_m(L) = \begin{bmatrix} \pi_m(L) & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \rho(L) & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \rho(\alpha(L)) & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \rho(\alpha^{(2)}(L)) & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

Η $\pi'_m$ είναι μια αναπαράσταση στον χώρο Hilbert $\mathcal{H}_1$, έτσι ώστε

$$\pi'_m(L)V_{0,m} = V_{0,m}(\pi'_m \circ \alpha)(L),\ \text{για κάθε } L \in \mathcal{A}_G.\ \square$$

Το επόμενο θεώρημα είναι άμεσο από τα προηγούμενα και τη συζήτηση που κάναμε στην αρχή της ενότητας.

**Θεώρημα 3.3.9** *Έστω $\mathcal{A}_G$ η άλγεβρα ενός γραφήματος $G$ και $\alpha$ ένας πλήρως ισομετρικός αυτομορφισμός της $\mathcal{A}_G$ που επεκτείνεται στην $\mathcal{T}_G$, έτσι ώστε $\alpha(p_x) = p_x$ για κάθε $x \in G^0$. Τότε*

$$C^*_{env}(\mathfrak{A}(\mathcal{A}_G, \alpha, contr)) = \mathcal{O}_G \rtimes_\alpha \mathbb{Z}.\ \square$$

Όπως έχουμε αναφέρει η $\mathcal{A}_n$ είναι ένα παράδειγμα άλγεβρας τελεστών που προκύπτει από το γράφημα $G$ με $G^0 = \{x\}$ και $G_1 = \{e_1, \dots, e_n\}$. Επίσης, για κάθε αυτομορφισμό $\alpha$ της $\mathcal{A}_n$ έχουμε ότι $\alpha(p_x) = \alpha(1) = 1 = p_x$, αφού $G^0 = \{x\}$. Επομένως το προηγούμενο αποτέλεσμα γενικεύει το αντίστοιχο Θεώρημα των Davidson και Κατσούλη που αποδεικνύεται στο **[13]**.

# Κεφάλαιο 4

# Ημισταυρωτά Γινόμενα w*-κλειστών Αλγεβρών

Στο παρόν κεφάλαιο θα εξετάσουμε ημισταυρωτά γινόμενα που ορίζονται από w*-συνεχείς μορφισμούς σε w*-κλειστές άλγεβρες. Όπως έχουμε αναφέρει σε προηγούμενα κεφάλαια κάθε αριστερά συναλλοίωτο ζεύγος επάγει έναν μορφισμό μιας κατάλληλης άλγεβρας Banach σε χώρο Hilbert. Αντίστοιχα ως ημισταυρωτό γινόμενο στην w*-τοπολογία θα ορίζουμε την w*-κλειστή γραμμική θήκη της εικόνας αυτού του μορφισμού. Επομένως για κάθε αριστερά συναλλοίωτο ζεύγος ορίζουμε διαφορετικό (εν γένει) ημισταυρωτό γινόμενο. Ενδιαφερόμαστε κυρίως για την *ανακλαστική θήκη* αυτών των χώρων, ενώ σε επιμέρους περιπτώσεις αποδεικνύουμε την *ιδιότητα του δεύτερου μεταθέτη* και εντοπίζουμε το *ριζικό ιδεώδες Jacobson*.

Στην πρώτη ενότητα θα δώσουμε ορισμένα εισαγωγικά στοιχεία για τις w*-κλειστές άλγεβρες τελεστών και θα αναδείξουμε την ουσιώδη διαφορά που έχουν οι w*-κλειστές *αυτοσυζυγείς* άλγεβρες με τις w*-κλειστές *μη-αυτοσυζυγείς* άλγεβρες. Οι υπόλοιπες ενότητες είναι αφιερωμένες στον ορισμό και τη μελέτη των ημισταυρωτών γινομένων w*-κλειστών αλγεβρών.

## 4.1 Βασικοί Ορισμοί

Στα επόμενα χρησιμοποιούμε συμβολισμούς και έννοιες όπως αναφέρονται στο **[19]** ή/και στα **[9, 33]**.

### Τοπολογίες

Έστω $H$ ένας χώρος Hilbert. Η *ισχυρή τοπολογία (sot)* στον $\mathcal{B}(H)$ είναι η τοπολογία που επάγεται από τις ημινόρμες

$$p_\xi : \mathcal{B}(H) \to \mathbb{R}^+ : T \to \|T\xi\|\,,\ \xi \in H.$$

Για $\xi, \eta \in H$ θέτουμε $\omega_{\xi,\eta}(T) := \langle T\xi, \eta\rangle$. Η *ασθενής τοπολογία (wot)* στον $\mathcal{B}(H)$ είναι η τοπολογία που επάγεται από τις ημινόρμες

$$|\omega_{\xi,\eta}| : \mathcal{B}(H) \to \mathbb{R}^+ : T \mapsto |\langle T\xi, \eta\rangle|,\ \ \xi, \eta \in H.$$

Έστω $\mathcal{B}_\#(H) \subseteq \mathcal{B}(H)^*$ η γραμμική θήκη των $\omega_{\xi,\eta}$. Τότε ο δυϊκός χώρος του $(\mathcal{B}_\#(H), \|\cdot\|)$ είναι ισομετρικά ισόμορφος με τον $\mathcal{B}(H)$. Με $\mathcal{B}_*(H)$ συμβολίζουμε την κλειστή γραμμική θήκη του $\mathcal{B}_\#(H)$ στον $\mathcal{B}(H)^*$. Η **-ασθενής τοπολογία (w*)* στον $\mathcal{B}(H)$ είναι η τοπολογία που επάγεται από τις ημινόρμες

$$|\phi| : \mathcal{B}(H) \to \mathbb{R}^+ : T \mapsto |\phi(T)|,\ \ \phi \in \mathcal{B}_*(H).$$

**Πρόταση 4.1.1** *Ο $\mathcal{B}_*(H)$ είναι το σύνολο των γραμμικών μορφών $\phi$ της μορφής*

$$\phi = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n \omega_{\xi_n,\eta_n},$$

*όπου $\|\xi_n\| = \|\eta_n\| = 1$ και $\sum_{n=0}^{\infty} |\lambda_n| < \infty$.* $\square$

**Σχόλια 4.1.2** Οι τοπολογίες sot και w* είναι ισχυρότερες από την wot, ενώ δεν είναι μεταξύ τους συγκρίσιμες. Οι τοπολογίες w* και wot ταυτίζονται στα $\|\cdot\|$-φραγμένα υποσύνολα του $\mathcal{B}(H)$.

**Θεώρημα 4.1.3** (Krein Smulian) *(i) Έστω $\mathcal{E}$ δυϊκός χώρος Banach και $\mathcal{F}$ υπόχωρος του $\mathcal{E}$. Ο $\mathcal{F}$ είναι w*-κλειστός υπόχωρος του $\mathcal{E}$ αν, και μόνο αν, το σύνολο $Ball(\mathcal{F})$ είναι w*-κλειστό στον $\mathcal{E}$.*

*(ii) Έστω $\mathcal{E}, \mathcal{F}$ δυικοί χώροι Banach και $T : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ φραγμένος τελεστής. Ο $T$ είναι w*-συνεχής αν, και μόνο αν, για κάθε φραγμένο δίκτυο $(x_\lambda) \subseteq \mathcal{E}$ που συγκλίνει σε $x \in \mathcal{E}$ στην w*-τοπολογία, το δίκτυο $(T(x_\lambda))$ συγκλίνει στο $T(x)$ στην w*-τοπολογία.* $\square$

**Θεώρημα 4.1.4** (Double Commutant Theorem) *Έστω $\mathcal{A}$ μια αυτοσυζυγής υπάλγεβρα του $\mathcal{B}(H)$ ώστε ο χώρος $\mathcal{A}H$ να είναι πυκνός στον $H$. Τότε*

$$\mathcal{A}'' = \overline{\mathcal{A}}^{w^*} = \overline{\mathcal{A}}^{wot} = \overline{\mathcal{A}}^{sot}. \ \square$$

Μια αυτοσυζυγής και sot-κλειστή υπάλγεβρα του $\mathcal{B}(H)$ καλείται άλγεβρα von Neumann. Αν επιπλέον είναι μοναδιαία τότε από το προηγούμενο Θεώρημα ισούται με το δεύτερο μεταθέτη της και ισούται με την w*-κλειστή θήκη της. Γενικότερα ισχύει το εξής.

**Θεώρημα 4.1.5** *Έστω $\mathcal{A}$ άλγεβρα von Neumann. Τότε η $\mathcal{A}$ ισούται με τη norm-κλειστή γραμμική θήκη των προβολών της.* □

### Ανακλαστική θήκη

**Ορισμός 4.1.6** Έστω $\mathcal{S}$ ένας υπόχωρος κάποιου $\mathcal{B}(H)$. Ως *ανακλαστική θήκη του χώρου* $\mathcal{S}$ (βλέπε **[28]**) ορίζουμε το σύνολο

$$\mathrm{Ref}(\mathcal{S}) = \{T \in \mathcal{B}(H) : T\xi \in \overline{\mathcal{S}\xi},\ \textit{για κάθε}\ \ \xi \in \mathcal{H}\}.$$

Ο $\mathcal{S} \subseteq B(H)$ καλείται *ανακλαστικός*, αν ταυτίζεται με την ανακλαστική θήκη του. Ο $\mathcal{S} \subseteq B(H)$ καλείται *κληρονομικά ανακλαστικός*[1], αν κάθε w*-κλειστός υπόχωρός του είναι ανακλαστικός στον $\mathcal{B}(H)$.

Επομένως ένας τελεστής $T \in \mathcal{B}(H)$ ανήκει στο $\mathrm{Ref}\,\mathcal{S}$ αν για κάθε $\xi \in H$ υπάρχει μια ακολουθία $(S_n)$ τελεστών του $\mathcal{S}$ (η οποία εξαρτάται από το διάνυσμα $\xi$) έτσι ώστε $T\xi = \lim_n S_n\xi$. Χρησιμοποιώντας τους ορισμούς έπεται άμεσα η εξής πρόταση.

**Πρόταση 4.1.7** *Έστω $\mathcal{S}$ υπόχωρος ενός $\mathcal{B}(H)$. Τότε*

1. *Ο $\mathrm{Ref}\,\mathcal{S}$ είναι ένας sot-κλειστός υπόχωρος του $\mathcal{B}(H)$,*

2. $\mathrm{Ref}\,\mathrm{Ref}\,\mathcal{S} = \mathrm{Ref}\,\mathcal{S}$,

3. *Αν $\mathcal{S}^*$ είναι ο υπόχωρος που αποτελείται από τους συζυγείς των τελεστών του $\mathcal{S}$, τότε $(\mathrm{Ref}\,\mathcal{S})^* = \mathrm{Ref}\,\mathcal{S}^*$.* □

Η σχέση του ανακλαστικού καλύμματος και της sot-τοπολογίας φαίνεται στην επόμενη πρόταση. Υπενθυμίζουμε ότι αν $\mathcal{S}$ είναι ένα υποσύνολο του $\mathcal{B}(H)$, τότε ορίζουμε

$$\mathcal{S}^{(n)} = \left\{ \begin{bmatrix} S & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & S & \cdots & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & S \end{bmatrix} : S \in \mathcal{S} \right\}.$$

[1] Χρησιμοποιούμε διαφορετικό ορισμό για τον κληρονομικά ανακλαστικό υποχώρο από αυτόν που δόθηκε αρχικά στο **[28]**.

**Πρόταση 4.1.8** *Έστω $\mathcal{S}$ υπόχωρος ενός $\mathcal{B}(H)$. Τότε η sot-κλειστή θήκη του $\mathcal{S}$ ισούται με*

$$\mathfrak{S} = \{T \in \mathcal{B}(H) : T^{(n)} \in \operatorname{Ref} \mathcal{S}^{(n)} \text{ για κάθε } 1 \leq n < \infty\}.$$

*Απόδειξη.* Είναι άμεσο ότι ο $\mathfrak{S}$ είναι sot-κλειστός και περιέχει τον $\mathcal{S}$. Έστω, λοπόν, $T \in \mathfrak{S}$. Πρέπει να δείξουμε ότι για κάθε $\xi_1, \ldots, \xi_m \in H$ και $\epsilon > 0$, υπάρχει ένας τελεστής $S \in \mathcal{S}$, έτσι ώστε $\|S\xi_i - T\xi_i\| < \epsilon$, για κάθε $1 \leq i \leq m$. Όμως για το $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_m) \in H^{(m)}$ έχουμε ότι $T^{(m)}\xi \in [\mathcal{S}^{(m)}\xi]$, αφού $T \in \mathfrak{S}$, από το οποίο προκύπτει το ζητούμενο. □

Θα δούμε πώς οι προηγούμενοι ορισμοί «υλοποιούνται» στην περίπτωση των μη-αυτοσυζυγών αλγεβρών τελεστών. Έστω, $\mathcal{A}$ ένα σύνολο τελεστών σε έναν $\mathcal{B}(H)$. Με $\operatorname{Lat} \mathcal{A}$ συμβολίζουμε το σύνολο των προβολών στους $\mathcal{A}$-αναλλοίωτους κλειστούς υπόχωρους του $H$. Δηλαδή,

$$\operatorname{Lat} \mathcal{A} = \{M \leq H : AM \subseteq M \text{ για κάθε } A \in \mathcal{A}\}.$$

Άμεσα προκύπτει ότι ο $\operatorname{Lat} \mathcal{A}$ είναι ένας πλήρης σύνδεσμος. Επίσης, αν $\mathcal{L}$ είναι μια συλλογή από κλειστούς υπόχωρους του $H$, με $\operatorname{Alg} \mathcal{L}$ συμβολίζουμε το σύνολο των τελεστών στον $\mathcal{B}(H)$ που αφήνουν αναλοίωτο κάθε $M \in \mathcal{L}$. Δηλαδή,

$$\operatorname{Alg} \mathcal{L} = \{A \in \mathcal{B}(H) : AM \subseteq M \text{ για κάθε } M \in \mathcal{L}\}.$$

Η $\operatorname{Alg} \mathcal{L}$ είναι μια wot-κλειστή υπάλγεβρα του $\mathcal{B}(H)$ και εξ ορισμού περιέχει τη μονάδα. Είναι προφανές ότι

$$\operatorname{Alg} \operatorname{Lat} \mathcal{A} = \{A \in \mathcal{B}(H) : (1 - P_M)AP_M = 0 \text{ για κάθε } M \in \operatorname{Lat} \mathcal{A}\},$$

όπου $P_M$ η προβολή στον υπόχωρο $M$.

**Πρόταση 4.1.9** *Αν $\mathcal{A}$ είναι μια μοναδιαία υπάλγεβρα του $\mathcal{B}(H)$, τότε* $\operatorname{Ref} \mathcal{A} = \operatorname{Alg} \operatorname{Lat} \mathcal{A}$.

*Απόδειξη.* Έστω $A \in \operatorname{Ref} \mathcal{A}$ και $M \in \operatorname{Lat} \mathcal{A}$. Για κάθε $\xi \in M$, $A\xi \in [\mathcal{A}\xi] \leq M$, άρα $A \in \operatorname{Alg} \operatorname{Lat} \mathcal{A}$. Αντίστροφα, έστω $A \in \operatorname{Alg} \operatorname{Lat} \mathcal{A}$ και $\xi \in H$. Εφόσον η $\mathcal{A}$ περιέχει τη μονάδα, έχουμε ότι $\xi \in [\mathcal{A}\xi]$. Επίσης, $[\mathcal{A}\xi] \in \operatorname{Lat} \mathcal{A}$, αφού η $\mathcal{A}$ είναι άλγεβρα. Επομένως $A\xi \in [\mathcal{A}\xi]$ και άρα, εξ ορισμού, $A \in \operatorname{Ref} \mathcal{A}$. □

Παρατηρούμε, λοιπόν, ότι αν $\mathcal{A}$ υποσύνολο του $\mathcal{B}(H)$ τότε $\operatorname{Ref} \mathcal{A} \subseteq \operatorname{Alg} \operatorname{Lat} \mathcal{A}$.

**Σχόλιο 4.1.10** Η προηγούμενη πρόταση δείχνει ότι οι ανακλαστικές άλγεβρες είναι μια μη-αυτοσυζυγής γενίκευση των von Neumann αλγεβρών με μονάδα, αφού αν $\mathcal{A}$ είναι μια μοναδιαία von Neumann άλγεβρα τότε ο $\operatorname{Lat}\mathcal{A}$ αποτελείται από όλες τις προβολές στον πρώτο μεταθέτη της, $\mathcal{A}'$. Επομένως $\operatorname{Alg}\operatorname{Lat}\mathcal{A} = \mathcal{A}''$. Συνεπώς, από το Double Commutant Theorem οι von Neumann άλγεβρες με μονάδα είναι αυτόματα ανακλαστικές. Επίσης παρατηρούμε ότι στην αυτοσυζυγή περίπτωση η ιδιότητα του δεύτερου μεταθέτη ταυτίζεται με την ανακλαστικότητα της άλγεβρας.

Ενώ, λοιπόν, στην αυτοσυζυγή θεωρία έχουμε ξεκάθαρη εικόνα για τις ανακλαστικές άλγεβρες, στη μη-αυτοσυζυγή περίπτωση η κατάσταση είναι ουσιωδώς διαφορετική, όπως φαίνεται και στο επόμενο παράδειγμα.

**Παράδειγμα 4.1.11** Χρησιμοποιώντας τους ορισμούς μπορούμε να δούμε ότι αν

$$\mathcal{A} = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a \end{bmatrix} : a, b \in \mathbb{C} \right\}, \text{ και } \mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} : a, b, c \in \mathbb{C} \right\},$$

τότε $\operatorname{Ref}\mathcal{A} = \mathcal{B}$. Άρα, η $\mathcal{A}$ δεν είναι ανακλαστική υπάλγεβρα της $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, ενώ η $\mathcal{B}$ είναι.

### Λήμμα Féjer

Στα παρακάτω όλα τα άπειρα αθροίσματα θεωρούνται ως προς τη sot-τοπολογία. Επίσης, όπως και στα προηγούμενα κεφάλαια χρησιμοποιούμε το σύμβολο $s$ για τον unilateral shift στον $\mathcal{B}(\ell^2(\mathbb{Z}_+))$, με $s(e_n) = e_{n+1}$.

Κύριο εργαλείο για τις αποδείξεις είναι ένα λήμμα τύπου Féjer. Έστω η (δυϊκή) δράση της περιφέρειας $\mathbb{T}$ στον $H = H_0 \overline{\otimes} \ell^2(\mathbb{Z}_+)$ που επάγεται από τους ορθομοναδιαίους τελεστές $U_r$, $r \in \mathbb{R}$, με $U_r(\xi \otimes e_n) = e^{inr}\xi \otimes e_n$. Παρατηρήστε ότι η οικογένεια $\{U_r\}_{r\in\mathbb{R}}$ είναι $|\cdot|$-sot-συνεχής. Για κάθε $T \in \mathcal{B}(H)$ και κάθε $m \in \mathbb{Z}$ ορίζουμε τον «m-συντελεστή Fourier»

$$G_m(T) = \int_0^{2\pi} U_r T U_r^* e^{-imr} \frac{dr}{2\pi},$$

όπου το ολοκλήρωμα είναι το w*-όριο των αθροισμάτων Riemann. Εφαρμόζοντας το Θεώρημα Krein-Smulian παρατηρούμε ότι η $G_m(\cdot)$ είναι w*-συνεχής για κάθε $m \in \mathbb{Z}$.

**Σχόλιο 4.1.12** Έστω ένας υπόχωρος $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{B}(H)$. Αν $T \in \operatorname{Ref}\mathcal{S}$, τότε $U_r T U_r \in \operatorname{Ref}\mathcal{S}$ και άρα $G_m(T) \in \operatorname{Ref}\mathcal{S}$. Το επόμενο λήμμα μας δίνει και το αντίστροφο.

**Λήμμα 4.1.13** (Λήμμα Féjer) *Έστω $T \in \mathcal{B}(H)$ και $t \in [0, 2\pi]$. Θέτουμε*

$$\mu_n(T)(t) = \sum_{m=-n}^{n} G_m(T)\exp(imt)\ ,\ \sigma_l(T)(t) = \frac{1}{l+1}\sum_{m=0}^{l} \mu_n(T)(t).$$

*Τότε $\sigma_l(T)(0) \stackrel{w*}{\to} T$. Άρα ο $T$ ανήκει στη $w$*-κλειστή γραμμική θήκη των $G_m(T)$.*

*Απόδειξη.* Έστω $\phi \in \mathcal{B}_*(H)$ και η συνάρτηση $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$, με $f(r) = \phi(U_r T U_r^*)$. Τότε

$$\phi(G_m(T)) = \int_0^{2\pi} \phi(U_r T U_r^*) e^{-imr}\frac{dr}{2\pi} = \hat{f}(m),$$

(ο συνήθης συντελεστής Fourier) και άρα

$$\phi(\mu_n(T)(t)) = \sum_{m=-n}^{n} \hat{f}(m)\exp(imt) = \mu_n(f)(t)\ ,\ \ \phi(\sigma_l(T)(t)) = \sigma_l(f)(t).$$

Εφόσον η $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ είναι συνεχής, από το κλασικό Θεώρημα Féjer έχουμε ότι $\sigma_l(f) \to f$ ομοιόμορφα ως προς $t$. Ειδικότερα $\sigma_l(f)(0) \to f(0) = \phi(T)$. □

Επίσης για κάθε $\kappa, \lambda \in \mathbb{Z}_+$, και $T \in \mathcal{B}(H)$ ορίζουμε τα *"matrix elements"* $T_{\kappa,\lambda} \in \mathcal{B}(H_0)$ μέσω της σχέσης

$$\langle T_{\kappa,\lambda}\xi, \eta\rangle = \langle T(\xi \otimes e_\lambda), \eta \otimes e_\kappa\rangle\,,$$

$\xi, \eta \in H_0$. Τότε οι συντελεστές Fourier μπορούν να εκφραστούν μέσω του τύπου

$$G_m(T) = \begin{cases} S^m(\sum_{n\geq 0} T_{m+n,n} \otimes p_n) & ,\ \text{όταν } m \geq 0, \\ (\sum_{n\geq 0} T_{n,-m+n} \otimes p_n)(S^*)^{-m} & ,\ \text{όταν } m < 0, \end{cases}$$

όπου $S = 1_{H_0} \otimes s$ και $p_n$ η προβολή στο μονοδιάστατο χώρο $[e_n]$. Πράγματι, για

$\xi, \eta \in H$ και $\kappa, \lambda \in \mathbb{Z}_+$, έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
\langle G_m(T)(\xi \otimes e_\lambda), \eta \otimes e_\kappa \rangle &= \int_0^{2\pi} e^{-imr} \langle U_r T U_r^* (\xi \otimes e_\lambda), \eta \otimes e_\kappa \rangle \frac{dr}{2\pi} \\
&= \int_0^{2\pi} e^{i(\kappa-\lambda-m)r} \frac{dr}{2\pi} \langle T(\xi \otimes e_\lambda), \eta \otimes e_\kappa \rangle \\
&= \delta_{m+\lambda,\kappa} \langle T_{m+\lambda,\lambda}\xi, \eta \rangle \\
&= \langle (T_{m+\lambda,\lambda}\xi) \otimes e_{m+\lambda}, \eta \otimes e_\kappa \rangle \\
&= \langle S^m T_{m+\lambda,\lambda}(\xi \otimes e_\lambda), \eta \otimes e_\kappa \rangle \\
&= \left\langle S^m (\sum_n T_{m+n,n} \otimes p_n)(\xi \otimes e_\lambda), \eta \otimes e_\kappa \right\rangle .
\end{aligned}$$

Ομοίως αποδεικνύεται για $m < 0$. Για λόγους απλότητας, ορίζουμε τους διαγώνιους πίνακες

$$T_{(m)} = \begin{cases} \sum_{n \geq 0} T_{m+n,n} \otimes p_n & , \text{ όταν } m \geq 0, \\ \sum_{n \geq 0} T_{n,-m+n} \otimes p_n & , \text{ όταν } m < 0. \end{cases}$$

Παρατηρούμε ότι τα αθροίσματα συγκλίνουν και ως προς την w*-τοπολογία, αφού τα μερικά αθροίσματα είναι ομοιόμορφα φραγμένα από την $\|T\|$. Επομένως, ο $G_m(T)$ είναι η m-διαγώνιος του $T$, όταν θεωρούμε τον $H$ ως το $\ell^2$-άθροισμα από αντίγραφα του $H_0$.

## Παραδείγματα

**Παράδειγμα Α.** Ένα απλό παράδειγμα ανακλαστικής άλγεβρας είναι η άλγεβρα των «κάτω τριγωνικών πινάκων» του $\mathcal{B}(\ell^2(\mathbb{Z}_+))$. Δηλαδή, ένας $T \in \mathcal{B}(\ell^2(\mathbb{Z}_+))$ είναι κάτω τριγωνικός αν και μόνο αν $G_m(T) = 0$ για κάθε $m < 0$. Χρησιμοποιώντας το Λήμμα Féjer και το γεγονός ότι οι συντελεστές Fourier αφήνουν αναλλοίωτη την ανακλαστική θήκη η απόδειξη έπεται άμεσα.

**Παράδειγμα Β.** Ένα βασικό παράδειγμα ανακλαστικής άλγεβρας είναι η άλγεβρα των analytic Toeplitz τελεστών και πρώτα αποδείχτηκε από τον Sarason (βλ. [**43**, theorem 3]). Εδώ θα δώσουμε μια διαφορετική απόδειξη που αναφέρεται στους συντελεστές Fourier $G_m$, όσο και στην ιδέα που θα αναπτύξουμε στην επόμενη ενότητα.

