Α.Σ.ΠΑΙ.Τ.Ε.

Angelos Giannoulas

Μαθηματικά Ι

Παιδαγωγικό Τμήμα

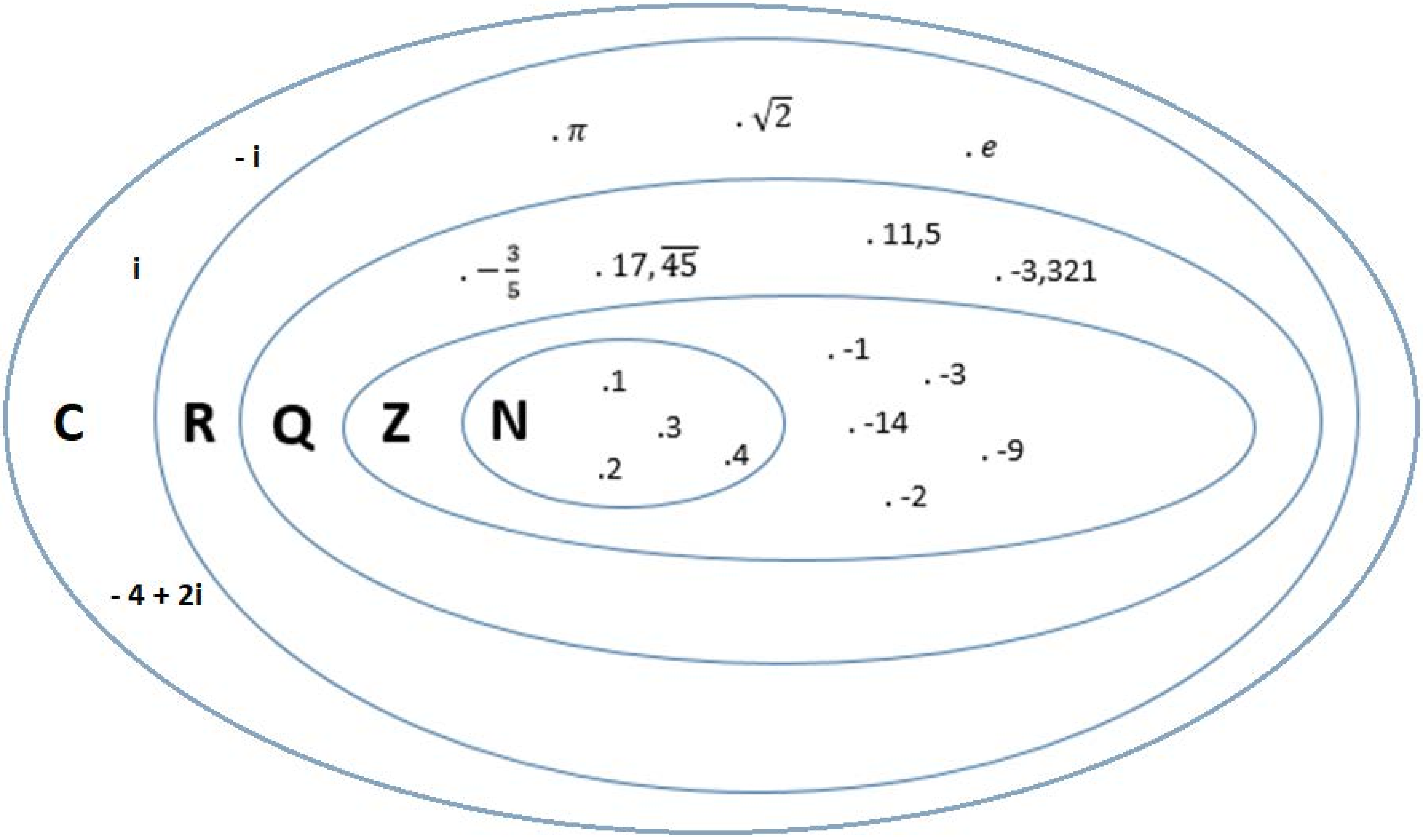
Ας θυμηθούμε ….

Βασικές έννοιες

Βασικά σύνολα

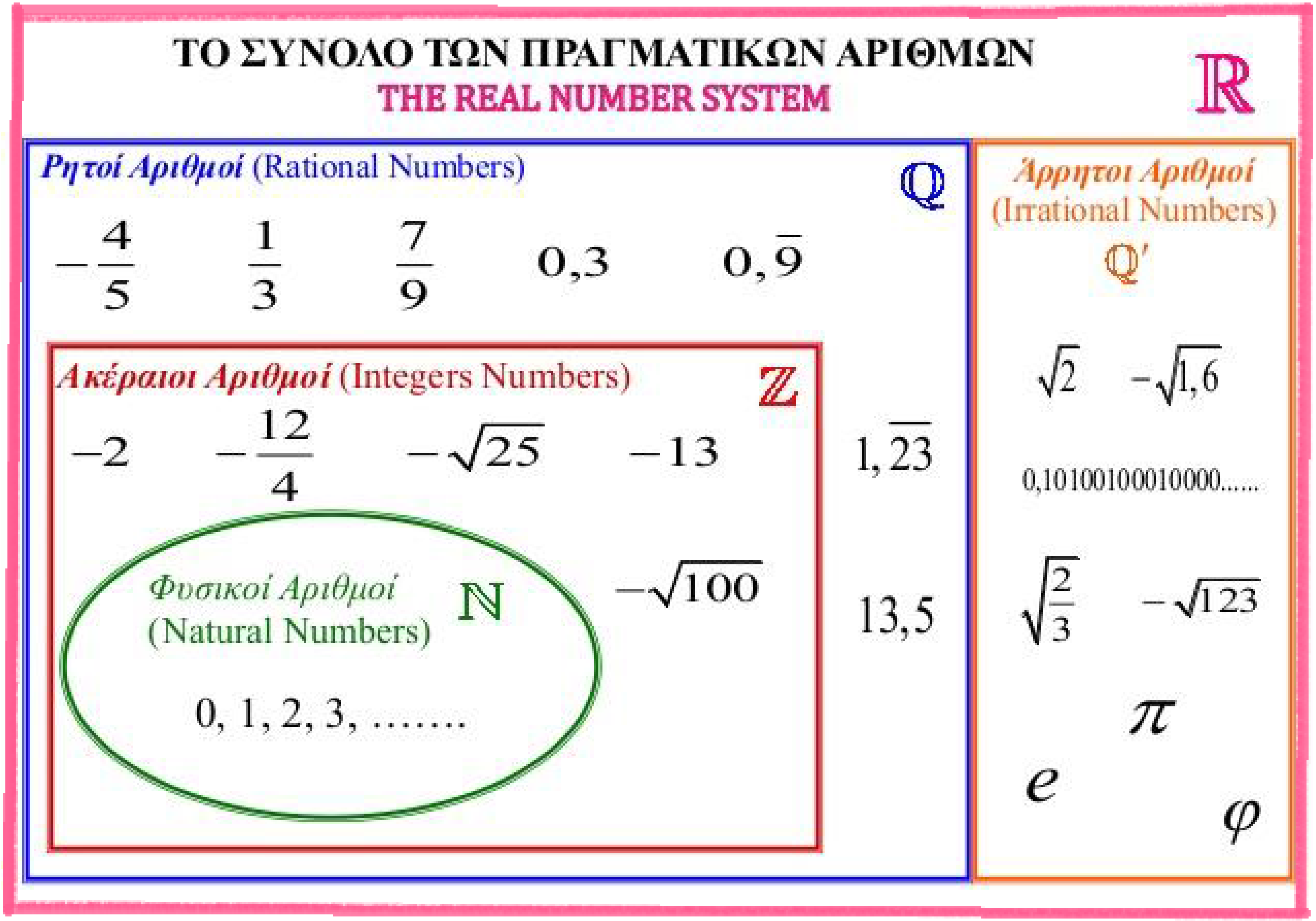
- **N** = {0, 1, 2, 3, 4, …} , οι **φυσικοί** (ή θετικοί ακέραιοι)
- **Z** = {…, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, …} , οι **ακέραιοι**
- **Q** = { $\frac{m}{n}$: $m, n \in Z, n \neq 0$} , οι **ρητοί**
- **R** : οι **πραγματικοί**
  - **R\Q** : οι **άρρητοι** αριθμοί
- **C** = {a+b·i, a,b ϵ R}, όπου $i^2 = -1$, οι **μιγαδικοί**

Οι αριθμοί



C
R
Q
Z
N
. π
. $\sqrt{2}$
. e
- i
i
. $-\frac{3}{5}$
. $17,\overline{45}$
. 11,5
. -3,321
. -1
. -3
. -14
. -9
. -2
.1
.3
.4
.2
- 4 + 2i

Πού είναι οι άρρητοι; (R\Q)



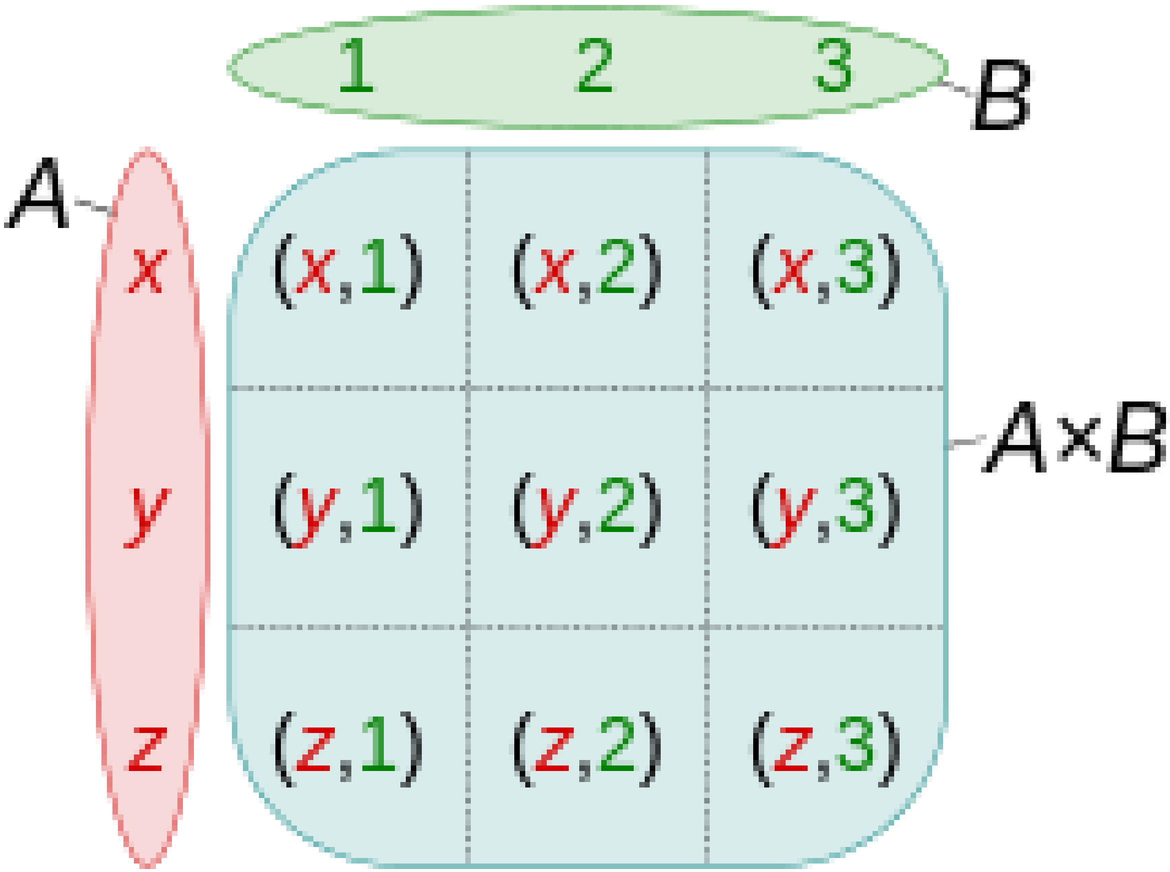
Καρτεσιανό γινόμενο

Καρτεσιανό γινόμενο 2 συνόλων Α και Β:
είναι το σύνολο που απαρτίζεται από τα στοιχεία {(α, β): α ϵ Α & β ϵ Β}
(συμβολίζεται με **Α x Β**)

– αφορά διατεταγμένα ζεύγη (δηλ. (α, β) ≠ (β, α))
– αν Α = Ø ή Β = Ø τότε Α x Β = Ø
– αν Α, Β πεπερασμένα τότε | Α x Β | = |Α| · |Β|

Ερώτηση: Είναι η τράπουλα των 52 φύλλων καρτεσιανό γινόμενο;

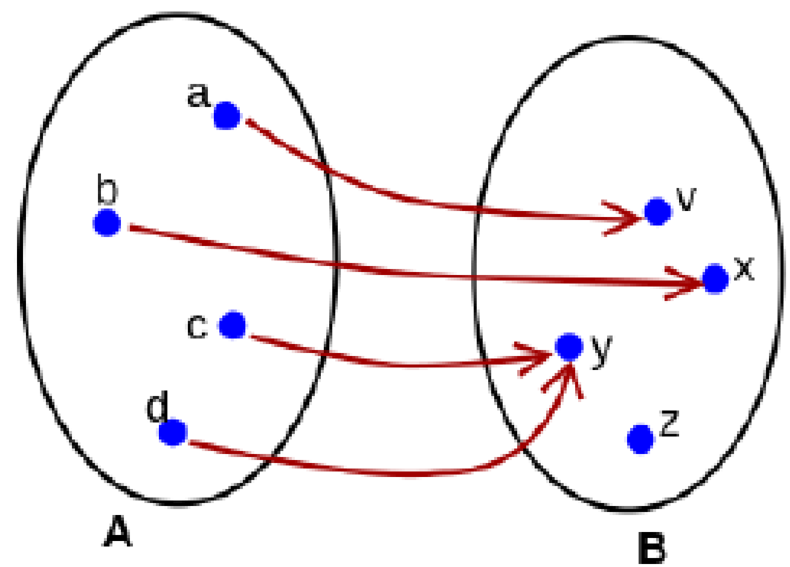
Καρτεσιανό γινόμενο παράδειγμα



Απεικόνιση

Απεικόνιση (ή **διμελής σχέση**) είναι μία μονοσήμαντη αντιστοιχία τ.ώ. σε κάθε στοιχείο a є A αντιστοιχίζεται ένα και μόνο ένα στοιχείο b є B

$$f: \begin{cases} A \rightarrow B \\ a \rightarrow b \quad (\text{ή } f(a) = b) \end{cases}$$



Αν τα στοιχεία των A & B είναι πραγματικοί αριθμοί, τότε η f ονομάζεται «**συνάρτηση**»

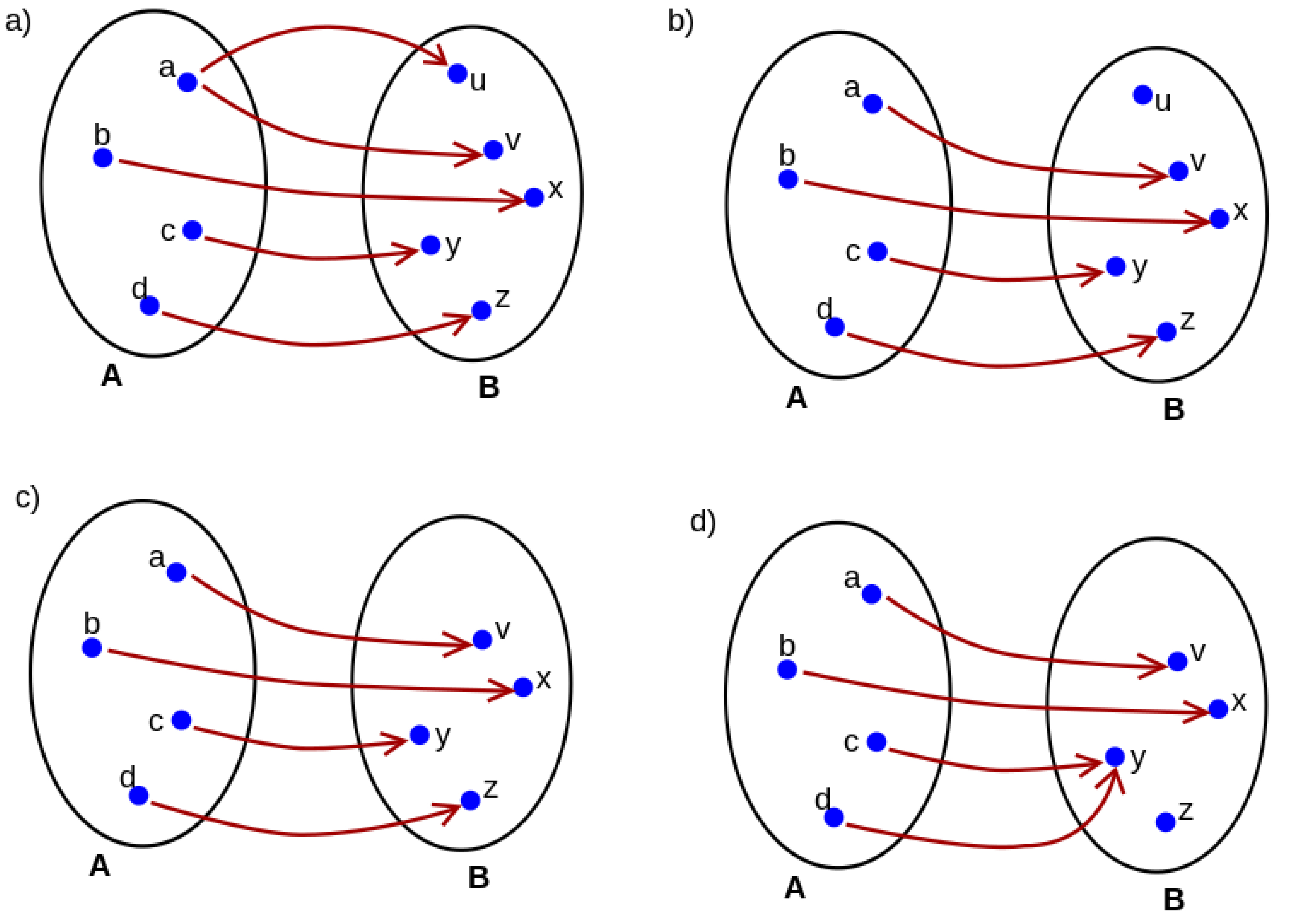
Παράδειγμα απεικόνισης

Φοιτητές (το σύνολο Α) &

εξεταζόμενο μάθημα την Τρίτη στις 11:00 (το Β)

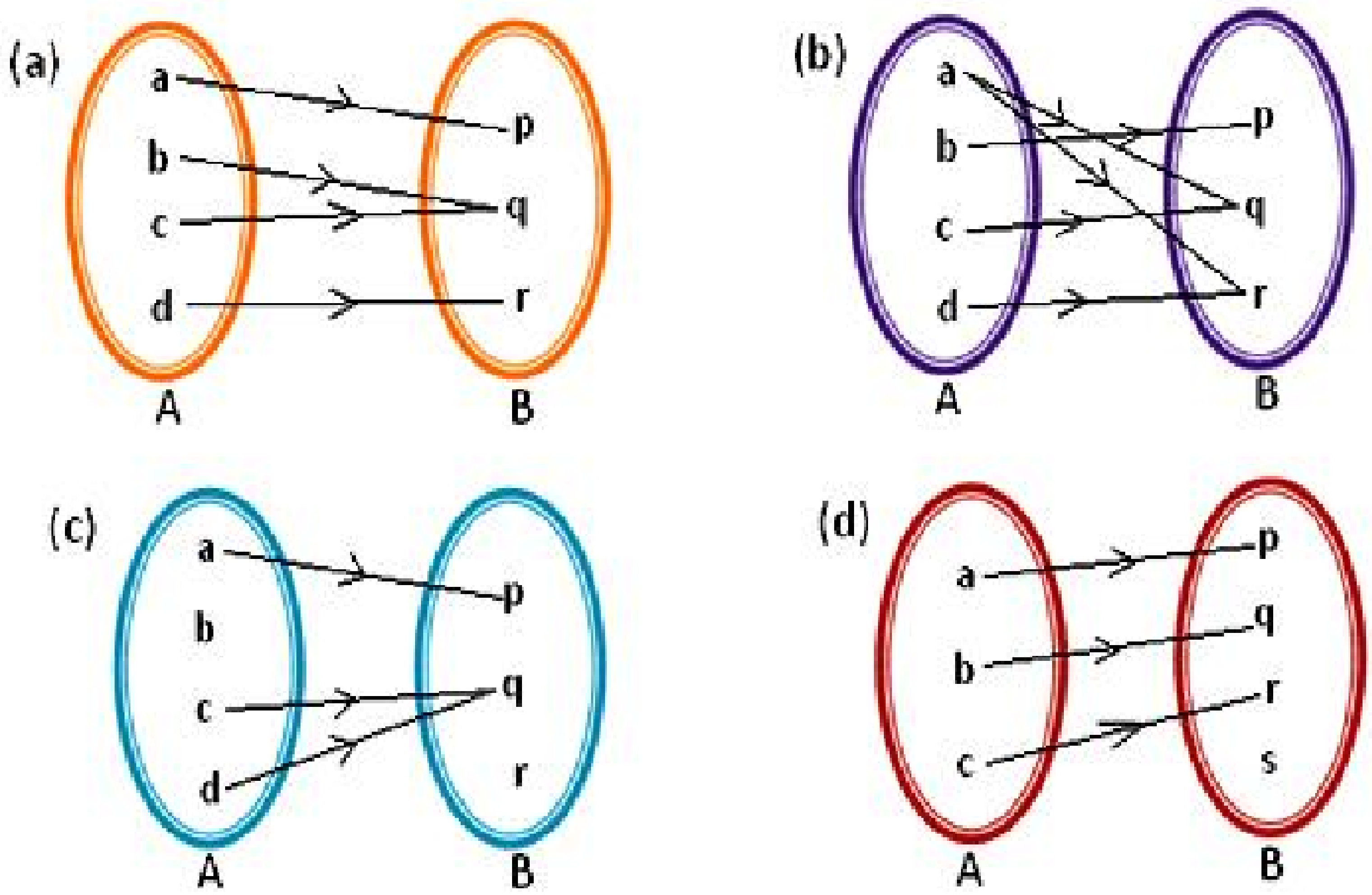
Φοιτητής	**Μάθημα**
Γιάννης	Μαθηματικά
Μαίρη	Εισαγωγή στα Πληροφοριακά Συστήματα
Νίκος	Λειτουργικά Συστήματα
Κώστας	Δίκτυα
Κατερίνα	Δίκτυα

Δεν είναι όλες οι αντιστοιχίες απεικονίσεις



πηγή: http://www.wikiwand.com/el/Συνάρτηση

Ομοίως για τις επόμενες



πηγή: http://www.math-only-math.com/Domain-co-domain-and-range-of-function.html

Πεδίο ορισμού & Πεδίο τιμών

Λιάνα Λιγνού: ¨**Η συνάρτηση. Μια προξενήτρα αλλιώτικη από τις άλλες!**
https://www.slideshare.net/eylignou/ss-45849453

Παραδείγματα συναρτήσεων

$$f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$$
$$x\mapsto 4\cdot x^2$$

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^*$$
$$x\mapsto \frac{3}{x}$$

Μονώνυμα

Έστω x μια **μεταβλητή** (μπορεί να πάρει οποιαδήποτε τιμή στο R).

Μονώνυμο του x είναι κάθε παράσταση της μορφής: $\alpha \cdot x^n$, όπου α ϵ R και n ένας θετικός ακέραιος.