Έστω ο unilateral shift $s \in \mathcal{B}(\ell^2(\mathbb{Z}_+))$. Με $\mathcal{T}$ συμβολίζουμε την w*-κλειστή θήκη των «αναλυτικών πολυωνύμων» του $s$, δηλαδή

$$\mathcal{T} = \overline{\text{span}}^{\text{w}^*}\{\sum_{n=0}^{k} \lambda_n s^n : \lambda_n \in \mathbb{C}, k \in \mathbb{Z}_+\}.$$

Στη βιβλιογραφία, η άλγεβρα $\mathcal{T}$ αναφέρεται ως *η άλγεβρα των αναλυτικών τελεστών Toeplitz*. Παρατηρούμε ότι για κάθε $T \in \operatorname{Ref}\mathcal{T}$ έπεται ότι $G_m(T) \in \operatorname{Ref}\mathcal{T}$ για κάθε $m \in \mathbb{Z}$. Επομένως $G_m(T) = 0$ για κάθε $m < 0$. Επίσης, αν $T \in \operatorname{Ref}\mathcal{T}$, τότε $G_m(T)^* \in \operatorname{Ref}\mathcal{T}^*$. Έστω, λοιπόν, το διάνυσμα $g_r = \sum_{n=0}^{\infty} r^n e_n$, με $0 \leq r < 1$, για το οποίο ισχύει ότι $s^*(g_r) = rg_r$. Συνεπώς ο υπόχωρος $[g_r]$ είναι $\mathcal{T}^*$-αναλλοίωτος, άρα και $G_m(T)^*$-αναλλοίωτος, για $m \geq 0$. Άρα υπάρχει $\lambda \in \mathbb{C}$ έτσι ώστε $G_m(T)^*(g_r) = \lambda g_r$. Τότε

$$\langle G_m(T)^*(g_r), e_k \rangle = \lambda \langle g_r, e_k \rangle = \lambda r^k, \tag{4.1}$$

για κάθε $k$. Από την άλλη, όμως

$$\begin{aligned}\langle G_m(T)^*(g_r), e_k \rangle &= \left\langle T^*_{(m)}(s^*)^m g_r, e_k \right\rangle \\ &= \left\langle T^*_{(m)}(r^m g_r), e_k \right\rangle = r^{m+k} T^*_{m+k,k}.\end{aligned}$$

Επομένως $T^*_{m+k,k} = \frac{\lambda}{r^m} \in \mathbb{C}$, για κάθε $k$. Άρα $G_m(T)^* = \frac{\lambda}{r^m}(s^*)^m$, επομένως $G_m(T) \in \mathcal{T}$. Από το Λήμμα Féjer έπεται ότι $T \in \mathcal{T}$.

**Παράδειγμα Γ.** Έστω η πολλαπλασιαστική άλγεβρα της περιφέρειας $\mathcal{M} = \{M_f : f \in L^\infty(\mathbb{T})\}$, η οποία δρα στο χώρο Hilbert $L^2(\mathbb{T})$, και είναι m.a.s.a.. Θεωρούμε τον μετασχηματισμό Fourier

$$F : L^2(\mathbb{T}) \to \ell^2(\mathbb{Z}) : f \mapsto (\hat{f}(n)),$$

όπου $\hat{f}(n) = \int_0^{2\pi} f e^{-imr} \frac{dr}{2\pi}$. Μέσω του ορθομοναδιαίου τελεστή $F$, για κάθε $1 \leq p \leq \infty$ μπορούμε να ορίσουμε τους χώρους Hardy $H^p$,

$$H^p = \{f \in L^p(\mathbb{T}) : \hat{f}(n) = 0, \text{ για } n < 0\}.$$

Ο $H^2$ είναι υπόχωρος του $L^2(\mathbb{T})$ και μπορούμε να ορίσουμε τους *τελεστές Toeplitz*

$$T_\phi : H^2 \to H^2 : f \mapsto P(\phi f),$$

όπου $P$ είναι η προβολή στον $H^2$. Είναι εύκολο να δούμε ότι η άλγεβρα των αναλυτικών τελεστών Toeplitz, που ορίσαμε στο προηγούμενο παράδειγμα, είναι ορθομοναδιαία ισοδύναμη με την πολλαπλασιαστική άλγεβρα του $H^\infty$, $\{T_\phi : \phi \in H^\infty\}$, μέσω του μετασχηματισμού Fourier. Επομένως η δεύτερη είναι ανακλαστική.

Αντιθέτως, θα δείξουμε ότι το ανακλαστικό κάλυμμα του υποχώρου $\mathfrak{T} = \{T_\phi : \phi \in L^\infty(\mathbb{T})\}$ είναι ο $\mathcal{B}(H^2)$. Αρκεί να δείξουμε ότι ο χώρος $\mathfrak{T}\eta$ είναι πυκνός στον $H^2$ για κάθε $\eta \in H^2$. Έστω, λοιπόν, $\eta \in H^2$. Τότε[2] υπάρχουν $u, g \in H^2$, έτσι ώστε

i. $u \in H^\infty$ και $|u| = 1$ σχεδόν παντού,

ii. $H^2 = [z^n g : n \geq 0]$,

iii. $\eta = ug$.

Επομένως,

$$\begin{aligned}\mathfrak{T}\eta &= \{T_\phi(\eta) : \phi \in L^\infty(\mathbb{T})\} \supseteq \{T_{\phi\bar{u}}(\eta) : \phi \in H^\infty\}\\ &= \{\phi\bar{u}ug : \phi \in H^\infty\} = \{\phi g : \phi \in H^\infty\} \supseteq \{z^n g : n \geq 0\}.\end{aligned}$$

Από τις ιδιότητες του $g$ όμως έχουμε ότι ο χώρος $\{z^n g : n \geq 0\}$ είναι πυκνός στον $H^2$ και η απόδειξη ολοκληρώθηκε.

Από τα παραπάνω προκύπτει επίσης ότι, αν $\mathcal{S}$ είναι ανακλαστικός υπόχωρος ενός $\mathcal{B}(H)$ και $p, q$ προβολές στον $\mathcal{B}(H)$, τότε δεν είναι απαραίτητο ότι ο $p\mathcal{S}q$ είναι επίσης ανακλαστικός στον $\mathcal{B}(pH, Hq)$. Πράγματι, έχουμε ότι η $\mathcal{M} = \{M_f : f \in L^\infty(\mathbb{T})\}$ είναι ανακλαστικός υπόχωρος του $\mathcal{B}(L^2(\mathbb{T}))$, επειδή είναι άλγεβρα von Neumann, ενώ ο χώρος των τελεστών Toeplitz $\mathfrak{T} = P\mathcal{M}P$, όπου $P$ η προβολή του $L^2(\mathbb{T})$ στον $H^2$, δεν είναι ανακλαστικός υπόχωρος του $\mathcal{B}(H^2)$.

Τέλος αξίζει να αναφέρουμε ότι ισχύει η εξής διχοτομία (βλέπε **[4]**). Αν $\mathcal{S}$ είναι ένας w*-κλειστός υπόχωρος του $\mathfrak{T}$ τότε είτε θα είναι ανακλαστικός είτε $\operatorname{Ref}\mathcal{S} = \mathcal{B}(H^2)$.

**Παράδειγμα Δ.** Ο Ptak στο **[40]** αποδεικνύει ότι αν $\mathcal{A}$ είναι μια ανακλαστική υπάλγεβρα ενός $\mathcal{B}(H_0)$, τότε η $\mathcal{A}\overline{\otimes}\mathcal{T}$ είναι ανακλαστική υπάλγεβρα της $\mathcal{B}(H_0 \otimes \ell^2(\mathbb{Z}_+))$. Εδώ θα παραλείψουμε την απόδειξη μιας και, όπως θα δούμε παρακάτω, αυτό το παράδειγμα αποτελεί ειδική περίπτωση ενός w*-ημισταυρωτού γινομένου. Παρακάτω δίνουμε τους αναγκαίους ορισμούς.

[2] χρησιμοποιώντας την inner-outer factorization.

### w*-Τανυστικό Γινόμενο

Έστω $\mathcal{A}$ υπάλγεβρα ενός $\mathcal{B}(H_1)$ και $\mathcal{B}$ υπάλγεβρα ενός $\mathcal{B}(H_2)$. Με $\mathcal{A}\overline{\otimes}\mathcal{B}$ συμβολίζουμε τη w*-κλειστή γραμμική θήκη στον $\mathcal{B}(H_1 \otimes H_2)$ των στοιχειωδών τανυστών τελεστών $a \otimes b$, με $a \in \mathcal{A}$, $b \in \mathcal{B}$. Η $\mathcal{A}\overline{\otimes}\mathcal{B}$ καλείται *άλγεβρα w*-τανυστικό γινόμενο των $\mathcal{A}$ και $\mathcal{B}$.* Στην περίπτωση που $\mathcal{A} = \mathcal{B}(H_1)$ και $\mathcal{B} = \mathcal{B}(H_2)$, τότε $\mathcal{B}(H_1)\overline{\otimes}\mathcal{B}(H_2) = \mathcal{B}(H_1 \otimes H_2)$.

Επίσης, αν $\phi \in \mathcal{B}_*(H_1)$ και $\omega \in \mathcal{B}_*(H_2)$, τότε ορίζεται $\phi\bar{\otimes}\omega \in \mathcal{B}_*(H_1 \otimes H_2)$ με

$$(\phi\bar{\otimes}\omega)(a \otimes b) = \phi(a)\omega(b),\ a \in \mathcal{B}(H_1), b \in \mathcal{B}(H_2).$$

Ακόμα, ο $\mathcal{B}_*(H_1 \otimes H_2)$ είναι ο norm-κλειστός υπόχωρος που παράγεται από το σύνολο των $\phi\bar{\otimes}\omega$ (βλέπε [**19**, Proposition 11.2.8]).

Τώρα σταθεροποιούμε ένα $\phi \in \mathcal{B}_*(H_1)$. Τότε υπάρχει μοναδική w*-συνεχής γραμμική απεικόνιση $R_\phi : \mathcal{B}(H_1)\overline{\otimes}\mathcal{B}(H_2) \to \mathcal{B}(H_2)$ ώστε

$$R_\phi(a \otimes b) = \phi(a)b,\ a \in \mathcal{B}(H_1), b \in \mathcal{B}(H_2).$$

Ομοίως για $\omega \in \mathcal{B}_*(H_2)$ υπάρχει μοναδική w*-συνεχής γραμμική απεικόνιση $L_\omega : \mathcal{B}(H_1)\overline{\otimes}\mathcal{B}(H_2) \to \mathcal{B}(H_1)$ ώστε

$$L_\omega(a \otimes b) = \omega(b)a,\ a \in \mathcal{B}(H_1), b \in \mathcal{B}(H_2).$$

Τέλος, παρατηρούμε ότι αν $T \in \operatorname{span}\{a \otimes b : a \in \mathcal{B}(H_1), b \in B(H_2)\}$, τότε $(\phi\bar{\otimes}\omega)(T) = \phi(L_\omega(T))$. Πράγματι, $(\phi\bar{\otimes}\omega)(a \otimes b) = \phi(a)\omega(b) = \phi(\omega(b)a) = \phi(L_\omega(b))$. Λόγω γραμμικότητας, έχουμε το συμπέρασμα. Ομοίως αποδεικνύεται ότι $(\phi\bar{\otimes}\omega)(T) = \omega(R_\phi(T))$ για κάθε $T \in \operatorname{span}\{a \otimes b : a \in \mathcal{B}(H_1), b \in B(H_2)\}$.

Τα παραπάνω γενικεύονται στην περίπτωση που θεωρήσουμε w*-τανυστικό γινόμενο δύο αλγεβρών von Neumann.

## 4.2 w*-Ημισταυρωτό γινόμενο

Σε αυτήν την ενότητα θα δώσουμε τον ορισμό του w*-ημισταυρωτού γινομένου και θα εξετάσουμε αν έχει τις ιδιότητες της ανακλαστικότητας και του δεύτερου μεταθέτη.

### Ορισμός - Χαρακτηρισμός

Έστω $\mathcal{A} \subseteq B(H_0)$ μια μοναδιαία υπάλγεβρα, κλειστή ως προς τη w*-τοπολογία, και $\beta : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$, ένας w*-συνεχής ενδομορφισμός με $\|\beta\| \leq 1$. Θέτουμε $H =$

$H_0 \otimes \ell^2(\mathbb{Z}_+)$ και $\pi := \widetilde{\mathrm{id}_{\mathcal{A}}}$, όπως στο παράδειγμα 2.3.2. Δηλαδή η $\pi$ είναι η (πιστή) αναπαράσταση της $\mathcal{A}$ στον $H$, με

$$\pi(b) = \sum_{n\geq 0} \beta^n(b) \otimes p_n,$$

όπου κάθε $p_n \in \mathcal{B}(\ell^2(\mathbb{Z}_+))$ είναι η προβολή στον υπόχωρο $[e_n]$. Παρατηρούμε ότι το άθροισμα συγκλίνει και στη w*-τοπολογία. Επομένως, ο τελεστής $\pi(b)$ ανήκει στην *άλγεβρα w*-τανυστικό γινόμενο* $\mathcal{A}\overline{\otimes}\mathcal{B}(\ell^2(\mathbb{Z}_+))$. Επίσης αναπαριστούμε την ημιομάδα $\mathbb{Z}_+$ στον $H$ μέσω των ισομετριών $S^n = \mathbf{1}_{H_o} \otimes s^n$, όπου $s$ είναι ο unilateral shift στον $\ell^2(\mathbb{Z}_+)$. Επομένως, $S^n \in \mathcal{A}\overline{\otimes}\mathcal{B}(\ell^2(\mathbb{Z}_+))$.

**Ορισμός 4.2.1** *Το w*-ημισταυρωτό γινόμενο* $\mathbb{Z}_+\overline{\times}_\beta\mathcal{A}$ *είναι η w*-κλειστή γραμμική θήκη των «αναλυτικών πολυωνύμων»* $\sum_{n=0}^k S^n\pi(b_n)$, $b_n \in \mathcal{A}$, $k \geq 0$.

Όπως έχουμε δει, το ζεύγος $(\pi, S)$ ικανοποιεί την αριστερά συναλλοίωτη σχέση (βλ. παράδειγμα 2.3.2)

$$\pi(b)S = S\pi(\beta(b)), \text{ για κάθε } b \in \mathcal{A}.$$

Άρα, το w*-ημισταυρωτό γινόμενο είναι μια μοναδιαία (μη-αυτοσυζυγής) υπάλγεβρα του $\mathcal{B}(H)$ και, εξ ορισμού, $\mathbb{Z}_+\overline{\times}_\beta\mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}\overline{\otimes}\mathcal{B}(\ell^2(\mathbb{Z}_+))$.

**Πρόταση 4.2.2** *Ένας τελεστής* $T \in \mathcal{B}(H)$ *ανήκει στο w*-ημισταυρωτό γινόμενο* $\mathbb{Z}_+\overline{\times}_\beta\mathcal{A}$ *αν, και μόνο αν,* $T_{\kappa,\lambda} \in \mathcal{A}$ *και* $G_m(T) = S^m\pi(T_{m,0})$, *για* $m \in \mathbb{Z}_+$, *ενώ* $G_m(T) = 0$ *για* $m < 0$. *Ισοδύναμα, όταν* $T_{\kappa,\lambda} \in \mathcal{A}$ *και* $\beta(T_{m+\lambda,\lambda}) = T_{m+\lambda+1,\lambda+1}$ *για κάθε* $m, \lambda \in \mathbb{Z}_+$, *ενώ* $T_{\kappa,\lambda} = 0$, *για* $\kappa < \lambda$.

*Απόδειξη.* Είναι εύκολο να παρατηρήσουμε ότι οι συνθήκες $G_m(T) = S^m\pi(T_{m,0})$ και $\beta(T_{m+\lambda,\lambda}) = T_{m+\lambda+1,\lambda+1}$ είναι ισοδύναμες. Επίσης, αν ένας τελεστής $T \in \mathcal{B}(H)$ ικανοποιεί $G_m(T) = S^m\pi(T_{m,0})$ για $m \in \mathbb{Z}_+$ και $G_m(T) = 0$ για $m < 0$, τότε $G_m(T) \in \mathbb{Z}_+\overline{\times}_\beta\mathcal{A}$ για κάθε $m$, και άρα από το Λήμμα Féjer, $T \in \mathbb{Z}_+\overline{\times}_\beta\mathcal{A}$.

Έστω τώρα $T \in \mathbb{Z}_+\overline{\times}_\beta\mathcal{A}$. Αν $T = \sum_{\kappa=0}^n S^\kappa\pi(b_\kappa)$ με $b_\kappa \in \mathcal{A}$, τότε $G_m(T) = S^m\pi(b_m)$, για $m \in \{0, 1, \ldots, n\}$ και $G_m(T) = 0$ διαφορετικά. Έστω ένα δίκτυο $A_i = \sum_{\kappa=0}^{n_i} S^\kappa\pi(b_{i,\kappa})$ αναλυτικών πολυωνύμων που συγκλίνει στον $T$ στην w*-τοπολογία. Εφόσον οι $G_m$ είναι w*-συνεχείς, έχουμε ότι $G_m(T) = \text{w*-}\lim_i G_m(A_i)$ για κάθε $m \in \mathbb{Z}$. Άρα $G_m(T) = 0$, για $m < 0$. Αν $m \geq 0$, τότε

$$T_{(m)} = (S^*)^m G_m(T) = \text{w*-}\lim_i (S^*)^m G_m(A_i) = \text{w*-}\lim_i \pi(b_{i,m}).$$

Έστω $\phi \in \mathcal{B}_*(H_0)$ και $k \in \mathbb{Z}_+$, τότε $\phi\overline{\otimes}\omega_{e_\kappa,e_\kappa} \in \mathcal{B}_*(H)$. Επομένως έχουμε ότι

$$\begin{aligned}\phi(T_{m+\kappa,\kappa}) &= (\phi\overline{\otimes}\omega_{e_\kappa,e_\kappa})\left(T_{(m)}\right) \\ &= \lim_i(\phi\overline{\otimes}\omega_{e_\kappa,e_\kappa})(\pi(b_{i,n})) = \lim_i \phi(\beta^k(b_{i,n})).\end{aligned}$$

Συνεπώς $T_{m+\kappa,\kappa} = \text{w*-}\lim_i \beta^\kappa(b_{i,m})$, για κάθε $\kappa \in \mathbb{Z}_+$, άρα $T_{m+\kappa,\kappa} \in \mathcal{A}$. Επίσης, εφόσον η $\beta$ είναι w*-συνεχής, παίρνουμε ότι

$$\beta^\kappa(T_{m,0}) = \text{w*-}\lim_i \beta^\kappa(b_{i,m}) = T_{m+\kappa,\kappa},$$

για κάθε $\kappa \in \mathbb{Z}_+$. Επομένως, έχουμε ότι $G_m(T) = S^m\pi(T_{m,o})$, για κάθε $m \geq 0$. □

**Σχόλιο 4.2.3** Παρατηρούμε ότι για κάθε τελεστή $U_r$, όπως αυτοί ορίζονται πριν από το λήμμα 4.1.13, ο μορφισμός $ad_{U_r}$ αφήνει την $\mathbb{Z}_+\overline{\times}_\beta\mathcal{A}$ αναλλοίωτη. Πράγματι, είναι φανερό ότι

$$ad_{U_r}(\pi(b)) = \pi(b) \text{ και } ad_{U_r}(S) = e^{ir}S.$$

Επομένως, αφήνει αναλλοίωτη και την ανακλαστική θήκη της. Ομοίως και οι συντελεστές Fourier $G_m(\cdot)$.

Στο εξής υποθέτουμε ότι ο ενδομορφισμός $\beta$ επάγεται από έναν ορθομοναδιαίο $w \in \mathcal{B}(H_0)$, δηλαδή $\beta(b) = wbw^*$, για κάθε $b \in \mathcal{A}$. Ορίζουμε $\rho(b) = b\otimes\mathbf{1}_{\ell^2(\mathbb{Z}_+)}$, για $b \in \mathcal{A}$ και $W = w^*\otimes s$. Τότε το ζεύγος $(\rho, W)$ ικανοποιεί την αριστερή συναλλοίωτη σχέση και, άρα, ορίζει ένα w*-ημισταυρωτό γινόμενο.

**Ορισμός 4.2.4** *Το w*-ημισταυρωτό γινόμενο $\mathbb{Z}_+\overline{\times}_w\mathcal{A}$ είναι η w*-κλειστή γραμμική θήκη των «αναλυτικών πολυωνύμων» $\sum_{n=0}^k W^n\rho(b_n)$, $b_n \in \mathcal{A}$, $k \geq 0$.*

Εφόσον το ζεύγος $(\rho, W)$ είναι left covariant το $\mathbb{Z}_+\overline{\times}_w\mathcal{A}$ είναι μοναδιαία (μη-αυτοσυζυγής) υπάλγεβρα του $\mathcal{B}(H)$ και, εξ ορισμού, $\mathbb{Z}_+\overline{\times}_w\mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}\overline{\otimes}\mathcal{B}(\ell^2(\mathbb{Z}_+))$.

**Σχόλιο 4.2.5** Είναι εύκολο να δούμε ότι η $\mathbb{Z}_+\overline{\times}_w\mathcal{A}$ είναι ορθομοναδιαία ισοδύναμη με την $\mathbb{Z}_+\overline{\times}_\beta\mathcal{A}$, μέσω του τελεστή $Q = \sum_{n\geq 0} w^{-n}\otimes p_n$,. Πράγματι, ελέγχεται ότι

$$ad_Q(\pi(b)) = \rho(b) \text{ και } ad_Q(S) = W.$$

Χρησιμοποιώντας τον ορθομοναδιαίο τελεστή $Q$ και την πρόταση 4.2.2 έχουμε τον εξής χαρακτηρισμό για την $\mathbb{Z}_+\overline{\times}_w\mathcal{A}$.

**Πρόταση 4.2.6** *Ένας τελεστής $T \in \mathcal{B}(H)$ ανήκει στην $\mathbb{Z}_+\overline{\times}_w\mathcal{A}$ αν, και μόνο αν, $G_m(T) = W^m\rho(b_m)$, για κάποιο $b_m \in \mathcal{A}$ όταν $m \in \mathbb{Z}_+$ και $G_m(T) = 0$ όταν $m < 0$. Ισοδύναμα, όταν $T_{m+\lambda,\lambda} = (w^*)^m b_m$ για κάθε $m, \lambda \in \mathbb{Z}_+$ και $T_{\kappa,\lambda} = 0$ για $\kappa < \lambda$.* $\square$

Η σχέση μεταξύ της άλγεβρας w*-τανυστικό γινόμενο $\mathcal{A}\overline{\otimes}\mathcal{T}$ και της $\mathbb{Z}_+ \times_w \mathcal{A}$ περιγράφεται στο επόμενο θεώρημα. Υπενθυμίζουμε ότι η $\mathcal{T}$ είναι άλγεβρα των αναλυτικών τελεστών Toeplitz.

**Θεώρημα 4.2.7**

1. *$\mathcal{A}\overline{\otimes}\mathcal{T} = \mathbb{Z}_+\overline{\times}_w\mathcal{A}$ αν, και μόνο αν, $w, w^* \in \mathcal{A}$.*
2. *$\mathcal{A}\overline{\otimes}\mathcal{T} \subsetneq \mathbb{Z}_+\overline{\times}_w\mathcal{A}$ αν, και μόνο αν, $w^* \notin \mathcal{A}$, $w \in \mathcal{A}$.*
3. *$\mathbb{Z}_+\overline{\times}_w\mathcal{A} \subsetneq \mathcal{A}\overline{\otimes}\mathcal{T}$ αν, και μόνο αν, $w \notin \mathcal{A}$, $w^* \in \mathcal{A}$.*
4. *$(\mathbb{Z}_+\overline{\times}_w\mathcal{A}) \cap (\mathcal{A}\overline{\otimes}\mathcal{T}) = \rho(\mathcal{A})$, αν, και μόνο αν, $(w^n\mathcal{A}) \cap \mathcal{A} = \{0\}$, για κάθε $n \in \mathbb{Z}_+$.*

*Απόδειξη.* **1.** Αν $w, w^* \in \mathcal{A}$, τότε έχουμε ότι

$$\mathbf{1}_{H_0} \otimes s = (w \otimes \mathbf{1}_{\ell^2(\mathbb{Z}_+)})(w^* \otimes s) \text{ και } b \otimes \mathbf{1}_{\ell^2(\mathbb{Z}_+)} = \rho(b).$$

Επομένως $\mathcal{A}\overline{\otimes}\mathcal{T} \subseteq \mathbb{Z}_+\overline{\times}_w\mathcal{A}$. Επίσης,

$$W = w^* \otimes s = (w^* \otimes \mathbf{1}_{\ell^2(\mathbb{Z}_+)})(\mathbf{1}_{H_0} \otimes s)(w^* \otimes \mathbf{1}_{\ell^2(\mathbb{Z}_+)}) \text{ και } \rho(b) = b \otimes \mathbf{1}_{\ell^2(\mathbb{Z}_+)}.$$

Άρα $\mathbb{Z}_+\overline{\times}_w\mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}\overline{\otimes}\mathcal{T}$.

Για το αντίστροφο, αν $\mathcal{A}\overline{\otimes}\mathcal{T} = \mathbb{Z}_+\overline{\times}_w\mathcal{A}$, τότε $w^* \otimes s \in \mathcal{A}\overline{\otimes}\mathcal{T}$. Έστω $A_i \in \mathrm{span}\{x \otimes y : x \in \mathcal{A}, y \in \mathcal{T}\}$, με w*-$\lim_i A_i = w^* \otimes s$. Έστω $\phi \in \mathcal{B}(H_0)$. Τότε

$$(\phi\bar{\otimes}\omega_{e_0,e_1})(w^* \otimes s) = \lim_i(\phi\bar{\otimes}\omega_{e_0,e_1})(A_i).$$

Όμως,

$$(\phi\bar{\otimes}\omega_{e_0,e_1})(w^* \otimes s) = \phi(w^*)\omega_{e_0,e_1}(s) = \phi(w^*).$$

Από την άλλη, $(\phi\bar{\otimes}\omega_{e_0,e_1})(A_i) = \phi(L_\omega(A_i))$. Επομένως,

$$\phi(w^*) = \lim_i \phi(L_\omega(A_i)),$$

για κάθε $\phi \in \mathcal{B}(H_0)$. Εφόσον οι $L_\omega(A_i) \in \mathcal{A}$ έχουμε ότι $w^* \in \mathcal{A}$. Επιπλέον, $\mathbf{1}_{H_0} \otimes s \in \mathbb{Z}_+\overline{\times}_w\mathcal{A}$, επομένως $G_1(\mathbf{1}_{H_0} \otimes s) \in \mathbb{Z}_+\overline{\times}_w\mathcal{A}$. Τότε, από την πρόταση

χαρακτηρισμού 4.2.6, $G_1(\mathbf{1}_{H_0} \otimes s) = (\mathbf{1}_{H_0} \otimes s)(w^* b \otimes \mathbf{1}_{\ell^2(\mathbb{Z}_+)})$, για κάποιο $b \in \mathcal{A}$. Συνεπώς $\mathbf{1}_{H_0} \otimes s = (\mathbf{1}_{H_0} \otimes s)(w^* b \otimes \mathbf{1}_{\ell^2(\mathbb{Z}_+)})$, άρα $\mathbf{1}_{H_0} = w^* b$. Επομένως $w = b \in \mathcal{A}$.
**2–3.** Από την παραπάνω απόδειξη επάγονται τα **2.** και **3.**
**4.** Εφόσον ο $w$ είναι ορθομοναδιαίος και ο $ad_w$ ορίζει έναν ενδομορφισμό της $\mathcal{A}$, έχουμε ότι η συνθήκη $w^n \mathcal{A} \cap \mathcal{A} = \{0\}$, για κάθε $n \in \mathbb{Z}_+$ είναι ισοδύναμη με την $(w^*)^n \mathcal{A} \cap \mathcal{A} = \{0\}$ (και την $\mathcal{A} \cap \mathcal{A}(w^*)^n = \{0\}$), για κάθε $n \in \mathbb{Z}_+$.
Τώρα, αν $w^n \mathcal{A} \cap \mathcal{A} \neq \{0\}$, για κάποιο $n \in \mathbb{Z}_+$, τότε υπάρχει ένα $0 \neq b \in \mathcal{A}$ έτσι ώστε $(w^*)^n b \in \mathcal{A}$. Άρα, ο $(w^*)^n b \otimes s^n$ ανήκει στην τομή $(\mathbb{Z}_+ \overline{\times}_w \mathcal{A}) \cap (\mathcal{A} \overline{\otimes} \mathcal{T})$, και δεν ανήκει στην $\rho(\mathcal{A})$.

Για το αντίστροφο, έστω $T$ στην τομή που δεν ανήκει στην $\rho(\mathcal{A})$. Τότε υπάρχει ένα $m > 0$, έτσι ώστε $G_m(T) \neq 0$ και βέβαια ο $G_m(T)$ ανήκει επίσης στην τομή[3]. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει ένα $b_m \in \mathcal{A}$ έτσι ώστε $G_m(T) = (w^*)^m b_m \otimes s^m \in \mathcal{A} \overline{\otimes} \mathcal{T}$, άρα $(w^*)^m b_m \in \mathcal{A}$, που είναι άτοπο. □

Είναι εύκολο να δούμε ότι, όταν $(w^n \mathcal{A}) \cap \mathcal{A} = \{0\}$ για κάθε $n \in \mathbb{Z}_+$, τότε $w, w^* \notin \mathcal{A}$, όμως το αντίστροφο δεν ισχύει.

**Παράδειγμα 4.2.8** Έστω η πολλαπλασιαστική άλγεβρα του $L^\infty(\mathbb{T})$, η οποία δρα στον $L^2(\mathbb{T})$, και $\beta(f)(z) = f(\lambda z)$, όπου $\lambda = e^{\frac{2\pi i}{n}}$ η πρωταρχική $n$-οστή ρίζα της μονάδας. Τότε η $\beta$ επάγεται από τον ορθομοναδιαίο $w \in \mathcal{B}(L^2(\mathbb{T}))$, με $(w(g))(z) = g(\lambda z)$. Τότε $w^{mn} = I_{H_0}$, για κάθε $m \in \mathbb{Z}_+$, άρα $w^{mn} \mathcal{A} \cap \mathcal{A} = \mathcal{A}$. Σε αυτήν την περίπτωση, η τομή $(\mathbb{Z}_+ \overline{\times}_w \mathcal{A}) \cap (\mathcal{A} \overline{\otimes} \mathcal{T})$ περιέχει τη w*-κλειστή άλγεβρα που παράγεται από τους $\sum_{m=0}^k W^{mn} \rho(b_m)$, $b_m \in \mathcal{A}$, και άρα είναι γνήσια μεγαλύτερη από την $\rho(\mathcal{A})$.

### Ανακλαστική Θήκη

Το επόμενο λήμμα θα γενικευθεί στο θεώρημα 4.2.12.

**Λήμμα 4.2.9** *Το w*-ημισταυρωτό γινόμενο $\mathbb{Z}_+ \overline{\times}_w \mathcal{B}(H_0)$ είναι ανακλαστικός υπόχωρος του $\mathcal{B}(H)$, για κάθε ορθομοναδιαίο $w \in \mathcal{B}(H_0)$.*

*Απόδειξη.* Έστω $T \in \mathrm{Ref}(\mathbb{Z}_+ \overline{\times}_w \mathcal{B}(H_0))$. Από το σχόλιο 4.2.3 κάθε $G_m(T)$ ανήκει στην ανακλαστική θήκη του w*-ημισταυρωτού γινομένου. Για κάθε $\kappa < \lambda$ και $\xi, \eta \in H_0$ υπάρχει μια ακολουθία $A_n \in \mathbb{Z}_+ \overline{\times}_w \mathcal{B}(H_0)$ έτσι ώστε

$$\langle T(\xi \otimes e_\lambda), \eta \otimes e_\kappa \rangle = \lim_n \langle A_n(\xi \otimes e_\lambda), \eta \otimes e_\kappa \rangle .$$

[3] Η τομή δυο w*-κλειστών αλγεβρών είναι επίσης w*-κλειστή άλγεβρα.

Άρα, $\langle T_{\kappa,\lambda}\xi, \eta\rangle = \lim_n \langle (A_n)_{\kappa,\lambda}\xi, \eta\rangle = 0$, εφόσον κάθε $(A_n)_{\kappa,\lambda} = 0$, για $\kappa < \lambda$. Επομένως $G_m(T) = 0$ για κάθε $m < 0$. Τώρα, σταθεροποιούμε ένα $m \in \mathbb{Z}_+$ και θεωρούμε $\xi \in H_0$, και $g_r = \sum_n r^n e_n$, $0 \leq r < 1$. Θέτουμε $\mathcal{F} = \overline{[(b\xi) \otimes g_r : b \in \mathcal{B}(H_0)]}$. Επειδή $(w^* \otimes s)(\mathcal{F}) \subseteq \mathcal{F}$ και $(b \otimes \mathbf{1}_{\ell^2(\mathbb{Z}_+)})(\mathcal{F}) \subseteq \mathcal{F}$, ο υπόχωρος $\mathcal{F}$ είναι $(\mathbb{Z}_+ \overline{\times}_w \mathcal{B}(H_0))^*$-αναλλοίωτος, άρα $G_m(T)^*$-αναλλοίωτος. Εφόσον $\xi \otimes g_r \in \mathcal{F}$, υπάρχει μια ακολουθία $(b_n)$ στον $\mathcal{B}(H_0)$ έτσι ώστε $G_m(T)^*(\xi \otimes g_r) = \lim_n (b_n\xi) \otimes g_r$. Συνεπώς,

$$\sum_\kappa r^{m+\kappa} T^*_{m+\kappa,\kappa}\xi \otimes e_\kappa = \lim_n (b_n\xi) \otimes g_r$$

(βλέπε και τη σχέση 4.1 του Παραδείγματος Β.). Παίρνοντας εσωτερικό γινόμενο με $\eta \otimes e_\kappa$, όπου $\eta \in H_0$ και $\kappa \geq 0$, έχουμε ότι

$$r^{m+\kappa} \left\langle T^*_{m+\kappa,\kappa}\xi, \eta\right\rangle = \lim_n r^\kappa \langle b_n\xi, \eta\rangle .$$

Επομένως,

$$r^m \left\langle T^*_{m+\kappa,\kappa}\xi, \eta\right\rangle = \lim_n \langle b_n\xi, \eta\rangle = r^m \left\langle T^*_{m,0}\xi, \eta\right\rangle ,$$

για κάθε $\eta$. Άρα, $T^*_{m+\kappa,\kappa}\xi = T^*_{m,0}\xi$, για τυχαίο $\xi \in H_0$. Συνεπώς $T_{m+\kappa,\kappa} = T_{m,0}$ για κάθε $\kappa \in \mathbb{Z}_+$. Επομένως, $G_m(T) \in \mathcal{B}(H_0)\overline{\otimes}\mathcal{T}$, που ταυτίζεται με την $\mathbb{Z}_+ \overline{\times}_w \mathcal{B}(H_0)$ εφόσον $w \in \mathcal{B}(H_0)$. □

Έστω $\mathcal{S}$ ένας w*-κλειστός υπόχωρος του $\mathcal{B}(H)$. Θα λέμε ότι ο $\mathcal{S}$ είναι *$G$-αναλλοίωτος* αν $G_m(\mathcal{S}) \subseteq \mathcal{S}$ για κάθε $m \in \mathbb{Z}$. Αν, ειδικότερα, ο $\mathcal{S}$ είναι w*-κλειστός υπόχωρος του $\mathbb{Z}_+ \overline{\times}_w \mathcal{B}(H_0)$, τότε $G_m(\mathcal{S}) = 0$, για κάθε $m < 0$. Στην επόμενη πρόταση αποδεικνύουμε ότι σε κάθε τέτοιο $\mathcal{S}$ μπορούμε να αντιστοιχίζουμε μια ακολουθία $(\mathcal{S}_m)_{m \geq 0}$ από w*-κλειστούς υπόχωρους του $\mathcal{B}(H_0)$, και το ανάποδο.

**Πρόταση 4.2.10** *Ένας $w^*$-κλειστός υπόχωρος $\mathcal{S}$ του $\mathcal{B}(H)$ είναι $G$-αναλλοίωτος υπόχωρος του $\mathbb{Z}_+ \overline{\times}_w \mathcal{B}(H_0)$ αν, και μόνο αν, είναι η $w^*$-κλειστή γραμμική θήκη των «αναλυτικών πολυωνύμων» $\sum_{n=0}^k W^n \rho(x_n)$, $x_n \in \mathcal{S}_n, k \in \mathbb{Z}_+$, όπου $\mathcal{S}_n$ είναι $w^*$-κλειστοί υπόχωροι του $\mathcal{B}(H_0)$.*

*Απόδειξη.* Έστω $\mathcal{S}$ ένας w*-κλειστός υπόχωρος όπως στην εκφώνηση. Θα δείξουμε ότι είναι $G$-αναλλοίωτος. Έστω $A \in \mathcal{S}$, τότε $A = \text{w*-}\lim_i A_i$, όπου $A_i = \sum_{\kappa=0}^{n_i} W^\kappa \rho(x_{\kappa,i})$, με $x_{\kappa,i} \in \mathcal{S}_\kappa$. Τότε $A \in \mathbb{Z}_+ \overline{\times}_w \mathcal{B}(H_0)$ και $G_m(A) = \text{w*-}\lim_i G_m(A_i) = \text{w*-}\lim_i W^m \rho(x_{m,i})$. Άρα, $w^m A_{m,0} = \text{w*-}\lim_i x_{m,i} \in \mathcal{S}_m$. Επομένως έχουμε ότι $G_m(A) = W^m \rho(w^m A_{m,0}) \in \mathcal{S}$.

Για το αντίστροφο, έστω $\mathcal{S}$ ένας $G$-αναλλοίωτος w*-κλειστός υπόχωρος του $\mathbb{Z}_+\overline{\times}_w\mathcal{B}(H_0)$ και έστω $\mathcal{S}_m = \{w^m T_{m,0} : T \in \mathcal{S}\}$, για κάθε $m \geq 0$. Τότε κάθε $\mathcal{S}_m$ είναι ένας w*-κλειστός υπόχωρος του $\mathcal{B}(H_0)$. Πράγματι, έστω $x = \text{w*-}\lim_i w^m(T_i)_{m,0}$, για $T_i \in S$. Τότε $\rho((w^*)^m x) = \text{w*-}\lim_i \rho((T_i)_{m,0})$, άρα

$$W^m \rho(x) = \text{w*-}\lim_i S^m \rho((T_i)_{m,0}) = \text{w*-}\lim_i G_m(T_i),$$

εφόσον $T_i \in \mathbb{Z}_+\overline{\times}_w\mathcal{B}(H_0)$. Εφόσον ο $\mathcal{S}$ είναι $G$-αναλλοίωτος, έχουμε ότι $W^m\rho(x) \in \mathcal{S}$, επομένως $x = w^m(S^m\rho(x))_{m,0} \in \mathcal{S}_m$. Εφαρμόζοντας το Λήμμα Féjer και την πρόταση 4.2.6, έπεται το ευθύ. □

**Θεώρημα 4.2.11** *Έστω $\mathcal{S}$ ένας $G$-αναλλοίωτος $w^*$-κλειστός υπόχωρος του $\mathbb{Z}_+\overline{\times}_w\mathcal{B}(H_0)$ και $(\mathcal{S}_m)_{m\geq 0}$ η ακολουθία που αντιστοιχεί σε αυτόν. Αν κάθε $\mathcal{S}_m$ είναι ανακλαστικός υπόχωρος του $\mathcal{B}(H_0)$, τότε ο $\mathcal{S}$ είναι ανακλαστικός υπόχωρος του $\mathcal{B}(H)$.*

*Απόδειξη.* Από το λήμμα 4.2.9, $\mathrm{Ref}(\mathcal{S}) \subseteq \mathrm{Ref}(\mathbb{Z}_+\overline{\times}_w\mathcal{B}(H_0)) = \mathbb{Z}_+\overline{\times}_w\mathcal{B}(H_0)$. Άρα, για κάθε $T$ στην ανακλαστική θήκη του $\mathcal{S}$ και κάθε $m, \lambda \in \mathbb{Z}_+$, έχουμε ότι $T_{m+\lambda,\lambda} = (w^*)^m b_m$, όπου $b_m \in \mathcal{B}(H_0)$. Συνεπώς, αρκεί να αποδείξουμε ότι $b_m \in \mathcal{S}_m$. Εφόσον $T \in \mathrm{Ref}(\mathcal{S})$, για κάθε $\xi, \eta \in H_0$ υπάρχει μια ακολουθία $(A_n)$ στον $\mathcal{S}$ έτσι ώστε $T(\xi \otimes e_\lambda) = \lim_n A_n(\xi \otimes e_\lambda)$ και άρα

$$\langle T(\xi \otimes e_\lambda), (w^*)^m \eta \otimes e_{m+\lambda}\rangle = \lim_n \langle A_n(\xi \otimes e_\lambda), (w^*)^m \eta \otimes e_{m+\lambda}\rangle .$$

Συνεπώς $\langle T_{m+\lambda,\lambda}\xi, (w^*)^m\eta\rangle = \lim_n \langle (A_n)_{m+\lambda,\lambda}\xi, (w^*)^m\eta\rangle$. Από την άλλη, $\langle b_m\xi, \eta\rangle = \langle T_{m+\lambda,\lambda}\xi, (w^*)^m\eta\rangle$. Εφόσον κάθε $A_n \in \mathcal{S}$, έχουμε ότι $(A_n)_{m+\lambda,\lambda} = (w^*)^m b_{n,m}$ για κάποια $b_{n,m} \in \mathcal{S}_m$. Άρα, $\langle b_m\xi, \eta\rangle = \lim_n \langle b_{n,m}\xi, \eta\rangle$, το οποίο δίνει ότι $b_m \in \mathrm{Ref}(\mathcal{S}_m) = \mathcal{S}_m$. □

**Θεώρημα 4.2.12** *Αν $\mathcal{A}$ είναι ανακλαστική άλγεβρα, τότε η $\mathbb{Z}_+\overline{\times}_w\mathcal{A}$ είναι ανακλαστική. Αν, επιπλέον, η $\mathcal{A}$ είναι κληρονομικά ανακλαστική, τότε κάθε $G$-αναλλοίωτος $w^*$-κλειστός υπόχωρος του $\mathbb{Z}_+\overline{\times}_w\mathcal{A}$ είναι ανακλαστικός.*

*Απόδειξη.* Η άλγεβρα $\mathbb{Z}_+\overline{\times}_w\mathcal{A}$ αντιστοιχεί στην σταθερή ακολουθία $(\mathcal{A})_{m\geq 0}$. Επομένως είναι ανακλαστική από το προηγούμενο θεώρημα.

Έστω τώρα ένας $G$-αναλλοίωτος w*-κλειστός υπόχωρος του $\mathbb{Z}_+\overline{\times}_w\mathcal{A}$ και $(\mathcal{S}_m)_{m\geq 0}$ η ακολουθία που αντιστοιχεί σε αυτόν. Εφόσον η $\mathcal{A}$ είναι κληρονομικά ανακλαστική κάθε $\mathcal{S}_m$ είναι ανακλαστικός υπόχωρος της $\mathcal{A}$, και άρα από το προηγούμενο θεώρημα ο $\mathcal{S}$ είναι ανακλαστικός. □

### Εφαρμογές

Το θεώρημα 4.2.12 ενοποιεί μερικά γνωστά αποτελέσματα. Στο παράρτημα υπάρχουν αποδείξεις για τους ισχυρισμούς που χρησιμοποιούνται στις εφαρμογές *ΣΤ.* και *Θ.*

**Εφαρμογές 4.2.13** *Α.* Έστω $\mathcal{A}$ μια ανακλαστική υπάλγεβρα του $M_n(\mathbb{C})$ και ένας ορθομοναδιαίος $w \in M_n(\mathbb{C})$ έτσι ώστε $w\mathcal{A}w^* \subseteq \mathcal{A}$. Τότε η $\mathbb{Z}_+\overline{\times}_w\mathcal{A}$ είναι ανακλαστική. Παρατηρούμε ότι $\mathbb{Z}_+\overline{\times}_w\mathcal{A} = \mathcal{T}$ για $n = 1$ και $w = I_{H_0}$.

*Β.* Ειδικότερα η $\mathcal{A}\overline{\otimes}\mathcal{T}$ είναι η $\mathbb{Z}_+\overline{\times}_{I_{H_0}}\mathcal{A}$. Άρα, όταν η $\mathcal{A}$ είναι ανακλαστική, τότε η $\mathcal{A}\overline{\otimes}\mathcal{T}$ είναι ανακλαστική (βλ. [**40**, Theorem 2]).

*Γ.* Έστω $\mathcal{M}$ μια μεγιστική αβελιανή αυτοσυζυγής άλγεβρα (m.a.s.a.) και $\beta$ ένας *-αυτομορφισμός, τότε η $\mathbb{Z}_+\overline{\times}_\beta\mathcal{M}$ είναι ανακλαστική, εφόσον κάθε *-αυτομορφισμός μιας m.a.s.a. επάγεται από ορθομοναδιαίο. Για παράδειγμα, έστω $\mathcal{M}$ η πολλαπλασιαστική άλγεβρα της $L^\infty(\mathbb{T})$, η οποία δρα στον $L^2(\mathbb{T})$, και $\beta$ η στροφή κατά $\theta \in \mathbb{R}$. Επίσης, η $\mathbb{Z}_+\overline{\times}_\beta\mathcal{A}$ είναι ανακλαστική όταν η $\mathcal{A}$ είναι μια $\beta$-αναλλοίωτη w*-κλειστή υπάλγεβρα της $\mathcal{M}$, εφόσον η $\mathcal{M}$ είναι κληρονομικά ανακλαστική (βλέπε [**28**]).

*Δ.* Έστω η $\mathcal{T}$ η οποία δρα στον $H^2(\mathbb{T})$ και $\beta$ η στροφή κατά $\theta \in \mathbb{R}$, όπως στο προηγούμενο παράδειγμα. Τότε η $\mathcal{T}$ είναι ανακλαστική και άρα η $\mathbb{Z}_+\overline{\times}_\beta\mathcal{T}$ είναι ανακλαστική υπάλγεβρα του $\mathcal{B}(H^2(\mathbb{T}))\overline{\otimes}\mathcal{B}(\ell^2(\mathbb{Z}_+))$.

*Ε.* Αν η $\mathcal{A}$ είναι nest άλγεβρα και η $\beta$ είναι ένας ισομετρικός αυτομορφισμός, τότε επάγεται από έναν ορθομοναδιαίο τελεστή (βλέπε [**10**]). Άρα, η $\mathbb{Z}_+\overline{\times}_\beta\mathcal{A}$ είναι ανακλαστική.

*ΣΤ.* Έστω $\mathcal{C}$ μοναδιαία $C^*$-άλγεβρα και $\alpha : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ μοναδιαίος *-μορφισμός. Έστω $(H_0, \sigma)$ πιστή αναπαράσταση της $\mathcal{C}$ έτσι ώστε ο *-μορφισμός

$$\beta : \sigma(\mathcal{C}) \to \sigma(\mathcal{C}) : \sigma(x) \mapsto \beta(\sigma(x)) = \sigma(\alpha(x))$$

να επάγεται από έναν ορθομοναδιαίο $w \in \mathcal{B}(H_0)$. Τότε η επαγόμενη αναπαράσταση $(S \times \sigma)$ είναι πιστή στον $\mathbb{Z}_+ \times_\alpha \mathcal{C}$. Επομένως η $\overline{(S \times \sigma)(\mathbb{Z}_+ \times_\alpha \mathcal{C})}^{\omega^*}$ είναι η w*-κλειστή γραμμική θήκη των αναλυτικών πολυωνύμων $\sum_{n=0}^k S^n\pi(\sigma(x))$, και είναι ορθομοναδιαία ισοδύναμη με την άλγεβρα

$$\mathfrak{C} := \overline{\operatorname{span}\{\rho(\sigma(x)), W^n : x \in \mathcal{C}, n \in \mathbb{Z}_+\}}^{\omega^*},$$

μέσω του $Q = \sum_{n\geq 0} w^{-n} \otimes p_n$. Η $\mathfrak{C}$ είναι ακριβώς το w*-ημισταυρωτό γινόμενο $\mathbb{Z}_+\overline{\times}_w\overline{\sigma(\mathcal{C})}^{\omega^*}$. Επομένως, η $\overline{(S \times \sigma)(\mathbb{Z}_+ \times_\alpha \mathcal{C})}^{\omega^*}$ είναι ανακλαστική.

Ειδικότερα, έστω $K$ ένας συμπαγής χώρος Hausdorff, $\mu$ θετικό, κανονικό μέτρο Borel στον $K$ και $\sigma : C(K) \to B(L^2(K,\mu)) : f \mapsto M_f$. Έστω $\phi$ ένας ομοιομορφισμός του $K$, έτσι ώστε ο $\phi$ και ο $\phi^{-1}$ να διατηρούν τα $\mu$-μηδενικά σύνολα, και έστω $\alpha(f) = f \circ \phi$. Τότε η απεικόνιση $M_f \to M_{f\circ\phi}$ επεκτείνεται σε έναν *-αυτομορφισμό του $L^\infty(K,\mu)$, επομένως επάγεται από έναν ορθομοναδιαίο τελεστή. Άρα η $\overline{(S \times \sigma)(\mathbb{Z}_+ \times_\alpha C(K))}^{w^*}$ είναι ανακλαστική.

*Θ.* Έστω $(\mathcal{M},\tau)$ μια von Neumann άλγεβρα εφοδιασμένη με ένα πιστό, κανονικό, tracial state $\tau$ και έστω $L^2(\mathcal{M},\tau)$ ο χώρος Hilbert που ορίζει το ζεύγος $(\mathcal{M},\tau)$. Τότε Η $\mathcal{M}$ δρα στον $L^2(\mathcal{M},\tau)$ μέσω του αριστερού πολλαπλασιασμού. Έστω $\beta : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ ένας *-αυτομορφισμός που διατηρεί το ίχνος. Τότε η $\beta$ επάγεται από έναν ορθομοναδιαίο τελεστή και μπορούμε να δούμε ότι το w*-ημισταυρωτό γινόμενο $\mathbb{Z}_+\overline{\times}_w\mathcal{M}$ ταυτίζεται με το συζυγή χώρο του analytic semicrossed product που ορίζεται στα **[29]** και **[35]**. Τότε από το θεώρημα 4.2.12 προκύπτει το [**35**, Proposition 4.5] για $p = 2$.