Παράδειγμα: οι παραστάσεις: $7x^3$ $-32x^3$ $45x$

(και οι σταθεροί αριθμοί μπορούν να θεωρηθούν μονώνυμα του x εφόσον $x^0 =$, 1 π.χ. $- 6 = - 6 \cdot x^0$)

Πολυώνυμα

Πολυώνυμο του x είναι κάθε παράσταση με την μορφή:

$$\alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \ldots + \alpha_1 x + \alpha_0,$$

όπου $n \in Z+$ και $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in R$.

Τα μονώνυμα $\alpha_n x^n$, $\alpha_{n-1} x^{n-1}$, …, $\alpha_1 x$, α_0 λέγονται **όροι** του πολυωνύμου ενώ οι αριθμοί α_n, …, α_1, α_0 **συντελεστές**.

Ο α_0 ονομάζεται και **σταθερός όρος** του πολυωνύμου.

<u>Παράδειγμα</u>: οι παραστάσεις είναι πολυώνυμα του x

$$-5x^7 - 2x^3 + x - 4$$

$$7x + 1$$

$$4x^3 - 4x^2 + 10$$

Βαθμός & Ρίζα πολυωνύμου

Έστω $P(x) = \alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \ldots + \alpha_1 x + \alpha_0$,

όπου $n \in Z+$ & $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in R$

- Αν $\alpha_n \neq 0$, τότε ο βαθμός του πολυωνύμου είναι n (η μέγιστη δύναμη)

  (εξαίρεση αποτελεί ο βαθμός του μηδενικού πολυωνύμου που έχει οριστεί = $-\infty$)

- **Ρίζα ρ του P(x)** είναι ένας αριθμός τέτοιος ώστε $P(\rho) = 0$

Παράδειγμα πολυωνύμου

Έστω $P(x) = x^2 + 4x$

- Ποιος είναι ο βαθμός του πολυωνύμου = ;

- Για x = ; είναι $P(x) = 0$

  (δηλ. ρίζα του πολυώνυμου P(x);)

Μαθηματική επαγωγή

Η **μαθηματική επαγωγή** (ή **τέλεια επαγωγή**) είναι μια μέθοδος απόδειξης προτάσεων που εξαρτώνται από φυσικούς αριθμούς.

Έστω ότι επιθυμούμε την απόδειξη μιας πρότασης Π(ν), όπου ν ϵ N:

1. Ελέγχουμε ότι Π(1) αληθεύει (το πρώτο ν δηλ.)
2. Θεωρούμε ότι η Π(κ) αληθεύει επίσης (κ ϵ N)
3. Αποδεικνύουμε ότι αληθεύει η Π(κ+1)

Παράδειγμα μαθηματικής επαγωγής

Να δείξετε ότι για κάθε θετικό ακέραιο ν :

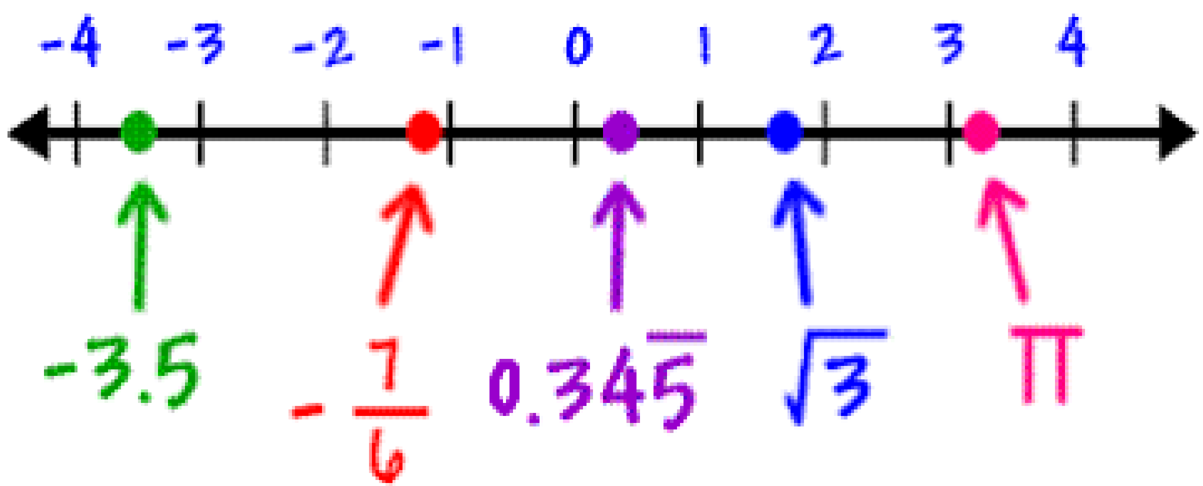
$$2 + 4 + 6 + \ldots + 2 \cdot \nu = \nu \cdot (\nu + 1)$$

Ας θυμηθούμε

Βασικές έννοιες

Ευθεία πραγματικών αριθμών

Η αναπαράσταση των πραγματικών αριθμών γίνεται πάνω σε μία ευθεία: την «**ευθεία των πραγματικών αριθμών**»



Απόλυτη τιμή

- **Ορισμός:** $|\alpha| = \begin{cases} \alpha, & \alpha \geq 0 \\ -\alpha, & \alpha < 0 \end{cases}$

- Ιδιότητες της απόλυτης τιμής
  - $|\alpha| = |-\alpha| = \sqrt{\alpha^2} \geq 0$
  - $|\alpha \cdot \beta| = |\alpha| \cdot |\beta|$
  - $-|\alpha| \leq \alpha \leq |\alpha|$

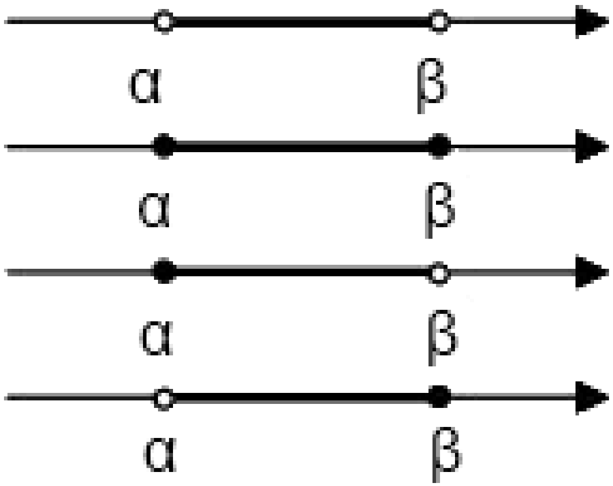
- Αν $|x| < \beta \Leftrightarrow -\beta < x < \beta$

- $|\alpha - \beta|$ είναι η απόσταση μεταξύ α και β

- $|\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta|$

Διαστήματα

- $(\alpha, \beta) = \{x : \alpha < x < \beta\}$
- $[\alpha, \beta] = \{x : \alpha \leq x \leq \beta\}$
- $[\alpha, \beta) = \{x : \alpha \leq x < \beta\}$
- $(\alpha, \beta] = \{x : \alpha < x \leq \beta\}$



Ανισότητες

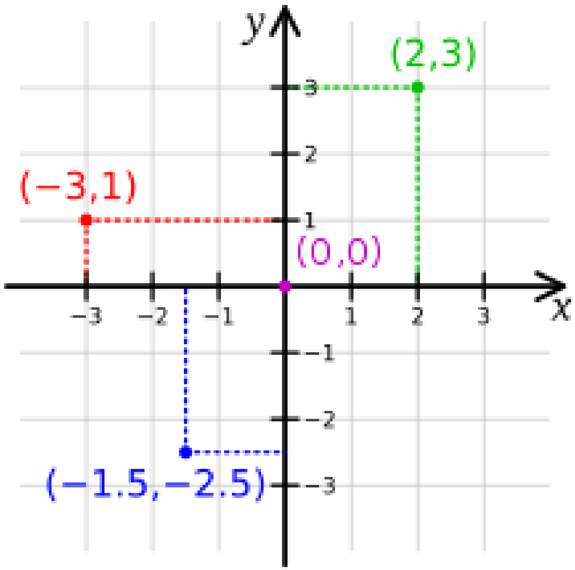
- Οι λύσεις μιας ανίσωσης είναι το σύνολο των αριθμών που ικανοποιούν την ανίσωση, π.χ.

  2·x – 1 < 4·x + 5 (λύσεις: x > -3 ή (-3, +∞))

- Ασκήσεις
  1. Να λυθεί η ανίσωση: -13 < 1-4 · x ≤ 7
  2. Όμοια η $\frac{5}{|2x-3|}<1$

Επίπεδο & Συντεταγμένες

- Παίρνουμε την ευθεία των πραγματικών αριθμών (ο άξονας x, δηλ. των τετμημένων)



- Από το σημείο 0, φέρνουμε μία άλλη ευθεία πραγματικών, κάθετη στην πρώτη (ο άξονας y, δηλ. των τεταγμένων)

- Κάθε σημείο ορίζεται μοναδικά από ένα ζεύγος αριθμών, την τετμημένη (x) και την τεταγμένη (y)

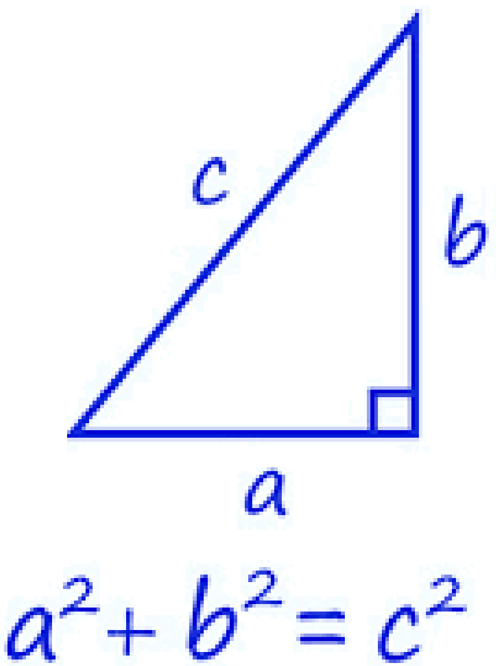
Ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων

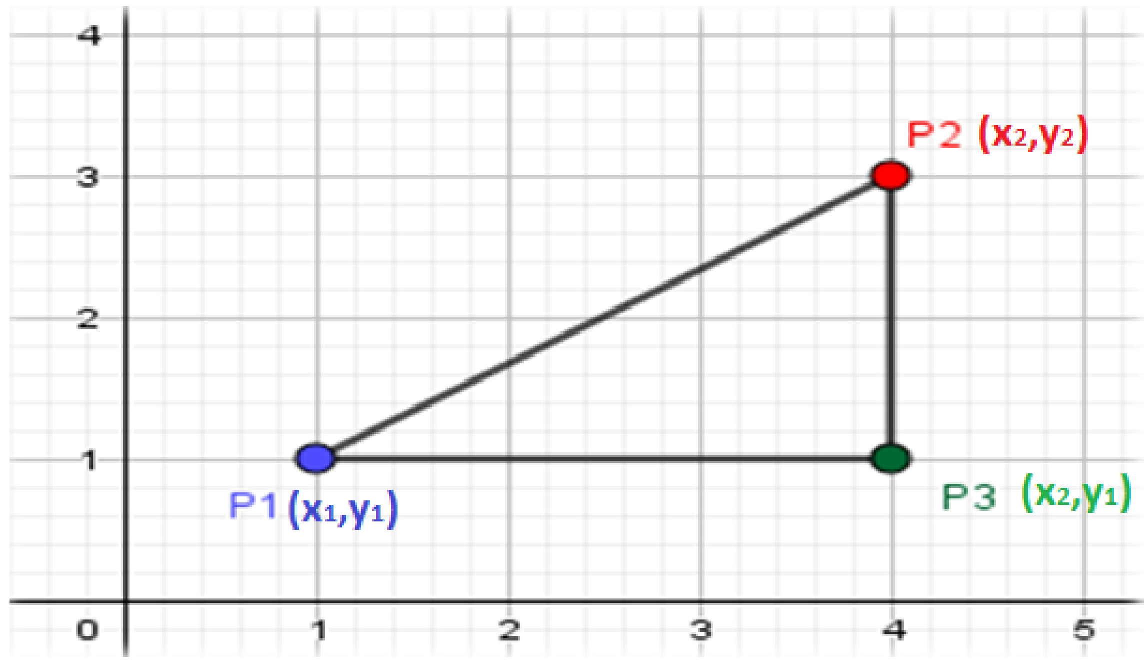
ή Καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων

ή Καρτεσιανό επίπεδο

ή $\mathbb{R}^2$

Πυθαγόρειο Θεώρημα





Αν P1(x_1,y_1), P2(x_2,y_2) & P3(x_2,y_1), τότε η απόσταση d(P1,P2) δίνεται από το Πυθαγόρειο Θεώρημα:

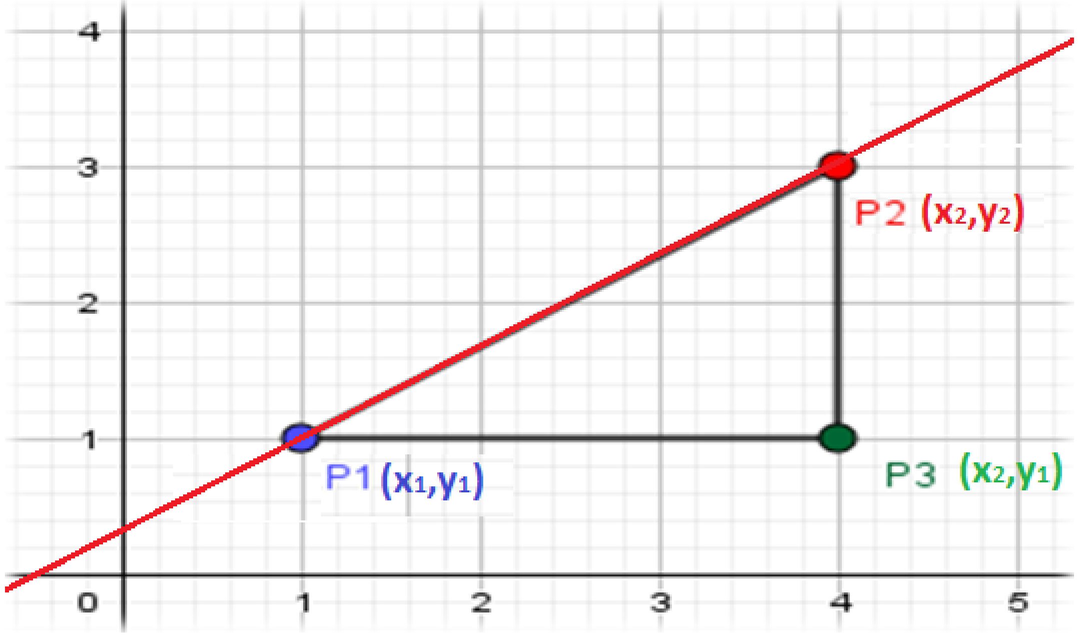
$$d^2(P1,P2) = (y_2 - y_1)^2 + (x_2 - x_1)^2 \Rightarrow$$

$$d(P1,P2) = \sqrt{(y_2 - y_1)^2 + (x_2 - x_1)^2}$$

Κλίση ευθείας

- Έστω το σημείο P1 της ευθείας που κινείται προς την θέση P2
- Κλίση m είναι ο λόγος της κατακόρυφης μεταβολής προς την οριζόντια, δηλ.

$$\kappa\lambda\acute{\iota}\sigma\eta \quad m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$



Ασκήσεις

1. Ποια η κλίση της ευθείας που περνά από τα σημεία (3, -2) & (-1, 4);
2. Όμοια της ευθείας που περνά από τα σημεία (3, -2) & (7, -2)
3. Και της ευθείας που περνά από τα σημεία (3, -2) & (3,4)

Εξίσωση ευθείας

- Από την κλίση μιας ευθείας έχουμε:

$$m = \frac{y - y_0}{x - x_0} \Leftrightarrow \boxed{y - y_0 = m \cdot (x - x_0)}$$

Δηλ. για να έχω την εξίσωση μιας ευθείας αρκεί να γνωρίζω

1. την κλίση της &
2. ένα σημείο της (x_0, y_0)

Υπενθύμιση

(ε1) // (ε2) $\Leftrightarrow$ $m_1 = m_2$

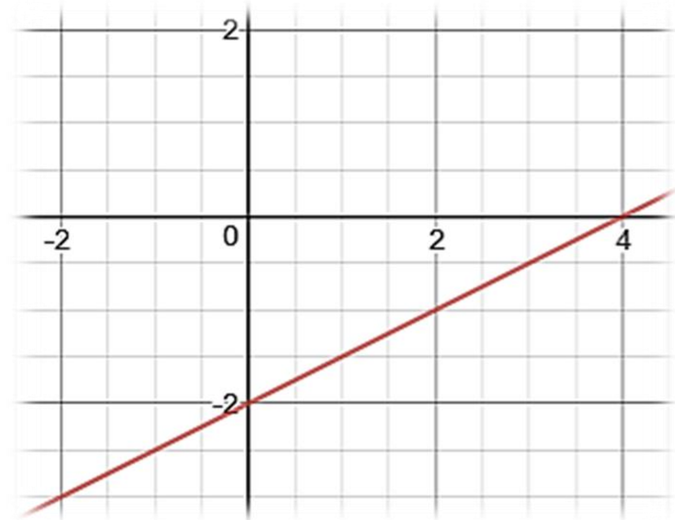
(ε1) ⊥ (ε2) $\Leftrightarrow$ $m_1 \cdot m_2 = -1$

Εξίσωση ευθείας$_2$

Παράδειγμα:

Η ευθεία με κλίση m=0,5 που περνά από το σημείο (6, 1) είναι:

$y - 1 = 0{,}5 \cdot (x - 6) \Leftrightarrow \mathbf{y = 0{,}5 \cdot x - 2}$



- Από το παράδειγμα έχουμε ότι η εξίσωση μιας ευθείας έχει και την μορφή:

$$\boxed{y = m \cdot x + b}$$

(όπου b το σημείο τομής με τον yy’)

- Ή ακόμη την μορφή $\boxed{a \cdot x + b \cdot y = c}$

ή αλλιώς
‘ **Γραμμική εξίσωση δύο μεταβλητών** ‘

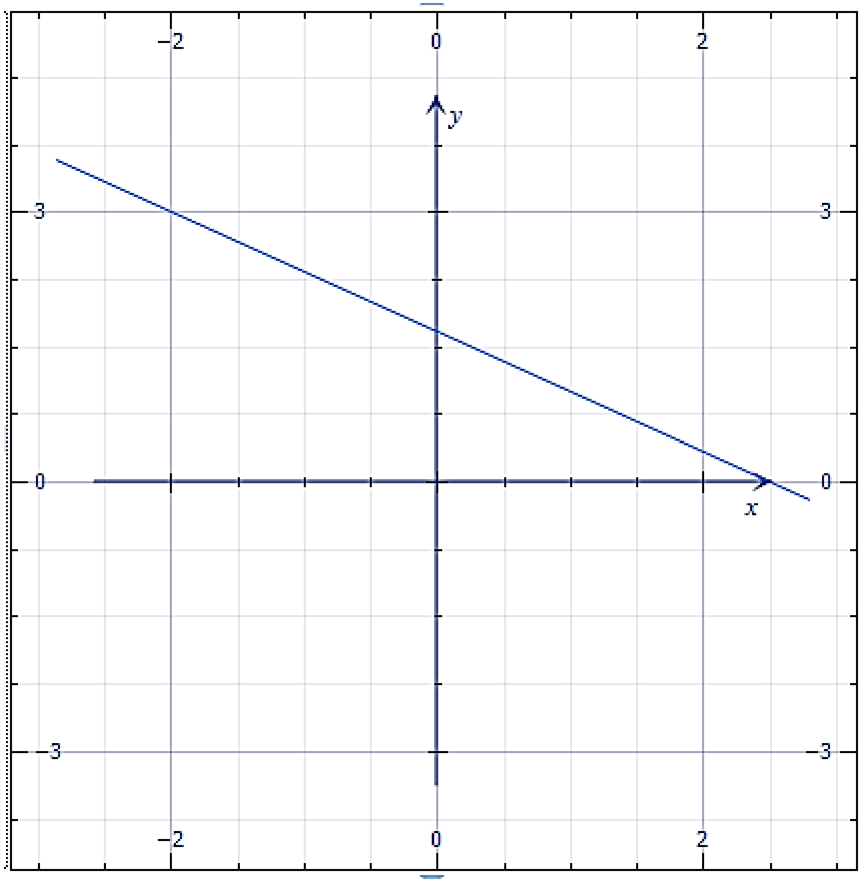
Παράδειγμα

Έστω η γραμμική εξίσωση

$2\mathbf{x} + 3\mathbf{y} = 5$

Να βρείτε:

1. Δύο λύσεις της γραμμικής εξίσωσης
2. Την κλίση της ευθείας
3. Το σημείο τομής με τον άξονα xx’
4. Το σημείο τομής με τον άξονα yy’



Άσκηση

Αν στο διπλάσιο ενός αριθμού x προσθέσουμε έναν αριθμό y, βρίσκουμε άθροισμα 6.

α) Να βρείτε ποια σχέση συνδέει τους αριθμούς x και y.

β) Ποια ζεύγη (-1, 8), (0, 6), (-2, 7), (2, 2) (3, 0), (3, 5) επαληθεύουν την προηγούμενη σχέση;

Ορισμός γραμμικής εξίσωσης

Μία **εξίσωση** λέγεται **γραμμική** αν είναι της μορφής:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \ldots + a_nx_n = b$$

όπου:

- $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, b \in \mathbb{R}$, n ∈ $\mathbb{N}$ (οι συντελεστές/σταθερές)
- $x_1, x_2, \ldots, x_n$, n ∈ $\mathbb{N}$ (οι μεταβλητές)

(οι μεταβλητές **είναι πάντα 1^{ου} βαθμού**
και ποτέ δεν εμφανίζονται ως ριζικά ή εκθέτες
ή ως συνθετικά άλλων συναρτήσεων)

Λύση της γραμμικής εξίσωσης είναι ένα σύνολο n ($t_1, t_2, \ldots t_n$) διατεταγμένων στοιχείων που την επαληθεύουν

Άσκηση

Ποια από τα επόμενα είναι γραμμικές εξισώσεις;

1. $x + \sin y = 7$
2. $3x - 4y + 7z = -3$
3. $xy - 3y = 5$
4. $3x^{1/3} + y - 4z = 5$
5. $3x^2 + y - 4z = 5$

Απάντηση

Μόνο η 2η εξίσωση είναι γραμμική!

1. $x + \sin y = 7$
2. **$3x - 4y + 7z = -3$**
3. $xy - 3y = 5$
4. $3x^{1/3} + y - 4z = 5$ (ριζικό)
5. $3x^2 + y - 4z = 5$

Σύστημα 2 γραμμικών εξισώσεων με 2 αγνώστους (2 x 2)

Έστω το σύστημα γραμμικών εξισώσεων 2x2:

(I) $a_1 * x + b_1 * y = c_1$

(II) $a_2 * x + b_2 * y = c_2$

Οι λύσεις του συστήματος είναι όλα τα ζευγάρια (x, y) που επαληθεύουν την (I) και την (II) ταυτόχρονα.