### Η ιδιότητα του δεύτερου μεταθέτη

Ολοκληρώνουμε την ανάλυση του w*-ημισταυρωτού γινομένου $\mathbb{Z}_+\overline{\times}_w\mathcal{A}$ με τον προσδιορισμό του μεταθέτη του. Γνωρίζουμε ότι $U_r(\mathbb{Z}_+\overline{\times}_w\mathcal{A})U_r^* = \mathbb{Z}_+\overline{\times}_w\mathcal{A}$, για κάθε $r \in [0,2\pi]$. Επομένως, $U_r(\mathbb{Z}_+\overline{\times}_w\mathcal{A})'U_r^* = (\mathbb{Z}_+\overline{\times}_w\mathcal{A})'$. Άρα, ένας τελεστής $T$ ανήκει στο $(\mathbb{Z}_+\overline{\times}_w\mathcal{A})'$ αν, και μόνο αν, $G_m(T) \in (\mathbb{Z}_+\overline{\times}_w\mathcal{A})'$, για κάθε $m \in \mathbb{Z}$. Τώρα, υπενθυμίζουμε ότι $w\mathcal{A}w^* \subseteq \mathcal{A}$, επομένως $w^*\mathcal{A}'w \subseteq \mathcal{A}'$. Άρα, μπορούμε να ορίσουμε το w*-ημισταυρωτό γινόμενο $\mathbb{Z}_+\overline{\times}_\gamma\mathcal{A}'$, όπου $\gamma \equiv ad_{w^*} : \mathcal{A}' \to \mathcal{A}'$.

**Θεώρημα 4.2.14** *Αν* $\gamma \equiv ad_{w^*}$, *τότε* $(\mathbb{Z}_+\overline{\times}_w\mathcal{A})' = \mathbb{Z}_+\overline{\times}_\gamma\mathcal{A}'$.

*Απόδειξη.* Είναι εύκολο να δούμε ότι $T \in (\mathbb{Z}_+\overline{\times}_w\mathcal{A})'$ αν, και μόνο αν, $T \in \{b \otimes \mathbf{1}, w^*\otimes s : b \in \mathcal{A}\}'$. Παρατηρούμε επίσης ότι $S \in (\mathbb{Z}_+\overline{\times}_w\mathcal{A})'$. Έστω $T \in (\mathbb{Z}_+\overline{\times}_w\mathcal{A})'$, τότε για $m \geq 0$ και $b \in \mathcal{A}$, $n \geq 0$,

$$\begin{aligned} G_m(T)(b\otimes\mathbf{1}) = (b\otimes\mathbf{1})G_m(T) \quad &\text{και} \quad G_m(T)(w^*\otimes s) = (w^*\otimes s)G_m(T), \\ \text{επομένως,} \quad T_{m+n,n}b = bT_{m+n,n} \quad &\text{και} \quad T_{m+n+1,n+1}(w^*)^n = (w^*)^nT_{m+n,n}, \\ \text{άρα,} \quad T_{m+n,n} \in \mathcal{A}' \quad &\text{και} \quad T_{m+n,n} = \gamma^n(T_{m,0}). \end{aligned}$$

Συνεπώς, αν θέσουμε $\pi'(T_{m,0}) = \sum_{n\geq 0}\gamma^n(T_{m,0}) \otimes p_n$, έχουμε ότι $G_m(T) = S^m\pi'(T_{m,0})$, για $m \geq 0$.

Τώρα, έστω $m < 0$, τότε $G_m(T) = T_{(m)}(S^*)^{-m}$. Εφόσον $S \in (\mathbb{Z}_+\overline{\times}_w\mathcal{A})'$, έχουμε ότι $T_{(m)} = G_m(T)S^{-m} \in (\mathbb{Z}_+\overline{\times}_w\mathcal{A})'$. Επομένως, $G_0(T_{(m)}) = T_{(m)} \in$

$(\mathbb{Z}_+\overline{\times}_w\mathcal{A})'$ και άρα, από όσα έχουμε δείξει, $T_{n,-m+n} = \gamma^n(T_{0,-m})$. Εφόσον $G_m(T)(\xi\otimes e_0) = 0$, έπεται ότι

$$G_m(T)(w^*\otimes s)^{-m}(\xi\otimes e_0) = (w^*\otimes s)^{-m}G_m(T)(\xi\otimes e_0) = 0,$$

άρα $(T_{0,-m}(w^*)^{-m}\xi)\otimes e_0 = 0$. Συνεπώς, $T_{0,-m} = 0$, και άρα $T_{n,-m+n} = \gamma^n(T_{0,-m}) = 0$, για κάθε $n \geq 0$. Επομένως $G_m(T) = 0$, για κάθε $m < 0$. Άρα, από την πρόταση 4.2.2, έχουμε ότι $T \in \mathbb{Z}_+\overline{\times}_\gamma\mathcal{A}'$.

Για το αντίστροφο, έστω $T \in \mathbb{Z}_+\overline{\times}_\gamma\mathcal{A}'$, τότε $G_m(T) \in \mathbb{Z}_+\overline{\times}_\gamma\mathcal{A}'$ για κάθε $m \in \mathbb{Z}$, και μπορούμε να δούμε ότι $G_m(T) \in \{b\otimes\mathbf{1}, w^*\otimes s : b \in \mathcal{A}\}'$. Συνεπώς, $G_m(T) \in (\mathbb{Z}_+\overline{\times}_w\mathcal{A})'$ για κάθε $m \in \mathbb{Z}$, άρα $T \in (\mathbb{Z}_+\overline{\times}_w\mathcal{A})'$. □

**Θεώρημα 4.2.15** *Ο δεύτερος μεταθέτης της $\mathbb{Z}_+\overline{\times}_w\mathcal{A}$ είναι η $\mathbb{Z}_+\overline{\times}_w\mathcal{A}''$. Επομένως, το w*-ημισταυρωτό γινόμενο ισούται με το δεύτερο μεταθέτη του αν, και μόνο αν, $\mathcal{A} = \mathcal{A}''$.*

*Απόδειξη.* Υπενθυμίζουμε ότι $Q(\mathbb{Z}_+\overline{\times}_\beta\mathcal{A})Q^* = \mathbb{Z}_+\overline{\times}_w\mathcal{A}$, για τον ορθομοναιαίο τελεστή $Q = \sum_n w^{-n}\otimes p_n$. Επομένως $Q^*(\mathbb{Z}_+\overline{\times}_\gamma\mathcal{A}')Q = \mathbb{Z}_+\overline{\times}_{w^*}\mathcal{A}'$. Συνεπώς,

$$\begin{aligned}(\mathbb{Z}_+\overline{\times}_w\mathcal{A})'' &= (\mathbb{Z}_+\overline{\times}_\gamma\mathcal{A}')' = (Q(\mathbb{Z}_+\overline{\times}_{w^*}\mathcal{A}')Q^*)' \\ &= Q(\mathbb{Z}_+\overline{\times}_{w*}\mathcal{A}')'Q^* = Q(\mathbb{Z}_+\overline{\times}_\beta\mathcal{A}'')Q^* = \mathbb{Z}_+\overline{\times}_w\mathcal{A}''. \quad \square\end{aligned}$$

Το επόμενο είναι άμεσο και ισχύει ανεξάρτητα από το αν η $\mathcal{A}$ είναι ανακλαστική.

**Πόρισμα 4.2.16** *Έστω $\mathcal{A}$ μια w*-κλειστή υπάλγεβρα του $\mathcal{B}(H_0)$ που έχει την ιδιότητα του δεύτερου μεταθέτη. Τότε το w*-ημισταυρωτό γινόμενο $\mathbb{Z}_+\overline{\times}_w\mathcal{A}$ είναι wot-κλειστό.* □

## 4.3 Σχετικό w*-Ημισταυρωτό Γινόμενο

Έστω $\mathcal{M}$ άλγεβρα von Neumann σε χώρο Hilbert $H_0$, $\beta$ *-αυτομορφισμός της $\mathcal{M}$ και έστω το von Neumann σταυρωτό γινόμενο $\mathbb{Z}\overline{\rtimes}_\beta\mathcal{M}$. Εξ ορισμού, είναι η άλγεβρα von Neuman $\{\widehat{\pi}(b), U : b \in \mathcal{M}\}''$, που δρα στον $H_0\overline{\otimes}\ell^2(\mathbb{Z})$, όπου $\widehat{\pi}(b) = \sum_{n\in\mathbb{Z}}\beta^n(b)\otimes p_n$ και $U = 1_{H_0}\otimes u$, όπου $u$ ο bilateral shift στον $\mathcal{B}(\ell^2(\mathbb{Z}))$.

**Ορισμός 4.3.1** Το σχετικό *w*-ημισταυρωτό γινόμενο* $\mathbb{Z}_+\overline{\rtimes}_\beta\mathcal{M}$ είναι η w*-κλειστή γραμμική θήκη των «αναλυτικών πολυωνύμων» $\sum_{n=0}^k U^n\widehat{\pi}(b_n)$, $b_n \in \mathcal{M}$, $k \geq 0$, στον χώρο $\mathcal{B}(H_0\otimes\ell^2(\mathbb{Z}))$.

Εφόσον το $(\widehat{\pi}, U)$ είναι ένα αριστερά συναλλοίωτο ζεύγος, το σχετικό w*-ημισταυρωτό γινόμενο είναι w*-κλειστή υπάλγεβρα του von Neumann σταυρωτού γινομένου. Μάλιστα, παρατηρούμε ότι η $\mathbb{Z}_+\overline{\rtimes}_\beta\mathcal{M}$ είναι η τομή της $\mathbb{Z}\overline{\rtimes}_\beta\mathcal{M}$ με τους «κάτω τριγωνικούς πίνακες». Επομένως έχουμε την εξής πρόταση. Παρατηρήστε ότι τώρα δεν υποθέτουμε ότι η $\beta$ επάγεται από έναν ορθομοναδιαίο.

**Θεώρημα 4.3.2** *Το σχετικό w*-ημισταυρωτό γινόμενο μιας άλγεβρας von Neumann είναι ανακλαστικός υπόχωρος.* □

Τώρα, έστω $\mathcal{A}$ w*-κλειστή $\beta$-αναλλοίωτη υπάλγεβρα της $\mathcal{M}$. Ορίζουμε $\mathbb{Z}_+\overline{\rtimes}_\beta\mathcal{A}$ να είναι η w*-κλειστή γραμμική θήκη των «αναλυτικών πολυωνύμων» $\sum_{n=0}^k U^n\widehat{\pi}(b_n)$, $b_n \in \mathcal{A}$, $k \geq 0$. Χρησιμοποιώντας τις τεχνικές του θεωρήματος 4.2.12 μπορούμε να δείξουμε το εξής.

**Πόρισμα 4.3.3** *Έστω $\mathcal{M}$ μια άλγεβρα von Neumann και $\beta$ ένας *-ισομορφισμός της. Αν $\mathcal{A}$ είναι $\beta$-αναλλοίωτη ανακλαστική υπάλγεβρα της $\mathcal{M}$, τότε η $\mathbb{Z}_+\overline{\rtimes}_\beta\mathcal{A}$ είναι ανακλαστική.* □

## 4.4 w*-Ημισταυρωτό γινόμενο τροχιάς σημείου

Σε αυτήν την ενότητα θα ασχοληθούμε με μεταθετικές (και μοναδιαίες) $C^*$-άλγεβρες. Γνωρίζουμε ότι αν $\mathcal{C}$ είναι μεταθετική και μοναδιαία $C^*$-άλγεβρα, τότε $\mathcal{C} = C(K)$, όπου $K$ συμπαγής, χώρος Hausdorff. Επιπλέον, αν $\alpha : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ *-ενδομορφισμός, τότε αυτός επάγεται από μια συνεχή απεικόνιση $\phi : K \to K$. Δηλαδή, $\alpha(f) = f \circ \phi$, για κάθε $f \in C(K)$.

Όπως είδαμε στο παράδειγμα 2.3.14, για κάθε $t \in K$ ορίζεται ένα αριστερά συναλλοίωτο ζεύγος $(\pi_t, s)$, όπου

$$\pi_t : C(K) \to \mathcal{B}(\ell^2(\mathbb{Z}_+)) : f \mapsto \pi_t(f) := \sum_{n\geq 0} f(\phi^n(t))p_n,$$

όπου $p_n$ είναι η προβολή στον υπόχωρο $[e_n]$, και $s$ ο unilateral shift στον $\mathcal{B}(\ell^2(\mathbb{Z}_+))$. Σε αυτήν την ενότητα θα μελετήσουμε την w*-κλειστή θήκη του χώρου που επάγει αυτό το ζεύγος.

**Ορισμός 4.4.1** Έστω $K$ συμπαγής, χώρος Hausdorff και $t \in K$. *Το w*-ημισταυρωτό γινόμενο $\mathcal{C}_t$ τροχιάς του σημείου $t \in K$*, είναι η w*-κλειστή γραμμική θήκη των «αναλυτικών πολυωνύμων» $\sum_{n=0}^k s^n\pi_t(f_n)$, $f_n \in C(K)$, $k \in \mathbb{Z}_+$.

Όπως θα δούμε και παρακάτω, η τροχιά του σημείου $t \in K$ παίζει πρωτεύοντα ρόλο στη μελέτη της $\mathcal{C}_t$, και για αυτό το λόγο τη συμπεριλαμβάνουμε στον ορισμό.

Ας υποθέσουμε για αρχή ότι η τροχιά του $t \in K$ περιέχει περιοδικά σημεία και έστω $t' = \phi^{n_0}(t)$ το πρώτο σημείο της τροχιάς του $t$ που έχει περίοδο $p$, όπως στο επόμενο διάγραμμα.

$$\begin{tikzcd}
 & & & \phi^{n_0-1}(t) \arrow[r, bend left] & \phi^{n_0}(t) = t' \arrow[dr] & \\
t \arrow[r, bend left] & \phi(t) \arrow[r, bend left] & \cdots \arrow[ur] & \phi^{p-1}(t') \arrow[ur] & & \phi(t') \arrow[dl] \\
 & & & & \cdots \arrow[ul] &
\end{tikzcd}$$

Τότε η τροχιά του $t$ είναι το πεπερασμένο σύνολο

$$orb(t) = \{t, \ldots, \phi^{n_0-1}(t), t', \ldots, \phi^{p-1}(t')\},$$

και επάγει μια οικογένεια προβολών $\{P_{n_0}, P_0, \ldots, P_{p-1}\}$, έτσι ώστε $I = P_{n_0} \oplus P_0 \oplus \cdots \oplus P_{p-1}$. Πράγματι, έστω $P_{n_0}$ η προβολή στον υπόχωρο $[e_0, \ldots, e_{n_0-1}]$ και $P_i$ η προβολή στον $[e_{n_0+i+pj} : j \in \mathbb{Z}_+]$ για $i = 0, \ldots, p-1$. Παρατηρούμε ότι αν $f \in C(K)$ και $j \in \mathbb{Z}_+$, τότε

$$\pi_t(f)(e_{n_0+i+pj}) = f(\phi^{n_0+i+pj}(t))e_{n_0+i+pj} = f(\phi^i(t'))e_{n_0+i+pj}.$$

Συνεπώς,

$$\pi_t(f)P_i = f(\phi^i(t'))P_i, \quad \text{για κάθε } i = 0, \ldots p-1. \tag{4.2}$$

**Πρόταση 4.4.2** *Η άλγεβρα $\mathcal{C}_t$ είναι το (γραμμικό) ευθύ άθροισμα $(\mathfrak{L}P_{n_0}) \oplus (\mathcal{T}P_0) \oplus \cdots \oplus (\mathcal{T}P_{p-1})$, όπου $\mathfrak{L}$ η άλγεβρα των «κάτω τριγωνικών πινάκων» στον $\mathcal{B}(\ell^2(\mathbb{Z}_+))$, $\mathcal{T}$ η άλγεβρα των αναλυτικών Toeplitz τελεστών και $P_{n_0}, P_0, \ldots, P_{p-1}$ οι προβολές που επάγονται από την τροχιά του $t$.*

*Απόδειξη.* Για κάθε $n \in \mathbb{Z}_+$ και $f \in C(K)$, έχουμε

$$s^n \pi_t(f) = s^n \pi_t(f) P_{n_0} \oplus f(t') s^n P_0 \oplus f(\phi^{p-1}(t')) s^n P_{p-1}.$$

Επομένως, από τη σχέση (4.2) $\mathcal{C}_t \subseteq (\mathfrak{L}P_{n_0}) \oplus (\mathcal{T}P_0) \oplus \cdots \oplus (\mathcal{T}P_{p-1})$.

Για το αντίστροφο, έστω $TP_{n_0} \in \mathfrak{L}P_{n_0}$. Τότε παρατηρούμε ότι $(TP_{n_0})_{\kappa,\lambda} = 0$, για $\kappa < \lambda$ ή $n_0 - 1 < \lambda$. Άρα, $G_m(TP_{n_0}) = 0$, για $m < 0$, και $G_m(TP_{n_0}) = s^m(\sum_{n=0}^{n_0-1}(TP_{n_0})_{m+n,n}p_n)$, για $m \geq 0$. Παρατηρούμε ότι $(TP_{n_0})_{\kappa,\lambda} \in \mathbb{C}$ για κάθε $\kappa, \lambda \in \mathbb{Z}_+$. Σταθεροποιούμε $m \geq 0$ και έστω $n \in \{0, \ldots, n_0 - 1\}$. Τότε από το Λήμμα του Urysohn υπάρχει μια ακολουθία $(f_{n,j})_j$ από συνεχείς συναρτήσεις στον $K$, έτσι ώστε $\lim_j f_{n,j}(\phi^n(t)) = (TP_{n_0})_{m+n,n}$ και $f_{n,j}(s) = 0$ για $s \in orb(t) \setminus \{\phi^n(t)\}$. Επομένως, $(TP_{n_0})_{m+n,n}p_n = \text{w*-}\lim_j \pi_t(f_{n,j}) \in \mathcal{C}_t$ και άρα $s^m(TP_{n_0})_{m+n,n}p_n \in \mathcal{C}_t$. Συνεπώς $G_m(TP_{n_0}) \in \mathcal{C}_t$. Τότε από το Λήμμα Féjer, $TP_{n_0} \in \mathcal{C}_t$. Άρα, $\mathfrak{L}P_{n_0} \subseteq \mathcal{C}_t$.

Επίσης, για σταθεροποιημένο $i \in \{0, \ldots, p-1\}$ και $m \in \mathbb{Z}_+$, θεωρούμε το $s^m P_i \in \mathcal{T}P_i$. Πάλι από το Λήμμα του Urysohn, υπάρχει μια ακολουθία $(f_{i,j})_j$ συνεχών συναρτήσεων στο $K$, έτσι ώστε $\lim_j f_{i,j}(\phi^i(t')) = 1$ και $f_{i,j}(s) = 0$ για $s \in orb(t) \setminus \{\phi^i(t')\}$. Τότε $\text{w*-}\lim_j \pi_t(f_{i,j}) = P_i$, άρα $s^m P_i \in \mathcal{C}_t$. Συνεπώς, $\mathcal{T}P_i \subseteq \mathcal{C}_t$, για κάθε $i \in \{0, \ldots, p-1\}$. Επομένως, $(\mathfrak{L}P_{n_0}) \oplus (\mathcal{T}P_0) \oplus \cdots \oplus (\mathcal{T}P_{p-1}) \subseteq \mathcal{C}_t$. □

Παρατηρούμε ότι αν η τροχιά $orb(t)$ δεν έχει περιοδικά σημεία, τότε $\mathcal{C}_t = \mathfrak{L}$, εφόσον $P_{n_0} = \mathbf{1}_{\ell^2(\mathbb{Z}_+)}$. Επίσης αν η τροχιά $orb(t)$ έχει ακριβώς ένα περιοδικό σημείο $t'$, τότε $\phi^n(t) = t'$ για κάθε $n \geq n_0$ (δηλαδή το σημείο $t'$ είναι σταθερό σημείο). Τότε $C_t = \mathfrak{L}P_{n_0} \oplus \mathcal{T}P_{n_0}^{\perp}$. Στην περίπτωση που $t' = t$ η $\mathcal{C}_t = \mathcal{T}$.

**Σχόλιο 4.4.3** Έστω $\mathcal{D}$ η άλγεβρα των «διαγώνιων πινάκων» στην $\mathcal{B}(\ell^2(\mathbb{Z}_+))$ και έστω

$$\mathcal{D}_\phi = \{T \in \mathcal{D} : T_{\kappa,\kappa} = T_{n,n} \text{ όταν } \phi^\kappa(t) = \phi^n(t)\},$$

η οποία είναι μια w*-κλειστή υπάλγεβρα της $\mathcal{D}$. Τότε, $T \in \mathcal{D}_\phi$ αν, και μόνο αν, ο $T$ είναι της μορφής

$$T = \text{diag}\{y_0, \ldots, y_{n_0-1}, y_{n_0}, \ldots, y_{p-1}, y_{n_0}, \ldots, y_{p-1}, \ldots\}.$$

Είναι άμεσο από την προηγούμενη πρόταση ότι η $\mathcal{C}_t$ παράγεται από το unilateral shift στον $\mathcal{B}(\ell^2(\mathbb{Z}_+))$ και τους διαγώνιους πίνακες που ανήκουν στην $\mathcal{D}_\phi$. Επομένως, ένας τελεστής $T \in \mathcal{B}(\ell^2(\mathbb{Z}_+))$ ανήκει στην $\mathcal{C}_t$ αν, και μόνο αν, για κάθε $m < 0$, $G_m(T) = 0$, και για κάθε $m \geq 0$, $G_m(T) = s^m \sum_n T_{m+n,n}p_n$ όπου $T_{m+\kappa,\kappa} = T_{m+n,n}$, όταν $\phi^\kappa(t) = \phi^n(t)$.

**Σχόλιο 4.4.4** Προκειμένου να κατασκευάζουμε τη $\mathcal{C}_t$, *αρκεί να πάρουμε συντελεστές από οποιαδήποτε ομοιόμορφη άλγεβρα* $\mathfrak{A}$ *του* $K$.

Πράγματι, έστω $\mathfrak{A}$ norm-κλειστή υπάλγεβρα της $C(K)$ που περιέχει τις σταθερές συναρτήσεις και διαχωρίζει τα σημεία του $K$ και έστω τα πολυώνυμα $\sum_{n=0}^{k} s^n \pi_t(f_n)$, $f_n \in \mathfrak{A}$. Από την παρατήρηση 4.4.3, αρκεί να αποδείξουμε ότι η $\pi_t(ball(\mathfrak{A}))$ είναι w*-πυκνή στην $ball(\mathcal{D}_\phi)$. Σταθεροποιούμε $z \in \mathbb{T}$ και $n_0 \in \mathbb{Z}_+$, και έστω $T \in \mathcal{D}_\phi$, έτσι ώστε $T_{n_0,n_0} = z$ και $T_{n,n} = 1$, όταν $\phi^n(t) \neq \phi^{n_0}(t)$. Χρησιμοποιώντας το επιχείρημα στον ισχυρισμό του [**23**, Theorem 2.9] μπορούμε να βρούμε ακολουθία $(f_j)_j$ στην $ball(\mathfrak{A})$ έτσι ώστε w*-$\lim_j \pi_t(f_j) = T$. Για να ολοκληρωθεί η απόδειξη, αρκεί να παρατηρήσουμε ότι τα στοιχεία αυτής της μορφής προσεγγίζουν τα ορθομοναδιαία στοιχεία της $\mathcal{D}_\phi$ στην w*-τοπολογία και ότι η sot-κλειστή θήκη της $\pi_t(ball(\mathfrak{A}))$ είναι κλειστή ως προς τον πολλαπλασιασμό.

### Ανακλαστική Θήκη

**Θεώρημα 4.4.5** *Η άλγεβρα $\mathcal{C}_t$ είναι ανακλαστική.*

*Απόδειξη.* Αν $T \in \mathrm{Ref}(\mathcal{C}_t)$, τότε $G_m(T) \in \mathrm{Ref}(\mathcal{C}_t)$. Επομένως $G_m(T) = 0$, για $m < 0$. Έστω $g_r = \sum_{n \geq 0} r^n e_n$, με $0 \leq r < 1$, και $\mathcal{F} = \overline{[\pi_t(f) g_r : f \in C(K)]}$. Τότε ο υπόχωρος $\mathcal{F}$ είναι $(\mathcal{C}_t)^*$-αναλλοίωτος. Συνεπώς είναι $G_m(T)^*$-αναλλοίωτος, για $m \in \mathbb{Z}_+$. Άρα, υπάρχει μια ακολουθία από $f_j \in C(K)$ έτσι ώστε $G_m(T)^* g_r = \lim_j \pi_t(f_j) g_r$. Συνεπώς $r^m \overline{T}_{m+n,n} = \lim_j (f_j(\phi^n(t)))$, για κάθε $n \in \mathbb{Z}_+$. Επομένως, $T_{m+n,n} = T_{m+\kappa,\kappa}$, αν $\phi^\kappa(t) = \phi^n(t)$. Άρα, από το σχόλιο 4.4.3, ο τελεστής $T \in \mathcal{C}_t$. □

### Το ριζικό ιδεώδες Jacobson της $\mathcal{C}_t$

Θα προσδιορίσουμε το ριζικό ιδεώδες της $\mathcal{C}_t$ και θα δούμε πως η περιγραφή του εξαρτάται από το μη περιοδικό κομμάτι της τροχιάς του σημείου $t$. Πρώτα όμως θα κάνουμε μια σύντομη αναφορά στο ριζικό ιδεώδες μια άλγεβρας. Υπάρχουν αρκετοί ισοδύναμοι ορισμοί του ριζικού Jacobson μιας άλγεβρας Banach. Εδώ θα χρησιμοποιήσουμε τον ακόλουθο.

Έστω $\mathcal{A}$ μια (μοναδιαία) άλγεβρα Banach. Με $\mathcal{Q}(\mathcal{A})$ συμβολίζουμε το σύνολο των ψευδομηδενοδύναμων στοιχείων της, δηλαδή των $x \in \mathcal{A}$ έτσι ώστε $\lim_n \|x^n\|^{1/n} = 0$. Ορίζουμε ως *ριζικό Jacobson* το σύνολο

$$\mathrm{Rad}(\mathcal{A}) = \{x \in \mathcal{A} : xy \in \mathcal{Q}(\mathcal{A}) \text{ για κάθε } y \in \mathcal{A}\}.$$

Είναι εύκολο να δούμε ότι $\mathrm{Rad}(\mathcal{A}) = \{x \in \mathcal{A} : yx \in \mathcal{Q}(\mathcal{A}) \text{ για κάθε } y \in \mathcal{A}\}$. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι $\mathrm{sp}(xy) \cup \{0\} = \mathrm{sp}(yx) \cup \{0\}$.

**Σχόλια 4.4.6** 1. Αν η $\mathcal{A}$ είναι μοναδιαία, τότε $\mathrm{Rad}(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{Q}(\mathcal{A})$.
2. Το ριζικό είναι ένα norm-κλειστό δίπλευρο ιδεώδες. Επιπλέον, αν η $\mathcal{A}$ είναι αυτοσυζυγής, τότε και το ριζικό $\mathrm{Rad}(\mathcal{A})$ είναι αυτοσυζυγές.
3. Αν η $\mathcal{A}$ είναι μεταθετική ή η $\mathcal{A}/\mathrm{Rad}(\mathcal{A})$ είναι μεταθετική, τότε $\mathrm{Rad}(\mathcal{A}) = \mathcal{Q}(\mathcal{A})$.

**Λήμμα 4.4.7** *Έστω $x \in \mathcal{T}P_i$, για κάποιο $i = 0, \ldots, p-1$. Τότε η φασματική ακτίνα του $x$ είναι γνήσια θετική.*

*Απόδειξη.* Θα αποδείξουμε το λήμμα μόνο για $i = 0$. Για $i = 1, \ldots, p-1$ η απόδειξη είναι παρόμοια. Έστω, λοιπόν, $x = T_f P_0$, για κάποια $f \in \mathbb{H}^\infty$. Αρκεί να αποδείξουμε ότι ο $x^*$ έχει ιδιοδιάνυσμα. Αν $T_f = \sum_{n\geq 0} \hat{f}(n) s^n$, θέτουμε[4] $T_{g_i} = \sum_{n\geq 0} \hat{f}(np+i) s^{np+i}$. Συνεπώς, $T_f = T_{g_0} + \cdots + T_{g_{p-1}}$. Τώρα, έστω $\xi = \sum_{n\geq 0} r^{n_0+np} e_{n_0+np}$, για κάποιο $0 < r < 1$. Τότε

$$\begin{aligned} P_0 T_{g_0}^* \xi &= P_0 (\sum_{n\geq 0} \hat{f}(np)(s^*)^{np})\xi \\ &= P_0 (\sum_{n\geq 0} \hat{f}(np) r^{np})\xi = (\sum_{n\geq 0} \hat{f}(np) r^{np})\xi, \end{aligned}$$

ενώ, για κάθε $i = 1, \ldots, p-1$ έχουμε

$$\begin{aligned} P_0 T_{g_i}^* \xi &= P_0 (\sum_{n\geq 0} \hat{f}(np+i)(s^*)^{np+i})\xi \\ &= P_0 s^* (\sum_{n\geq 0} \hat{f}(np+i)(s^*)^{np+i-1})\xi = 0, \end{aligned}$$

εφόσον $P_0 s^* = 0$. Συνεπώς,

$$(P_0 T_f^*)\xi = (P_0 T_{g_0})\xi + \cdots + (P_0 T_{g_{p-1}})\xi = (\sum_{n\geq 0} \hat{f}(np) r^{np})\xi.$$

Για κάθε άλλο $i$, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε παρόμοια αποδεικτική μέθοδο παίρνοντας $s = \sum_{n\geq 0} r^{n_0+np+i} e_{n_0+np+i}$. □

**Λήμμα 4.4.8** *Κάθε στοιχείο στην $s\mathfrak{L}P_0$ είναι μηδενοδύναμο (του ίδιου βαθμού).*

[4] Εφόσον η δυναμοσειρά των $\hat{f}(n)$ συγκλίνει, η δυναμοσειρά των στοιχείων $0, \ldots, \hat{f}(i), 0, \ldots, 0, \hat{f}(p+i), 0, \ldots$ συγκλίνει επίσης, με (τουλάχιστον) την ίδια ακτίνα σύγκλισης.

*Απόδειξη.* Αυτό συμβαίνει επειδή κάθε τέτοιο στοιχείο είναι γραμμικός συνδυασμός τελεστών πρώτης τάξης από το σύνολο $\{\xi_0 e_0^*, \dots, \xi_{n_0} e_{n_0}^*\}$. Πράγματι, έστω $Q_n$ η προβολή στον υπόχωρο $[e_m : m \geq n]$. Τότε $Q_n \in \mathrm{Lat}\,\mathfrak{L}$ και $sQ_n = Q_{n+1}$, για κάθε $n \geq 0$. Άρα, αν $x = syP_0$ για κάποιο $y \in \mathfrak{L}$, και $\xi \in \ell^2(\mathbb{Z}_+)$, τότε

$$\begin{aligned} x^{n_0+1}\xi &= (syP_0)^{n_0}(syP_0)\xi \in (syP_0)^{n_0}(syP_0)Q_0 \\ &= (syP_0)^{n_0-1}(syP_0)Q_1 = \cdots = syP_0Q_{n_0} = sy(P_0Q_{n_0}) = (0). \quad \square \end{aligned}$$

**Θεώρημα 4.4.9** *Το ριζικό ιδεώδες της $\mathcal{C}_t$ είναι η $s\mathfrak{L}P_0$.*

*Απόδειξη.* Καταρχάς, αν $c \in \mathcal{C}_t$, τότε μπορούμε να αποδείξουμε με την ίδια μέθοδο που χρησιμοποιήσαμε στο προηγούμενο λήμμα ότι το $xc$ είναι μηδενοδύναμο για κάθε $x \in s\mathfrak{L}P_0$.

Αντίστροφα, έστω $x \in \mathrm{Rad}(\mathcal{C}_t)$. Συνεπώς $xP_{n_0}, xP_0, \dots, xP_{p-1} \in \mathrm{Rad}(C_t)$. Όμως τότε $xP_0 = \cdots = xP_{p-1} = 0$. Άρα, $x = xP_{n_0}$. Αρκεί να δείξουμε ότι η κύρια διαγώνιος του $x$ είναι μηδέν. Εφόσον για κάθε $n = 0, \dots, n_0$ η προβολή $p_{n,n}$ στον $[e_n]$ ανήκει στην $\mathcal{C}_t$, έχουμε ότι ο διαγώνιος τελεστής $p_{n,n}xp_{n,n}$, για $x \in \mathrm{Rad}(\mathcal{C}_t)$, ανήκει στο ριζικό ιδεώδες, άρα είναι μηδέν. Επομένως, $G_0(x) = \sum_{n\geq 0} x_{n,n}p_n = \sum_{n=0}^{n_0-1} x_{n,n}p_n = \sum_{n=0}^{n_0-1}(p_{n,n}xp_{n,n})p_n = 0$. $\square$

Συνεπώς, το ριζικό ιδεώδες της $\mathcal{C}_t$ είναι w*-κλειστός χώρος και περιέχει μόνο μηδενοδύναμα στοιχεία του ίδιου βαθμού $n_0$.

**Θεώρημα 4.4.10** *Το ριζικό ιδεώδες της $\mathcal{C}_t$ είναι η w*-κλειστή γραμμική θήκη των «αναλυτικών πολυωνύμων» $\sum_{n=0}^m s^n\pi_t(f_n)$, όπου $f_0 = 0$ και $f_n(\phi^k(t)) = 0$, για κάθε $k \geq n_0$.*

*Απόδειξη.* Για το ευθύ, αρκεί να αποδείξουμε ότι για κάθε $x$ στο ριζικό ιδεώδες, κάθε $G_m(x)$ είναι μονώνυμο αυτής της μορφής. Έστω $x = syP_0$. Τότε $u_\lambda^* x u_\lambda = u_\lambda^* syP_0u_\lambda = u_\lambda^* syu_\lambda P_0 = u_\lambda^* su_\lambda u_\lambda^* yu_\lambda P_0 = e^{i\lambda}su_\lambda^* yu_\lambda P_0 \in s\mathfrak{L}P_0$. Επομένως το ριζικό ιδεώδες είναι $G_m$-αναλλοίωτο. Άρα, αν $x$ είναι στο ριζικό ιδεώδες, $G_0(x) = 0$ και $G_m(x) = s^m(\sum_{n=0}^{n_0-1} x_{m,n}p_n)$. Από το Λήμμα Urysohn, υπάρχει μια $f \in C(K)$, έτσι ώστε $f(\phi^n(t)) = x_{m,n}$, για κάθε $n = 0, \dots, n_0 - 1$ και $f(\phi^k(t)) = 0$, για κάθε $k \geq n_0$. Τότε $G_m(x) = s^m\pi_t(f)$.

Το αντίστροφο είναι προφανές, αφού δείξαμε ότι το ριζικό ιδεώδες είναι w*-κλειστό. $\square$

# Κεφάλαιο 5

# Παράρτημα

## 5.1 Συνολοθεωρητικό Σχόλιο

Προκειμένου να ορίσουμε τις άλγεβρες τελεστών που αποκαλέσαμε ημισταυρωτά γινόμενα στα κεφάλαια 2 και 3, χρησιμοποιήσαμε την κατασκευή του παραδείγματος 1.1.27, χωρίς όμως να αποδείξουμε ότι τα συναλλοίωτα ζεύγη $(\pi, V)$ απαρτίζουν σύνολο, με συνέπεια να μην γνωρίζουμε αν το αντίστοιχο supremum ορίζεται καλά. Άλλωστε, δεν μπορούμε να θεωρήσουμε ελαφριά τη καρδία το supremum ως προς όλα τα ζεύγη γιατί αυτό θα οδηγούσε σε συνολοθεωρητικό παράδοξο τύπου Russell. Σε αυτήν την ενότητα θα ξεκαθαρίσουμε το συγκεκριμένο σκοτεινό σημείο. Το κρίσιμο σημείο είναι να εξασφαλίσουμε άνω φράγμα για τη διάσταση του χώρου Hilbert στον οποίο δρα το κάθε συναλλοίωτο ζεύγος.

Ας ξεκινήσουμε με την περίπτωση του κεφαλαίου 2, όπου $\alpha : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ είναι *-μορφισμός της $C^*$-άλγεβρας $\mathcal{C}$. Αν $(H, \pi)$ είναι μια αναπαράσταση της $\mathcal{C}$ τότε η εικόνα της θα είναι *-ισόμορφη με την εικόνα από ένα ευθύ άθροισμα υποαναπαραστάσεων (με κάποια πολλαπλότητα) της universal αναπαράστασης $(H_u, \pi_u)$ που προκύπτει από την κατασκευή GNS. Με αυτήν την έννοια, λοιπόν, η διάσταση του $H_u$ είναι ένα άνω φράγμα για τη διάσταση του χώρου Hilbert $H$, και μπορούμε να ορίσουμε το σύνολο των αναπαραστάσεων $(H, \pi)$ της $\mathcal{C}$ έτσι ώστε $\dim H \leq \dim H_u$. Συνεπώς τα συναλλοίωτα ζεύγη $(\pi, V)$ του ζεύγους $(\mathcal{C}, \alpha)$ απαρτίζουν σύνολο

$$\mathcal{F} = \{(\pi, V) : (H, \pi) \text{ αναπ. της } \mathcal{C} \text{ και } V \in \mathcal{B}(H) \text{ ε.ω. } \dim H \leq \dim H_u\},$$

και άρα το supremum $\sup\{\|\rho(F)\| : \rho \in \mathcal{F}\}$ ορίζεται για κάθε $F \in \ell^1(\mathcal{C}, \alpha, \mathbb{Z}_+)$.

Για την περίπτωση του κεφαλαίου 3, όπου έχουμε $\alpha : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ ενδομορφισμό της άλγεβρας τελεστών $\mathcal{A}$, θα χρειαστούμε το παρακάτω θεώρημα.

**Θεώρημα 5.1.1** ([**7**, Theorem 2.4.2]) *Έστω $\mathcal{A}$ άλγεβρα τελεστών. Τότε υπάρχει $C^*$-κάλυμμα της $\mathcal{A}$, το οποίο το συμβολίζουμε με $C^*_{max}$, με την ακόλουθη (καθολική) ιδιότητα: κάθε αναπαράσταση $\phi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}(H)$ επεκτείνεται σε (αναγκαστικά μοναδική) αναπαράσταση $\widetilde{\phi} : C^*_{max} \to \mathcal{B}(H)$.* □

Επομένως, οι αναπαραστάσεις της $\mathcal{A}$ είναι σε 1-1 και επί αντιστοιχία με τις αναπαραστάσεις της $C^*$-άλγεβρας $C^*_{max}$. Συνεπώς, αν $(H_u, \pi_u)$ είναι η καθολική αναπαράσταση της $C^*_{max}$, τα συναλλοίωτα ζεύγη $(\pi, V)$ του $(\mathcal{A}, \alpha)$ που δρουν σε χώρο Hilbert $H$, με $\dim H \leq \dim H_u$ απαρτίζουν σύνολο

$$\mathcal{F} = \{(\pi, V) : (H, \pi) \text{ αναπ. της } \mathcal{A} \text{ και } V \in \mathcal{B}(H) \text{ ε.ω. } \dim H \leq \dim H_u\},$$

και άρα το supremum $\sup\{\|\rho(F)\| : \rho \in \mathcal{F}\}$ ορίζεται για κάθε $F \in \ell^1(\mathcal{A}, \alpha, \mathbb{Z}_+)$.

## 5.2 Ευθύ Όριο $C^*$-αλγεβρών

Θα παρουσιάσουμε την έννοια του ευθέος ορίου $C^*$-αλγεβρών, που χρησιμοποιήθηκε στο πρώτο κεφάλαιο. Για την ακρίβεια εδώ θα ασχοληθούμε μόνο με ευθέα όρια που προκύπτουν από ακολουθίες $C^*$-αλγεβρών. Για το γενικό ορισμό παραμπέμπουμε τον αναγνώστη στο [**33**, Chapter 6].

Έστω η ακολουθία

$$\mathcal{A}_1 \xrightarrow{\phi_1} \mathcal{A}_2 \xrightarrow{\phi_2} \cdots \mathcal{A}_n \xrightarrow{\phi_n} \mathcal{A}_{n+1} \cdots$$

των $C^*$-αλγεβρών $A_n$ και των $*$-μορφισμών $\phi_n$. Ορίζουμε τις συνδέουσες απεικονίσεις $\phi_{m,n} = \phi_{m-1} \circ \phi_{m-2} \circ \cdots \circ \phi_n : \mathcal{A}_n \to \mathcal{A}_m$, όταν $m > n$, $\phi_{n,n} = id_{\mathcal{A}_n}$ και $\phi_{m,n} = 0$ όταν $m < n$. Μπορούμε να απεικονίσουμε κάθε $\mathcal{A}_n$ στο $\prod \mathcal{A}_k = \{(a_k) : a_k \in A_k, \sup_k \|a_k\| < \infty\}$ μέσω των $*$-μορφισμών

$$\nu_n(a) = (\phi_{m,n}(a))_m = (0, \ldots, 0, a, \phi_n(a), \phi_{n+1}(\phi_n(a)), \ldots) \quad (a \in \mathcal{A}_n).$$

Ορίζουμε τη $C^*$-υπάλγεβρα

$$\sum \mathcal{A}_k = \{(a_k)_k : \lim_k \|a_k\|_{\mathcal{A}_k} = 0\}$$

της $\prod \mathcal{A}_k$ και τις απεικονίσεις

$$\begin{aligned} \mu_n : \mathcal{A}_n &\to \prod \mathcal{A}_k / \sum \mathcal{A}_k \\ a &\mapsto q((\phi_{m,n}(a))_m) = [0, \dots, 0, a, \phi_n(a), \phi_{n+1}(\phi_n(a)), \dots] \end{aligned}$$

όπου $q$ η απεικόνιση πηλίκο και το $[b_k]$ συμβολίζει την κλάση ισοδυναμίας ενός στοιχείου $(b_k)$ του $\prod \mathcal{A}_k$ στο πηλίκο. (Παρατηρούμε ότι δύο στοιχεία $(b_k)$ και $(c_k)$ είναι ισοδύναμα αν και μόνο αν $\lim_k \|b_k - c_k\|_{\mathcal{A}_k} = 0$.) Τότε για τις απεικονίσεις $\mu_n$ έχουμε ότι $\mu_n = \mu_{n+1} \circ \phi_n$. Πράγματι, έστω $a \in \mathcal{A}_n$. Τότε η $\nu_n(a) - (\nu_{n+1} \circ \phi_n)(a)$ είναι η ακολουθία των στοιχείων $(0, \dots, 0, a, 0, 0, \dots)$, και άρα η εικόνα στο πηλίκο είναι 0, δηλαδή $\mu_n(a) - (\mu_{n+1} \circ \phi_n)(a) = 0$. Επομένως η $\mu_n(\mathcal{A}_n)$ είναι μια *-υπάλγεβρα της $\mu_{n+1}(\mathcal{A}_{n+1})$, επομένως η οικογένεια $\{\mu_n(\mathcal{A}_n)\}$ είναι αύξουσα. Ορίζουμε το ευθύ όριο $\varinjlim(\mathcal{A}_n, \phi_n)$ να είναι η κλειστή θήκη της ένωσης των υπαλγεβρών $\overline{\bigcup_n \mu_n(\mathcal{A}_n)}$ της $\prod \mathcal{A}_k / \sum \mathcal{A}_k$.

**Θεώρημα 5.2.1** *Έστω η ακολουθία*

$$\mathcal{A}_1 \xrightarrow{\phi_1} \mathcal{A}_2 \xrightarrow{\phi_2} \cdots \mathcal{A}_n \xrightarrow{\phi_n} \mathcal{A}_{n+1} \cdots$$

*των $C^*$-αλγεβρών $A_n$ και των *-μορφισμών $\phi_n$. Τότε το ευθύ όριο $\varinjlim(\mathcal{A}_n, \phi_n)$ είναι η $C^*$-άλγεβρα $\mathcal{A}$ με την εξής (καθολική) ιδιότητα:*
*1. $\mu_n = \mu_{n+1} \circ \phi_n$ για κάθε $n \in \mathbb{Z}_+$,*
*2. αν $\mathcal{B}$ είναι μια $C^*$-άλγεβρα και $\lambda_n : \mathcal{A}_n \to \mathcal{B}$ μια ακολουθία από *-μορφισμούς που ικανοποιούν την (1), τότε υπάρχει μοναδικός *-μορφισμός $\lambda : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ έτσι ώστε $\lambda_n = \lambda \circ \mu_n$ για κάθε $n$.* $\square$

Μερικές φορές το ευθύ όριο $\mathcal{A}$ συμβολίζεται ως εξής

$$\mathcal{A}_1 \xrightarrow{\phi_1} \mathcal{A}_2 \xrightarrow{\phi_2} \cdots \mathcal{A}_n \xrightarrow{\phi_n} \mathcal{A}_{n+1} \cdots \longrightarrow \mathcal{A}.$$

Η συνθήκη (2) του προηγούμενου θεωρήματος επάγει ότι αν

$$\begin{array}{ccccccc} \mathcal{A}_1 & \xrightarrow{\phi_1} & \mathcal{A}_2 & \xrightarrow{\phi_2} & \mathcal{A}_3 \cdots & \longrightarrow & \mathcal{A} = \varinjlim(\mathcal{A}_n, \phi_n) \\ {\scriptstyle \pi_1}\downarrow & & {\scriptstyle \pi_2}\downarrow & & {\scriptstyle \pi_3}\downarrow & & \\ \mathcal{B}_1 & \xrightarrow{\psi_1} & \mathcal{B}_2 & \xrightarrow{\psi_2} & \mathcal{B}_3 \cdots & \longrightarrow & \mathcal{B} = \varinjlim(\mathcal{B}_n, \psi_n) \end{array}$$

είναι δύο ευθέα όρια και το διάγραμμα είναι μεταθετικό, τότε υπάρχει μοναδικός *-μορφισμός $\pi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ ώστε το επόμενο διάγραμμα να είναι μεταθετικό

$$\begin{array}{ccccccc}
\mathcal{A}_1 & \xrightarrow{\phi_1} & \mathcal{A}_2 & \xrightarrow{\phi_2} & \mathcal{A}_3 \cdots & \longrightarrow & \mathcal{A} \\
\pi_1 \big\downarrow & & \pi_2 \big\downarrow & & \pi_3 \big\downarrow & & \pi \big\downarrow \\
\mathcal{B}_1 & \xrightarrow{\psi_1} & \mathcal{B}_2 & \xrightarrow{\psi_2} & \mathcal{B}_3 \cdots & \longrightarrow & \mathcal{B}
\end{array}$$

Επομένως, αν $\mu_n : \mathcal{A}_n \to \mathcal{A}$ και $\lambda_n : B_n \to \mathcal{B}$ είναι οι απεικονίσεις όπως στον ορισμό των ευθέων ορίων, τότε $\pi \circ \mu_n = \lambda_n \circ \pi_n$ για κάθε $n$. Πράγματι απεικονίζουμε κάθε $\mathcal{A}_n$ στην $\mathcal{B}$ μέσω $\lambda_n \circ \pi_n : \mathcal{A}_n \to \mathcal{B}_n$ και χρησιμοποιώντας την (2) μπορούμε να ορίσουμε την $\pi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$.

## 5.3 Ευθύ Όριο Χώρων Hilbert

Σε αυτή την ενότητα θα παρουσιάσουμε την κατασκευή του *ευθέος ορίου χώρων Hilbert*. Ο προσεκτικός αναγνώστης μπορεί να διακρίνει σε αυτήν ομοιότητες με το ευθύ όριο $C^*$-αλγεβρών.

Έστω, λοιπόν, $\{H_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ ακολουθία χώρων Hilbert και $\{V_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ ακολουθία ισομετριών, έτσι ώστε $V_n : H_{n-1} \to H_n$. Επομένως προκύπτει το εξής επαγωγικό σύστημα

$$H_0 \xrightarrow{V_1} H_1 \xrightarrow{V_2} H_2 \xrightarrow{V_3} \cdots$$

Θεωρούμε το καρτεσιανό γινόμενο $\mathbb{H} = \prod_n H_n$ με τις κατά σημείο πράξεις, και τον υπόχωρο

$$\mathbb{H}' = \{(\xi_n) : \exists\ n_0 \text{ ε.ω. } \xi_n = V_n(\xi_{n-1}), \forall\ n \geq n_0\}.$$

Εφόσον οι $V_n$ είναι ισομετρίες για κάθε $(\xi_n), (\eta_n) \in \mathbb{H}'$, η ακολουθία $\{\langle \xi_n, \eta_n \rangle\}_n$ είναι τελικά σταθερή και άρα το όριο $\lim_n \langle \xi_n, \eta_n \rangle$ υπάρχει. Εφοδιάζουμε τον $\mathbb{H}'$ με το εξής ημι-εσωτερικό γινόμενο

$$\langle (\xi_n), (\eta_n) \rangle = \lim_n \langle \xi_n, \eta_n \rangle .$$

Έστω

$$\mathcal{N} = \{(\xi_n) \in \mathbb{H}' : \langle (\xi_n), (\eta_n) \rangle = 0, \text{ για κάθε } (\eta_n) \in \mathbb{H}'\}.$$

Εφαρμόζοντας την ανισότητα Cauchy-Schwartz είναι εύκολο να δούμε ότι ο χώρος $\mathcal{N}$ αποτελείται από τις ακολουθίες $(\xi_n) \in \mathbb{H}'$ με $\lim_n \|\xi_n\| = 0$.

Ο χώρος πηλίκο $\mathbb{H}'/\mathcal{N}$, τότε, είναι ένας χώρος pro-Hilbert εφοδιασμένος με το επαγόμενο εσωτερικό γινόμενο στο πηλίκο (για το οποίο θα χρησιμοποιούμε το ίδιο σύμβολο). Έστω $\mathfrak{H}$ η πλήρωση του $\mathbb{H}'/\mathcal{N}$ ως προς αυτό το εσωτερικό γινόμενο. Τότε το $\langle \cdot, \cdot \rangle$ επεκτείνεται σε ένα εσωτερικό γινόμενο στον $\mathfrak{H}$ (για το οποίο επίσης θα χρησιμοποιούμε το ίδιο σύμβολο). Ο $\mathfrak{H}$ καλείται *το ευθύ όριο των χώρων Hilbert* $\{H_n\}_n$ *ως προς τις* $\{V_n\}$.

Παρατηρούμε ότι κάθε $H_n$ μπορεί να εμφυτευθεί ισομετρικά στον $\mathfrak{H}$ μέσω του τελεστή

$$W_n : H_n \longrightarrow \mathfrak{H} : \xi \longmapsto [0, \dots, \xi, V_{n+1}\xi, \dots],$$

όπου οι αγκύλες υποδηλώνουν τις κλάσεις ισοδυναμίας στον $\mathfrak{H}$. Έτσι, χωρίς βλάβη, μπορούμε να υποθέτουμε ότι ο $\mathfrak{H}$ είναι η πλήρωση της $\cup_n H_n$. Τότε το επόμενο θεώρημα είναι άμεσο.