- Αν υπάρχει έστω και μία λύση το σύστημα ονομάζεται «**Συμβιβαστό**»
- Αν δεν υπάρχει λύση, το σύστημα λέγεται «**Ασυμβίβαστο**»

Σύστημα με μοναδική λύση

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ 2x + y = 8 \end{cases}$$

- Α’ τρόπος επίλυσης:

Αλγεβρική επίλυση

- Β’ τρόπος επίλυσης:

Γραφική επίλυση

Επίλυση

$$\begin{cases} x + y = 5 & \text{(i)} \\ 2x + y = 8 & \text{(ii)} \end{cases}$$

Από την (i)

$x = 5 - y \quad (i^*)$

Άρα η (ii) γίνεται

$2(5-y) + y = 8$

$10 - 2y + y = 8$

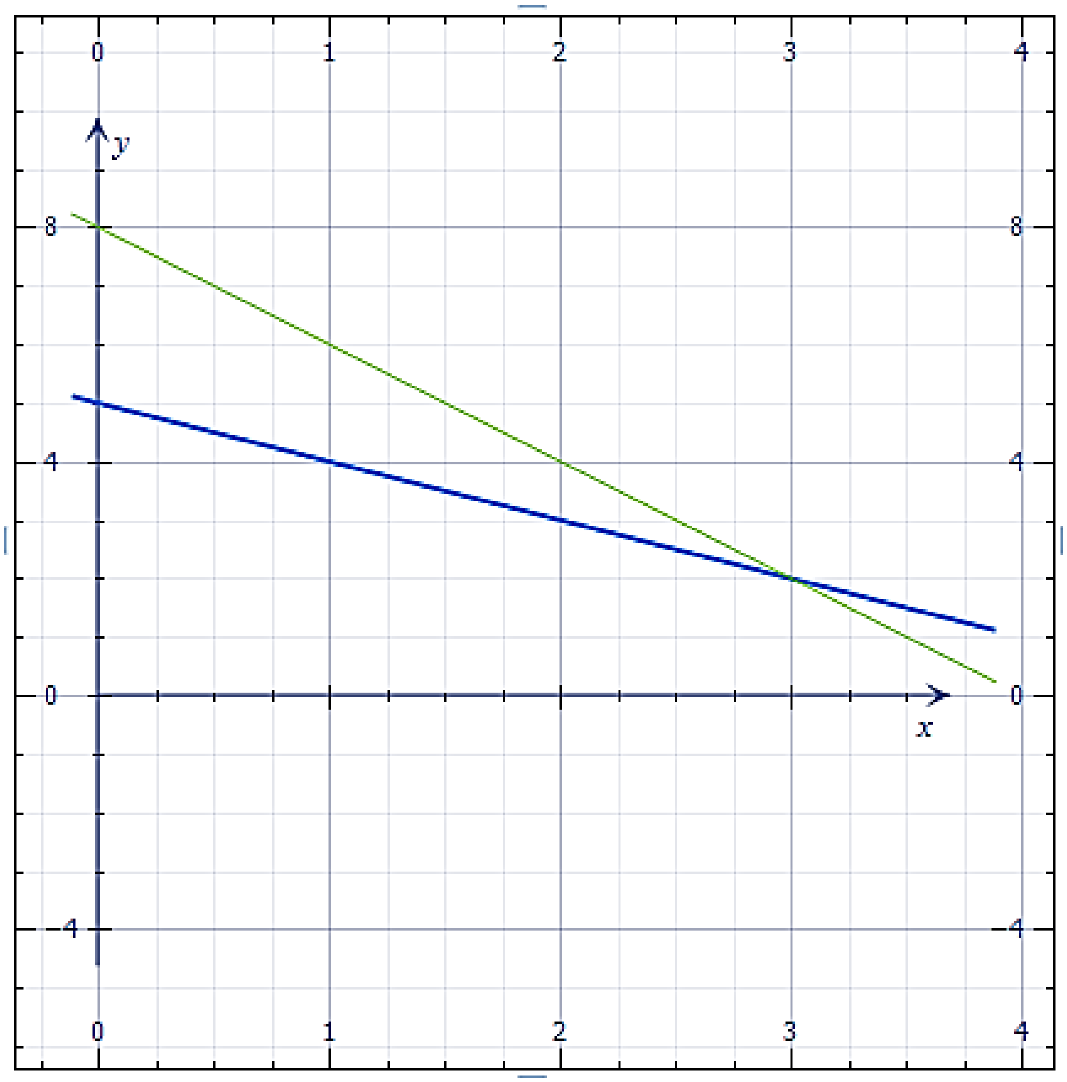
$-y = -2$

$\mathbf{y = 2}$

Άρα από την (i*):

$x = 5 - 2$

δηλ. $\mathbf{x = 3}$



Αδύνατο σύστημα

$$\begin{cases} 2x - 3y = 6 \\ 4x - 6y = -24 \end{cases}$$

- Α’ τρόπος επίλυσης: **Αλγεβρική επίλυση**
- Β’ τρόπος επίλυσης: **Γραφική επίλυση**

Επίλυση

$$\begin{cases} 2x - 3y = 6 \quad \text{(i)} \\ 4x - 6y = -24 \quad \text{(ii)} \end{cases}$$

Από την (i)

$$x = (6 + 3y)/2 \qquad \text{(i*)}$$

Άρα η (ii) λόγω της (i*) γίνεται

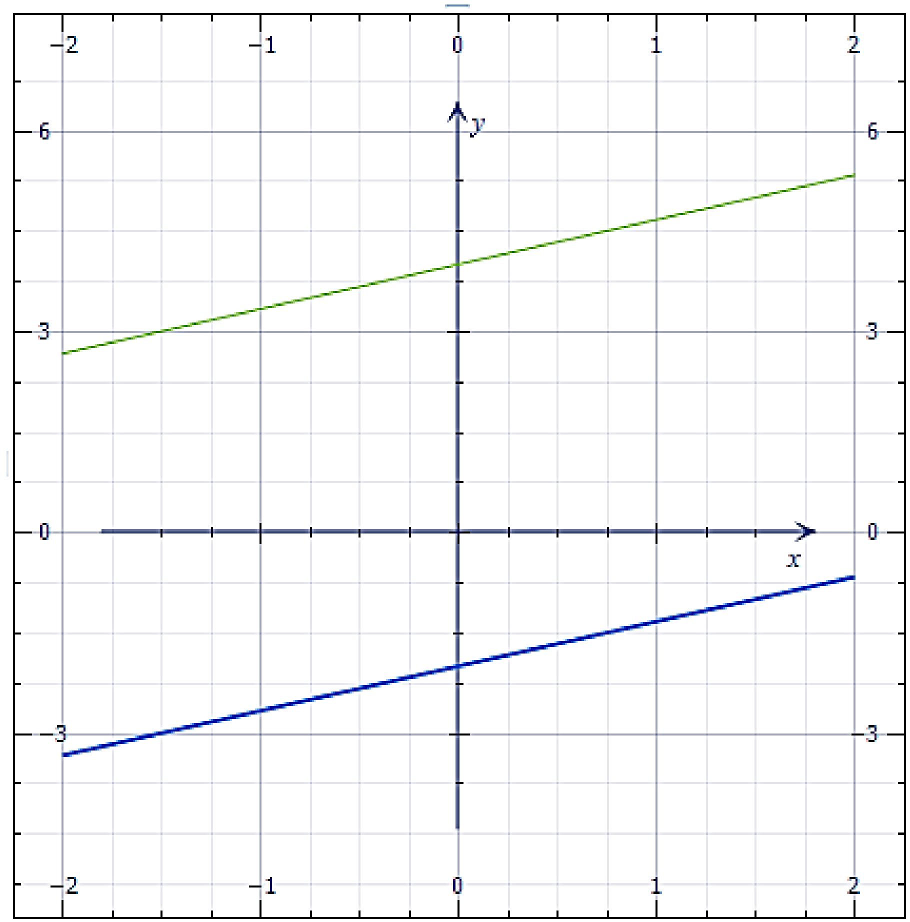
$$4\,(6 + 3y)/2 - 6y = -24$$

$$2\,(6 + 3y) - 6y = -24$$

$$\mathbf{12 = -24}$$

Αδύνατο

(δηλ. το σύστημα δεν έχει καμία λύση)



Αόριστο σύστημα

$$\begin{cases} 3x - y = 6 \\ 6x - 2y = 12 \end{cases}$$

- Α’ τρόπος επίλυσης: **Αλγεβρική επίλυση**
- Β’ τρόπος επίλυσης: **Γραφική επίλυση**

Επίλυση

$$\begin{cases} 3x - y = 6 \text{ (i)} \\ 6x - 2y = 12 \text{ (ii)} \end{cases}$$

Επέλεξα να λύσω ως προς y για λιγότερες πράξεις.

Από την (i)

$y = 3x - 6$

Άρα η (ii) γίνεται

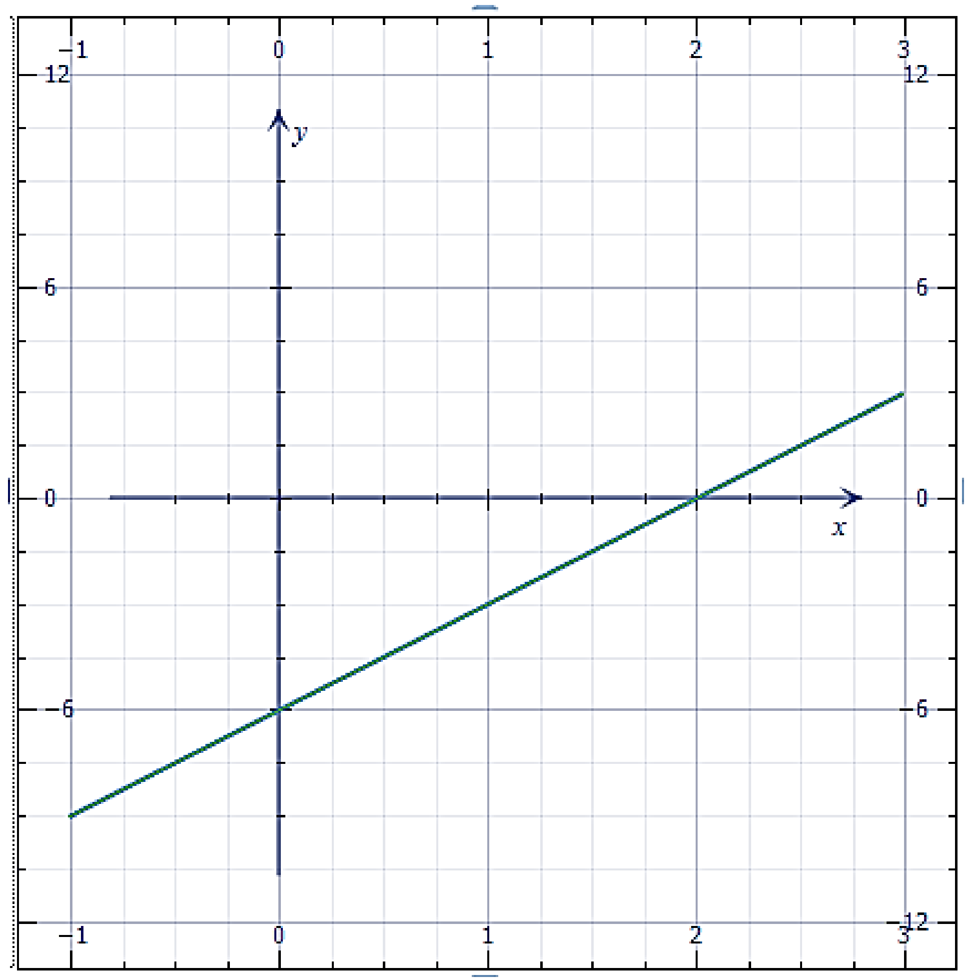
$6x - 2(3x-6) = 12$

$6x - 6x + 12 = 12$

$\mathbf{12 = 12}$

Αόριστο

(δηλ. το σύστημα άπειρες λύσεις)



Γραμμική εξίσωση 3 μεταβλητών

Η εξίσωση στο R^3

$$\mathbf{a \cdot x + b \cdot y + c \cdot z = d}$$

a, b, c, d πραγματικοί (οι σταθεροί όροι)

a & b & c όχι και οι 3 μηδέν

ονομάζεται **γραμμική εξίσωση των x, y, z**

Η εξίσωση αφορά την εξίσωση ενός επιπέδου

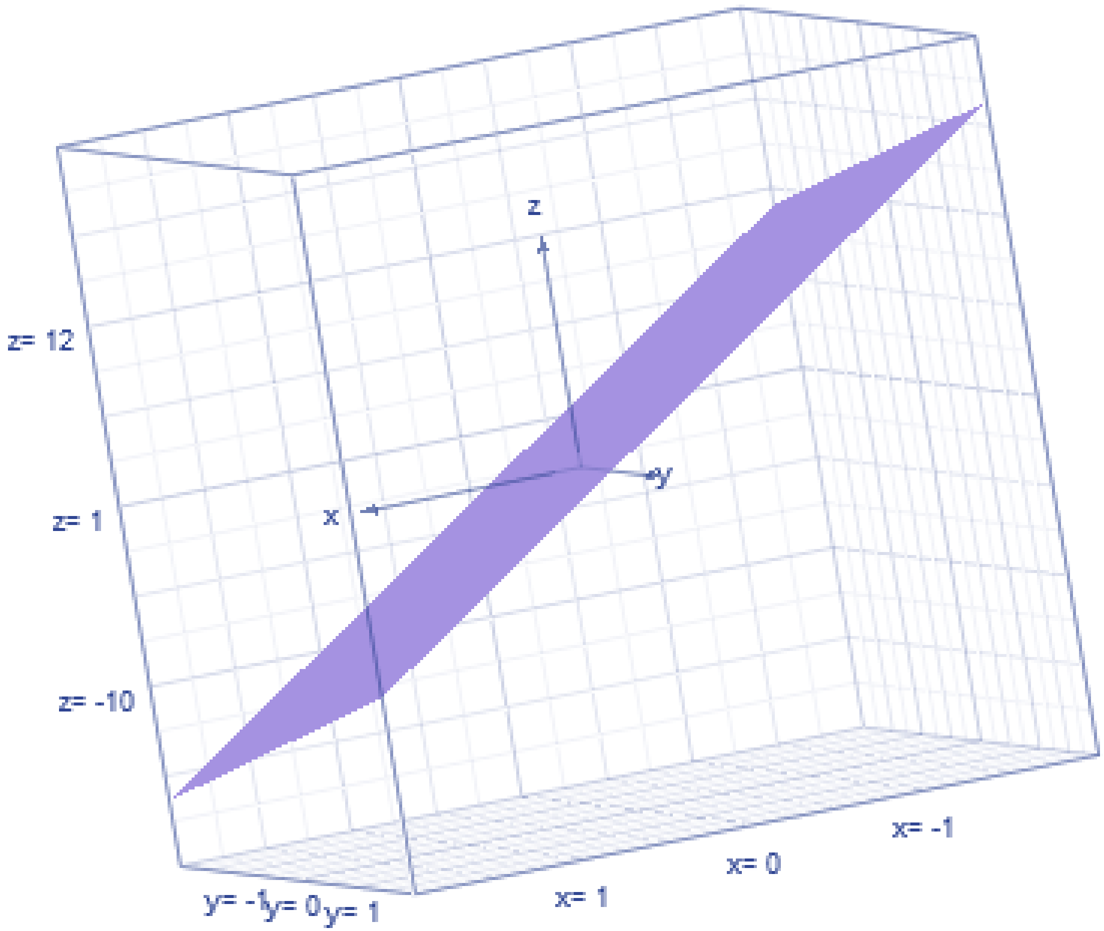
Λύση είναι ένα ζευγάρι τιμών (κ, μ, ν) που επαληθεύει την εξίσωση, δηλ. $a \cdot κ + b \cdot μ + c \cdot ν = d$

Παράδειγμα

Έστω η γραμμική εξίσωση: $7\mathbf{x} - 2\mathbf{y} + \mathbf{z} = 1$

Η γραφική της παράσταση είναι:

Μπορείτε να βρείτε μία λύση της εξίσωσης;



Γραμμικά συστήματα n μεταβλητών

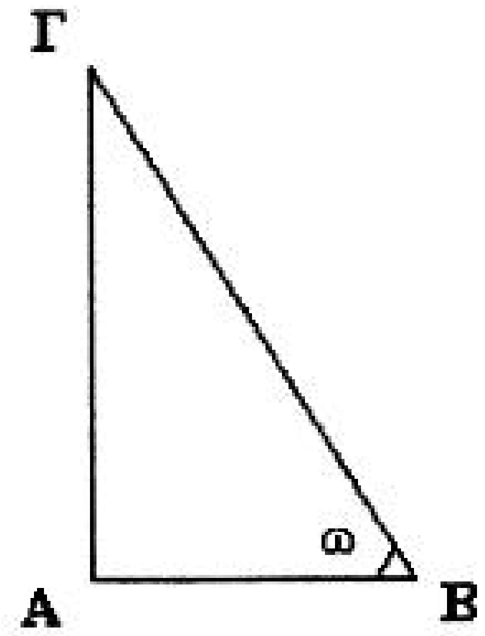
- Τα προηγούμενα παραδείγματα αφορούσαν γραμμικά συστήματα εξισώσεων με 2 αγνώστους (μεταβλητές) ή με 3 αγνώστους

- Αποδεικνύεται ότι:

Σε κάθε σύστημα m γραμμικών εξισώσεων με n αγνώστους (m x n) υπάρχει:

  - **ή μία μοναδική λύση**
  - **ή άπειρες λύσεις**
  - **ή καμία λύση** (ασυμβίβαστο σύστημα)

Τριγωνομετρικοί αριθμοί γωνίας



$$\sin\omega = \frac{\text{απέναντι κάθετη}}{\text{υποτείνουσα}} = \frac{\text{ΑΓ}}{\text{ΒΓ}}$$

$$\cos\omega = \frac{\text{προσκείμενη κάθετη}}{\text{υποτείνουσα}} = \frac{\text{ΑΒ}}{\text{ΒΓ}}$$

$$\tan\omega = \frac{\text{απέναντι κάθετη}}{\text{προσκείμενη κάθετη}} = \frac{\text{ΑΓ}}{\text{ΑΒ}}$$

sinθ = ημθ
cosθ = συνθ
tanθ = εφθ = απέναντι/προσκείμενη
cotθ = σφθ = προσκείμενη/απέναντι
secθ = τεμθ = υποτείνουσα/προσκείμενη
cscθ = στεμθ = υποτείνουσα / απέναντι

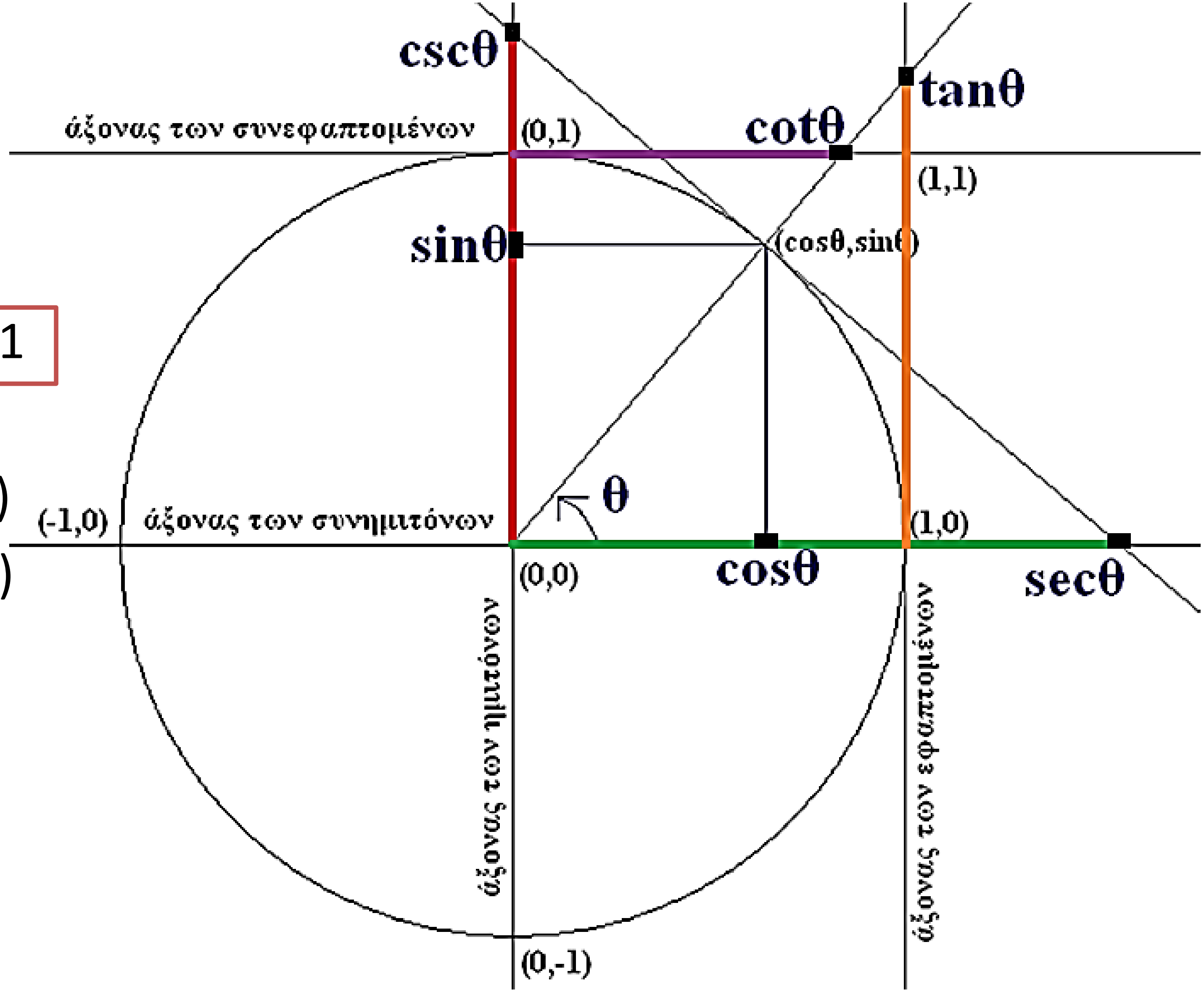
Τριγωνομετρικός κύκλος

- $x = \cos(\theta)$
- $y = \sin(\theta)$
- $\tan(\theta) = y/x$

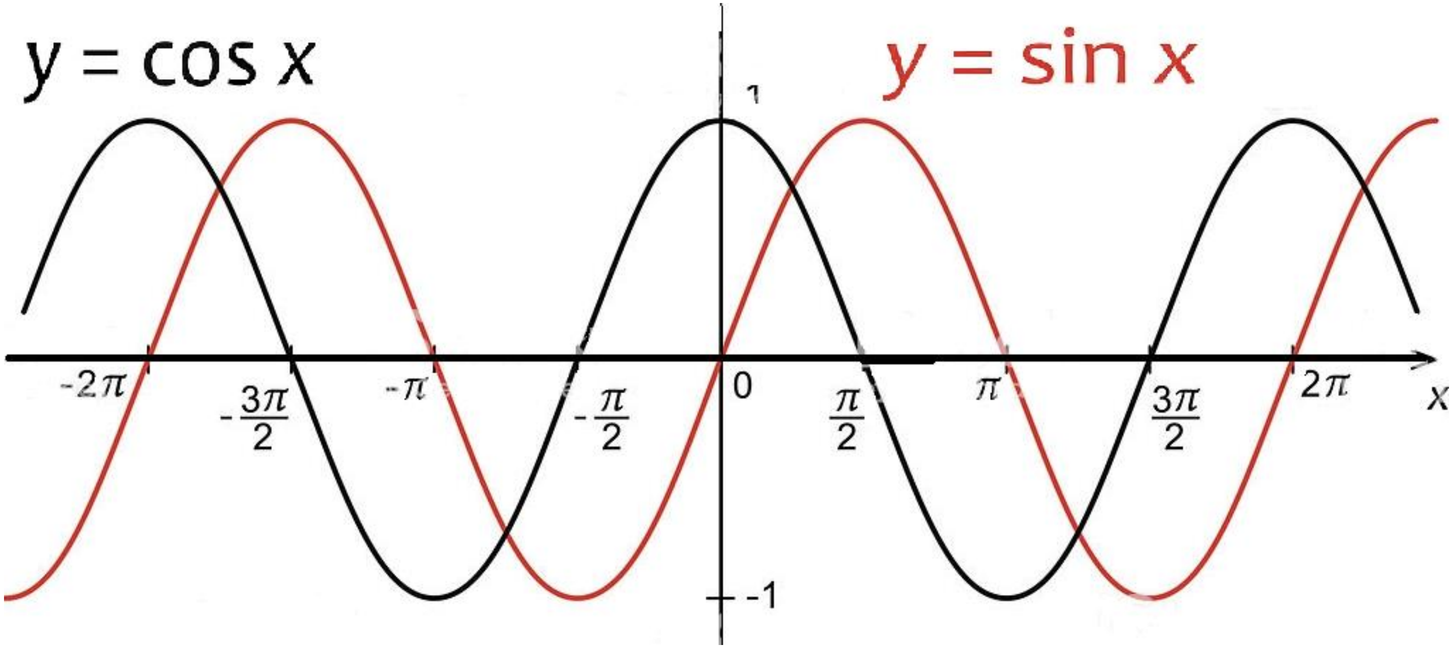
- $\boxed{\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1}$