**Θεώρημα 5.3.1** *Ένας τελεστής $T$ ανήκει στο $\mathcal{B}(\mathfrak{H})$ αν, και μόνο αν, υπάρχει ακολουθία φραγμένων τελεστών $\{T_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$, με $T_n \in \mathcal{B}(H_n)$ και $T_{n+1}|_{H_n} = T_n$, για κάθε $n$, έτσι ώστε $T|_{H_n} = T_n$.* $\square$

**Παράδειγμα 5.3.2** Θα αναλύσουμε τον τελεστή που κατασκευάσαμε στο θεώρημα 3.2.4. Έστω $H$ χώρος Hilbert και $V$ ισομετρία στον $\mathcal{B}(H)$. Θεωρούμε το ευθύ όριο χώρων Hilbert $\mathfrak{H}$ που προκύπτει από τους $H_n = H$ και τις ισομετρίες $V_n = V$. Από το προηγούμενο θεώρημα ορίζεται ο τελεστής $U$ με $U[0, \dots, \xi, V\xi, \dots] = [0, \dots, V\xi, V^2\xi, \dots]$, όπως προκύπτει από τους $U_n = V$. Επίσης, έχουμε ότι $(U_n)^* = V^*$ και άρα $U^*U = I_{\mathfrak{H}}$. Τέλος,

$$\begin{aligned} UU^*[0, \dots, \xi, V\xi, \dots] &= U[0, \dots, V^*\xi, \xi, \dots] = U[0, \dots, 0, \xi, \dots] \\ &= [0, \dots, 0, V\xi, \dots] = [0, \dots, \xi, V\xi, \dots]. \end{aligned}$$

Άρα ο $U$ είναι ορθομοναδιαίος.

## 5.4 Σχόλια στις εφαρμογές 4.2.13

### 5.4.1 Εφαρμογή ΣΤ.

Έστω $(K, \mathcal{S}, \mu)$ ένας χώρος πιθανότητας και $\phi : K \to K$ μια Borel-μετρήσιμη απεικόνιση. Έστω $f$ Borel-μετρήσιμη και σχεδόν φραγμένη. Τότε η $f \circ \phi$ είναι Borel-μετρήσιμη και

$$\sup\{|(f \circ \phi)(x)| : x \in K\} \leq \sup\{|f(x)| : x \in K\}.$$

Όμως, η απεικόνιση $f \mapsto f \circ \phi$ δεν επάγει αναγκαστικά μια καλά ορισμένη απεικόνιση $(L^\infty(K, \mu), \|\cdot\|_\infty) \to (L^\infty(K, \mu), \|\cdot\|_\infty)$.

**Παράδειγμα 5.4.1** Στον χώρο μέτρου $([0,1], \mathcal{B}, \lambda)$, έστω $C$ το σύνολο Cantor. Θεωρούμε την ιδιάζουσα συνάρτηση Lebesgue $\phi : [0,1] \to [0,1]$, η οποία είναι επί του $[0,1]$, συνεχής, αύξουσα, και (κατά τμήματα) σταθερή σε κάθε ανοικτό διάστημα του $C^c$ (βλ. [**47**, Ορισμός 5.23, Πρόταση 5.24]). Αν $f = \chi_C$, τότε $f = 0$ σχ.π. και άρα η $f$ ορίζει το μηδενικό στοιχείο της $L^\infty$ ενώ $(f \circ \phi)(x) = 1$ για κάθε $x \in [0,1]$, άρα $f \circ \phi = \mathbf{1}$ στον $L^\infty$.

**Πρόταση 5.4.2** *Η απεικόνιση $f \mapsto f \circ \phi$ επάγει μια καλά ορισμένη απεικόνιση*

$$(L^\infty(K, \mu), \|\cdot\|_\infty) \to (L^\infty(K, \mu), \|\cdot\|_\infty) : f \mapsto f \circ \phi,$$

*όπου $\|f\|_\infty = \operatorname{esssup} f$, αν, και μόνο αν, η απεικόνιση $\phi^{-1}$ διατηρεί τα σύνολα μέτρου μηδέν. Δηλαδή, αν $\mu \circ \phi^{-1} \ll \mu$ (απολύτα συνεχές).*

*Απόδειξη.* Αν η απεικόνιση $f \to f \circ \phi$ είναι καλά ορισμένη, τότε για κάθε σύνολο Borel $X \subseteq K$ έχουμε ότι

$$\mu(X) = 0 \Rightarrow \|\chi_X\|_\infty = 0 \Longrightarrow \|\chi_X \circ \phi\|_\infty = 0 \Rightarrow \mu(\phi^{-1}(X)) = 0.$$

Άρα η $\phi^{-1}$ διατηρεί τα σύνολα μέτρου μηδέν.

Για το αντίστροφο, έστω $M > 0$ έτσι ώστε $|f| \leq M$ $\mu$-σχ.π. Τότε το μετρήσιμο σύνολο $A_M = \{x \in K : |f(x)| > M\}$ είναι μέτρου μηδέν, δηλαδή $\mu(A_M) = 0$. Ομοίως $|f \circ \phi| \leq M$ σχ.π. αν, και μόνο αν, $\mu(B_M) = 0$, όπου $B_M = \{x \in K : |f(\phi(x))| > M\} = \phi^{-1}(A_M)$. Άρα, αν η $\phi^{-1}$ διατηρεί τα σύνολα μηδενικού μέτρου, τότε για κάθε $M$,

$$|f| \leq M \text{ σχ.π.} \quad \Rightarrow |f \circ \phi| \leq M \text{ σχ.π.},$$

το οποίο σημαίνει ότι

$$\|f\|_\infty = \inf\{M : |f| \leq M \ \text{σχ.π.}\} \geq \inf\{M : |f \circ \phi| \leq M \ \text{σχ.π.}\} = \|f \circ \phi\|_\infty .$$

Ειδικότερα, αν $f = 0$ σχ.π., τότε $f \circ \phi = 0$ σχ.π., άρα η $f \to f \circ \phi$ είναι καλά ορισμένη. □

Στο εξής, λοιπόν, υποθέτουμε ότι η συνθήκη $\mu \circ \phi^{-1} \ll \mu$ ικανοποιείται και ορίζουμε την απεικόνιση

$$\beta : (L^\infty(K,\mu), \|\cdot\|_\infty) \to (L^\infty(K,\mu), \|\cdot\|_\infty) : f \mapsto f \circ \phi.$$

Παρατηρούμε ότι η ανισότητα $\|f\|_\infty \geq \|f \circ \phi\|_\infty$ δείχνει ότι η παραπάνω απεικόνιση είναι συστολή (το οποίο είναι αυτόματο αφού είναι *-μορφισμός).

**Σχόλιο 5.4.3** Έστω ότι η $\phi$ είναι ένας ισομορφισμός Borel, δηλαδή είναι 1-1, επί και η $\phi^{-1}$ είναι επίσης μετρήσιμη. (Αυτή η υπόθεση είναι αρκετά ισχυρή με την εξής έννοια. Για να εξασφαλιστεί ότι η $\beta$ είναι 1-1, είναι απαραίτητο να υποθέσουμε ότι η $\phi$ είναι σχεδόν επί, με την έννοια ότι $\mu(\phi(K)^c) = 0$. Διαφορετικά, αν η χαρακτηριστική συνάρτηση $\chi$ στο $(\phi(K)^c)$ ήταν μη-μηδενική στον $L^\infty(K,\mu)$, τότε το γεγονός ότι $\chi \circ \phi = 0$ έρχεται σε αντίθεση με το ότι η $\beta$ είναι 1-1.) *Τότε η απεικόνιση $\beta$ είναι 1-1 αν, και μόνο αν, η $\phi$ διατηρεί τα σύνολα μέτρου μηδέν, δηλαδή αν $\mu \ll \mu \circ \phi^{-1}$. Συνεπώς η $\beta$ είναι καλά ορισμένη και 1-1 αν, και μόνο αν, και η $\phi$ διατηρεί τα $\mu$-μηδενικά σύνολα.*

Πράγματι, αν η $f \to f \circ \phi$ είναι 1-1, τότε για κάθε σύνολο Borel $Y \subseteq K$, με $X = \phi(Y)$, έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \mu(\phi^{-1}(X)) = 0 \Rightarrow \|\beta(\chi_X)\|_\infty &= \left\|\chi_{\phi^{-1}(X)}\right\|_\infty = 0 \\ &\overset{(1\text{-}1)}{\Longrightarrow} \|\chi_X\|_\infty = 0 \Rightarrow \mu(X) = 0, \\ \text{άρα,} \quad \mu(Y) = 0 \ \Rightarrow \ \mu(\phi(Y)) = 0. & \end{aligned}$$

Επομένως η $\phi$ διατηρεί τα σύνολα μέτρου μηδέν.

Για το αντίστροφο, αν η $\phi$ διατηρεί τα σύνολα μέτρου μηδέν, τότε για κάθε $M$ έχουμε ότι

$$|f \circ \phi| \leq M \ \text{σχ.π.} \ \text{ ανν } \mu(B_M) = 0 \ \Rightarrow \ \mu(A_M) = 0 \ \text{ ανν } |f| \leq M \ \text{σχ.π.},$$

εφόσον $\phi(B_M) = A_M$. Αυτό όμως δίνει ότι

$$\begin{aligned} \|f\|_\infty &= \inf\{M : |f| \leq M \ \ \sigma\chi.\pi.\} \\ &\leq \inf\{M : |f \circ \phi| \leq M \ \ \sigma\chi.\pi.\} = \|f \circ \phi\|_\infty . \end{aligned}$$

Ειδικότερα, αν $f \circ \phi = 0$ σχ.π. τότε $f = 0$ σχ.π., άρα η απεικόνιση $f \to f \circ \phi$ είναι 1-1. Η ανισότητα $\|f\|_\infty \leq \|f \circ \phi\|_\infty$ δείχνει ότι είναι και ισομετρία. □

### Συμπέρασμα

*Υποθέτουμε ότι η $\phi$ είναι ισομορφισμός Borel και ότι η $\phi^{-1}$ διατηρεί τα σύνολα μέτρου μηδέν.* Τότε το μέτρο $\nu_\phi$, με $\nu_\phi(E) = \mu(\phi^{-1}(E))$, είναι απόλυτα συνεχές προς το $\mu$ και η παράγωγος Radon-Nikodyme $u^2$ κανοποιεί τη σχέση $d\nu_\phi = u^2 d\mu$. Άρα, για κάθε $g \in L^2(K, \mu)$, το ολοκλήρωμα της $|g \circ \phi^{-1}|^2$ είναι

$$\int |g(\phi^{-1}(x))|^2 u^2(x) d\mu(x) = \int |g(\phi^{-1}(x))|^2 d\nu_\phi(x) = \int |g(x)|^2 d\mu(x)$$

όπου η τελευταία ισότητα ισχύει για κάθε $g$, αφού ισχύει για τις χαρακτηριστικές συναρτήσεις:

$$\int |\chi_E \circ \phi^{-1}|^2 d\nu_\phi = \int |\chi_{\phi(E)}|^2 d\nu_\phi = \nu_\phi(\phi(E)) = \mu(E) = \int |\chi_E|^2 d\mu.$$

Έπεται ότι ο τελεστής $U : g \to u(g \circ \phi^{-1})$ απεικονίζει τον $L^2(K, \mu)$ ισομετρικά στον $L^2(K, \mu)$. Επιπλέον,

$$\begin{aligned} M_f U &: g \mapsto u(g \circ \phi^{-1}) \mapsto f u(g \circ \phi^{-1}) \\ U M_{f \circ \phi} &: g \mapsto (f \circ \phi) g \mapsto u f (g \circ \phi^{-1}), \end{aligned}$$

άρα $U M_{f \circ \phi} = M_f U$, δηλαδή η $M_{\beta(f)} = U^* M_f U$ (αφού $U^* U = I$).

*Υποθέτουμε επιπλέον ότι η $\phi$ διατηρεί τα σύνολα μέτρου μηδέν.* Τότε τα μέτρα $\nu_\phi$ και $\mu$ είναι ισοδύναμα, άρα η παράγωγος Radon-Nikodyme $u$ ικανοποιεί $u(x) > 0$ $\mu$-σχ.π. Έπεται ότι η εικόνα του $U$ είναι όλος ο χώρος $L^2(K, \mu)$. Διότι αν υπάρχει $h \in L^2(K, \mu)$ ορθογώνιο προς την εικόνα (η οποία είναι κλειστή αφού ο $U$ είναι ισομετρία), τότε για κάθε σύνολο Borel $E \subset K$ θέτουμε $g = \chi_E \circ \phi$, οπότε $g \in L^2(K, \mu)$ και

$$0 = \langle h, Ug \rangle = \int h(x) u(x) \chi_E d\mu(x) = \int_E h(x) u(x) d\mu(x),$$

επομένως $hu = 0$ σχ.π., και άρα $h = 0$ σχ.π. Συνεπώς ο $U$ είναι ορθομοναδιαίος. Άρα η απεικόνιση $M_f \to M_{\beta(f)}$ επάγεται από έναν ορθομοναδιαίο και ειδικότερα είναι *-ισομορφισμός.

### 5.4.2 Εφαρμογή Θ.

Εδώ θα εξηγήσουμε πώς το θεώρημα 4.2.12 είναι γενίκευση του αποτελέσματος του Peligrad στο **[35]** για $p = 2$. Πρώτα θα παρουσιάσουμε το μη αυτοσυζυγές σταυρωτό γινόμενο για $p = 2$ που ορίζεται στο **[35]** και θα δείξουμε ότι ταυτίζεται με w*-ημισταυρωτό γινόμενο που ορίζεται στο τέταρτο κεφάλαιο για w*-κλειστές άλγεβρες.

Έστω $(\mathcal{M}, \tau)$ μια finite άλγεβρα von Neumann και έστω $L^2(\mathcal{M}, \tau)$ ο χώρος Hilbert που σχετίζεται με το ζεύγος $(\mathcal{M}, \tau)$, με $\langle x, y\rangle = \tau(y^*x)$, για κάθε $x, y \in \mathcal{M}$. Έστω $\beta : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ ένας *-αυτομορφισμός (και άρα w*-συνεχής) που διατηρεί το ίχνος $\tau$, δηλαδή $\tau \circ \beta = \tau$. Θεωρούμε ότι η $\mathcal{M}$ δρα στον $L^2(\mathcal{M}, \tau)$ μέσω του αριστερού πολλαπλασιασμού $b \mapsto \lambda_b$.

*Ισχυρισμός 1.* Υπάρχει ένας ορθομοναδιαίος τελεστής $w \in \mathcal{B}(L^2(\mathcal{M}, \tau))$ που επάγει τον $\beta$, δηλαδή $\beta(x) = wxw^*$, για κάθε $x \in \mathcal{M}$.
*Απόδειξη.* Έστω $w_0 : \mathcal{M} \to \mathcal{M} : x \mapsto w_0(x) := \beta(x)$. Τότε η $w_0$ είναι μια καλά ορισμένη γραμμική απεικόνιση. Επίσης

$$\|w_0(x)\|_2^2 = \|\beta(x)\|_2^2 = \tau(\beta(x)^*\beta(x)) = \tau(\beta(x^*x)) = \tau(x^*x) = \|x\|_2^2.$$

Επομένως, η $w_0$ επεκτείνεται στην ισομετρία $w : L^2(\mathcal{M}, \tau) \to L^2(\mathcal{M}, \tau)$, εφόσον η $\mathcal{M}$ είναι $\|\cdot\|_2$-πυκνή στην $L^2(M, \tau)$.

Τώρα, έστω η $v_0 : \mathcal{M} \to \mathcal{M} : x \mapsto \beta^{-1}(x)$. Αυτή είναι επίσης καλά ορισμένη, γραμμική απεικόνιση και ισομετρία, και άρα επεκτείνεται στην ισομετρία $v : L^2(\mathcal{M}, \tau) \to L^2(\mathcal{M}, \tau)$. Προφανώς, έχουμε ότι $wv = vw = I$, άρα ο $w$ είναι ορθομοναδιαίος με $w^* = v$.

Τώρα, θα δείξουμε ότι ο $\beta$ επάγεται από τον ορθομοναδαίο $w$. Για κάθε $c \in \mathcal{M}$ έχουμε ότι

$$w\lambda_b w^*(c) = w\lambda_b(\beta^{-1}(c)) = w(b\beta^{-1}(c)) = \beta(b)c = \lambda_{\beta(b)}(c),$$

συνεπώς $wbw^* = \beta(b)$ για κάθε $b \in L^2(\mathcal{M}, \tau)$. □

Ορίζουμε το χώρο

$$\mathbb{L}_0^2 = \{f : \mathbb{Z} \mapsto \mathcal{M} : f(n) = 0, \text{ εκτός από πεπερασμένα } n \in \mathbb{Z}\}.$$

Τότε ο $\mathbb{L}_0^2$ είναι μια άλγεβρα pro-Hilbert, δηλαδή εφοδιάζεται με τις πράξεις:

$$1.\ (f * g)(n) = \sum \beta^k(f(n-k))g(k), \quad 2.\ (f^*)(n) = \beta^n(f(-n)^*),$$

έχει εσωτερικό γινόμενο

$$3.\ \langle f, g\rangle = \sum \langle f(k), g(k)\rangle_{L^2(\mathcal{M},\tau)} = \sum \tau(g(k)^* f(k)),$$

και μονάδα $\psi$, με $\psi(0) = I_{\mathcal{M}}, \psi(n) = 0, n \neq 0$.

Ο $\mathbb{L}_0^2$ ταυτίζεται με την γραμμική θήκη των στοιχείων $e_n \otimes x$, $n \in \mathbb{Z}$, $x \in \mathcal{M}$. Τότε, $\psi = e_0 \otimes I_{\mathcal{M}}$ και η συνέλιξη (1.) γίνεται

$$1'.\ (e_n \otimes x) * (e_m \otimes y) = e_{n+m} \otimes \beta^m(x)y,$$

για τους στοιχειώδεις τανυστές. Πράγματι,

$$\begin{aligned}(e_n \otimes x) * (e_m \otimes y)(\lambda) &= \sum \beta^k((e_n \otimes x)(\lambda - k))(e_m \otimes y)(k) \\ &= \beta^m((e_n \otimes x)(\lambda - m))y = \delta_{m+n,\lambda}\beta^m(x)y.\end{aligned}$$

Επομένως, $(e_n \otimes x) * (e_m \otimes y) = e_{m+n} \otimes \beta^m(x)y$. Παρατηρούμε ότι αυτός είναι ο ορισμός για τον αριστερό πολλαπλασιασμό της άλγεβρας $\ell^1(\beta, \mathcal{M}, \mathbb{Z})_l$. Επίσης, η (3.) γίνεται

$$3'.\ \langle e_n \otimes x, e_m \otimes y\rangle = \delta_{n,m}\langle x, y\rangle = \langle e_n, e_m\rangle\langle x, y\rangle.$$

Ονομάζουμε $\mathbb{L}^2$ το χώρο Hilbert που προκύπτει από την πλήρωση του $\mathbb{L}_0^2$ (ως προς το εσωτερικό γινόμενο), ο οποίος από τα προηγούμενα σχόλια είναι ο $\ell^2(\mathbb{Z}) \otimes L^2(\mathcal{M}, \tau)$. Επίσης, με $\mathbb{L}^\infty$ συμβολίζουμε την άλγεβρα των $f \in \mathbb{L}^2$ για τις οποίες η απεικόνιση $g \mapsto f * g$, για $g \in \mathbb{L}_0^2$, επεκτείνεται σε ένα φραγμένο τελεστή στον $\mathbb{L}^2$. Για κάθε τέτοια $f$ ορίζουμε τον τελεστή $L_f : \mathbb{L}^2 \to \mathbb{L}^2 : g \mapsto f * g$.

Έστω $\mathfrak{L} = \{L_f : f \in \mathbb{L}^\infty\}$. Αν ορίσουμε $\mathfrak{R} = \{R_f : f \in \mathbb{L}^\infty\}$, όπου $R_f(g) = g * f$, τότε $\mathfrak{L}' = \mathfrak{R}$ και $\mathfrak{R} = \mathfrak{L}'$ Επομένως $\mathfrak{L} = \mathfrak{L}''$ και άρα είναι άλγεβρα von-Neumann. Επιπλέον, συμβολίζοντας με $\delta$ το στοιχείο $e_1 \otimes I_{\mathcal{M}}$, τότε $\mathfrak{L} = \{L_x, L_\delta : x \in \mathcal{M}\}''$. Συνεπώς η $\mathfrak{L}$ είναι μια υπάλγεβρα von Neumann του τανυστικού γινομένου αλγεβρών von Neumann $\mathcal{B}(\mathbb{L}^2) = \mathcal{B}(\ell^2(\mathbb{Z})) \otimes \mathcal{B}(L^2(\mathcal{M}, \tau))$. Παρατηρούμε ότι ο $L_\delta$ είναι η ampliation του bilateral shift. Πράγματι, $L_\delta(e_n \otimes x) = \delta * (e_n \otimes x) = e_{n+1} \otimes x$, εφόσον

$$\begin{aligned}(\delta * (e_n \otimes x))(m) &= \sum \beta^k(\delta(m-k))(e_n \otimes x)(k) \\ &= \beta^n(\delta(m-n))x = \delta_{m-n,1}\beta^k(I_{\mathcal{M}})x = \delta_{m,n+1}x.\end{aligned}$$

Επιπλέον, η $\mathfrak{L}$ εφοδιάζεται με το finite ίχνος $\tilde{\tau}$ που επάγεται από το $\tau$, έτσι ώστε $\tilde{\tau}(L_f) = \tau(f(0)) = \langle L_f(\psi), \psi\rangle$.

Παρατηρούμε ότι για κάθε $x \in \mathcal{M}$, έχουμε $L_x(e_m \otimes y) = (e_0 \otimes x) * (e_m \otimes y) = e_m \otimes \beta^m(x)y$. Επομένως, αν ταυτίσουμε τον $\mathbb{L}^2$ με τον $\ell^2(\mathbb{Z}) \otimes L^2(\mathcal{M}, \tau)$, τότε $L_x = \sum_{n\in\mathbb{Z}} p_n \otimes \beta^n(x)$. Άρα, η $\mathfrak{L}$ είναι το *$w^*$-crossed product της* $\mathcal{M}$ που δρα στον $L^2(\mathcal{M}, \tau)$.

*Ισχυρισμός 3.* $\mathbb{L}^2 = L^2(\mathfrak{L}, \tilde{\tau})$.
*Απόδειξη.* Εφόσον $\mathbb{L}^2_0 \subseteq \mathbb{L}^\infty \subseteq \mathbb{L}^2$, αρκεί να αποδείξουμε ότι ο χώρος $\{L_f : f \in \mathbb{L}^2_0\}$ είναι πυκνός στον $\mathbb{L}^2$, ως προς το εσωτερικό γινόμενο $\langle L_f, L_g\rangle = \tilde{\tau}(L_f^* L_g)$. Αρκεί, επομένως, να δείξουμε ότι το εσωτερικό γινόμενο που επάγεται από το $\tilde{\tau}$ ταυτίζεται με το εσωτερικό γινόμενο που ορίστηκε αρχικά ώστε ο χώρος $\mathbb{L}^2_0$ να εφοδιαστεί με δομή άλγεβρας pro-Hilbert. Έστω, λοιπόν, $f, g \in \mathbb{L}^2_0$. Τότε

$$\begin{aligned}\langle L_f, L_g\rangle &= \tilde{\tau}(L_f^* L_g) = \tilde{\tau}(L_{f^* * g}) \\ &= \tau((f^* * g)(0)) = \sum \tau(\beta^k(f^*(-k))g(k)) \\ &= \sum \tau(\beta^k(\beta^{-k}(f(k)^*))g(k)) = \sum \tau(f(k)^* g(k)) = \langle g, f\rangle . \ \square\end{aligned}$$

Ορίζουμε $\mathbb{L}^\infty_n = \{f \in \mathbb{L}^\infty : f(k) = 0, k \neq n\}$, και $\mathbb{H}^2 = \overline{span\{\cup_{n\geq 0}\mathbb{L}^\infty_n\}}^{\|\cdot\|_2}$.

*Ισχυρισμός 4.* $\mathbb{H}^2 = \{f \in \mathbb{L}^2 : f(n) = 0,\ n < 0\}$, επομένως $\mathbb{H}^2 = \ell^2(\mathbb{Z}_+) \otimes L^2(\mathcal{M}, \tau)$.
*Απόδειξη.* Εφόσον $\mathbb{L}^\infty_n \subseteq \{f \in \mathbb{L}^2 : f(n) = 0,\ n < 0\}$, για κάθε $n \geq 0$, έχουμε ότι $\mathbb{H}^2 \subseteq \{f \in \mathbb{L}^2 : f(n) = 0,\ n < 0\}$. Για το αντίστροφο, έστω $f \in \{f \in \mathbb{L}^2 : f(n) = 0,\ n < 0\}$. Τότε για τυχαίο $\epsilon > 0$, υπάρχει μια $g \in \mathbb{L}^2_0$, έτσι ώστε $\|f - g\|_2 < \epsilon$. Έστω $h$ το στοιχείο στον $\mathbb{H}^2$ με

$$h(k) = \begin{cases} g(k) & , k \geq 0, \\ 0 & , k < 0. \end{cases}$$

Τότε

$$\begin{aligned}\|f - h\|_2^2 &= \sum_{k\geq 0} \tau((f-h)(k)^*(f-h)(k)) \\ &= \sum_{\mathbf{k}\geq \mathbf{0}} \tau(f(k)^* f(k) - f(k)^* g(k) - g(k) f(k) + g(k)^* g(k)).\end{aligned}$$

Όμως $f(k) = 0$, για κάθε $k < 0$ και $g(k)^*g(k) \geq 0$, για κάθε $k < 0$. Άρα μπορούμε να δούμε ότι $\|f-h\|_2^2 \leq \sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}} \tau(f(k)^*f(k) - f(k)^*g(k) - g(k)f(k) + g(k)^*g(k)) = \|f-g\|_2^2$. Συνεπώς, $\|f-h\|_2 < \epsilon$. $\square$

Για κάθε $t \in \mathbb{R}$ ορίζουμε τον ορθομοναδιαίο τελεστή $U_t \in \mathcal{B}(\mathbb{L}^2)$, έτσι ώστε $(U_t(f))(n) = e^{2\pi int}f(n)$, $f \in \mathbb{L}^2$ και ορίζουμε τους συντελεστές Fourier

$$\mathcal{E}_n(L_f) = \int_0^1 e^{-2\pi int}\beta_t(L_f)dt, f \in \mathbb{L}^\infty,$$

όπου $\beta_t(L_f) = U_tL_fU_t^*$, και το ολοκλήρωμα συγκλίνει ως προς τη w*-τοπολογία του $\mathcal{B}(\mathbb{L}^2)$. Εφαρμόζοντας το Λήμμα του Féjer έχουμε ότι οι μέσοι όροι των $\mathcal{E}_n(L_f)$ συγκλίνουν στον $L_f$ ως προς τη w*-τοπολογία.