- $\sin(-\theta) = -\sin(\theta)$
- $\cos(-\theta) = \cos(\theta)$

sinθ = ημθ
cosθ = συνθ
tanθ = εφθ
cotθ =σ υφθ
secθ = τεμθ
cscθ = στεμθ



Περιοδικότητα



- Κάθε μία από τις δύο τριγωνομετρικές συναρτήσεις επαναλαμβάνεται κάθε 2π
- Δηλ:
  - $\sin(t+2n\pi) = \sin t,\ n \in \mathbb{N}$
  - $\cos(t+2n\pi) = \cos t,\ n \in \mathbb{N}$
- Ο χρόνος της περιοδικότητας ονομάζεται «περίοδος» (π.χ. 2π στα παραπάνω)

Βασικές ταυτότητες

$$(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$$

$$(\alpha - \beta)^2 = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2$$

$$\alpha^2 - \beta^2 = (\alpha + \beta)(\alpha - \beta)$$

$$(\alpha + \beta)^3 = \alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3$$

$$(\alpha - \beta)^3 = \alpha^3 - 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 - \beta^3$$

Μελέτη

Μαθηματικά Ι. Απειροστικός Λογισμός & Στοιχεία Γραμμικής Άλγεβρας

Κεφάλαιο 0: «ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΑ»

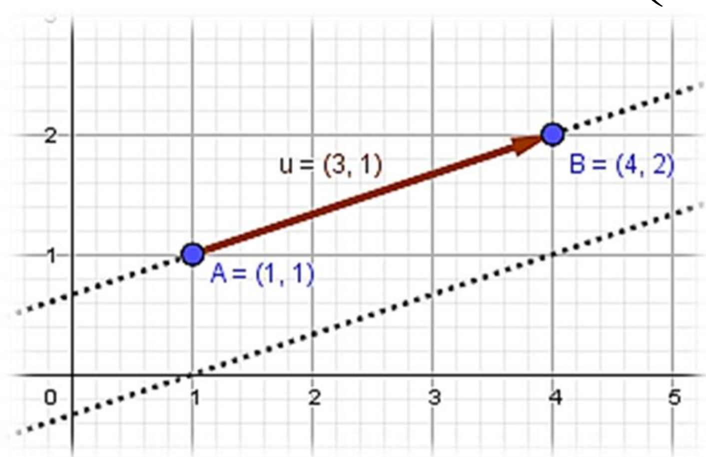
σελ. 1 - 21

Γραμμική Άλγεβρα: Εισαγωγή

Στοιχεία Γραμμικής Άλγεβρας

Τι μελετά η Γραμμική Άλγεβρα

- Είναι η περιοχή των Μαθηματικών που μελετά τους ‘διανυσματικούς χώρους’
- Τι είναι διάνυσμα λοιπόν;
  - Ένα ευθύγραμμο τμήμα που έχει ‘μέτρο’, ‘διεύθυνση’ & ‘φορά’ π.χ. το u=(2, 3) ή σε μορφή μήτρας $u = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$
  - Σ’ έναν δισδιάστατο χώρο ένα διάνυσμα αποτελείται από 2 συντεταγμένες,
    - αντίστοιχα 3 σε 3διάστατο, κ.ο.κ.



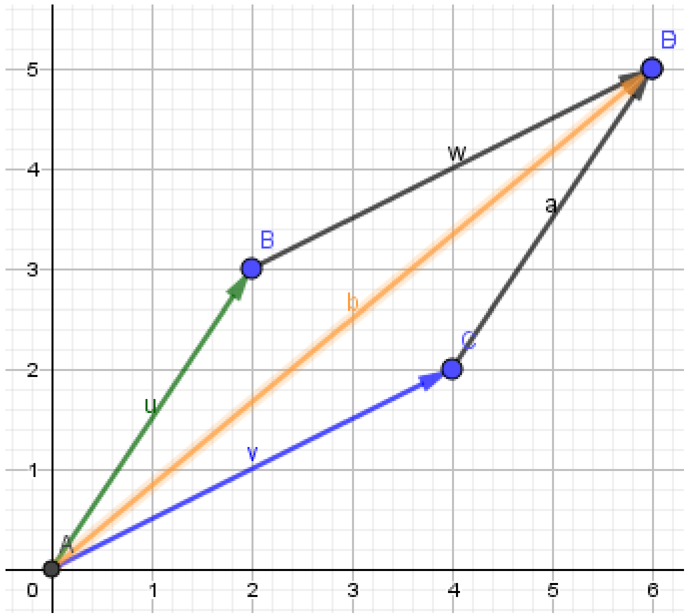
Συχνά ένα διάνυσμα u συμβολίζεται και ως $\bar{u}$ ή ως $\vec{u}$

Πρόσθεση διανυσμάτων

$$u + v = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \end{pmatrix}$$

ή

$$u + v = (2, 3) + (4, 2) = (6, 5)$$



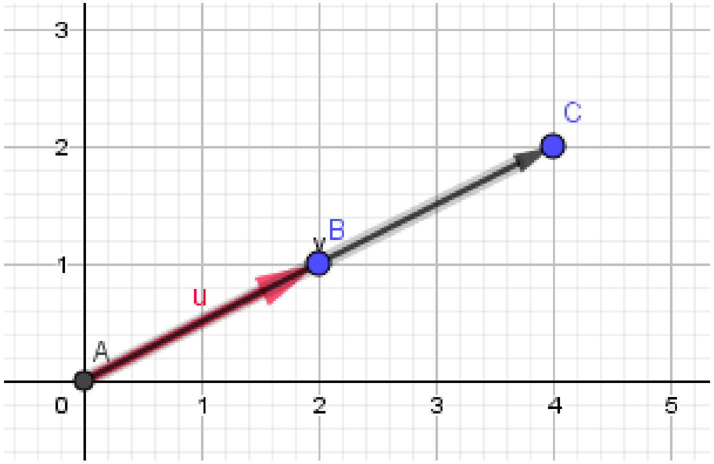
Βαθμωτό γινόμενο διανυσμάτων

Έστω $u = \mathrm{AB}$

$$2 \cdot u = 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

ή αλλιώς

$2 \cdot u = 2 \cdot (2, 1) = (4, 2) = \mathrm{AC}$



- Ερώτηση: Μπορεί το βαθμωτό γινόμενο να αλλάξει τα χαρακτηριστικά του διανύσματος;

Εσωτερικό γινόμενο διανυσμάτων

Στο $\mathbb{R}^2$: αν $u=(u_1,u_2)$ και $v=(v_1,v_2)$
τότε $u \cdot v=u_1v_1+u_2v_2$

Στο $\mathbb{R}^3$: αν $u=(u_1,u_2,u_3)$ και $v=(v_1,v_2,v_3)$
τότε $u \cdot v=u_1v_1+u_2v_2+u_3v_3$

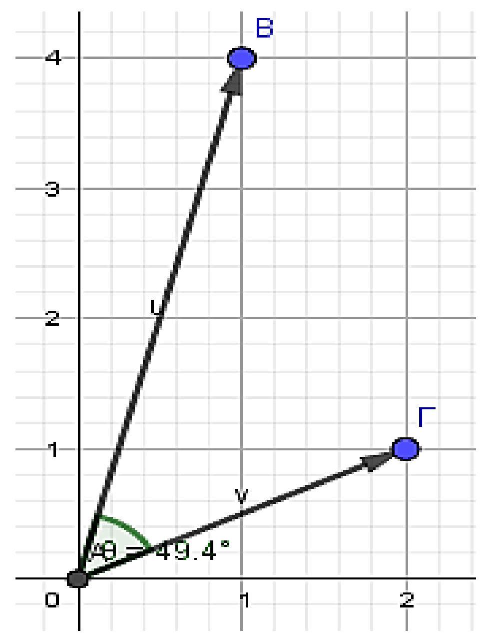
Στο $\mathbb{R}^n$: αν $u=(u_1,u_2,\ldots u_n)$ και $v=(v_1,v_2,\ldots v_n)$
τότε $u \cdot v=u_1v_1+u_2v_2+\ldots +u_nv_n$

- $u \cdot u=u_1^2+u_2^2+\ldots+u_n^2 = \|u\|^2$

Όπου $\|u\|$ το μέτρο του διανύσματος

- Επίσης $u \cdot v = \|u\| \cdot \|v\| \cdot \cos(\theta)$
  όπου θ η γωνία των δύο διανυσμάτων

Αν το $u \cdot v=0$ τότε $\theta=90^o$



Ο διανυσματικός χώρος …

Με το σύνολο των διανυσμάτων & με βασικές πράξεις αυτές που μόλις είδαμε, οδηγούμαστε στην μελέτη των διανυσματικών χώρων

(2-διάστατους, 3-διάστατους, … n-διάστατους)

… … …

& από την Γεωμετρία στην Γραμμική Άλγεβρα

Όταν θέλουμε να αναφερθούμε σε έναν διανυσματικό χώρο θέτουμε

1. **την διάσταση του χώρου** και
2. **Το ‘Σώμα’ από το οποίο παίρνουμε τις πράξεις και τους συντελεστές του βαθμωτού γινόμενου**

π.χ. το σώμα $\mathbb{R}$ ή το $\mathbb{C}$

Ο χώρος μελέτης μας

Από εδώ και στο εξής θα αναφερόμαστε στην διάσταση του χώρου και στο σώμα των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$

(εκτός και αν το προσδιορίζουμε διαφορετικά)

Ασκήσεις

1. Τα επόμενα είναι διανύσματα; Σε ποια διάσταση; Γράψτε τα ως nx1 μήτρες.

   (1, -2), (3, 4, 5), (0, 0, 0), (-4, -3)

2. Αν ένα διάνυσμα u=(x-y, x+y, z-2) = (1, 7, 2) τότε x, y, z = ?

3. Βρείτε το u·v αν $\mathrm{u} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix} \quad \mathrm{v} = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$

4. Έστω u=(1, k-2, 4, -k) και v=(3, 2, 2, 1). Ποια πρέπει να είναι η τιμή του k ώστε τα u, v να είναι κάθετα μεταξύ τους;

Angelos Giannoulas

Μήτρες
Ειδικές μήτρες

Στοιχεία Γραμμικής Άλγεβρας

Το διάνυσμα ως μήτρα

- Είδαμε ότι ένα διάνυσμα $\mathrm{u} = (\mathrm{u}_1, \mathrm{u}_2, \mathrm{u}_3)$ μπορεί να γραφεί και ως μήτρα 3x1,

  δηλ. μήτρα με <u>3 γραμμές</u> x <u>1 στήλη</u>: $\mathrm{u} = \begin{bmatrix} \mathrm{u}_1 \\ \mathrm{u}_2 \\ \mathrm{u}_3 \end{bmatrix}$

$$\begin{array}{cl} \mathrm{u} = \begin{bmatrix} \mathrm{u}_1 \\ \mathrm{u}_2 \\ \mathrm{u}_3 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} \leftarrow 1^{\eta} \text{ γραμμή} \\ \leftarrow 2^{\eta} \text{ γραμμή} \\ \leftarrow 3^{\eta} \text{ γραμμή} \end{array} \\ \uparrow 1^{\eta} \text{ στήλη} & \end{array}$$

Μήτρα γραμμή / Μήτρα στήλη

- Μία μήτρα A_{1xn} λέγεται 'μήτρα γραμμή'

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \end{bmatrix}$$

- Όπως και σε ένα διάνυσμα, μία 'μήτρα στήλη', έχουμε όταν A_{mx1}

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{21} \\ \dots \\ \alpha_{m1} \end{bmatrix}$$

Μήτρα

Μήτρα (ή πίνακας ή μητρώο) είναι ένα σύνολο στοιχείων/αριθμών που κατανέμονται σε μία διάταξη m-γραμμών x n-στηλών:

$$A=\begin{array}{ll} \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \leftarrow 1^{\eta} \text{ γραμμή} \\ \\ \leftarrow m \text{ γραμμή} \end{array} \end{array}$$

↑ 1^{η} στήλη ↑ n στήλη

Αν **m=n** τότε η Α λέγεται **τετραγωνική μήτρα** και συμβολίζεται A_m

Η Α συμβολίζεται συχνά A_{mxn} ή $A = [\alpha_{ij}]$ ή $A=\left[\alpha_{ij}\right]_{\substack{i=1..m \\ j=1..n}}$

Συμβολισμοί

- Ένα στοιχείο της μήτρας A_{mxn} προσδιορίζεται από την γραμμή του & την στήλη του, π.χ.
  - α_{ij} είναι το στοιχείο της $i^{ης}$ γραμμής / $j^{ης}$ στήλης

- Αν $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 5 & 0 & -1 \\ 0 & \kappa & \lambda \end{pmatrix}$ τότε:
  - $\alpha_{12} = -2$
  - $\alpha_{33} = \lambda$
  - $\alpha_{32} = \kappa$

κ.ο.κ.

Ισότητα μητρών

Δύο μήτρες A=$[\alpha_{ij}]$ και B=$[\beta_{ij}]$ ίδιων διαστάσεων mxn είναι ίσες αν:

$$\alpha_{ij} = \beta_{ij},$$

για κάθε $i=1,2, \ldots m$ & $j=1,2, \ldots n$

Άρα A = B όταν:

1. είναι ίσων διαστάσεων &
2. έχουν τα αντίστοιχα στοιχεία τους ίσα

Άσκηση

- Ποια τα κ & λ τέτοια ώστε A = B;

1. αν $A=\begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 5 & 0 & -1 \\ 0 & \kappa & \lambda \end{pmatrix}$ $\quad \mathrm{B}=\begin{pmatrix} 3 & -\kappa-\lambda & 4 \\ 5 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}$

2. αν $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 5 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad \mathrm{B}=\begin{pmatrix} 3 & \kappa+\lambda & 4 \\ 5 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & \kappa-\lambda \end{pmatrix}$

Ειδικές μήτρες Ι

Μηδενική μήτρα: λέγεται η $A=[\alpha_{ij}]_{mxn}$ όταν $\alpha_{ij}=0$

για κάθε $i=1,2..m$ & $j=1,2..n$

Παραδείγματα:

$$A=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}\qquad B=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}$$

Ανάστροφη μήτρα A^T της $A=[\alpha_{ij}]_{mxn}$ λέγεται η $B=[\beta_{ji}]_{nxm}$ έτσι ώστε $\beta_{ji}=\alpha_{ij}$ για κάθε $i=1,2..m$ & $j=1,2..n$

Παράδειγμα:

$$A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\end{pmatrix}\qquad A^T=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{21}\\a_{12}&a_{22}\\a_{13}&a_{23}\end{pmatrix}$$

Άσκηση

Βρείτε την ανάστροφη μήτρα των επόμενων μητρών:

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 4 & -6 \\ -4 & 0 & 1 \\ 6 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$D=\begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Ειδικές μήτρες ΙΙ

Αντίθετη μήτρα –Α της $A=[\alpha_{ij}]_{mxn}$ λέγεται η $B=[\beta_{ij}]_{mxn}$ όταν $\beta_{ij} = -\alpha_{ij}$ για κάθε $i=1,2..m$ & $j=1,2..n$

Παράδειγμα:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \quad -A=\begin{pmatrix} -a_{11} & -a_{12} & -a_{13} \\ -a_{21} & -a_{22} & -a_{23} \end{pmatrix}$$

Μοναδιαία μήτρα I_n λέγεται η τετραγωνική μήτρα nxn τέτοια ώστε $\alpha_{ij} = 1$ αν $i=j$ και $\alpha_{ij} = 0$ για $i\neq j$ για κάθε $i=1,2...n$

Παραδείγματα:

$$I_3=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad I_2=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ειδικές μήτρες III

Έστω $A=[\alpha_{ij}]_{nxn}$ τετραγωνική μήτρα

- Α άνω τριγωνική αν $\alpha_{ij} = 0$ για κάθε $i > j$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}$$

- Α κάτω τριγωνική αν $\alpha_{ij} = 0$ για κάθε $i < j$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

- Α διαγώνια αν $\alpha_{ij} = 0$ για κάθε $i \neq j$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}$$

Πρόσθεση μητρών

Έστω A = $[\alpha_{ij}]$ και B = $[\beta_{ij}]$ ίδιων διαστάσεων mxn,

τότε $A+B = [\alpha_{ij} + \beta_{ij}]$, για κάθε $i=1,2..m$ & $j=1,2..n$

Παράδειγμα:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 7 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 0 & -4 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} \quad A + B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 7 & -4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$$

Όμοια ορίζεται και η αφαίρεση μητρών

Βαθμωτό γινόμενο μητρών

Έστω A = $[\alpha_{ij}]_{mxn}$ και λ ένας αριθμός,

τότε $\lambda \cdot A = [\lambda \cdot \alpha_{ij}]$, για κάθε i=1,2. . m & j=1,2.. n

Παράδειγμα:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 7 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \lambda = -2 \qquad \lambda \cdot \mathrm{A} = \begin{pmatrix} -6 & 4 \\ -14 & 0 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Ασκήσεις

1) Αν $A=\begin{pmatrix} 12 & -6 & 0 \\ 9 & 24 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$ να υπολογίστε την $(-\frac{1}{3})\cdot A$

2) Αν $B=\begin{pmatrix} -3 & -6 & 3 \\ 12 & \frac{2}{3} & -\frac{4}{3} \end{pmatrix}$ να υπολογίστε την $C = B + (-\frac{1}{3})\cdot A$

Παραδείγματα γινομένου μητρών

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \end{pmatrix} = a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \end{pmatrix} = a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21} + a_{13} \cdot b_{31}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21} & a_{11} \cdot b_{12} + a_{12} \cdot b_{22} \\ a_{21} \cdot b_{11} + a_{22} \cdot b_{21} & a_{21} \cdot b_{12} + a_{22} \cdot b_{22} \end{pmatrix}$$

Παραδείγματα γινομένου μητρών

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \end{pmatrix} = a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \end{pmatrix} = a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21} + a_{13} \cdot b_{31}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21} & a_{11} \cdot b_{12} + a_{12} \cdot b_{22} \\ a_{21} \cdot b_{11} + a_{22} \cdot b_{21} & a_{21} \cdot b_{12} + a_{22} \cdot b_{22} \end{pmatrix}$$

Γινόμενο μητρών

Αν $A = [\alpha_{ij}]_{mxr}$ και $B = [\beta_{ij}]_{rxn}$ τότε

$C = A \cdot B = [c_{ij}]_{mxn}$

όπου c_{ij} είναι το άθροισμα των γινομένων των στοιχείων της i γραμμής με τα αντίστοιχα της j στήλης

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ir} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mr} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \dots & \beta_{1j} & \dots & \beta_{1n} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \dots & \beta_{2j} & \dots & \beta_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \dots & \vdots \\ \beta_{r1} & \beta_{r2} & \dots & \beta_{rj} & \dots & \beta_{rn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & \dots & \dots & \dots & c_{1n} \\ \vdots & \ddots & \dots & \dots & \vdots \\ \vdots & \dots & \ddots & \dots & \vdots \\ \vdots & \dots & c_{ij} & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & \dots & \dots & \dots & c_{mn} \end{pmatrix}$$

ή

$$c_{ij} = \alpha_{i1} \cdot \beta_{1j} + \alpha_{i2} \cdot \beta_{2j} + \dots + \alpha_{ir} \cdot \beta_{rj} = \sum_{k=1}^{r} a_{ik} \cdot \beta_{kj}$$

Ασκήσεις

1) $$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

2) $$\begin{pmatrix} 5 & 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -5 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -3 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

3) $$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -5 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -3 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

Ασκήσεις$_2$

1. $$\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 6 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} = ?$$

2. $$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} = ?$$

Τι παρατηρείτε από το αποτέλεσμα στην 2^{η} άσκηση;
Μπορείτε να εξάγετε ένα γενικό συμπέρασμα;

Ερωτήσεις κατανόησης

Ισχύει η αντιμεταθετική ιδιότητα …

1. για την πρόσθεση μητρών;

2. για το βαθμωτό γινόμενο μητρών;

3. για το γινόμενο μητρών;

Μια πράξη @ είναι αντιμεταθετική αν:
α @ β = β @ α

Ιδιότητες πρόσθεσης και βαθμωτού γινόμενου μητρών

Πρόσθεση

- $A + B = B + A$
- $A + (B + \Gamma) = (A + B) + \Gamma$
- $A + O = A$
- $A + (-A) = O$

όπου O η μηδενική μήτρα

Βαθμωτό γινόμενο

- $(\kappa + \lambda) \cdot A = \kappa \cdot A + \lambda \cdot A$
- $\kappa \cdot (A + B) = \kappa \cdot A + \kappa \cdot B$
- $\kappa \cdot (\lambda \cdot A) = (\kappa \lambda) \cdot A$
- $1 \cdot A = A$
- $(-1) \cdot A = -A$

Ιδιότητες πολλαπλασιασμού μητρών

Αν $A = [\alpha_{ij}]_{\nu x \kappa}$, $B = [\beta_{ij}]_{\kappa x \lambda}$, $\Gamma = [\gamma_{ij}]_{\lambda x \mu}$, $S = [s_{ij}]_{\kappa x \lambda}$ & $T = [\tau_{ij}]_{\kappa x \lambda}$ και α, β αριθμοί τότε ισχύουν οι ιδιότητες:

1. $I_\nu \cdot A = A \cdot I_\kappa$
2. $A \cdot (B \cdot \Gamma) = (A \cdot B) \cdot \Gamma$
3. $\alpha \cdot (A \cdot B) = (\alpha \cdot A) \cdot B$

Προσεταιριστικές ιδιότητες

4. $A \cdot (B + S) = A \cdot B + A \cdot S$ ο πλ/σμός μητρών είναι ‘αριστερά επιμεριστικός’
5. $(B + T) \cdot \Gamma = B \cdot \Gamma + T \cdot \Gamma$ ο πλ/σμός μητρών είναι ‘δεξιά επιμεριστικός’
6. $O_{\lambda x \nu} \cdot A = O_{\lambda x \kappa}$
7. $A \cdot O_{\kappa x \mu} = O_{\nu x \mu}$

Όπου $O_{\lambda x \kappa}$ είναι η μηδενική μήτρα διάστασης λxκ …

Άσκηση

Αν $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ και $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

και C = O_2, τότε:

O_2: η μηδενική μήτρα 2x2

1. Να δείξετε ότι A · B = O

   Τι συμπεραίνετε; (παρότι B ≠ O_2 ≠ A)

2. Από το προηγούμενο έχουμε ότι A · B = A · C

   Τι συμπεραίνετε και πάλι για τις ιδιότητες των μητρών; (παρότι B ≠ C)

Συμπέρασμα

Στους πραγματικούς αριθμούς ισχύουν τα επόμενα:

1. Αν $\alpha \cdot \beta = \alpha \cdot \gamma \Rightarrow \beta = \gamma$
2. Αν $\alpha \cdot \delta = 0 \Rightarrow \begin{cases} \text{είτε } \alpha = 0 \\ \text{είτε } \delta = 0 \end{cases}$

Αυτές οι ιδιότητες ΔΕΝ ισχύουν στις μήτρες!

(η απόδειξη ονομάζεται με αντιπαράδειγμα)

Αντίστροφη & Ιδιάζουσα μήτρα

Στοιχεία Γραμμικής Άλγεβρας

Γιατί όμως μελετάμε τις μήτρες

Συνήθως τα επιστημονικά δεδομένα (παρατηρήσεις, αποτελέσματα πειραμάτων κ.λπ.) οργανώνονται σε γραμμές και σε στήλες, όπως ακριβώς στοιχίζονται τα στοιχεία σε μία μήτρα.

Ένα απλό παράδειγμα είναι και το επόμενο:

Όλες οι πληροφορίες για την επίλυση του συστήματος εξισώσεων:

$$\begin{cases} 5 \cdot x + 6 \cdot y = 3 \\ -3 \cdot x - y = 2 \end{cases}$$

μπορούν να δοθούν από την μήτρα: $\begin{bmatrix} 5 & 6 & 3 \\ -3 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

Και η επίλυση βέβαια μπορεί να γίνει πιο εύκολη με τη χρήση της μήτρας.

Αυτό βέβαια δεν σημαίνει ότι οι μήτρες χρησιμοποιούνται αποκλειστικά για την επίλυση συστημάτων εξισώσεων, αντιθέτως ως μαθηματικές έννοιες συνοδεύονται από μια πλούσια σχετική θεωρία (την Γραμμική Άλγεβρα)

Ορισμοί

- Έστω Α, Β τετραγωνικές μήτρες τ.ώ. $A \cdot B = B \cdot A$, τότε λέμε πως οι μήτρες Α και Β μετατίθενται

- Αν A_{nxn} τετραγωνική μήτρα.

  Ορίζουμε A^{ν}, $\nu \in Z^{+}$: $A^{\nu} = \begin{cases} I_n & \text{αν } \nu = 0 \\ A^{\nu-1} \cdot A & \text{αν } \nu \neq 0 \end{cases}$

- Έστω A_{nxn} τετραγωνική μήτρα. Αν υπάρχει B_{nxn} τ.ώ.

  $$A \cdot B = B \cdot A = I_n$$

  τότε η Β λέγεται αντίστροφη της Α (συμβολίζεται A^{-1})

  (και η Α λέγεται αντιστρέψιμη)

Παράδειγμα:

Να δείξετε ότι η μήτρα $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ δεν είναι αντιστρέψιμη (είναι ιδιάζουσα)

Υπόδειξη: Θεωρείστε μία μήτρα Β τ.ώ. $B \cdot A = I_2$

Ασκήσεις

1. Είναι η τετραγωνική μήτρα B, αντίστροφη μήτρα της A;

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

2. Να ελέγξετε το ίδιο για τις:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 8 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -11 & 2 & 2 \\ -4 & 0 & 1 \\ 6 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Μοναδικότητα της A^{-1}

Θεώρημα:

Αν A αντιστρέψιμη τότε υπάρχει 1 και μόνο 1 B τ.ώ.

$$A \cdot B = B \cdot A = \mathrm{I}$$

Απόδειξη:

Έστω υπάρχει και άλλη μία $C \neq B$ τ.ώ. $A \cdot C = C \cdot A = \mathrm{I}$

Τότε $C = C \cdot \mathrm{I} = C \cdot (A \cdot B) = (C \cdot A) \cdot B = \mathrm{I} \cdot B = B$

Παράδειγμα:

Υπάρχει η A^{-1} της $A=\begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$;

Υπόδειξη: Θεωρείστε μία B: $B \cdot A = I_2$
Στην συνέχεια ελέγξτε αν $A \cdot B = I_2$

'τέτοιο ώστε' = **τ.ώ.** = **:**
'1 και μόνο 1' = **1!**

Ιδιότητες της αντίστροφης μήτρας

Έστω A_{mxm}, B_{mxm} αντιστρέψιμες. Τότε ισχύουν:

1. $(A^{-1})^{-1} = A$
2. $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$
3. $(A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \ldots \cdot A_n)^{-1} = A_n^{-1} \cdot A_{n-1}^{-1} \cdot A_{n-2}^{-1} \ldots \cdot A_1^{-1}$
4. $(A^n)^{-1} = (A^{-1})^n$

Απόδειξη:

$$\left.\begin{aligned} &1)\ A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = \mathrm{I}_m \\ &\ \&\ \ (A^{-1})^{-1} \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot (A^{-1})^{-1} = \mathrm{I}_m \end{aligned}\right\} \Rightarrow A = (A^{-1})^{-1}$$

2) $(A \cdot B) \cdot (B^{-1} \cdot A^{-1}) = A \cdot \mathrm{I}_m \cdot A^{-1} = A \cdot A^{-1} = \mathrm{I}_m$

& όμοια $(B^{-1} \cdot A^{-1}) \cdot (A \cdot B) = \mathrm{I}_m$

3) αποδεικνύεται με επαγωγή για m

4) όμοια όπως η (3) συν την χρήση της προσεταιριστικής ιδιότητας

Υπενθύμιση

Μέθοδος της επαγωγής

Έστω έχω να αποδείξω μία πρόταση Π(ν), $\nu \in \mathbb{Z}^+$.

Αν αποδείξω ότι η πρόταση Π(ν) είναι αληθής για κάποιο φυσικό αριθμό ν = κ, τότε είναι αληθής και για κάθε επόμενο αριθμό ν=κ+1

Βήματα διαδικασίας:

1ο βήμα: δείχνω ότι η πρόταση Π(ν) ισχύει για ν = 1

2ο Υποθέτω ότι η πρόταση Π(κ) είναι αληθής για ν = κ

3ο Χρησιμοποιώντας τις υποθέσεις (1) & (2) προσπαθώ να αποδείξω ότι η πρόταση ισχύει για ν = κ + 1, δηλ. ότι και η Π(κ+1) είναι επίσης αληθής

Ασκήσεις

Α. Έστω η τετραγωνική μήτρα $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$

Να βρείτε:

1. την A^2
2. την f(A) αν $f(x) = x^2 - 3x + 5$
3. την g(A) αν $g(x) = x^2 + 2x + 11$

Β. Αν τώρα $B = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

υπολογίστε την $(A - B)^2$

Γραμμικά συστήματα σε μορφή μήτρας

Κάθε γραμμικό σύστημα μπορεί να γραφεί σε μορφή μητρών

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
\vdots \qquad\qquad & \quad\vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m
\end{aligned}
\quad \Leftrightarrow
$$

η μήτρα των μεταβλητών

η μήτρα των σταθερών

$$
\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots a_{2n} \\ & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} \cdots a_{mn} \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}
\Leftrightarrow \mathbf{A}\,\mathbf{X} = \mathbf{B}
$$

η μήτρα των συντελεστών

Άσκηση

Δημιουργήστε τις μήτρες των συντελεστών, των μεταβλητών και των σταθερών όρων των επόμενων συστημάτων:

$$\begin{aligned} x + y + z &= 0 \\ y + 2z &= 0 \\ x + 2y + 4z &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4x_1 - x_2 + 3x_3 &= -1 \\ 3x_1 + x_2 + 9x_3 &= -4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x + 3y &= 7 \\ y &= \tfrac{1}{2}x + 3z + 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y &= c_1 \\ a_2x + b_2y &= c_2 \end{aligned}$$

Λύση της A · X = b με χρήση της X = A^{-1} · b

Έστω το σύστημα n x n γραμμικών εξισώσεων

A · X = b με A_{nxn} αντιστρέψιμη

$$\left\{\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \ldots + a_{3n}x_n = b_3 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{array}\right.$$

ή σε μήτρες

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1k} & \ldots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2k} & \ldots & a_{2m} \\ \ldots & \ldots & & \ldots & & \ldots \\ a_{l1} & a_{l2} & \ldots & a_{lk} & \ldots & a_{lm} \\ \ldots & \ldots & & \ldots & & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nk} & \ldots & a_{nm} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_k \\ \ldots \\ x_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_l \\ \ldots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Λύση της $A \cdot X = b$ με χρήση της $X = A^{-1} \cdot b$ συνέχεια

Αφού A_{nxn} αντιστρέψιμη, τότε για κάθε n-διάστατο διάνυσμα b, το σύστημα $A \cdot X = b$ έχει μοναδική λύση την $X = A^{-1} \cdot b$

Απόδειξη:

Θα δ.ό. ότι η $X = A^{-1} \cdot b$ είναι λύση και είναι μοναδική!

a) $A \cdot (A^{-1} \cdot b) = (A \cdot A^{-1}) \cdot b = I_n \cdot b = b$, άρα X είναι λύση

b) Έστω υπάρχει και 2η λύση $X_1 \neq X \Rightarrow X_1 = A^{-1} \cdot b$

Από το (a) όμως $X = A^{-1} \cdot b$ επίσης, άρα $X = X_1$

Ασκήσεις

A. Έστω το σύστημα εξισώσεων

$$\begin{cases} 4 \cdot x_1 + 6 \cdot x_2 = 6 \\ 5 \cdot x_1 + 9 \cdot x_2 = 18 \end{cases}$$

1. Να δηλώσετε τις μήτρες A, X και b
2. Να βρείτε την λύση με χρήση της A^{-1}

B. Όμοια για το σύστημα

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ y + 2z = 2 \\ x + 2y + 4z = 3 \end{cases}$$

Ειδικές μήτρες IV

Έστω A_{nxn} τετραγωνική μήτρα

- Α Συμμετρική μήτρα αν $A^T = A$ π.χ. $\begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \beta & \delta & \varepsilon \\ \gamma & \varepsilon & \zeta \end{pmatrix}$

- Α Αντισυμμετρική μήτρα αν $A^T = -A$ π.χ. $\begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ -\alpha & 0 & \gamma \\ -\beta & -\gamma & 0 \end{pmatrix}$

- Α Ορθογώνια αν $A^T \cdot A = A \cdot A^T = I_n$ π.χ. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

  ή αλλιώς αν $A^T = A^{-1}$

Ιδιότητες Ανάστροφης μήτρας

Έστω A_{mxn} , τότε ισχύουν τα επόμενα:

1. $(A^T)^T = A$
2. $(A + \Delta)^T = A^T + \Delta^T$, όπου Δ_{mxn}
3. $(\lambda \cdot A)^T = \lambda \cdot A^T$
4. $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$, όπου B_{nxs}
5. $(A^k)^T = (A^T)^k$, όπου $\kappa \in \mathbb{N}$
6. $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$

Οι αποδείξεις αφήνονται ως άσκηση ....

1. Θα δείξουμε ότι για μήτρες A, B, Γ mxn (m,n ∈ ℕ) ισχύει η επόμενη ιδιότητα (προσεταιριστική):

$$\mathbf{A + (B + \Gamma) = (A + B) + \Gamma}$$

$$\mathrm{A} + (\mathrm{B} + \Gamma) =$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} + \left(\begin{pmatrix} \beta_{11} & \cdots & \beta_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_{m1} & \cdots & \beta_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \gamma_{11} & \cdots & \gamma_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_{m1} & \cdots & \gamma_{mn} \end{pmatrix} \right) =$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta_{11}+\gamma_{11} & \cdots & \beta_{1n}+\gamma_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_{m1}+\gamma_{m1} & \cdots & \beta_{mn}+\gamma_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+\beta_{11}+\gamma_{11} & \cdots & a_{1n}+\beta_{1n}+\gamma_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}+\beta_{m1}+\gamma_{m1} & \cdots & a_{mn}+\beta_{mn}+\gamma_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{(I)}$$

$$(\mathrm{A} + \mathrm{B}) + \Gamma =$$

$$\left(\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta_{11} & \cdots & \beta_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_{m1} & \cdots & \beta_{mn} \end{pmatrix} \right) + \begin{pmatrix} \gamma_{11} & \cdots & \gamma_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_{m1} & \cdots & \gamma_{mn} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11}+\beta_{11} & \cdots & \alpha_{1n}+\beta_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{m1}+\beta_{m1} & \cdots & \alpha_{mn}+\beta_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \gamma_{11} & \cdots & \gamma_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_{m1} & \cdots & \gamma_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+\beta_{11}+\gamma_{11} & \cdots & a_{1n}+\beta_{1n}+\gamma_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}+\beta_{m1}+\gamma_{m1} & \cdots & a_{mn}+\beta_{mn}+\gamma_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{(II)}$$

Τα (Ι) και (ΙΙ) είναι ίσα, άρα και τα πρώτα μέλη είναι ίσα μεταξύ τους

2. Θα δείξουμε ότι για κάθε μήτρα Amxn (m,n ∈ ℕ) & κ, λ ∈ ℝ ισχύει η ιδιότητα:

Προσοχή: το γινόμενο (κ·λ) δεν είναι βαθμωτό αλλά γινόμενο πραγματικών αριθμών

$$\mathbf{\kappa \cdot (\lambda \cdot A) = (\kappa \cdot \lambda) \cdot A}$$

$$\kappa \cdot (\lambda \cdot \mathrm{A}) =$$

$$\kappa \cdot \left(\lambda \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \right) = \kappa \cdot \begin{pmatrix} \lambda \cdot a_{11} & \cdots & \lambda \cdot a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda \cdot a_{m1} & \cdots & \lambda \cdot a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \kappa \cdot \lambda \cdot a_{11} & \cdots & \kappa \cdot \lambda \cdot a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \kappa \cdot \lambda \cdot a_{m1} & \cdots & \kappa \cdot \lambda \cdot a_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{(I)}$$

$$(\kappa \cdot \lambda) \cdot \mathrm{A} =$$

$$\begin{pmatrix} (\kappa \cdot \lambda) \cdot a_{11} & \cdots & (\kappa \cdot \lambda) \cdot a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (\kappa \cdot \lambda) \cdot a_{m1} & \cdots & (\kappa \cdot \lambda) \cdot a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \kappa \cdot \lambda \cdot a_{11} & \cdots & \kappa \cdot \lambda \cdot a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \kappa \cdot \lambda \cdot a_{m1} & \cdots & \kappa \cdot \lambda \cdot a_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{(II)}$$

Τα (Ι) και (ΙΙ) είναι ίσα, άρα και τα πρώτα μέλη είναι ίσα μεταξύ τους

Με τον ίδιο τρόπο μπορούμε να αποδείξουμε και τις υπόλοιπες

3. Θα δείξουμε ότι για κάθε μήτρα Amxn (m,n $\in \mathbb{N}$) ισχύει η επόμενη ιδιότητα:

$$\mathbf{I_m \cdot A = A \cdot I_n}$$

(όπου I_n & I_m μοναδιαίες μήτρες)

$$\mathrm{I}_m \cdot \mathrm{A} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot a_{11} & \dots & 1 \cdot a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 \cdot a_{m1} & \cdots & 1 \cdot a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \mathrm{A} \quad \text{(I)}$$

$$\mathrm{A} \cdot \mathrm{I}_n =$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \cdot 1 & \dots & a_{1n} \cdot 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} \cdot 1 & \cdots & a_{mn} \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \mathrm{A} \quad \text{(II)}$$

Με τον ίδιο τρόπο μπορούμε να αποδείξουμε και άλλες ιδιότητες του γινομένου μητρών

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ:

Ένας τρόπος απόδειξης του **<u>γινομένου δύο μητρών</u>** γίνεται με την χρήση του (i,j) στοιχείου, π.χ. έστω η μήτρα Amxr & η μήτρα Brxn (m,n,r $\in \mathbb{N}$), τότε το στοιχείο (i,j) του γινομένου A·B είναι το c_{ij}:

$$c_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + a_{i3} \cdot b_{3j} + \dots + a_{ir} \cdot b_{rj} = \sum_{k=1}^{r} a_{ik} \cdot b_{kj}$$

4. Θα δείξουμε ότι για τις μήτρες A_{mxr}, B_{rxs} και Γ_{sxn} ($m,n,r,s \in \mathbb{N}$) ισχύει η επόμενη ιδιότητα:

$$\mathbf{A \cdot (B \cdot \Gamma) = (A \cdot B) \cdot \Gamma}$$

Σύμφωνα με την παρατήρηση θα αποδείξουμε ότι το c_{ij} στοιχείο του πρώτου μέλους της ισότητας είναι ίσο με το c_{ij} στοιχείο του δεύτερου μέλους.

Άρα το c_{ij} του γινομένου **Α·(Β·Γ)** είναι το:

$$\sum_{k=1}^{r} a_{ik} \cdot \left(\sum_{\lambda=1}^{s} \beta_{k\lambda} \cdot \gamma_{\lambda j}\right) = \sum_{k=1}^{r}\sum_{\lambda=1}^{s} a_{ik} \cdot (\beta_{k\lambda} \cdot \gamma_{\lambda j}) \quad \text{(I)}$$

Όμοια το c_{ij} του γινομένου **(Α·Β)·Γ** είναι το:

$$\sum_{k=1}^{r} \left(\sum_{\lambda=1}^{s} a_{ik} \cdot \beta_{k\lambda}\right) \cdot \gamma_{\lambda j} \quad \text{(II)}$$

Εφόσον τα (Ι) και (ΙΙ) είναι ίσα, άρα το c_{ij} του γινομένου και των μελών είναι ίσα μεταξύ τους.

5. Θα δείξουμε ότι για την μήτρα A_{mxr} και A_{rxn} ($m,n,r \in \mathbb{N}$) ισχύει η επόμενη ιδιότητα:

$$\mathbf{(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T}$$

Έστω $\begin{array}{l} A = [a_{ij}]_{mxr} \\ B = [b_{ij}]_{rxn} \end{array}$ τότε $A \cdot B = [c_{ij}]_{mxn} \Rightarrow (A \cdot B)^T = [c'_{ij}]_{nxm}$ (I)

Επίσης $\begin{array}{l} A^T = [a'_{ij}]_{rxm} \\ B^T = [b'_{ij}]_{nxr} \end{array}$ και

$$B^T \cdot A^T = [d_{ij}]_{nxm} = \sum_{k=1}^{r} b'_{ik} a'_{kj} = \sum_{k=1}^{r} b_{ki} a_{jk} = \sum_{k=1}^{r} a_{jk} b_{ki} = \sum_{k=1}^{r} a_{jk} b_{ki} = [c_{ji}]_{mxn} = [c'_{ij}]_{nxm} \quad \text{(II)}$$

Αφού (Ι) ισούται με το (ΙΙ) έχουμε την ιδιότητα

Στοιχειώδεις μετασχηματισμοί γραμμών μήτρας (ΣΜΓ)

Στοιχεία Γραμμικής Άλγεβρας

Επαυξημένη μήτρα

Ορισμός:

Επαυξημένη (augmented matrix) ονομάζεται η μήτρα που περιέχει τα στοιχεία της μήτρας των συντελεστών συν αυτή των σταθερών όρων, π.χ. για ένα σύστημα A · X = b γραμμικών εξισώσεων m x n:

$$M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_n \end{bmatrix}$$

μήτρα συντελεστών

μήτρα σταθερών

Αυτό που μας παρέχει η επαυξημένη μήτρα είναι μια ολοκληρωμένη παρουσίαση ενός συστήματος γραμμικών εξισώσεων, για τις γραμμές & στήλες του, τις μεταβλητές και τους σταθερούς όρους του

Παράδειγμα

Ποια είναι η επαυξημένη μήτρα του παρακάτω συστήματος γραμμικών εξισώσεων:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 4x_3 + 3x_4 &= 5 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 - 2x_4 &= 1 \\ x_1 + 2x_2 - 5x_3 + 4x_4 &= 3 \end{aligned}$$

Είναι η μήτρα:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & 3 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -5 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

Τι είναι οι ΣΜΓ μήτρας

Έστω A_{mxn}, ονομάζουμε ΣΜΓ (ή γραμμοπράξεις) οποιαδήποτε από τις επόμενες πράξεις στις γραμμές R_i της μήτρας:

Γραμμοπράξη	**Συμβολισμός**
1. Πολλαπλασιάζω την R_i με μία σταθερά κ	$R_i \longrightarrow \kappa \cdot R_i$
2. Εναλλάσσω την R_i με την R_j	$R_i \leftrightarrow R_j$
3. Προσθέτω στην R_j λ φορές την R_i	$R_j \longrightarrow R_j + \lambda \cdot R_i$

Γραμμοϊσοδύναμη μήτρα της A_{mxn} λέγεται η μήτρα B_{mxn} που έχει δημιουργηθεί μέσα από μία πεπερασμένη σειρά γραμμοπράξεων (συμβολ. $A \sim B$)

Στοιχειώδης μήτρα λέγεται μία γραμμοϊσοδύναμη της I_n

Παραδείγματα

1. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \to 3 \cdot R_1} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ η οποία είναι και <u>στοιχειώδης μήτρα</u> (από την I_2)

2. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -3 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_3} \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$

Παρατήρηση: Κάθε γραμμοϊσοδύναμη μήτρα μπορεί να αποδοθεί επίσης αν πολλαπλασιάσουμε από τα αριστερά, την αρχική μήτρα με την αντίστοιχη στοιχειώδη

(δηλ. κάνουμε τις ίδιες γραμμοπράξεις στην μοναδιαία μήτρα και την στοιχειώδη που βρίσκουμε την πολλαπλασιάζουμε από αριστερά με την μήτρα)

Γιατί να χρησιμοποιώ ΣΜΓ;

Γιατί με τις ΣΜΓ σε ένα σύστημα γραμμικών εξισώσεων καταλήγουμε σε ένα άλλο ισοδύναμο, δηλ. οι λύσεις του είναι οι ίδιες με το αρχικό

Angelos Giannoulas

Ασκήσεις

Λύστε τα επόμενα γραμμικά συστήματα με ΣΜΓ

$$\begin{cases} x - 3y = 4 \\ -2x + 6y = -8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 3y = 4 \\ -2x + 6y = 5 \end{cases}$$

Πώς λύνω;

Προσπαθώ μέσα από ΣΜΓ να φτάσω από την αρχική επαυξημένη μήτρα σε μία ίδιας τάξης όπου:

1. είτε την μετασχηματίζω σε άνω τριγωνική (δηλ. $\alpha_{ij} = 0$ για κάθε $i > j$)
   "μέθοδος απαλοιφή του Gauss"
   (Gaussian Elimination)
2. στην θέση της μήτρας των συντελεστών έχω ανοιγμένη κλιμακωτή* μήτρα
   "μέθοδος απαλοιφής Gauss – Jordan"

* βλ. επόμενο ορισμό

Άσκηση

Λύστε το γραμμικό σύστημα εξισώσεων

$$\begin{aligned} x - 3y - 2z &= 6 \\ 2x - 4y - 3z &= 8 \\ -3x + 6y + 8z &= -5 \end{aligned}$$