Επίσης, ορίζουμε

$$E_n(f) = \int_0^1 e^{-2\pi int}U_t^2(f)dt, f \in \mathbb{L}^2,$$

όπου $U_t^2$ είναι η *2-επέκταση του* $\beta_t$ στον $\mathbb{L}^2$, και το ολοκλήρωμα συγκλίνει ως προς τη $\|\cdot\|_2$-νόρμα. Εδώ σημειώνουμε ότι για $f \in \mathbb{L}^\infty$, έχουμε $\mathcal{E}_n(L_f) = L_{E_n(f)}$.

*Ισχυρισμός 5.* Για κάθε $f \in \mathbb{L}^\infty$ και $n \in \mathbb{Z}$, $\mathcal{E}_n(L_f) = L_{e_n\otimes f(n)} = (L_\delta)^nL_{f(n)}$.
*Απόδειξη.* Εφόσον $e_n \otimes f(n) = \delta^n * (e_0 \otimes f(n))$ και η απεικόνιση $f \mapsto L_f$ είναι *-ισομορφισμός, έχουμε τη δεύτερη ισότητα. Έστω $m, k \in \mathbb{Z}$ και $x, y \in \mathcal{M}$. Τότε

$$\langle\mathcal{E}_n(L_f)(e_m \otimes x), e_n \otimes y\rangle = \int_0^1 e^{-(n+m-k)2\pi it}\,\langle L_f(e_m \otimes x), e_k \otimes y\rangle$$
$$= \int_0^1 e^{-(n+m-k)2\pi it}\sum_\lambda \langle(f * (e_m \otimes x))(\lambda), (e_k \otimes y)(\lambda)\rangle$$
$$= \int_0^1 e^{-(n+m-k)2\pi it}\,\langle(f * (e_m \otimes x))(k), y\rangle$$
$$= \int_0^1 e^{-(n+m-k)2\pi it}\tau(y^*(f * (e_m \otimes x))(k))$$
$$= \int_0^1 e^{-(n+m-k)2\pi it}\sum_\lambda \tau(y^*\beta^k(f(k-\lambda))(e_m \otimes x)(\lambda))$$
$$= \int_0^1 e^{-(n+m-k)2\pi it}\tau(y^*\beta^m(f(k-m))x)$$
$$= \delta_{n+m,k}\tau(y^*\beta^m(f(k-m))x) = \delta_{n+m,k}\tau(y^*\beta^m(f(n))x)$$

$$= \langle e_{n+m} \otimes \beta^m(f(n))x, e_k \otimes y\rangle = \langle (e_n \otimes f(n)) * (e_m \otimes x), e_k \otimes y\rangle$$
$$= \left\langle L_{e_n \otimes f(n)}(e_m \otimes x), e_k \otimes y \right\rangle. \ \square$$

Ορίζουμε $\mathbb{H}^\infty = \{f \in \mathbb{L}^\infty : \mathcal{E}_n(f) = 0,\ n < 0\}$. Από τον προηγούμενο ισχυρισμό έχουμε ότι $f \in \mathbb{H}^\infty$ αν, και μόνο αν, $(L_\delta)^n L_{f(n)} = 0$, $n < 0$, αν, και μόνο αν, $L_{f(n)} = 0$, $n < 0$, αν, και μόνο αν, $f \in \mathbb{L}^\infty$ και $f(n) = 0$, $n < 0$. Τότε το *μη-αυτοσυζυγές σταυρωτό γινόμενο* είναι η $\mathfrak{L}_+ = \{L_f : f \in \mathbb{H}^\infty\} \subseteq \mathcal{B}(\mathbb{H}^2)$.

*Ισχυρισμός 6.* $\mathfrak{L}_+ = \overline{span\{L_\delta, L_x : x \in \mathcal{M}\}}^{\omega^*} \subseteq \mathcal{B}(\mathbb{H}^2)$.
*Απόδειξη.* Πρώτα από όλα παρατηρούμε ότι χρησιμοποιούμε καταχρηστικά τα σύμβολα $L_\delta$ και $L_x$. Εδώ, ο $L_\delta$ είναι η ampliation του unilateral shift και ο $L_x$ είναι ο τελεστής $\sum_{n\geq 0} p_n \otimes \beta^n(x)$. Επίσης παρατηρούμε ότι αν $L_f \in \mathfrak{L}_+$, τότε $\mathcal{E}_n(f) = 0$, για $n < 0$ και ότι ο $\mathcal{E}_n(L_f)$ ανήκει στην $\mathcal{B}(\mathbb{H}^2)$. Επομένως από το Λήμμα του Féjer ολοκληρώνεται η απόδειξη. □

Ο τελευταίος ισχυρισμός δείχνει ότι το μη-αυτοσυζυγές σταυρωτό γινόμενο για $p = 2$ που ορίζεται στο **[35]** είναι ακριβώς το w*-ημισταυρωτό γινόμενο που ορίζεται στο τέταρτο κεφάλαιο για w*-κλειστές άλγεβρες.

## 5.5 Σύνδεση με τις $C^*$-αντιστοιχίες

Δύο βασικά παραδείγματα μη-αυτοσυζυγών αλγεβρών τελεστών που εξετάσαμε είναι η άλγεβρα ενός γραφήματος $\mathcal{A}_G$ και το ημισταυρωτό γινόμενο ενός ζεύγους $(\mathcal{C}, \alpha)$ ως προς τα left covariant contractive ζεύγη, όπου $\mathcal{C}$ μια $C^*$-άλγεβρα και $\alpha$ ένας *-μορφισμός της. Αυτές οι δύο κατασκευές έχουν αρκετές ομοιότητες. Για παράδειγμα, μπορούμε να παρατηρήσουμε και οι δύο άλγεβρες περιέχουν ως υπάλγεβρα μια $C^*$-άλγεβρα. Η $\mathcal{A}_G$ περιέχει τη $C^*$-άλγεβρα που παράγεται από τις προβολές $\{p_x\}_{x\in G^0}$ και το ημισταυρωτό γινόμενο περιέχει τη $\mathcal{C}$. Σε αυτήν την ενότητα θα δείξουμε ότι και οι δύο αυτές κατασκευές κωδικοποιούνται με τον ίδιο τρόπο, και αποτελούν βασικά παραδείγματα των *$C^*$-αντιστοιχιών*. Εδώ πρέπει να αναφέρουμε για ιστορικούς λόγους ότι το πρώτο βήμα προς αυτήν την κατεύθυνση έγινε από τον Pimsner στο **[38]**, ενώ το αρχετυπικό παράδειγμα ήταν οι άλγεβρες Cuntz.

Σε αυτό το σημείο πρέπει να ζητήσω τη συμπάθεια του αναγνώστη και να με συγχωρέσει για το εξαιρετικά σύντομο της ακόλουθης περιγραφής, αλλά το παρόν θέμα βρίσκεται στα όρια του ενδιαφέροντος της παρούσης εργασίας. Οι λόγοι που με ώθησαν να το παρουσιάσω είναι καταρχάς η πληρότητα της εργασίας (για αυτό και συμπεριλαμβάνεται στο παράρτημα και όχι στο κύριο μέρος της) αλλά και επειδή οι $C^*$-αντιστοιχίες έχουν προσελκύσει την τελευταία δεκαετία (τουλάχιστον) το επιστημονικό ενδιαφέρον στους κύκλους της Θεωρίας Τελεστών. Ο αναγνώστης μπορεί να ανατρέξει στο **[27]** για τη βασική ορολογία των προτύπων Hilbert και στο **[26]** για όσα αναφέρονται σχετικά με τις $C^*$-αντιστοιχίες.

Έστω $\mathcal{C}$ μια $C^*$-άλγεβρα. Ένα (δεξί) $\mathcal{C}$-πρότυπο Hilbert είναι ένας χώρος Banach $\mathcal{X}$ εφοδιασμένος με μια δεξιά δράση της $\mathcal{C}$, έτσι ώστε $\lambda(\xi \cdot c) = (\lambda\xi)\cdot c = \xi \cdot (\lambda c)$, για κάθε $\xi \in \mathcal{X}$, $c \in \mathcal{C}$ και $\lambda \in \mathbb{C}$, και ένα εσωτερικό γινόμενο $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{X}} : \mathcal{X} \times \mathcal{X} \to \mathcal{C}$, που παίρνει τιμές στη $\mathcal{C}$, έτσι ώστε να ικανοποιούνται τα εξής:

i. $\langle \xi, \lambda\eta + \mu z \rangle_{\mathcal{X}} = \lambda \langle \xi, \eta \rangle + \mu \langle \xi, z \rangle$, για κάθε $\xi, \eta, z \in \mathcal{X}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$.

ii. $\langle \eta, \xi \rangle_{\mathcal{X}}^* = \langle \xi, \eta \rangle_{\mathcal{X}}$, για κάθε $\xi, \eta \in \mathcal{X}$.

iii. $\langle \xi, \eta c \rangle_{\mathcal{X}} = \langle \xi, \eta \rangle_{\mathcal{X}} c$, για κάθε $\xi, \eta \in \mathcal{X}$ και $c \in \mathcal{C}$.

Ένα (δεξί) πρότυπο Hilbert καλείται *full* αν το ιδεώδες $\langle \mathcal{X}, \mathcal{X} \rangle$ είναι πυκνό στη $\mathcal{C}$.

**Παράδειγμα 5.5.1** Κάθε $C^*$-άλγεβρα $\mathcal{C}$ έχει τη δομή προτύπου Hilbert ως προς τον εαυτό της, θεωρώντας $b \cdot c = bc$, για κάθε $b, c \in \mathcal{C}$ και $\langle b, c \rangle_{\mathcal{C}} = b^* c$, για κάθε $b, c \in \mathcal{C}$.

Έστω τώρα $\mathcal{X}$ και $\mathcal{Y}$ δύο πρότυπα Hilbert ως προς την ίδια $C^*$-άλγεβρα $\mathcal{C}$. Ορίζουμε $\mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ το σύνολο των γραμμικών απεικονίσεων $T : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$, για τις οποίες υπάρχει μια γραμμική απεικόνιση $T^* : \mathcal{Y} \to \mathcal{X}$, έτσι ώστε

$$\langle T\xi, \eta \rangle_{\mathcal{Y}} = \langle \xi, T^*\eta \rangle_{\mathcal{X}}, \quad \text{για κάθε } \xi \in \mathcal{X}, \eta \in \mathcal{Y}.$$

Τότε, αυτομάτως κάθε $T \in \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ είναι $\mathcal{C}$-γραμμική, με την έννοια ότι $T(\xi c) = T(\xi)c$. Επιπλέον, προκύπτει από το Θεώρημα Banach-Steinhaus, ότι είναι και φραγμένη.

Ειδικότερα, για $\xi \in \mathcal{X}$ και $\eta \in \mathcal{Y}$, ορίζουμε τον τελεστή $\theta_{\xi,\eta} \in \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$, με $\theta_{\eta,\xi}(\zeta) = \eta \langle \xi, \zeta \rangle_{\mathcal{X}} \in \mathcal{Y}$, για κάθε $\zeta \in \mathcal{X}$. Με $\mathcal{K}(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) \subseteq \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ συμβολίζουμε την κλειστή γραμμική θήκη των $\theta_{\eta,\xi}$, και κάθε $\theta_{\eta,\xi}$ καλείται *συμπαγής τελεστής*.

Όταν $\mathcal{X} = \mathcal{Y}$, θέτουμε $\mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{X}) = \mathcal{L}(\mathcal{X})$ και $\mathcal{K}(\mathcal{X}, \mathcal{X}) = \mathcal{K}(\mathcal{X})$. Είναι εύκολο να δούμε ότι η $\mathcal{L}(\mathcal{X})$ είναι μια $C^*$-άλγεβρα και ότι το $\mathcal{K}(\mathcal{X})$ είναι ένα κλειστό ιδεώδες της.

**Ορισμός 5.5.2** Μια $C^*$-*αντιστοιχία* είναι μια τριπλέτα $(\mathcal{X}, \mathcal{C}, \alpha)$, όπου το $\mathcal{X}$ είναι ένα πρότυπο Hilbert ως προς τη $\mathcal{C}$ και η $\alpha : \mathcal{C} \to \mathcal{L}(\mathcal{X})$ ένας *-μορφισμός.

Μια $C^*$-αντιστοιχία $(\mathcal{X}, \mathcal{C}, \alpha)$ καλείται πιστή, αν η $\alpha$ είναι πιστή. Επιπλέον, καλείται μη-εκφυλισμένη, αν η $\alpha$ είναι μη-εκφυλισμένη, δηλαδή ο χώρος $\alpha(\mathcal{C})\mathcal{X}$ είναι πυκνός στον $\mathcal{X}$.

Κεντρικό ρόλο στην θεωρία των $C^*$-αντιστοιχιών έχει το ιδεώδες (της $\mathcal{C}$)

$$\begin{aligned}\mathcal{J}_{\mathcal{X}} &= \alpha^{-1}(\mathcal{K}(\mathcal{X})) \cap \ker\alpha^{\perp} \\ &= \{c \in \mathcal{C} : \alpha(c) \in \mathcal{K}(\mathcal{X}), cb = 0 \ \forall \ b \in \ker\alpha\}.\end{aligned}$$

Οι *αναπαραστάσεις* μιας $C^*$-αντιστοιχίας $(\mathcal{C}, \alpha)$, σε ένα χώρο Hilbert $H$, είναι τα ζεύγη $(\pi, t)$, όπου $\pi : \mathcal{C} \to \mathcal{B}(H)$ *-μορφισμός και $t : \mathcal{X} \to \mathcal{B}(H)$ γραμμική απεικόνιση έτσι ωστε να ικανοποιούνται οι εξής συνθήκες:

i. $t(\xi)^* t(\eta) = \pi(\langle \xi, \eta \rangle_{\mathcal{X}})$, για κάθε $\xi, \eta \in \mathcal{X}$,

ii. $\pi(c)t(\xi) = t(\alpha(c)\xi)$, για κάθε $c \in \mathcal{C}$, $\xi \in \mathcal{X}$.

Από τις προηγούμενες συνθήκες προκύπτει αυτόματα ότι $t(\xi)\pi(c) = t(\xi c)$ και ότι η $t$ είναι αυτομάτως συστολή. Ειδικότερα, η $t$ είναι ισομετρία αν, και μόνο αν, η $\pi$ είναι 1-1. Σε αυτήν την περίπτωση η αναπαράσταση $(\pi, t)$ θα λέμε ότι είναι 1-1.

Κάθε αναπαράσταση $(\pi, t)$ της $(\mathcal{X}, \mathcal{C}, \alpha)$ επάγει ένα *-μορφισμό $\psi_t : \mathcal{K}(\mathcal{X}) \to \mathcal{B}(H)$ έτσι ώστε $\psi_t(\theta_{\xi,\eta}) = t(\xi)t(\eta)^*$. Μια αναπαράσταση $(\pi, t)$ θα καλείται *συναλλοίωτη* αν $\psi_t(\alpha(c)) = \pi(c)$, για κάθε $c \in \mathcal{J}_{\mathcal{X}}$.

Επίσης θα μας χρειαστεί η έννοια του *εσωτερικού τανυστικού γινομένου δύο προτύπων Hilbert*. Έστω, λοιπόν, το αλγεβρικό τανυστικό γινόμενο $\mathcal{X} \odot \mathcal{X}$. Τότε με $\mathcal{X} \otimes_{\mathcal{C}} \mathcal{X}$ συμβολίζουμε το πηλίκο του $\mathcal{X} \odot \mathcal{X}$ με τον υπόχωρο που παράγουν τα στοιχεία της μορφής

$$\xi c \otimes \eta - \xi \otimes \alpha(c)\eta.$$

Ο $\mathcal{X} \otimes_{\mathcal{C}} \mathcal{X}$ αποκτά δομή προτύπου με δεξιά δράση

$$(\xi \otimes \eta)c = \xi \otimes (\eta c),$$

και εσωτερικό γινόμενο

$$\langle \xi_1 \otimes \eta_1, \xi_2 \otimes \eta_2 \rangle = \langle \eta_1, \alpha(\langle \xi_1, \xi_2 \rangle)\eta_2 \rangle_{\mathcal{X}}.$$

Τότε το *εσωτερικό τανυστικό γινόμενο του $\mathcal{X}$ με το $\mathcal{X}$* είναι η πλήρωση του $\mathcal{X} \otimes_{\mathcal{C}} \mathcal{X}$ ως προς το εσωτερικό γινόμενο και θα συμβολίζεται απλά με $\mathcal{X} \otimes \mathcal{X}$. Επιπλέον, αν ορίσουμε

$$\alpha_2 : \mathcal{C} \to \mathcal{L}(\mathcal{X} \otimes \mathcal{X}),$$

με $\alpha_2(c)(\xi\otimes\eta) = (\alpha(c)\xi)\otimes\eta$, τότε η τριπλέτα $(\mathcal{X}\otimes\mathcal{X}, \mathcal{C}, \alpha_2)$ είναι μια $C^*$-αντιστοιχία. Επαγωγικά ορίζουμε $\mathcal{X}^{\otimes n} = \mathcal{X}^{\otimes n-1} \otimes \mathcal{X}$, ενώ θέτουμε $\mathcal{X}^{\otimes 0} = \mathcal{C}$, με $\alpha_0 = \mathrm{id}_{\mathcal{C}}$.

Θέτοντας $t^n(\xi_1 \otimes \cdots \otimes \xi_n) = t(\xi_1)\cdots t(\xi_n)$, για μια αναπαράσταση $(\pi, t)$ έχουμε το εξής θεώρημα.

**Θεώρημα 5.5.3** *Έστω $(\mathcal{X}, \mathcal{C}, \alpha)$ μια $C^*$-αντιστοιχία και $(\pi, t)$ μια αναπαράστασή της. Αν $C^*(\pi, t)$ είναι η $C^*$-άλγεβρα που παράγεται από τις εικόνες των $\pi$ και $t$, τότε αυτή ισούται με την κλειστή θήκη του χώρου*

$$\mathrm{span}\{t^n(\xi_1 \otimes \cdots \otimes \xi_n)t^m(\eta_1 \otimes \cdots \otimes \eta_n)^* : n, m \in \mathbb{Z}_+\}. \quad \square$$

**Ορισμός 5.5.4** Με $\mathcal{T}_{\mathcal{X}}$ συμβολίζουμε την *καθολική $C^*$-άλγεβρα* που παράγεται από *όλες* τις αναπαραστάσεις της $C^*$-αντιστοιχίας $(\mathcal{X}, \mathcal{C}, \alpha)$. Με $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$ συμβολίζουμε την *καθολική $C^*$-άλγεβρα* που παράγεται από *όλες* τις συναλλοίωτες αναπαραστάσεις της $C^*$-αντιστοιχίας $(\mathcal{X}, \mathcal{C}, \alpha)$.

Με τον όρο *όλες* εννοούμε ότι παίρνουμε τις αναπαραστάσεις σε χώρους Hilbert που η διάσταση τους είναι μικρότερη από ένα αρκούντως μεγάλο άνω φράγμα. Τότε η $\mathcal{T}_{\mathcal{X}}$ (αντ. η $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$) είναι το ευθύ άθροισμα των $C^*(\pi, t)$, όπου $(\pi, t)$ (αντ. συναλλοίωτη) αναπαράσταση της $(\mathcal{X}, \mathcal{C}, \alpha)$. Ισοδύναμα, αν $(\bar{\pi}_{\mathcal{X}}, \bar{t}_{\mathcal{X}})$ (αντ. $(\pi_{\mathcal{X}}, t_{\mathcal{X}})$) είναι το ευθύ άθροισμα *όλων* των (αντ. συναλλοίωτων) αναπραστάσεων της $(\mathcal{X}, \mathcal{C}, \alpha)$, τότε $\mathcal{T}_{\mathcal{X}} = C^*(\bar{\pi}_{\mathcal{X}}, \bar{t}_{\mathcal{X}})$ (αντ. $\mathcal{O}_{\mathcal{X}} = C^*(\pi_{\mathcal{X}}, t_{\mathcal{X}})$).

**Ορισμός 5.5.5** Με $\mathcal{T}_{\mathcal{X}}^+$ ορίζουμε την κλειστή θήκη του χώρου

$$\mathrm{span}\{\bar{t}_{\mathcal{X}}^n(\xi_1 \otimes \cdots \xi_n) : n \in \mathbb{Z}_+\}$$

μέσα στην $\mathcal{T}_{\mathcal{X}}$.

Η επόμενη κατασκευή μας εξασφαλίζει ότι οι οικογένειες ως προς τις οποίες ορίζονται οι $\mathcal{T}_{\mathcal{X}}$ και $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$ είναι μη-κενές. Ορίζουμε τον *χώρο Fock $\mathcal{F}_{\mathcal{X}}$* να είναι το *ευθύ άθροισμα των $C^*$-αντιστοιχιών $(\mathcal{X}^{\otimes n}, \mathcal{C}, \alpha_n)$*,

$$\mathcal{F}_{\mathcal{X}} = \mathcal{C} \bigoplus \mathcal{X} \bigoplus \mathcal{X}^{\otimes 2} \bigoplus \cdots.$$

Για κάθε $\xi \in \mathcal{X}$, ορίζουμε τον τελεστή $t_\infty(\xi) \in \mathcal{L}(\mathcal{F}_{\mathcal{X}})$ μέσω του τύπου

$$t_\infty(\xi)(c, \zeta_1, \zeta_2, \dots) = (0, \xi c, \xi \otimes \zeta_1, \xi \otimes \zeta_2, \dots),$$

όπου $\zeta_n \in \mathcal{X}^{\otimes n}$, $n \in \mathbb{Z}_+$. Επίσης, για κάθε $c \in \mathcal{C}$, ορίζουμε τον διαγώνιο τελεστή $\pi_\infty(c) \in \mathcal{L}(\mathcal{F}_\mathcal{X})$ που έχει στην $n$-θέση το στοιχείο $\alpha(c) \otimes \mathrm{id}_{n-1}$. Τότε η $(\pi_\infty, t_\infty)$ ορίζει μια αναπαράσταση της $(\mathcal{X}, \mathcal{C}, \alpha)$, η οποία καλείται *αναπαράσταση Fock* του $\mathcal{X}$.

Τώρα, έστω το ιδεώδες $\mathcal{K}(\mathcal{F}(\mathcal{X})\mathcal{J}_\mathcal{X})$ και

$$q : \mathcal{L}(\mathcal{F}(\mathcal{X})) \to \mathcal{L}(\mathcal{F}(\mathcal{X}))/\mathcal{K}(\mathcal{F}(\mathcal{X})\mathcal{J}_\mathcal{X})$$

ο φυσιολογικός *-επιμορφισμός. Θέτουμε $\pi = q \circ \pi_\infty$ και $\tau = q \circ t_\infty$. Τότε το ζεύγος $(\pi, \tau)$ ορίζει μια συναλλοίωτη αναπαράσταση της $(\mathcal{X}, \mathcal{C}, \alpha)$.

Οι Fowler και Raeburn **[16]** (αντ. ο Katsura **[26]**) έχουνε δείξει ότι η $C^*$-άλγεβρα $C^*(\pi_\infty, t_\infty)$ (αντ. $C^*(\pi, \tau)$) είναι ισόμορφη προς την $\mathcal{T}_\mathcal{X}$ (αντ. $\mathcal{O}_\mathcal{X}$). Γενικότερα έχουμε τα εξής θεωρήματα. Υπενθυμίζουμε ότι μια αναπαράσταση $(\pi, t)$ *δέχεται δυική δράση* αν υπάρχει μια point-norm-συνεχής οικογένεια *-αυτομορφισμών $\{\beta_z\}_{z \in \mathbb{T}}$ της $C^*(\pi, t)$ έτσι ώστε $\beta_z(\pi(c)) = \pi(c)$ και $\beta_z(t(\xi)) = zt(\xi)$.