Λύση

$$\begin{aligned} x - 3y - 2z &= 6 \\ 2x - 4y - 3z &= 8 \\ -3x + 6y + 8z &= -5 \end{aligned}$$

$$\downarrow$$

$$\begin{aligned} x - 3y - 2z &= 6 \\ 2y + z &= -4 \\ -3y + 2z &= 13 \end{aligned}$$

$$\downarrow$$

$$\begin{aligned} x - 3y - 2z &= 6 \\ 2y + z &= -4 \\ 7z &= 14 \end{aligned}$$

$$\rightarrow \quad x = 1, \quad y = -3, \quad z = 2$$

Βρείτε ποιοι στοιχειώδεις μετασχηματισμοί γραμμών έχουν γίνει:

Άσκηση

Σας δίνεται η επόμενη μήτρα (επαυξημένη)

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{bmatrix}$$

1. Ποιο είναι το γραμμικό σύστημα εξισώσεων που αφορά;
2. Ποια είναι η λύση του;

Υπόδειξη: Προσπαθήστε να έχετε την μοναδιαία μήτρα στην θέση της μήτρας των συντελεστών
(λύση: x=1, y=2, z=3)

Λύση

Το σύστημα γραμμικών εξισώσεων είναι;

$$x + y + 2z = 9$$
$$2x + 4y - 3z = 1$$
$$3x + 6y - 5z = 0$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{bmatrix}$$

Προσθέτουμε -2 φορές την πρώτη γραμμή στη δεύτερη και παίρνουμε

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 2 & -7 & -17 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{bmatrix}$$

Προσθέτουμε -3 φορές την πρώτη γραμμή στην τρίτη και παίρνουμε

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 2 & -7 & -17 \\ 0 & 3 & -11 & -27 \end{bmatrix}$$

Πολλαπλασιάζουμε τη δεύτερη γραμμή με 1/2 και παίρνουμε

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 3 & -11 & -27 \end{bmatrix}$$

Προσθέτουμε -3 φορές τη δεύτερη εξίσωση στην τρίτη και παίρνουμε

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

Πολλαπλασιάζουμε την τρίτη γραμμή με -2 και παίρνουμε

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Προσθέτουμε -1 φορά τη δεύτερη γραμμή στην πρώτη και παίρνουμε

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{11}{2} & \frac{35}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Προσθέτουμε $-\frac{11}{2}$ φορές την τρίτη γραμμή στην πρώτη και $\frac{7}{2}$ φορές την τρίτη γραμμή στην δεύτερη και παίρνουμε

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Δ. Δριβαλιάρης: Συστήματα γραμμικών εξισώσεων και πίνακες, Σημειώσεις Γραμμικής Άλγεβρας

Άσκηση

Με την μέθοδο απαλοιφής του Gauss να δείξετε ότι το σύστημα γραμμικών εξισώσεων δεν έχει λύση

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 5x_4 &= 4 \\ 2x_1 + 8x_2 - x_3 + 9x_4 &= 9 \\ 3x_1 + 5x_2 - 12x_3 + 17x_4 &= 7 \end{aligned}$$

Λύση

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 - \ \ 2x_3 + \ \ 5x_4 &= 4 \\ 2x_1 + 8x_2 - \ \ \ \ x_3 + \ \ 9x_4 &= 9 \\ 3x_1 + 5x_2 - 12x_3 + 17x_4 &= 7 \end{aligned}$$

$$\xrightarrow[R_3 \to -3R_1+R_3]{R_2 \to -2R_1+R_2}$$

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 5x_4 &= \ \ 4 \\ 2x_2 + 3x_3 - \ \ x_4 &= \ \ 1 \\ -\ 4x_2 - 6x_3 + 2x_4 &= -5 \end{aligned}$$

$$\xrightarrow{R_3 \to 2R_1+R_3}$$

$$0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 = -3$$

Άρα το σύστημα είναι αδύνατο

Κλιμακωτή μήτρα

Κλιμακωτή μήτρα M_{mxn} (echelon form matrix) λέγεται αν:

1. οι μηδενικές γραμμές βρίσκονται κάτω από τις μη - μηδενικές
2. το 1ο στοιχείο κάθε μη – μηδενικής γραμμής βρίσκεται σε στήλη δεξιότερα του 1ου μη -μηδενικού στοιχείου της προηγούμενης γραμμής

$$\pi.\chi. \begin{pmatrix} 0 & -4 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

- Το πρώτο στοιχείο κάθε μη – μηδενικής γραμμής λέγεται 'Ηγετικό στοιχείο'

- Αν τα ηγετικά στοιχεία μίας κλιμακωτής μήτρας είναι ίσα με την μονάδα, στην οποία στήλη τα υπόλοιπα στοιχεία είναι μηδενικά, τότε η μήτρα λέγεται 'Ανοιγμένη κλιμακωτή'

Παραδείγματα

- Κλιμακωτές μήτρες: $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

- Ανοιγμένες κλιμακωτές μήτρες $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & -7 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Άσκηση

1. Γιατί οι επόμενες μήτρες δεν είναι κλιμακωτές;

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2. Γιατί οι επόμενες μήτρες δεν είναι ανοικτές κλιμακωτές;

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Θεώρημα μετατροπής μήτρας σε ανοιγμένη κλιμακωτή

Κάθε μήτρα μπορεί να μετατραπεί σε «ανοιγμένη κλιμακωτή» (άρα και κλιμακωτή) μετά από πεπερασμένο πλήθος στοιχειωδών μετασχηματισμών γραμμών (γραμμοπράξεων)

Κλιμακωτή & Ανοικτή μέσω ΣΜΓ

(Μέθοδος)

1. Βρίσκετε την $1^{η}$ από αριστερά μη-μηδενική στήλη

2. Αν χρειάζεται, εναλλάξτε την $1^{η}$ σειρά με κάποια άλλη ώστε το $1^{ο}$ στοιχείο της στήλης στο (1) να είναι ≠ 0 (αν υπάρχει 1 προτιμήστε το)

3. Αν το $1^{ο}$ στοιχείο αυτής της στήλης στο (1) είναι Χ, πολλαπλασιάστε την $1^{η}$ γραμμή με 1/Χ (ώστε το $1^{ο}$ στοιχείο να είναι 1)

4. Επιλέξτε προσθαφαιρέσεις στις επόμενες γραμμές, με πολλαπλάσιο της $1^{ης}$ γραμμής, έ.ώ. να μηδενιστούν όλα τα στοιχεία κάτω από το 1

5. Μετά ξεχάστε την ύπαρξη της $1^{ης}$ γραμμής και επαναλάβετε ανάλογα τα βήματα για τον πίνακα που μένει

6. Συνεχίστε έτσι ώστε να φέρετε τον αρχικό πίνακα σε κλιμακωτή μορφή.

7. Για **Ανοιγμένη Κλιμακωτή** προσθαφαιρώ τα πολλαπλάσια των γραμμών με ηγετικά στοιχεία το 1 ώστε να εξαλείψω αν υπάρχουν τα μη μηδενικά στοιχεία των στηλών τους (Gauss – Jordan απαλοιφή)

Παράδειγμα μετατροπής σε κλιμακωτή

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 2 & 4 & -10 & 6 & 12 & 28 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 & -1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 2 & 4 & -10 & 6 & 12 & 28 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 & -1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & -17 & -29 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & -17 & -29 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{7}{2} & -6 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & -17 & -29 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{7}{2} & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{7}{2} & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{7}{2} & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Για ανοικτή κλιμακωτή θα προσθέσω στην 1^η γραμμή (5*2^η) & ανάλογα για τα στοιχεία της προτελευταίας στήλης

Άσκηση:
Σύμφωνα με την μέθοδο βρείτε τα βήματα των ΣΜΓ που έγιναν

σελ. 30-32: Anton, H. & Ropres, C. (2010), Elementary Linear Algebra, John Wiley & Sons

Άσκηση

Να λύσετε το επόμενο σύστημα γραμμικών εξισώσεων με ΣΜΓ (μέθοδος απαλοιφής Gauss) φέροντας τον επαυξημένο πίνακα σε μορφή κλιμακωτής μήτρας

$$\begin{aligned}
x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 + x_5 &= 10 \\
2x_1 - 4x_2 + 8x_3 + 3x_4 + 10x_5 &= 7 \\
3x_1 - 6x_2 + 10x_3 + 6x_4 + 5x_5 &= 27
\end{aligned}$$

Λύση

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 2 & 1 & 10 \\ 2 & -4 & 8 & 3 & 10 & 7 \\ 3 & -6 & 10 & 6 & 5 & 27 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 2 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 8 & -13 \\ 3 & -6 & 10 & 6 & 5 & 27 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 2 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 8 & -13 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 2 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 8 & -13 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 2 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 4 & -7 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 2 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} x_1 &= 5 + 2s - 3t \\ x_2 &= s \\ x_3 &= -3 - 2t \\ x_4 &= 7 + 4t \\ x_5 &= t \end{aligned}$$

βλ. βιβλίο σελ. 632

Άσκηση

Να λύσετε το επόμενο σύστημα γραμμικών εξισώσεων με ΣΜΓ φέροντας τον επαυξημένο πίνακα σε μορφή ανοικτής κλιμακωτής μήτρας

$$
\begin{aligned}
x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 12 \\
x_1 + 2x_2 \phantom{{}+ 4x_3} + 5x_4 &= 17 \\
3x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 &= 31
\end{aligned}
$$

Λύση

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 12 \\ 1 & 2 & 0 & 5 & 17 \\ 3 & 2 & 4 & -1 & 31 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{(-1)R_1 + R_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 12 \\ 0 & 1 & -1 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 4 & -1 & 31 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{(-3)R_1 + R_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 12 \\ 0 & 1 & -1 & 4 & 5 \\ 0 & -1 & 1 & -4 & -5 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{(1)R_2 + R_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 12 \\ 0 & 1 & -1 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{(-1)R_2 + R_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -3 & 7 \\ 0 & 1 & -1 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{aligned} x_1 \quad\quad + 2x_3 - 3x_4 &= 7 \\ x_2 - \quad x_3 + 4x_4 &= 5 \\ 0 &= 0. \end{aligned}$$

$$x_3 = s \quad \text{και} \quad x_4 = t$$

$$x_1 = 7 - 2s + 3t$$

$$x_2 = 5 + \quad s - 4t$$

βλ. βιβλίο σελ. 637

Θεώρημα αντιστρεψιμότητας

Μία τετραγωνική μήτρα A_m είναι αντιστρέψιμη αν και μόνο αν A_m γραμμοϊσοδύναμη με την I_m

αν και μόνο αν : $\Leftrightarrow$

Εύρεση της A^{-1} μέσω ΣΜΓ

1. Δημιουργώ μία μήτρα που περιέχει και την A_m και την I_m
2. Κάνω γραμμοπράξεις έως ότου στην θέση της A_m έχω την I_m
3. Η μήτρα που υπάρχει στην θέση της I_m είναι η A^{-1}

ΠΡΟΣΟΧΗ

Αν στην αριστερή πλευρά εμφανιστεί γραμμή με μηδενικά στοιχεία, τότε η A_m δεν είναι αντιστρέψιμη

Παράδειγμα

Έστω η μήτρα $A=\begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 5 & 6 & 3 \\ 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}$ Δημιουργώ την $\begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & \vdots & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 6 & 3 & \vdots & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 2 & \vdots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & \vdots & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 6 & 3 & \vdots & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 2 & \vdots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \to R_1 - R_3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & \vdots & 1 & 0 & -1 \\ 5 & 6 & 3 & \vdots & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 2 & \vdots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \to R_2 - R_3}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & \vdots & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & \vdots & 0 & 1 & -1 \\ 3 & 5 & 2 & \vdots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \to R_2 - 2R_1} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & \vdots & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 5 & 1 & \vdots & -2 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 2 & \vdots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \to R_3 - 3R_1}$$

Παράδειγμα (συνέχεια)

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 5 & 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 11 & 2 & -3 & 0 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 \to R_3 - 2R_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 5 & 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -2 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 5 & 1 & -2 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 \to R_1 + 2R_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & -4 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 5 & 1 & -2 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 \to R_3 - 5R_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & -4 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -7 & 11 & -9 \end{array}\right)$$

Το δεξί μέρος είναι η A^{-1}

Άσκηση:
Πώς μπορούμε να επαληθεύσουμε ότι είναι πράγματι αυτή;

βλ. βιβλίο σελ. 659

Ορίζουσες

Στοιχεία Γραμμικής Άλγεβρας

Επισήμανση

Όλες οι μήτρες στις οποίες αναφερόμαστε στην συνέχεια είναι **τετραγωνικές**

εκτός και αν αναφερθεί διαφορετικά

Ορισμός Ορίζουσας

Σε κάθε τετραγωνική μήτρα A_n αντιστοιχεί ένας αριθμός, η ορίζουσα της Α και συμβολίζεται D(A) ή |A| ή detA

Ορίζουσα μίας A_1: Αν $A=[\alpha_{11}]$ μήτρα 1x1 , τότε $|A| = |\alpha_{11}| = \alpha_{11}$

Ορίζουσα μίας A_2 = $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ τότε $\det\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} = \alpha\delta - \beta\gamma$

Πόρισμα: Αν A_n τετραγωνική μήτρα, τότε

$|A| \neq 0 \Leftrightarrow$ Α αντιστρέψιμη

Ασκήσεις

Βρείτε την ορίζουσα των επόμενων μητρών:

[-3] = ;

[5   -2   1] = ;

$$\begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ -4 \end{bmatrix} = ;$$

$$\begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} = ;$$

Κανόνας του Cramer

(για συστήματα εξισώσεων 2x2)

Έστω το σύστημα $\begin{cases} a_{11} \cdot x + a_{12} \cdot y = b_1 \\ a_{21} \cdot x + a_{22} \cdot y = b_2 \end{cases}$

ή αλλιώς σε μήτρες: $A \cdot X = b \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$

1. **Αν A αντιστρέψιμη, τότε το $A \cdot X = b$ έχει μία λύση: $X = A^{-1} \cdot b$**
2. Από το προηγούμενο πόρισμα: **αν A αντιστρέψιμη, τότε $|A| \neq 0$**

Ο **κανόνας του Cramer** για συστήματα εξισώσεων 2x2 μας λέει ότι:

$$x = \frac{\begin{pmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{pmatrix}}{|A|} \qquad y = \frac{\begin{pmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{pmatrix}}{|A|}$$

Κανόνας του Cramer

(για συστήματα εξισώσεων nxn)

Έστω το σύστημα γραμμικών εξισώσεων
& Α η μήτρα των συντελεστών α_{ij}

$$\begin{cases} \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \ldots + \alpha_{1\nu}x_\nu = \beta_1 \\ \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \ldots + \alpha_{2\nu}x_\nu = \beta_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_{\nu1}x_1 + \alpha_{\nu2}x_2 + \ldots + \alpha_{\nu\nu}x_\nu = \beta_\nu \end{cases}$$

Τότε ο κανόνας του Cramer μας λέει ότι:

1. **Αν |Α| ≠ 0**

$$x_1 = \frac{\begin{pmatrix} \beta_1 & \cdots & \alpha_{1\nu} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_\nu & \cdots & \alpha_{\nu\nu} \end{pmatrix}}{|A|},\ x_2 = \frac{\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \beta_1 & \cdots & \alpha_{1\nu} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{\nu1} & \beta_\nu & \cdots & \alpha_{\nu\nu} \end{pmatrix}}{|A|},\ldots,\ x_\nu = \frac{\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \beta_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{\nu1} & \cdots & \beta_\nu \end{pmatrix}}{|A|}$$

2. **Αν |Α|= 0 και |$A_{\beta i}$| = 0 για όλα τα i=1,..,ν**

   τότε το σύστημα έχει άπειρες λύσεις (Αόριστο)

3. **Αν |Α|= 0 και |$A_{\beta\kappa}$| ≠ 0 για ένα τουλάχιστον 1 ≤ κ ≤ ν**

   τότε το σύστημα είναι αδύνατο και Α μη αντιστρέψιμη μήτρα

Ασκήσεις

1. Έστω το σύστημα $\begin{cases} 7 \cdot x + 8 \cdot y = 5 \\ 6 \cdot x + 9 \cdot y = 4 \end{cases}$

Να βρείτε τα x, y με τον κανόνα του Cramer

(Λύση: x = 13/15 & y = - 2/15)

2. Όμοια για το σύστημα $\begin{cases} 4 \cdot x - 3 \cdot y = 15 \\ 2 \cdot x + 5 \cdot y = 1 \end{cases}$

(Λύση: x = 3 & y = - 1)

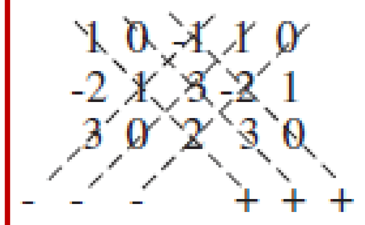
Ορίζουσα 3^{ης} τάξης

Έστω A3 (τετραγωνική μήτρα 3x3), τότε:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

μέθοδος Sarrus



Παράδειγμα: $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & -2 \\ 1 & -3 & 4 \end{bmatrix}$

$$\det(A) =$$
$$2(5)(4)+1(-2)(1)+1(-3)(0)-1(5)(1)-(-3)(-2)(2)-4(1)(0)$$
$$= 40 - 2 + 0 - 5 - 12 - 0 = 21$$

Ασκήσεις

- Βρείτε την ορίζουσα της μήτρας B_3

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -4 & 5 & -1 \\ 2 & -3 & 4 \end{bmatrix}$$

(Λύση: 81)

- Όμοια για την επόμενη

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -2 & 3 \\ 0 & 5 & -1 \end{bmatrix}$$

(Λύση: 55)

Αλγεβρικό συμπλήρωμα στοιχείου μήτρας 3ης τάξης

Ορισμοί: Έστω ένα στοιχείο $α_{ij}$ μίας μήτρας A_3

- Ελάσσονα ορίζουσα (minor) A_{ij} του $α_{ij}$ είναι η ορίζουσα που προκύπτει αν παραλείψουμε την i-γραμμή & την j-στήλη
- Αλγεβρικό συμπλήρωμα (ή Συμπαράγουσα) (cofactor) ενός στοιχείου αij της A_3, είναι ο αριθμός $(-1)^{i+j} \cdot A_{ij}$

Παράδειγμα: $\text{Αν } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

- Ελάσσονα ορίζουσα του $α_{12}$: $A_{12} = \det\begin{pmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix}$
- Αλγεβρικό συμπλήρωμα του $α_{12}$: $(-1)^{1+2} \cdot A_{12} = -A_{12}$

Ορίζουσα μήτρας 3ης τάξης (μέθοδος Laplace)

Ορίζουσα 3ης τάξης μήτρας είναι ο αριθμός που προκύπτει από το άθροισμα των γινομένων των στοιχείων μίας γραμμής (ή μίας στήλης) με τα αντίστοιχα αλγεβρικά τους συμπληρώματα

Η μέθοδος γενικεύεται και για μήτρες nxn

Παράδειγμα: Στην Α του προηγούμενου παραδείγματος,

$$|\mathrm{A}| = a_{11} \cdot (-1)^{1+1} \cdot \mathrm{A}_{11} + a_{12} \cdot (-1)^{1+2} \cdot \mathrm{A}_{12} + a_{13} \cdot (-1)^{1+3} \cdot \mathrm{A}_{13}$$

$$\mathrm{A}_{11} = \det\begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad \mathrm{A}_{12} = \det\begin{pmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix} \quad \mathrm{A}_{13} = \det\begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$$

Παράδειγμα

Να βρεθεί η ορίζουσα της τελευταίας άσκησης

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -2 & 3 \\ 0 & 5 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -2 & 3 \\ 0 & 5 & -1 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -2 & 3 \\ 0 & 5 & -1 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -2 & 3 \\ 0 & 5 & -1 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -2 & 3 \\ 0 & 5 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= 1\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 0 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= 1(2 - 15) - 2(-4 + 0) + 3(20 + 0) = -13 + 8 + 60 = 55$$

Ασκήσεις

Να βρείτε την ορίζουσα με την μέθοδο Laplace των μητρών

$$C = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -4 & 5 & -1 \\ 2 & -3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & -2 \\ 1 & -3 & 4 \end{bmatrix} \qquad E = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & -2 \\ -5 & -7 & -3 & 9 \\ 1 & -2 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

(Λύση: 38)

Ιδιότητες ορίζουσας

1. Αν B μήτρα που προκύπτει από την **εναλλαγή 2 γραμμών (ή στηλών)** της A, τότε: **|B| = -|A|**
2. Αν B προκύπτει από το γινόμενο μιας γραμμής (ή στήλης) της A με έναν αριθμό λ, τότε: $|B| = \lambda \cdot |A|$
3. Αν λ αριθμός, τότε: $|\lambda \cdot A| = \lambda^n \cdot |A|$ (αν A_{nxn})
4. Αν η A έχει 2 γραμμές (ή στήλες) ίσες, τότε: $|A|=0$
5. Αν η A έχει μηδενική γραμμή ή στήλη, τότε $|A| = 0$
6. Αν η B προκύπτει από την **αντικατάσταση μιας γραμμής (ή στήλης) με την προστιθέμενη σε αυτή πολλαπλάσιο άλλης**, τότε: **|B| = |A|**
7. Αν A, B ίδιας τάξης, τότε: $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$
8. $|A| = |A^T|$
9. Αν A αντιστρέψιμη, τότε: $A \cdot A^{-1} = I \Rightarrow |A^{-1}| = 1/|A|$
10. Η ορίζουσα μιας τριγωνικής μήτρας ισούται με το γινόμενο της διαγωνίου

βλ. αποδείξεις στο βιβλίο σελ. 669

Παράδειγμα

(χρήσης των ιδιοτήτων)

Έστω η μήτρα $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -4 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & 10 & 1 \end{bmatrix}$

Δεν υπάρχουν μηδενικά στοιχεία ώστε να απλοποιείται ο υπολογισμός της ορίζουσας, άρα οι πράξεις μας θα είναι πολλές. Αν όμως την 6^{η} ιδιότητα ώστε να «εξαφανίσουμε» τα 2 πρώτα στοιχεία της 3^{ης} στήλης (προσθέτουμε 2*(1^{η}) στήλη στην 3^{η}), άρα:

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 2 & -3 & -4 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & 10 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \\ 3 & 10 & 7 \end{vmatrix}$$

$$= (+7) \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 35.$$

βλ. βιβλίο σελ. 670

Παράδειγμα

(χρήσης των ιδιοτήτων)

Έστω η ορίζουσα $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -2 & 1 & 5 \\ 4 & -2 & 10 \end{vmatrix}$

Από την 6η ιδιότητα μπορούμε να προσθέσουμε την 1η γραμμή στην 2η και να αφαιρέσουμε την 2* (1η) γραμμή από την τρίτη, άρα θα έχουμε μια τριγωνική μήτρα με ένα 0 στην κύρια διαγώνιο (βλ. ιδιότητα 10):

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -2 & 1 & 5 \\ 4 & -2 & 10 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

Μήπως θα μπορούσαμε να κάνουμε ένα άλλο βήμα και να έχουμε την απάντηση χωρίς να κάνουμε πράξεις;

βλ. βιβλίο σελ. 670

Προσαρτημένη μήτρα (adjoint)

Προσαρτημένη μήτρα της A (adjA) είναι η ανάστροφη της μήτρας που έχει ως στοιχεία τα αλγεβρικά συμπληρώματα της A,

δηλ. $\mathrm{adj}A = [A_{ij}]^T = [A_{ji}]$

Παράδειγμα / Άσκηση (ως επαλήθευση):

$$\text{Αν } A=\begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 5 \\ -3 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{τότε } \left[A_{ij}\right]=\begin{pmatrix} -17 & -11 & 18 \\ 19 & 14 & -15 \\ 10 & 15 & -14 \end{pmatrix} \text{ και } \left[A_{ij}\right]^T=\begin{pmatrix} -17 & 19 & 10 \\ -11 & 14 & 15 \\ 18 & -15 & -14 \end{pmatrix}$$