**Θεώρημα 5.5.6** *Έστω $(\pi, t)$ μια αναπαράσταση της $C^*$-αντιστοιχίας $(\mathcal{X}, \mathcal{C}, \alpha)$. Η $\mathcal{T}_\mathcal{X}$ είναι *-ισόμορφη προς την $C^*(\pi, t)$ αν, και μόνο αν, η $(\pi, t)$ δέχεται δυική δράση και το ιδεώδες $\{c \in \mathcal{C} : \pi(c) \in \psi_t(\mathcal{K}(\mathcal{X}))\}$ είναι τετριμμένο.* □

**Θεώρημα 5.5.7** *Έστω $(\pi, t)$ μια συναλλοίωτη αναπαράσταση της $C^*$-αντιστοιχίας $(\mathcal{X}, \mathcal{C}, \alpha)$. Η $\mathcal{O}_\mathcal{X}$ είναι *-ισόμορφη προς την $C^*(\pi, t)$ αν, και μόνο αν, η $(\pi, t)$ δέχεται δυική δράση και είναι πιστή.* □

## 5.5.1 Παραδείγματα

### Άλγεβρες Γραφημάτων

Έστω το γράφημα $G = (G^0, G^1, s, r)$ και έστω $C_0(G^0)$ (αντ. $C_c(G^1)$) οι συνεχείς συναρτήσεις στο $G^0$ που μηδενίζονται στο άπειρο (αντ. οι συνεχείς συναρτήσεις με συμπαγή φορέα). Για κάθε $c \in C_0(G^0)$ και $\xi, \eta \in C(G^1)$ ορίζουμε

$$\begin{aligned} &\text{i. } (\xi \cdot c)(e) = \xi(e)c(s(e)), \\ &\text{ii. } \langle \xi, \eta \rangle (x) = \sum_{s(e)=x} \overline{\xi(e)}\eta(e), \\ &\text{iii. } \alpha(c)\xi(e) = \xi(e)c(r(e)), \quad e \in C(G^1). \end{aligned}$$

Ορίζοντας $\mathcal{X}$ να είναι η πλήρωση του $C_c(G^1)$ ως προς τη νόρμα που προκύπτει από το εσωτερικό γινόμενο, μπορούμε να αποδείξουμε ότι η $(\mathcal{X}, C_0(G^0), \alpha)$ είναι μια $C^*$-αντιστοιχία. Τότε οι $\mathcal{T}_\mathcal{X}, \mathcal{O}_\mathcal{X}, \mathcal{T}_\mathcal{X}^+$ είναι αντίστοιχα οι $\mathcal{T}_G, C^*(G)$ και $\mathcal{A}_G$ που ορίζονται στο πρώτο κεφάλαιο.

### Ημισταυρωτά Γινόμενα

Έστω $\alpha : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ ένας *-μορφισμός. Τότε η $(\mathcal{C}, \mathcal{C}, \alpha)$ είναι μια $C^*$-αντιστοιχία, θεωρώντας τη $\mathcal{C}$ ως πρότυπο Hilbert ως προς τον εαυτό της, και με αρίστερη δράση $\alpha(c)(b) = \alpha(c)b$, για $c, b \in \mathcal{C}$. Εδώ κάνουμε κατάχρηση του συμβόλου $\alpha$ για να υποδηλώσουμε και τον *-μορφισμό $\alpha : \mathcal{C} \to \mathcal{L}(\mathcal{C})$.

Ας υποθέσουμε για λόγους απλότητας ότι η $\mathcal{C}$ έχει μονάδα και ότι $\alpha(1_{\mathcal{C}}) = 1_{\mathcal{C}}$. Τότε η $\mathcal{C}$ ως $\mathcal{C}$-πρότυπο παράγεται από τη $1_{\mathcal{C}}$. Έστω τώρα $(\pi, t)$ μια αναπαράσταση της $(\mathcal{C}, \mathcal{C}, \alpha)$. Τότε η $t$ καθορίζεται πλήρως από την τιμή $t(1_{\mathcal{C}})$, αφού $t(c) = t(1_{\mathcal{C}}c) = t(1_{\mathcal{C}})\pi(c)$. Επίσης,

$$I_H = \pi(1_{\mathcal{C}}) = \pi(\langle 1_{\mathcal{C}}, 1_{\mathcal{C}} \rangle) = t(1_{\mathcal{C}})^* t(1_{\mathcal{C}}),$$

ενώ έχουμε ότι

$$\pi(c)t(1_{\mathcal{C}}) = t(\alpha(c)(1_{\mathcal{C}})) = t(\alpha(c)) = t(1_{\mathcal{C}}\alpha(c)) = t(1_{\mathcal{C}})\pi(\alpha(c)).$$

Επομένως κάθε αναπαράσταση $(\pi, t)$ επάγει ένα left covariant isometric ζεύγος του $(\mathcal{C}, \alpha)$. Είναι εύκολο να δούμε ότι και το αντίστροφο ισχύει. Επομένως η $\mathcal{T}_{\mathcal{C}}^+$ είναι το ημισταυρωτό γινόμενο του $(\mathcal{C}, \alpha)$ ως προς τα left covariant isometric ζεύγη.

### Διπρότυπα Hilbert

Ένα *διπρότυπο Hilbert* είναι μια $C^*$-αντιστοιχία $(\mathcal{X}, \mathcal{C}, \alpha)$ στην οποία ορίζεται ένα αριστερό εσωτερικό γινόμενο ${}_{\mathcal{X}}\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathcal{X} \times \mathcal{X} \to \mathcal{C}$, που ικανοποιεί:

i. $[\alpha(c)\xi, \eta] = c\,[\xi, \eta]$,

ii. $[\xi, \eta] = [\eta, \xi]^*$,

iii. $[\xi, \xi] \geq 0$,

για $\xi, \eta \in \mathcal{X}$, $c \in \mathcal{C}$, και $\alpha([\xi, \eta])\zeta = \xi\,\langle \xi, \zeta \rangle$.

Η τελευταία ισότητα δίνει ότι $\alpha([\xi, \eta]) = \theta_{\xi,\eta}$. Επίσης, ορίζουμε το ιδεώδες $\mathcal{I}_{\mathcal{X}} \subseteq \mathcal{C}$,

$$\mathcal{I}_{\mathcal{X}} = \overline{\operatorname{span}}\{[\xi, \eta] : \xi, \eta \in \mathcal{X}\}.$$

Από τους ορισμούς προκύπτει άμεσα ότι $c \in \ker \alpha$ αν, και μόνο αν, $c \in \mathcal{I}_{\mathcal{X}}^{\perp}$. Επομένως, η $\alpha$ είναι 1-1 αν, και μόνο αν, το διπρότυπο Hilbert είναι *ουσιώδες*, δηλαδή αν το ιδεώδες $\mathcal{I}_{\mathcal{X}}$ είναι ουσιώδες στη $\mathcal{C}$. Το $\mathcal{I}_{\mathcal{X}}$ συνδέεται με τις συναλλοίωτες αναπαραστάσεις της $C^*$-αντιστοιχίας $(\mathcal{X}, \mathcal{C}, \alpha)$ με τον επόμενο ουσιώδη τρόπο.

**Λήμμα 5.5.8** *Αν το διπρότυπο Hilbert $(\mathcal{X}, \mathcal{C}, \alpha)$ θεωρηθεί ως $C^*$-αντιστοιχία, τότε $\mathcal{J}_{\mathcal{X}} = \mathcal{I}_{\mathcal{X}}$.* $\square$

Επομένως, για $\xi, \eta \in \mathcal{X}$, το $[\xi, \eta] \in \mathcal{C}$ είναι το μοναδικό στοιχείο $c \in \mathcal{J}_X$ με $\alpha(c) = \theta_{\xi,\eta}$. Μπορούμε να αντιστρέψουμε την προηγούμενη διαδικασία με τον εξής τρόπο.

**Λήμμα 5.5.9** *Έστω μια $C^*$-αντιστοιχία $(\mathcal{X}, \mathcal{C}, \alpha)$. Αν $\alpha(\mathcal{J}_\mathcal{X}) = \mathcal{K}(\mathcal{X})$, τότε η $(\mathcal{X}, \mathcal{C}, \alpha)$ εφοδιάζεται με τη δομή διπροτύπου Hilbert μέσω της σχέσης*

$$[\xi, \eta] = (\alpha|_{\mathcal{J}_\mathcal{X}})^{-1}(\theta_{\xi,\eta}) \in \mathcal{J}_\mathcal{X},$$

*για $\xi, \eta \in \mathcal{X}$.* □

Επομένως μια $C^*$-αντιστοιχία $(\mathcal{X}, \mathcal{C}, \alpha)$ είναι διπρότυπο Hilbert αν, και μόνο αν, ο περιορισμός του $\alpha$ στο $\mathcal{J}_\mathcal{X}$ είναι *-ισομορφισμός επί του $\mathcal{K}(\mathcal{X})$. Ορίζουμε το *σταυρωτό γινόμενο $\mathcal{C} \rtimes_\mathcal{X} \mathbb{Z}$ του διπροτύπου Hilbert $(\mathcal{X}, \mathcal{C}, \alpha)$* να είναι η $\mathcal{O}_\mathcal{X}$, όταν το διπρότυπο θεωρείται $C^*$-αντιστοιχία.

Τα διπρότυπα Hilbert γενικεύουν τα σταυρωτά γινόμενα $\mathcal{C} \rtimes_\alpha \mathbb{Z}$. Πράγματι, αν $\alpha : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ είναι *-ισομορφισμός, τότε η $C^*$-αντιστοιχία $(\mathcal{C}, \mathcal{C}, \alpha)$ αποκτάει δομή διπροτύπου Hilbert και είναι εύκολο να δούμε ότι σε αυτήν την περίπτωση $\mathcal{C} \rtimes_\mathcal{C} \mathbb{Z} := \mathcal{O}_\mathcal{C} \simeq \mathcal{C} \rtimes_\alpha \mathbb{Z}$.

Επίσης, αξίζει να αναφέρουμε ότι το θεώρημα 3.3.9 αποδεικνύεται στο **[22]** στην εξής γενική του μορφή.

**Θεώρημα 5.5.10** *Έστω $(\mathcal{X}, \mathcal{C}, \alpha)$ μια $C^*$-αντιστοιχία και $\phi$ ένας πλήρως ισομεκός αυτομορφισμός της $\mathcal{T}_\mathcal{X}^+$ έτσι ώστε $\phi(c) = c$ για κάθε $c \in \mathcal{C}$. Τότε*

$$C^*_{env}(\mathcal{T}_\mathcal{X}^+ \times_\phi \mathbb{Z}_+) = \mathcal{O}_\mathcal{X} \rtimes_\phi \mathbb{Z}. \ \square$$

### 5.5.2 Και μια σημείωση

Οι Κατσούλης και Kribbs αποδεικνύουν στο **[24]** ότι το $C^*$-envelope της $\mathcal{T}_\mathcal{X}^+$ είναι η $\mathcal{O}_\mathcal{X}$. Μάλιστα, στο πρώτο κεφάλαιο ακολουθήσαμε την ίδια αποδεικτική μέθοδο προκειμένου να αποδείξουμε ότι $C^*_{env}(\mathcal{A}_G) = C^*(G)$ στην περίπτωση των αλγεβρών γραφημάτων. Επίσης οι Muhly και Tomforde στο **[32]** ξεκινώντας από μια $C^*$-αντιστοιχία $(\mathcal{X}, \mathcal{C}, \alpha)$ κατσκευάζουν μια καινούργια $(\mathcal{Y}, \mathcal{B}, \beta)$ έτσι ώστε η $\beta$ να είναι 1-1 και η $\mathcal{O}_\mathcal{X}$ να είναι full corner της $\mathcal{O}_\mathcal{Y}$. Τέλος ο Pimsner στο **[38]** και ο Schweizer στο **[44]** αποδεικνύουν ότι για κάθε $C^*$-αντιστοιχία $(\mathcal{X}, \mathcal{C}, \alpha)$ η $\mathcal{O}_\mathcal{X}$ είναι κανονικά ισόμορφη με το σταυρωτό γινόμενο $\mathcal{G} \rtimes_\mathcal{Z} \mathbb{Z}$ ενός ουσιώδους διπροτύπου Hilbert $(\mathcal{Z}, \mathcal{G}, \gamma)$.

Συνδυάζοντας τα παραπάνω προκύπτει ότι το $C^*$-envelope της $\mathcal{T}_{\mathcal{X}}^{+}$ είναι full corner του σταυρωτού γινομένου ενός ουσιώδους διπροτύπου Hilbert. Έτσι θα μπορούσαμε να πούμε ότι το θεώρημα 2.3.21 είναι μια εφαρμογή των παραπάνω. Μια πιο ενδελεχής μελέτη όμως δείχνει ότι αυτό δεν είναι σωστό.

Καταρχάς, αν εφαρμόσουμε την κατασκευή του **[32]** στη $C^*$-αντιστοιχία $(\mathcal{C}, \mathcal{C}, \alpha)$ προκύπτει μια νέα $C^*$-αντιστοιχία, η οποία δεν προκύπτει από ένα ζεύγος $(\mathcal{B}, \beta)$. Επίσης, η μέθοδος του **[44]** περιέχει μια αφηρημένη παράμετρο (ουσιαστικά ένα ιδεώδες που ικανοποιεί κάποιες συνθήκες μα δεν υπολογίζεται).

Παρόλα αυτά, η μέθοδος των Muhly και Tomforde όταν εφαρμόζεται στην περίπτωση των γραφημάτων δίνει ένα καινούργιο γράφημα. Ακολουθώντας όμως την κατασκευή του Schweizer δεν έχουμε ξεκάθαρη εικόνα για το αν προκύπτει άλγεβρα γραφήματος. Παρατηρούμε, λοιπόν, ένα κενό στην θεωρία των $C^*$-αντιστοιχιών, μιας και γνωρίζουμε ήδη πώς από ένα τυχαίο γράφημα μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα δεύτερο (που να περιέχει το πρώτο) και του οποίου η $C^*$-αντιστοιχία να είναι ένα διπρότυπο Hilbert.

Το εύλογο ερώτημα, λοιπόν, που προκύπτει είναι πώς (και αν) οι ιδέες του θεωρήματος 2.3.21 μπορούν να εφαρμοστούν στις $C^*$-αντιστοιχίες, με τέτοιο τρόπο ώστε κάθε κατασκευή που προκύπτει από μια κλάση $C^*$-αντιστοιχιών να παραμένει στην ίδια κλάση.

## Αντί Επιλόγου

This carnival is carnivore, I dreamt I had grown nails to hold, on just right down into between, we fake our smiles to keep'em free. Your happy days I wish no share, nor kings nor queens nor (a) buzzing lair, nor masquerades to keep up the pace, Drunk in trance, for once I break. How do you know I ain't like that, or should I hold on a pair of foot stuffed, in whatever suits-you-case, with razorblades. A laugh non-shared, for a fright not-fair, I know you're right, well, I'm what's left. The feet got scars and I'm dressed in skin, (I'm) packed in triplets I can't fit in. At least I (can) shuffle to dust my wakes, they came with white clocks to calculate. With ritalin and ect... And rooms so narrow and sterilized... I fail to follow and I can't swallow (that)... All that we see or seem... are projections on wide screens. Are proper beds with wives to share. Are lot of toys with time to play. and a load of books with no time to read. Frail safety framed us thick. I wish... I could swallow... But wishes... are not... to be borrowed... Can't grasp on my... Can't shit on my own... On mellow comforts she cuts her wrists, sober mild-life crisis. Can't shit on her own. Won't find a comfort in this world.
Exkrementale Inhalte, mit Edelsteinen zu neun Element verbunten. This world is just a frame, on the wall we're living in. So take your clear shot and win the (grand) prize. For there's no price, in debt we're all stacked in. Trembling (scary) off the hot spoon into the skin. So where's the pain, what's the use? As if we could stand another bruise. Hand-on-hand to reclaim this sharp-pit-trap. There's no room to echo this fall... There's no sound to fill the floor's cracks... For what is perished is to be cherished on this love. Hey man, do you have dime? Hey man, would you spare a time? Lather was 61. His toys in chinese rocks. Substance cut in rags, to wrap him when he's drowned. Pale marks on every inch. Trademarks of the leash. Love bought, trading bliss. Come on, all aboard. Ambitions grow old on bending knees. Charcoal realms choke in haze. Dissolved, yet complete, This love is obsolete. A portrait cruel and neat of deep-scared grace that feels no change. Little people slide on your curls. Tell her dye them bleached red. Let the chiggers dance on your neck... So, how does it heal you.... Shabby shoes, shappy shares, of confeties in velvet furs. A leech for a pet to stich this concrete bed. A bleach for a rent. A gasp for a shout... Paper cuts, bites of rats, fierce contrast, knees of rust. Purple kites (flying) in broken heights to guide the lines of cushion blasts... Keep up don't stop, we're nearly there. Half-way dead. Half-way. Hey, little Nigel come back home. I've been a way in the midnight cold. And if you are to move an inch. I'll be right there to stich your breeze. There's no point justifying how I'm breeding right of you. Strange fruits and don't forget to bring your towel.
The vomitory charm of redolence drains all caress from tired lungs. Despair is floating like loose flakes of paint Make their own ways on a discordant waltz. Let her in. A crawling queen around a gilded. Devouring clowns that crouch back. Flocks of joyful casts immune, counterfeit and mute, dehydrate in her sandglass. Let her in. So, there seems that there is no such thing as free will or free choice but a subjective feeling of freedom. We experience our lives via projections of the individual and the collective unconsciousness that controls the criteria of judgement, justice and desire. This is a fact that we cannot surpass *by nature*. What we can do is to expand the field of consciousness in order to extend the visual field with which we retrieve information from the inner and the outer world. However... Nowadays our emotional incentives (pain, compassion, loss, erection etc.) are two clicks away. That is what I call safe sex, safe friends, shaved life. And we come and go back and forth traveling through these idyllic landscapes while the compass is buried deep down in our mother's utero. As we are said that we are dominant. As we come to this world crippled, *by birth*. Harm is charm when she is missing. All we've built, brick by brick idicant (of our) privilege (the kind) you shift paralyzed. In our den of vice, (we) sink into demise have a part of my unkempt misery. All we built guilt by guilt a sanctified pestilence. The voluntary harm of ignorance. The generous sips of bottled relief. With a slice of, with a slice of bad smell and a greasy tuft of innocence.
Reservation for one, a glass of novocaine, I salivate at the idea of labeling me. And all the grace retaliates without a graze, castrated. Reservation for two, juicy, roasted, aroused. Consumers of flesh redeem competitive patterns. And all the grace stabbed to sleep on velvet sheets, castrated. Reservation for three, pride is sine qua non. Acquired defects molest substantial utopias. And all the grace stabbed to sleep on velvet sheets, smelling vaseline. Now it's the right time to... Shake off – fake, your skin – particles of, before – this old, the wreckages – 'n' tired world, etch – collapse, their toll – in oblivion, on – without, your innocence – a sound. Time to – shake, liberate – off your skin, the self – before, from old – the wreckages, scratches – etch, for time is not – their toll, for – on, free – your innocence.

# Βιβλιογραφία


[1] W. Arveson, *Operator algebras and measure preserving automorphisms*, Acta Math., **118** (1967), p.p. 95–109.

[2] W. Arveson, *Notes on the unique extension property*, 2006, http://math.berkeley.edu/ arveson/Dvi/unExt.pdf.

[3] W. Arveson, K. Josephson *Operator algebras and measure preserving automorphisms II*, J. Funct. Anal., **156**(4) (1969), p.p. 100–134.

[4] E.A. Azoff, M. Ptak *A dichotomy for linear spaces of Toeplitz operators*, J. Funct. Anal., **156**(2) (1998), p.p. 411–428.

[5] T. Bates, J. Hong, I. Raeburn, W. Szymanski, *The ideal structure of the* C*-*algebras of infinite graphs*, Illinois J. Math. **46** (2002), 1159–1176.

[6] B. Blackadar, *Operator algebras: Theory of C*-algebras and von Neumann algebras*, volume 122 of *Encyclopaedia of Mathematical Sciences*, Springer-Verlag, Berlin, 2006.

[7] D. P. Blecher and C. Le Merdy, *Operator algebras and their modules—an operator space approach*, volume 30 of *London Mathematical Society Monographs, New Series*, The Clarendon Press Oxford University Press, Oxford, 2004.

[8] N. P. Brown, *The symbiosis of* C*- *and W*-algebras*, 2008, arXiv.org:0812.1763v1.

[9] J. B. Conway, *A course in operator theory*, volume 16 of *Graduate Studies in Mathematics*, American Mathematical Society, Providence, 2000.

[10] K. R. Davidson, *Nest Algebras*, volume 191 of *Pitman Research Notes in Mathematics Series*, Longman Scientific & Technical, Harlow, 1988.

[11] K. R. Davidson, *Free semigroup algebras. A survey*, Oper. Theory Adv. Appl., **129** (2001), p.p. 209–240.

[12] K. Davidson, E. Katsoulis, *Isomorphisms between topological conjugacy algebras*, J. reine angew. Math. **621** (2008), 29-51.

[13] K. Davidson, E. Katsoulis, *Dilating covariant representations of the non-commutative disc algebras*, J. Funct. Anal., to appear.

[14] K. Davidson, J. Roydor, C$^*$-*envelopes of tensor algebras for multivariable dynamics*, Proc. Edinb. Math. Soc. (2) **53** (2010), 333-•351.

[15] M. A. Dritschel, S. A. McCullough, *Boundary representations for families of representations of operator algebras and spaces*, J. Operator Theory, **53**(1) (2005), p.p. 159–167.

[16] N. Fowler, I. Raeburn, *The Toeplitz algebra of a Hilbert bimodule*, Indiana Univ. Math. J. **48** (1999), 155–181.

[17] D. Hadwin and T. Hoover, *Operator algebras and the conjugacy of transformations.*, J. Funct. Anal. **77** (1988), 112–122.

[18] M. Hamana, *Injective envelopes of operator systems*, Publ. RIMS Kyoto Univ. **15**(1979), 773-785.

[19] R.V. Kadison and J.R. Ringrose, *Fundamentals of the theory of operator algebras., Vol. I,II*, volume 16 of *Graduate Studies in Mathematics*, American Mathematical Society, Providence, 1986.

[20] E. T.A. Kakariadis, *Semicrossed Products and Reflexivity*, Journal of Operator Theory (to appear).

[21] E. T.A. Kakariadis, *Semicrossed products of $C^*$-algebras and their $C^*$-envelopes*, arXiv.org:1102.2252v1.

[22] E. T.A. Kakariadis, E. G. Katsoulis, *Semicrossed products of operator algebras and their $C^*$-envelopes*, arXiv.org:1008.2374v1.

[23] E. G. Katsoulis, Geometry of the unit ball and representation theory for operator algebras, *Pacific J. Math.*, **216**(2) (2004), p.p. 267–292.

[24] E. G. Katsoulis, D. W. Kribs, *Tensor algebras of $C^*$-correspondences and their $C^*$-envelopes*, J. Funct. Anal. **234**(1) (2006), 226–233.

[25] E. Katsoulis, S.C. Power, *Summer Lectures on Operator Algebras*, July 2007, University of Athens (http://users.uoa.gr/ akatavol/doc3.pdf).

[26] T. Katsura, *On $C^*$-algebras associated with $C^*$-correspondences*, J. Funct. Anal., **217** (2004), 366–401.

[27] E. C. Lance, *Hilbert $C^*$-modules. A toolkit for operator algebraists*, London Mathematical Society Lecture Note Series, **210**, Cambridge University Press, Cambridge, 1995.

[28] A. N. Loginov, V. S. Šulḿan,, *Hereditary and intermediate reflexivity of $W^*$-algebras*, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat., **39**(1) (1975), p.p. 1260–1273.

[29] M. McAsey, P. S. Muhly and K.-S. Saito, *Nonselfadjoint crossed products (i-nvariant subspaces and maximality)*, Trans. Amer. Math. Soc. **248**(2) (1979), p.p. 381–409.

[30] P.S. Muhly and B. Solel, *Tensor algebras over $C^*$-correspondences: representations, dilations and $C^*$-envelopes* J. Funct. Anal. **158** (1998), 389–457.

[31] P. S. Muhly and B. Solel, *Extensions and dilations for $C^*$-dynamical systems*, Operator theory, operator algebras and applications, Contenp. Math, **414** (2006), p.p. 375–381.

[32] P. S. Muhly, M. Tomforde, *Adding tails to $C^*$-correspondences*, Doc. Math. **9** (2004), 79–106.

[33] G. J. Murphy, *$C^*$-algebras and operator theory*, Academic Press Inc., 1990.

[34] V. I. Paulsen, *Completely bounded maps and operator algebras*, volume 78 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*, The Cambridge University Press, Cambridge, 2002.

[35] C. Peligrad, *Reflexive operator algebras on noncommutative Hardy spaces*, Math. Ann, **253**(2) (1980), p.p. 165–175.

[36] J. R. Peters, *Semicrossed products of $C^*$-algebras*, J. Funct. Anal., **59**(3) (1984), p.p. 498–534.

[37] J. R. Peters, *The* C*-*envelope of a semicrossed product and Nest Representations*, 2008, arXiv.org:0810.5364.

[38] M. V. Pimsner, *A class of $C^*$-algebras generalizing both Cuntz-Krieger algebras and crossed products by $\mathbb{Z}$*, Free Propability Theory, 189-212, Fields Inst. Commun., **12**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1997.

[39] S. Power, *Classification of analytic crossed product algebras*, Bull. London Math. Soc., **24** (192), p.p. 368–372.

[40] M. Ptak, *On the reflexivity of pairs of isometries and of tensor products of some operator algebras*, Studia Math., **83**(1) (1986), p.p. 47–55.

[41] I. Raeburn, *Graph algebras*, volume 103 of *CBMS Regional Conference Series in Mathematics*, 2005.

[42] I. Raeburn, W. Szymanski, *Cuntz-Krieger algebras of infinite graphs and matrices* Trans. Amer. Math. Soc. **356** (2004) 39–59.

[43] D. Sarason, *Invariant subspaces and unstarred operator algebras*, Pacific J. Math., **17** (1966), p.p. 511–517.

[44] J. Schweizer, *Dilations of $C^*$-correspondences and the simplicity of Cuntz-Pimsner algebras*, J. Funct. Anal. **180**(2) (2000), 404–425.

[45] P. J. Stacey, *Crossed products of $C^*$-algebras by *-endomorphisms*, J. Austral. Math. Soc. Ser. A, **54** (1993), p.p. 204-212.

[46] N. Varopoulos, *On an inequality of von Neumann and an application of the metric theory of tensor products to operators theory*, J. Funct. Anal. **16** (1974), 83–100.

[47] Γ. Κουμουλλής, Σ. Νεγρεπόντης, *Θεωρία Μέτρου*, Εκδόσεις Συμμετρία, Αθήνα 1991.