Άσκηση

Βρείτε την προσαρτημένη μήτρα της A, όπου

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 0 & -4 & 2 \\ 1 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

Λύση

$$A_{11} = +\begin{vmatrix} -4 & 2 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = -18$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = -11$$

$$A_{31} = +\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} = -10$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 2$$

$$A_{22} = +\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 14$$

$$A_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -4$$

$$A_{13} = +\begin{vmatrix} 0 & -4 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 4$$

$$A_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 5$$

$$A_{33} = +\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} = -8$$

$$\operatorname{adj} A = \begin{bmatrix} -18 & -11 & -10 \\ 2 & 14 & -4 \\ 4 & 5 & -8 \end{bmatrix}$$

Θεώρημα εύρεσης A^{-1} με την adjA

Αν Α αντιστρέψιμη μήτρα, τότε:

$$A^{-1} = \frac{\left[A_{ij}\right]^T}{|A|} = \frac{\mathrm{adj}A}{|A|}$$

Άσκηση

Από προηγούμενη άσκηση βρήκαμε ότι για $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 5 \\ -3 & 3 & -1 \end{pmatrix}$

|A|=29

Να βρείτε την $A^{-1} = \dfrac{\mathrm{adj}A}{29}$

Άσκηση

Σε προηγούμενο παράδειγμα $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 0 & -4 & 2 \\ 1 & -1 & 5 \end{bmatrix}$

βρήκαμε την προσαρτημένη μήτρα $\operatorname{adj} A = \begin{bmatrix} -18 & -11 & -10 \\ 2 & 14 & -4 \\ 4 & 5 & -8 \end{bmatrix}$

Βρείτε την A^{-1}

Λύση

Η A έχει αντίστροφη μήτρα εφόσον η ορίζουσά της είναι ≠ 0

$$\det(A) = -40 + 6 + 0 - 16 + 4 + 0 = -46$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}(\operatorname{adj} A) =$$

$$-\frac{1}{46}\begin{bmatrix} -18 & -11 & -10 \\ 2 & 14 & -4 \\ 4 & 5 & -8 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \frac{9}{23} & \frac{11}{46} & \frac{5}{23} \\ -\frac{1}{23} & -\frac{7}{23} & \frac{2}{23} \\ -\frac{2}{23} & -\frac{5}{46} & \frac{4}{23} \end{bmatrix}$$

Θεώρημα γινομένου οριζουσών

Θεώρημα: Αν A και B είναι τετραγωνικές n x n μήτρες, τότε:

$$|A| \cdot |B| = |A \cdot B|$$

Πόρισμα: Ισχύει ότι αν A αντιστρέψιμη τότε $A \cdot A^{-1} = I_n$

Τότε από το θεώρημα έχουμε ότι:

$$|A| \cdot |A^{-1}| = 1 \Leftrightarrow |A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$$

Angelos Giannoulas

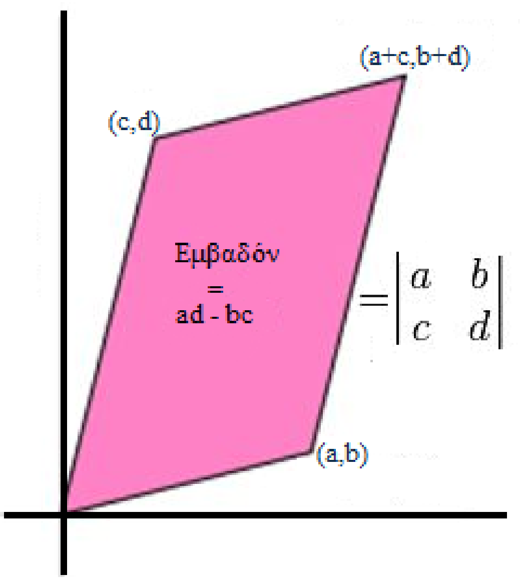
Ορίζουσες & Γραμμικά συστήματα εξισώσεων

Στοιχεία Γραμμικής Άλγεβρας

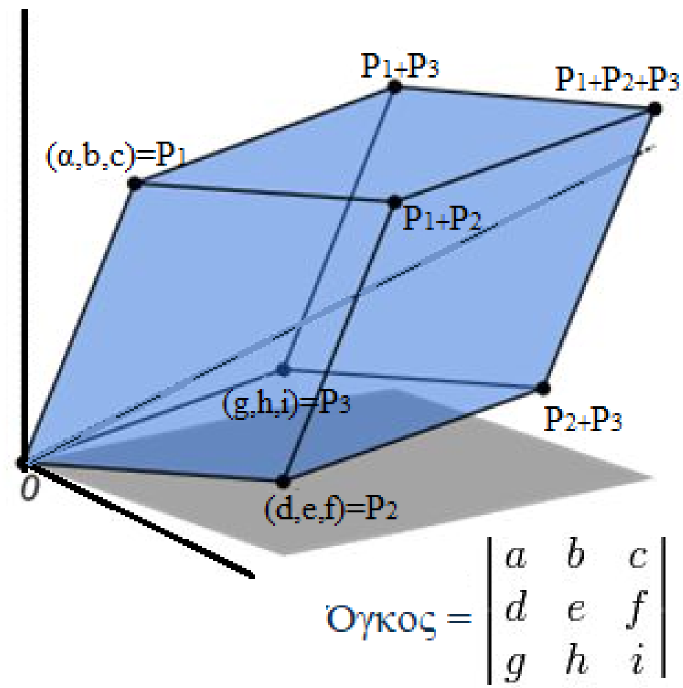
Ορίζουσα και Όγκος

Η ορίζουσα είναι ένα ισχυρό εργαλείο για την εύρεση του όγκου!

Αν έχω n διανύσματα u_1, u_2, u_3, … u_n στο $\mathbb{R}^n$, τότε ο όγκος του παραλληλεπιπέδου που ορίζεται από αυτά δίνεται από την *απόλυτη τιμή* της ορίζουσας των συντεταγμένων τους



ΠΑΝΤΑ η αρχή των αξόνων σε μία κορυφή



Στο $\mathbb{R}^2$, μου δίνει το Εμβαδόν

Στο $\mathbb{R}^3$, μου δίνει τον Όγκο

Ασκήσεις

Ποιος είναι ο όγκος (ή εμβαδόν) του παραλληλεπιπέδου (ή παραλληλογράμμου) που ορίζεται από τα διανύσματα:

1. u = (1, 0) & v = (1,2)

   Λύση: 2

2. u = (1, 4, 0), v = (-2, -5, 2) & t = (-1, 2, -1)

   Λύση: |- 15| = 15

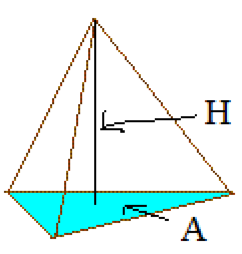
3. Τι θα συμβεί στον όγκο του προηγούμενου παραλληλεπιπέδου αν αλλάξω την σειρά που βάζω τις συντεταγμένες;

Όγκος τετράεδρου

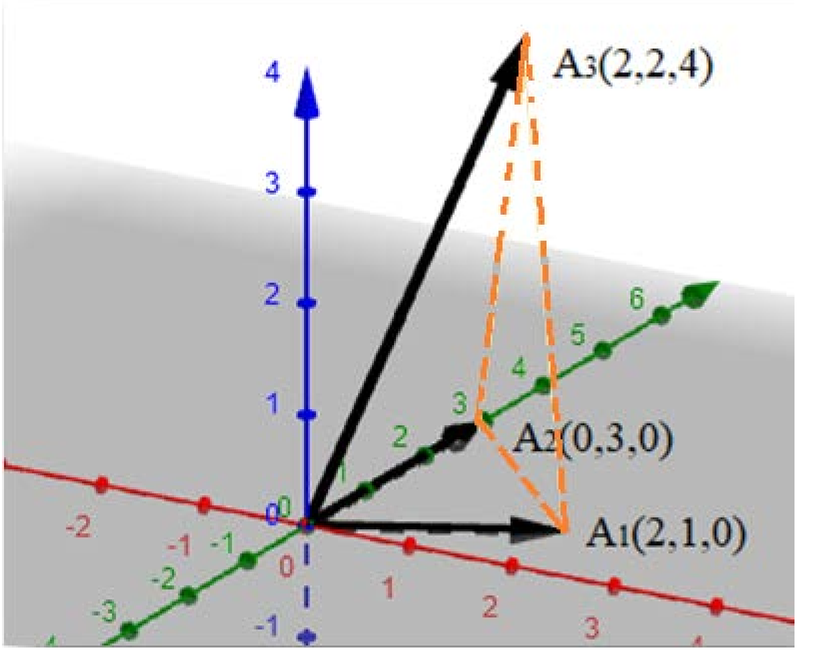
Από την προηγούμενη θεωρία μπορούμε να βρούμε τον όγκο ενός τετράεδρου.

Έστω τα διανύσματα (2,1,0), (0,3,0), (2,2,4):
θα υπολογίσουμε τον όγκο του 4εδρου $OA_1A_2A_3$

Ο όγκος του τετράεδρου σχήματος δίνεται από τον τύπο:



$$V = \frac{1}{3} AH$$



Όγκος τετράεδρου συνέχεια

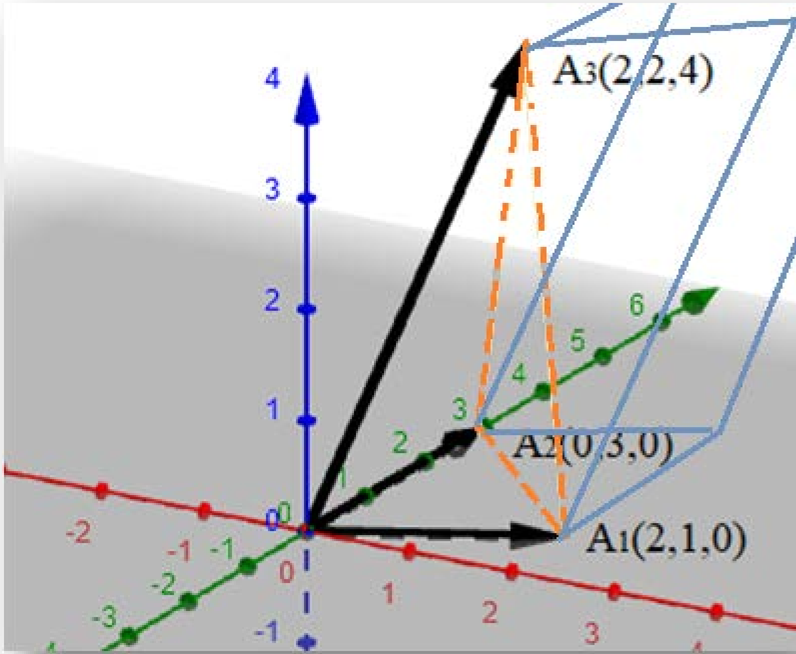
Αν στο σχήμα δημιουργήσω το παραλληλεπίπεδο με ακμές A_1, A_2 και A_3, τότε ο όγκος του είναι:

$$V\pi = \text{Βάση} \cdot \text{Ύψος} = (2 \cdot A) \cdot H$$

(επέλεξα ως βάση αυτή που ορίζεται από τα A_1, A_2 , άρα:

a) η βάση είναι το διπλό της βάσης της τετράεδρης πυραμίδας και

b) το ύψος θα είναι και πάλι ίσο με Η)



Άρα $V = \dfrac{1}{6} \cdot V\pi = \dfrac{24}{6} = 4$

Άσκηση

- Βρείτε με χρήση των οριζουσών τον όγκο του τετράεδρου που ορίζεται από τα διανύσματα:

  $A_1(2,2,-1)$, $A_2(1,3,0)$ και $A_3(-1,1,4)$

- Πόσο θα γίνει ο όγκος αν το A_3 μετακινηθεί στο (-201, -199, 104);

Λύση: α) 2
β) 2

Βαθμός μήτρας

Βαθμός μιας μήτρας A (rank(A)) είναι ο μέγιστος αριθμός γραμμικών ανεξάρτητων διανυσμάτων (στηλών)

Υπενθύμιση: Σε έναν διανυσματικό χώρο m διάστασης, τα διανύσματα $\upsilon_1+\upsilon_2+\upsilon_3+ \ldots +\upsilon_\kappa$ είναι γραμμικώς **εξαρτημένα** αν υπάρχουν αριθμοί $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots \lambda_\kappa$, όχι όλοι μηδέν:

$$\lambda_1 \cdot \upsilon_1 + \lambda_2 \cdot \upsilon_2 + \ldots + \lambda_\kappa \cdot \upsilon_\kappa = 0 \quad (1)$$

(ή ότι ένα από αυτά μπορεί να γραφτεί ως γραμμικός συνδυασμός των άλλων)

Θα λέμε ότι είναι γραμμικώς **ανεξάρτητα** αν στην (1) $\lambda_i = 0$ για κάθε i

δηλ. η ορίζουσα των διανυσμάτων ≠ 0

Εύρεση βαθμού μήτρας

- **1^{ος} τρόπος**: Με ΣΜΓ έως ότου βρούμε τον μέγιστο αριθμό γραμμικώς ανεξάρτητων διανυσμάτων (των γραμμών ≠ 0 σε κλιμακωτή μορφή ή ανοιγμένη κλιμακωτή)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 3 & 4 \\ 3 & 7 & 4 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{άρα rank(A)} = 3$$

- **2^{ος} τρόπος**:

Με την μέγιστη σε τάξη ορίζουσα ≠ 0 (ελέγχουμε τις ελάσσονες ορίζουσες)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 3 & 4 \\ 3 & 7 & 4 & 6 \end{pmatrix} \quad |\mathrm{A}|=0 \ \text{ ενώ } \ \det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} = 1 \neq 0, \ \text{άρα} \ \text{rank(A)}=3$$

Άσκηση: Επαληθεύστε τα παραπάνω

Ασκήσεις

1. rank(I_3) = ;
2. rank(O) = ;
3. rank(I_n) = ;
4. Ποιο το rank(A) ; $$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$
   Αν η τελευταία γραμμή ήταν 1 1 0 1, ποιο το rank(A);
5. Ποιο το rank(A) ; $$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Υπόδειξη: Προσπαθήστε να την φέρετε με ΣΜΓ σε 'Ανοιγμένη κλιμακωτή μορφή'

Γραμμικά συστήματα εξισώσεων

Στοιχεία Γραμμικής Άλγεβρας

Υπενθύμιση

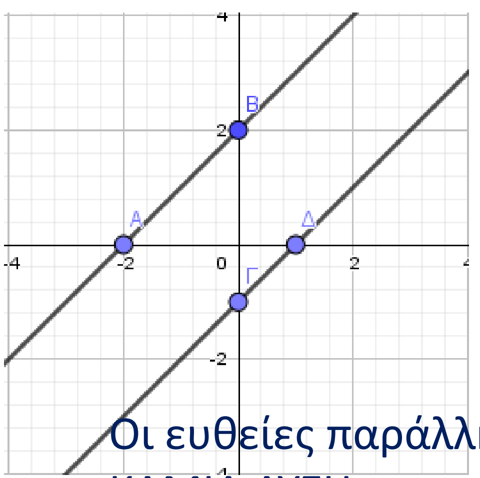
Στο Λύκειο εργαστήκαμε στην επίλυση γραμμικών συστημάτων δύο & τριών μεταβλητών (αγνώστων)

- Η γραμμική εξίσωση 2 μεταβλητών, x, y είναι της μορφής:

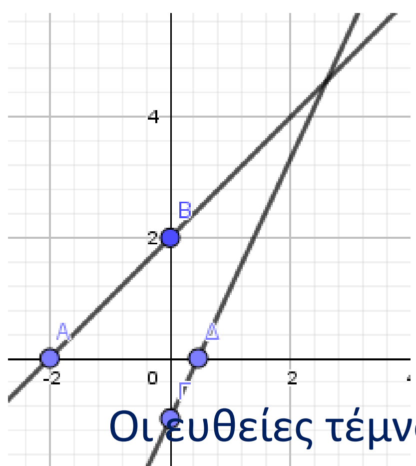
  $a \cdot x + b \cdot y = c$ (a, b σταθερές, όχι και οι 2 μηδέν)

- Είναι η εξίσωση ευθείας στο επίπεδο (2-διάστατος χώρος)

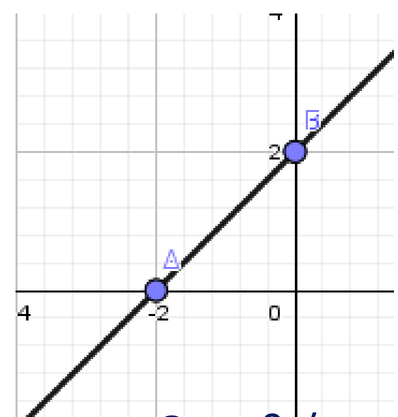
- Άρα για το σύστημα $\begin{cases} a_1 \cdot x + b_1 \cdot y = c_1 \\ a_2 \cdot x + b_2 \cdot y = c_2 \end{cases}$ υπάρχουν 3 πιθανές λύσεις



Οι ευθείες παράλληλες:
ΚΑΜΙΑ ΛΥΣΗ



Οι ευθείες τέμνονται:
ΜΙΑ ΛΥΣΗ ΜΟΝΑΔΙΚΗ



Οι ευθείες συμπίπτουν:
ΑΠΕΙΡΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

Υπενθύμιση (συνέχεια)

Το σύστημα $\begin{cases} a_1 \cdot x + b_1 \cdot y = c_1 \quad (\mathrm{I}) \\ a_2 \cdot x + b_2 \cdot y = c_2 \quad (\mathrm{II}) \end{cases}$

έχει λύσεις ΟΛΑ τα ζευγάρια (x, y) τ.ώ. επαληθεύουν και την (I) και την (II)

- Αν ένα σύστημα έχει έστω 1 λύση λέγεται **Συμβιβαστό σύστημα**
- Αν δεν έχει καθόλου λύσεις, λέγεται **Ασυμβίβαστο σύστημα**

Υπενθύμιση (συνέχεια)

- Όμοια η γραμμική εξίσωση 3 μεταβλητών x, y, z είναι της μορφής:

  $a \cdot x + b \cdot y + c \cdot y = d$ (a, b, c σταθερές, όχι και οι 3 μηδέν)

- Είναι η εξίσωση επιπέδου στο χώρο (3-διάστατος χώρος)

Οι γραμμικές εξισώσεις είναι 1ου βαθμού

Ερωτήσεις υπενθύμισης:

Η $x + x \cdot y = 5$ είναι γραμμική;

Η $x^2 - 4 \cdot y = 0$;

Γραμμικά συστήματα mxn

- Γραμμικό σύστημα m εξισώσεων με n αγνώστους είναι :

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
\dots\dots \quad & \dots\dots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \dots + a_{mn}x_n &= b_m
\end{aligned}
$$

ή αλλιώς: $A \cdot X = b$

- Μία λύση του συστήματος είναι της μορφής $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$
- Το σύνολο των λύσεων λέγεται ‘γενική λύση’
- Αν δεν υπάρχει τέτοιο X, το σύστημα είναι αδύνατο

$$
\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}
$$

Μήτρα συντελεστών A Μήτρα αγνώστων X Μήτρα σταθερών b

> Αν τα $b_i = 0$ για κάθε i,
> Τότε το σύστημα
> λέγεται ‘Ομογενές’

Θεώρημα
εύρεσης πλήθους λύσεων με τον βαθμό

Υπενθύμιση: Επαυξημένη μήτρα A_E ονομάζεται η μήτρα των συντελεστών της A με την προσθήκη στο τέλος την στήλη των σταθερών b

Μία και μόνο : **1!**

Ένα σύστημα A · X = b , m εξισώσεων & **n αγνώστων** έχει:

1. Μία και μόνο λύση αν rank(A) = rank(A_E) = n
2. Άπειρες λύσεις αν rank(A) = rank(A_E) < n
3. Χωρίς λύση αν rank(A) ≠ rank(A_E)

Άσκηση: Βρείτε αν είναι συμβιβαστό το:

$$\begin{cases} x + 2y - z = 5 \\ 3x - y + 2z = 2 \\ 2x + 11y - 7z = -2 \end{cases}$$

Υπόδειξη: Χρησιμοποιείστε ΣΜΓ για να μετατρέψετε τις μήτρες σε κλιμακωτές

Ασκήσεις

Ελέγξτε με τον βαθμό των μητρών των συστημάτων αν τα επόμενα έχουν λύσεις:

(α)
$$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 &= 9 \\ 5x_2 - x_3 + 3x_4 &= 1 \\ 7x_3 - x_4 &= 3 \\ 2x_4 &= 8 \end{aligned}$$

(β)
$$\begin{aligned} 2x_1 + 6x_2 - x_3 + 4x_4 - 2x_5 &= 15 \\ x_3 + 2x_4 + 2x_5 &= 5 \\ 3x_4 - 9x_5 &= 6 \end{aligned}$$

(γ)
$$\begin{aligned} x - 3y - 2z &= 6 \\ 2x - 4y - 3z &= 8 \\ -3x + 6y + 8z &= -5 \end{aligned}$$

(δ)
$$\begin{aligned} x + 2y - 3z &= 1 \\ 2x + 5y - 8z &= 4 \\ 3x + 8y - 13z &= 7 \end{aligned}$$

(ε)
$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 5x_4 &= 4 \\ 2x_1 + 8x_2 - x_3 + 9x_4 &= 9 \\ 3x_1 + 5x_2 - 12x_3 + 17x_4 &= 7 \end{aligned}$$

Απ. : (α) 1 λύση
(β) άπειρες λύσεις
(γ) 1 λύση
(δ) Άπειρες λύσεις
(ε) Ασυμβίβαστο

Υπενθύμιση: Μέθοδος Gauss

(επίλυσης γραμμικών συστημάτων)

Βήματα μεθόδου:

1. Μετασχηματίζουμε την A_E σε κλιμακωτή μορφή
2. Βρίσκουμε τους αγνώστους αρχίζοντας από τον τελευταίο

Παράδειγμα: Λύστε με την μέθοδο Gauss το:
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 5 \\ 4x_1 + 10x_2 = -2 \\ -2x_1 + 7x_2 + 2x_3 = 9 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 5 \\ 4 & 10 & 0 & -2 \\ -2 & 7 & 2 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 \to R_3+R_1]{R_2 \to R_2-2R_1} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 8 & -2 & -12 \\ 0 & 8 & 3 & 14 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \to R_3-R_2} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 8 & -2 & -12 \\ 0 & 0 & 5 & 26 \end{pmatrix}$$

από το οποίο έχουμε ότι $x_3 = 26/5$ κ.ο.κ. για τις x_2 και x_1

Τα ομογενή συστήματα

- **Υπενθύμιση**:

  ομογενές σύστημα γραμμικών εξισώσεων $m \times n$ λέγεται αυτό που έχει όλους τους σταθερούς όρους μηδέν, δηλ. $A \cdot X = 0$

- Ένα ομογενές σύστημα γραμμικών εξισώσεων $m \times n$ είναι πάντα συμβιβαστό (έχει δηλ. σίγουρα μία λύση, την μηδενική)

- Αν $\text{rank}(A) = \text{rank}(A_E) < n$ (του πλήθους των αγνώστων), τότε υπάρχουν άπειρες λύσεις, άρα και λύσεις $\neq 0$

Πρόταση:

Έστω τετραγωνική μήτρα $A_{n\times n}$, τότε:

$$\text{rank}(A) = n \Leftrightarrow |A| \neq 0$$

Η Πρόταση ισχύει και για μη–ομογενή συστήματα

δηλ. **άν η ορίζουσα της μήτρας $A_{n\times n}$**, των συντελεστών των αγνώστων **είναι διάφορη του μηδενός**, τότε το ομογενές σύστημα έχει **μία και μοναδική λύση, την μηδενική**

δηλ. οι εξισώσεις είναι γραμμικά ανεξάρτητες

Πόρισμα για τα ομογενή

Πόρισμα:

Έστω τετραγωνική μήτρα $A_{n \times n}$, τότε:

$A \cdot X = 0$ έχει μη-μηδενικές λύσεις $\Leftrightarrow$ $|A| = 0$

δηλ. αν $|A| = 0$ τότε το σύστημα είναι αόριστο, ήτοι οι εξισώσεις δεν είναι γραμμικά ανεξάρτητες και κάποια /ες είναι συνδυασμός άλλων

Παράδειγμα:

Να λύσετε το σύστημα: $\begin{cases} 2x + 2y = 0 \\ -x - y = 0 \end{cases}$

Εφόσον $|A| = 0$, συνεπάγεται από το πόρισμα ότι υπάρχουν και λύσεις μη-μηδενικές

Ερώτηση: Ποιες είναι αυτές;

Υπενθύμιση: Κανόνας του Cramer

Έστω τετραγωνική μήτρα $A_{n \times n}$ τ.ώ. $|A| \neq 0$. Τότε η μοναδική λύση υπολογίζεται από τον τύπο:

$$x_i = \frac{|A_i|}{|A|}$$

όπου:

- $i = 1,\dots,n$ &
- $|A_i|$ η ορίζουσα από την αντικατάσταση της i στήλης με την στήλη των σταθερών

Άσκηση: Λύστε με Cramer το

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 5 \\ 4x_1 - 6x_2 = -2 \\ -2x_1 + 7x_2 + 2x_3 = 9 \end{cases}$$

Βοήθεια: $|A|=-16$, $|A_1|=-16$, $|A_2|= -16$, $|A_3|= -32$
και $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$

Άσκηση

Να λύσετε το σύστημα γραμμικών εξισώσεων για όλες τις πιθανές τιμές του k (k $\in \mathbb{R}$):

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x + 3y + kz = 3 \\ x + ky + 3z = 2 \end{cases}$$

(**Υπόδειξη**:

Προσέξτε ποια μέθοδο συμφέρει να κάνετε χρήση)

Λύση

Θα χρησιμοποιήσουμε την μέθοδο απαλοιφής του Gauss στην A_E

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & k & 3 \\ 1 & k & 3 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 \to R_3 - R_1]{R_2 \to R_2 - 2R_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & k+2 & 1 \\ 0 & k-1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \to R_3 - (k-1)R_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & k+2 & 1 \\ 0 & 0 & -k^2-k+6 & 2-k \end{pmatrix}$$

1. <u>Αν **$-κ^2$-κ+6 = 0** ⇒ κ = 2 ή κ = 3</u>
   - **a. για κ=2**: rank(A) = rank(A_E) = 2< 3 (=n), άρα υπάρχουν άπειρες λύσεις και αν κάνουμε τις πράξεις: x=5z, y=1-4z, z ϵ $\mathbb{R}$
   - **b. για κ=3**: rank(A) = 2 < rank(A_E) = 3, άρα το σύστημα δεν έχει λύσεις (αδύνατο)

2. <u>Αν **$-κ^2$-κ+6 ≠ 0** ⇒ κ ≠ 2 και κ ≠ 3</u>

   rank(A) = rank(A_E) = 3, άρα το σύστημα έχει 1! λύση: $z = \dfrac{2-k}{-k^2-k+6}$

   κ.ο.κ. για y = … & x = …

Ιδιοτιμές & Ιδιοδιανύσματα

Στοιχεία Γραμμικής Άλγεβρας

Ιδιοτιμή & Ιδιοδιάνυσμα

Eigenvalues & Eigenvectors

Ορισμός: Έστω τετραγωνική μήτρα A_n. Ένας αριθμός $\lambda \in \mathbb{R}$ λέγεται ιδιοτιμή (ή χαρακτηριστική τιμή) της Α αν υπάρχει μήτρα X_{nx1} τ.ώ.:

$$A \cdot X = \lambda \cdot X \Leftrightarrow \boxed{(A - \lambda \cdot I_n) \cdot X = O}$$

δηλ. έχουμε το ομογενές σύστημα:
$$\begin{cases} (a_{11}-\lambda)\, x_1 + a_{12}x_2 \;....\; + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + (a_{22} -\lambda)\, x_2 \;....\; + a_{2n}x_n = 0 \\ \qquad ...... \qquad\qquad ...... \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 \;...\; + (a_{nn} -\lambda)\, x_n = 0 \end{cases}$$

Ορισμός: Η μήτρα $X=[x_j]_{1 \leq j \leq n}$ λέγεται ιδιοδιάνυσμα (ή χαρακτηριστικό διάνυσμα) της Α για την τιμή λ.

Χαρακτηριστική εξίσωση

Το προηγούμενο σύστημα είναι ομογενές, άρα από το πόρισμα για τα ομογενή συστήματα ισχύει ότι:

$(A - \lambda \cdot I_n) \cdot x = O$ έχει μη-μηδενικές λύσεις $\Leftrightarrow |A - \lambda \cdot I_n| = 0 \Leftrightarrow$

$$\det\begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{21}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n1} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{pmatrix} = 0$$

Κάνοντας τις πράξεις προκύπτει το χαρακτηριστικό πολυώνυμο $P_A(\lambda)$ & η χαρακτηριστική εξίσωση $P_A(\lambda) = 0$

δηλ. $\boxed{|A - \lambda \cdot I_n| = 0 \Leftrightarrow P_A(\lambda) = 0}$

Ορισμός: Το σύνολο λi της ιδιοτιμών της A λέγεται φάσμα της A = σ(A)

Η μεγαλύτερη ιδιοτιμή (max|λi|} λέγεται φασματική ακτίνα της A = ρ(A)

Ασκήσεις

Βρείτε τα χαρακτηριστικά πολυώνυμα των μητρών:

$$A = \begin{bmatrix} -5 & -5 & -9 \\ 8 & 9 & 18 \\ -2 & -3 & -7 \end{bmatrix}$$

$$A2 = \begin{bmatrix} -1 & -3 & -9 \\ 0 & 5 & 18 \\ 0 & -2 & -7 \end{bmatrix}$$

Λύση: και για τις 2 μήτρες είναι $-\lambda^3 - 3\lambda^2 - 3\lambda - 1$

Ασκήσεις

1. Έστω η μήτρα $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$
   - Δώστε το χαρακτηριστικό της πολυώνυμο
   - Βρείτε τις ιδιοτιμές της
2. Να δείξετε ότι το $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ είναι ένα ιδιοδιάνυσμα της μήτρας $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix}$ για την ιδιοτιμή λ=3
3. Όμοια για το $v = \begin{bmatrix} 4 \\ -4 \end{bmatrix}$ για την ιδιοτιμή λ=2 της μήτρας

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Λύσεις

1. χαρακτηριστικό πολυώνυμο: λ^2-5λ+4
   ιδιοτιμές: 1 και 4

2. Για να είναι πρέπει να ισχύει ότι Α · x = λ · x
   Πράγματι:

$$Ax = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix} = 3x$$

3. Όμοια με την (2)

Άσκηση

Έστω η μήτρα $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

Να δείξετε ότι της Α:

1. για την ιδιοτιμή λ=0 το διάνυσμα $[1\ 0\ 0\ ]^T$ είναι ιδιοδιάνυσμα
2. για την ιδιοτιμή λ=3 το διάνυσμα $[0\ 0\ 1\ ]^T$ είναι ιδιοδιάνυσμα
3. για την ιδιοτιμή λ=2 το διάνυσμα $[1\ 2\ 0\ ]^T$ είναι ιδιοδιάνυσμα

Λύση

$$A\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix} = 0 \cdot \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$A\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\3\end{bmatrix} = 3 \cdot \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$$

$$A\begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\4\\0\end{bmatrix} = 2 \cdot \begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix}$$

https://el.wikipedia.org/wiki/Ιδιοτιμές_και_ιδιοδιανύσματα

Υπενθύμιση

Θεμελιώδες θεώρημα της Άλγεβρας (ΘΘΑ)

(R. Descartes, 1637)

‘Κάθε μη μηδενικό πολυώνυμο μίας μεταβλητής και βαθμού *n με μιγαδικούς συντελεστές* έχει ακριβώς *n μιγαδικές ρίζες*’

($\in \mathbb{R}$ ή $\in \mathbb{C}$)

Άρα, στο χαρακτηριστικό μας πολυώνυμο:

εφόσον το λ εμφανίζεται n φορές, το χαρακτηριστικό πολυώνυμο $P_A(\lambda)$ είναι ‘n’ βαθμού

& από το ΘΘΑ: άρα η χαρακτηριστική εξίσωση $P_A(\lambda) = 0$ έχει n λύσεις (δηλ. η A θα έχει πάντα ιδιοτιμές)

ΠΡΟΣΟΧΗ: Κάποιες από τις τιμές μπορεί να είναι πολλαπλής μορφής ή/και μιγαδικές.

Ορισμοί

Έστω λ_i οι ιδιοτιμές μιας An:

- A θετικά ορισμένη αν $\lambda_i > 0$ για κάθε $i=1..n$ &

  θετικά ημι-ορισμένη αν $\lambda_i \geq 0$ για κάθε $i=1..n$

- A αρνητικά ορισμένη αν $\lambda_i < 0$ για κάθε $i=1..n$ &

  αρνητικά ημι-ορισμένη αν $\lambda_i \leq 0$ για κάθε $i=1..n$

- A απροσδιόριστη αν υπάρχει $\lambda_\kappa > 0$ & $\lambda_\mu < 0$

  $\kappa \neq \mu, \quad 1 \leq \kappa, \mu \leq n$

Πρόταση

(Ιδιοτήτων των ιδιοτιμών)

Έστω $A = [\alpha_{ij}]_{n x n}$ με $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$ οι ιδιοτιμές της, τότε:

- $trA = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n$ το ίχνος της A (Υπενθ.: $trA = \Sigma\alpha_{ii}$)
- $|A| = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \ldots \cdot \lambda_n$
- $\sigma(A) = \sigma(A^T)$
- Αν A τριγωνική (άνω, κάτω ή διαγώνια), τότε οι ιδιοτιμές είναι τα στοιχεία της διαγωνίου της
- Αν A ομαλή (δηλ. $|A| \neq 0$), τότε όλες οι ιδιοτιμές $\lambda_i \neq 0$

  $1 \leq i \leq n$

  δηλ. αν $|A|=0$, υπάρχει τουλάχιστον ένα $\lambda=0$

Ιδιοχώρος

Τα ιδιοδιανύσματα μιας μήτρας Α για την ιδιοτιμή λ, είναι διανύσματα ≠ 0, που ικανοποιούν την εξίσωση

$$A \cdot X = \lambda \cdot X$$

… δηλ. είναι μη-μηδενικά διανύσματα, ‘λύσεις’ του ομογενούς συστήματος $(A - \lambda \cdot I_n) \cdot X = O$

Ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν σε διαφορετικές ιδιοτιμές είναι γραμμικώς ανεξάρτητα

Ορισμός: Ονομάζουμε ιδιοχώρο της Α για την ιδιοτιμή λ τον χώρο που δημιουργείται από τις παραπάνω ‘λύσεις’

Παράδειγμα

Βρείτε τις ιδιοτιμές /ιδιοδιανύσματα της $A = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$

$$P_A(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \det\begin{pmatrix} 4-\lambda & -5 \\ 2 & -3-\lambda \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow (4-\lambda)\cdot(-3-\lambda)+10 = 0$$

Άρα $\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$ με ρίζες τις $\lambda_1 = 2$ & $\lambda_2 = -1$ ($\sigma(A)=\{-1,2\}$)

1η περίπτωση με $\lambda_1 = 2$, το ιδιοδιάνυσμα X είναι τ.ώ.:

$(A - \lambda \cdot I_n) \cdot X = O \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 2 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x = 5y/2$

Άρα η λύση είναι τα $(x, y) = \{(5s/2, s), s \in \mathbb{R}\} = \{s\cdot(5/2, 1), s \in \mathbb{R}\}$

Παράδειγμα συνέχεια

- Άρα τα **ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή λ=2** είναι τα μη-μηδενικά διανύσματα της μορφής (5s/2, s), s ϵ $\mathbb{R}$
- **Ο ιδιοχώρος για την ιδιοτιμή λ=2** είναι ο χώρος που περιέχει όλα τα διανύσματα αυτής της μορφής (5s/2, s), s ϵ $\mathbb{R}$
- **Το διάνυσμα που παράγει τον ιδιοχώρο** για την ιδιοτιμή λ=2 είναι το (5/2, 1)
- Ως μη-μηδενικό **αποτελεί μία βάση του ιδιοχώρου για την ιδιοτιμή λ=2**
- **2η περίπτωση με λ_2 = -1**, …. ….. (x, y) = {t·(1, 1), t ϵ $\mathbb{R}$} κ.λπ.

Τα διανύσματα (5/2, 1) & (1, 1) είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, άρα αποτελούν μία βάση του $\mathbb{R}^2$

Άσκηση

Όμοια, να βρείτε τις ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα για την:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Υπόδειξη:

1. Λύστε την χαρακτηριστική εξίσωση (ως προς λ) $P_A(\lambda) = 0 \Leftrightarrow |A - \lambda \cdot I_n| = 0$
2. Για κάθε λ βρείτε τις λύσεις (x, y, z) που επαληθεύουν την $P_A(\lambda) = 0$

Παρατήρηση: Εφόσον πάντα ψάχνουμε για τις μη-μηδενικές ιδιοτιμές λ, σημαίνει ότι η απάντησή μας θα πρέπει να αφορά ΑΠΕΙΡΕΣ λύσεις.
Αν όχι σημαίνει ότι έχουμε στην επίλυση κάποιο βήμα λάθος.

Λύση

Προσοχή: χρησιμοποιείστε την μέθοδο του Horner για την εύρεση μιας πιθανής ρίζας ρ και στη συνέχεια με διαίρεση του πολυωνύμου με (x-ρ) για τις υπόλοιπες ρίζες του

$P_A(\lambda) = 0 \Leftrightarrow |A - \lambda \cdot I_n| = 0 \Leftrightarrow -\lambda^3+6\lambda^2+3\lambda+8 = 0 \Leftrightarrow$

$(-\lambda^2-2\lambda-13) \cdot (\lambda-8) = 0 \Leftrightarrow -(\lambda+1)^2 \cdot (\lambda-8) = 0$

απ' όπου έχουμε $\lambda_1 = -1$ (διπλή) και $\lambda_2 = 8$

1η περίπτωση με $\lambda_1 = -1$, το ιδιοδιάνυσμα X είναι τ.ώ.:

$(A - \lambda \cdot I_n) \cdot X = O \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow 2x + y + 2z = 0 \Leftrightarrow y = -2x - 2z$

Άρα $X = (x, y, z) = (x, -2x-2z, z) = x\cdot(1,-2,0)+z\cdot(0,-2,1), \quad x, z \in \mathbb{R}$

Τα διανύσματα (1,-2,0) & (0,-2,1) είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, άρα αποτελούν μία βάση του ιδιοχώρου E={(1,-2,0) , (0,-2,1) }

Λύση

Προσοχή: χρησιμοποιείστε την μέθοδο του Horner για την εύρεση μιας πιθανής ρίζας ρ και στη συνέχεια με διαίρεση του πολυωνύμου με (x-ρ) για τις υπόλοιπες ρίζες του

2η περίπτωση με $\lambda_2 = 8$,
το ιδιοδιάνυσμα Χ του συστήματος (Α - λ·Ι)·Χ = Ο είναι τ.ώ.: ….
χρησιμοποιώντας την μέθοδο απαλοιφής του Gauss στην μήτρα των συντελεστών του φθάνουμε στο σύστημα:

$$\begin{pmatrix} -5 & 2 & 4 \\ 2 & -8 & 2 \\ 4 & 2 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -8 & 2 \\ -5 & 2 & 4 \\ 4 & 2 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 0 & -18 & 9 \\ 0 & 18 & -9 \end{pmatrix}$$

και τελικά στο (x, y, z) = y·(2, 1, 2)

Δηλ. στην ιδιοτιμή $\lambda_2 = 8$ αντιστοιχεί το ιδιοδιάνυσμα (2,1,2) που αποτελεί βάση του ιδιοχώρου Ε={(2,1,2)}

Τα διανύσματα (1,-2,0) , (0,-2,1) & (2,1,2)είναι
γραμμικώς ανεξάρτητα, άρα αποτελούν μία βάση του $\mathbb{R}^3$

ΠΡΟΣΟΧΗ

Τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν σε διαφορετικές ιδιοτιμές είναι γραμμικώς ανεξάρτητα

Το αντίστροφο <u>δεν</u> ισχύει

Αν βρούμε μία διπλή ή τριπλή … ιδιοτιμή δεν σημαίνει ότι τα ιδιοδιανύσματα όλα είναι μεταξύ τους γραμμικώς ανεξάρτητα

(πρέπει να ελέγξουμε τον μέγιστο αριθμό)

Παράδειγμα

Όμοια, να βρείτε τις ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα για την: $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -5 & -2 \end{pmatrix}$

$P(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow \lambda^2+1 = 0$

1. Αν Α ϵ στον διανυσμ. χώρο $M_2(\mathbb{R})$, τότε δεν υπάρχουν ιδιοτιμές (αφού $\lambda^2= -1$)
2. Αν Α ϵ στον διανυσμ. χώρο $M_2(\mathbb{C})$, τότε έχει τις $\lambda_1=i$ & $\lambda_2= -i$, δηλ. σ(α)=(–i, i)

1η περίπτωση με $\lambda_1 = i$, το ιδιοδιάνυσμα Χ είναι τ.ώ.:

$(A - \lambda \cdot I_n) \cdot X = O \Leftrightarrow \ldots\ldots \Leftrightarrow (x, y) = x\cdot(1, i-2)$

2η περίπτωση με $\lambda_2 = -i$, το ιδιοδιάνυσμα Χ είναι τ.ώ.:

$(A - \lambda \cdot I_n) \cdot X = O \Leftrightarrow \ldots\ldots \Leftrightarrow (x, y) = x\cdot(-1, i+2)$

$\boxed{i^2 = -1 \Leftrightarrow i= \sqrt{-1}}$

Άσκηση

Όμοια, να βρείτε τις ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα για την:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Υπόδειξη:
Δείτε το προηγούμενο παράδειγμα
Λύση:
Για $\lambda_1 = -i \rightarrow (x, y) = x(1, i)$
Για $\lambda_2 = i \rightarrow (x, y) = x(-1, i)$

Θεώρημα: Ιδιοτιμές δυνάμεων μήτρας

Έστω Χ ένα ιδιοδιάνυσμα για την λ ιδιοτιμή της μήτρας Α:
το Χ είναι ιδιοδιάνυσμα της για την λ^κ ιδιοτιμή της A^κ
($\kappa \in \mathbb{Z}^+$)

Παράδειγμα:

Σε προηγούμενο παράδειγμα βρήκαμε ότι η $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$
έχει τις ιδιοτιμές λ_1=-1 (διπλή) και λ_2=8
με αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα $[1\ -2\ 0]^T$, $[0\ -2\ 1]^T$ & $[2\ 1\ 2]^T$

Από το θεώρημα μπορούμε να συμπεράνουμε ότι:

- τα $[1\ -2\ 0]^T$, $[0\ -2\ 1]^T$ είναι ιδιοδιανύσματα της A^5 για την $\lambda'_1=1^5=1$
- το $[2\ 1\ 2]^T$ είναι ιδιοδιάνυσμα της A^3 για την $\lambda'_2=8^3=512$

κ.ο.κ.

Διαγωνοποίηση μητρών

Στοιχεία Γραμμικής Άλγεβρας

Όμοιες μήτρες

Ορισμός:

Οι τετραγωνικές μήτρες $A=[\alpha_{ij}]_{nxn}$ & $B=[b_{ij}]_{nxn}$ όμοιες ($A \sim B$):

αν υπάρχει ομαλή μήτρα P τ.ώ. $B = P^{-1} \cdot A \cdot P$

P ομαλή μήτρα αν $|P| \neq 0$, δηλ. P αντιστρέψιμη

$A \sim B \Leftrightarrow B \sim A$

Πόρισμα: Αν $A \sim B$ τότε

A & B έχουν **ίδιες χαρακτηριστικές εξισώσεις**

και τα **ίδια ιδιοδιανύσματα**

Όμοιες μήτρες

Πρόταση:

- Αν $A \sim B$ & $B \sim C \Rightarrow A \sim C$

- Αν $A \sim B \Rightarrow |A| = |B|$

- Αν $A \sim B \Rightarrow B^{\kappa} = P^{-1} \cdot A^{\kappa} \cdot P,\ \kappa \in \mathbb{N}$

- Αν $A \sim B \Rightarrow tr(A) = tr(B)$

- Αν $A \sim B \Rightarrow rank(A) = rank\,(B)$

- Αν $A \sim B \Rightarrow \sigma(A) = \sigma(B)$

Παράδειγμα

Αν $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ και B= $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ δύο μήτρες 2x2.

Να δείξετε ότι η $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ είναι μια ομαλή μήτρα: $B = P^{-1} \cdot A \cdot P$

δηλ. A~B

Λύση: $P^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Το ερώτημα όμως είναι: **ΠΩΣ ΒΡΙΣΚΩ ΤΗΝ ΟΜΑΛΗ ΜΗΤΡΑ P**: **$B = P^{-1} \cdot A \cdot P$**

ΔΙΑΓΩΝΙΟΠΟΙΗΣΗ ΜΗΤΡΩΝ

Διαγωνοποίηση μητρών

Ορισμός: Μία μήτρα $A = [\alpha_{ij}]_{nxn}$ διαγωνοποιείται

αν υπάρχει Δ διαγώνια τ.ώ. $A \sim \Delta$

(δηλ. υπάρχει P αντιστρέψιμη: $\Delta = P^{-1} \cdot A \cdot P$
ή $A = P \cdot \Delta \cdot P^{-1}$)

Κριτήριο Διαγωνοποίησης: Έστω η μήτρα $A = [\alpha_{ij}]_{\mathbf{nxn}}$

A διαγωνοποιείται ⇔ η A έχει n γραμμικώς ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα

Αν $A \sim \Delta$ διαγώνια τότε η διαγώνιος της Δ αποτελείται από τις ιδιοτιμές της A και ισχύει $\Delta = P^{-1} \cdot A \cdot P$ με P να έχει ως στήλες τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα

$$\Delta = \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_n \end{pmatrix}$$

(και φυσικά $P_A(\lambda)=(\alpha_1-\lambda)(\alpha_2-\lambda)\ldots(\alpha_n-\lambda)$, $\alpha_i \neq \alpha_j$ & $i \neq j$)

Δυνάμεις μητρών

Πρόταση:

Αν $A = [\alpha_{ij}]_{n x n} \sim \Delta$ διαγώνια $\Rightarrow$ $A^n = P \cdot \Delta^n \cdot P^{-1}$

Πώς εργαζόμαστε

1. Βρίσκουμε τις ιδιοτιμές της μήτρας A_{nxn} (όλες οι διαφορετικές ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης είναι οι ιδιοτιμές της Α)

2. Επίσης τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν σε αυτές τις ιδιοτιμές (την βάση για κάθε ιδιοχώρο)

3. Ελέγχουμε αν είναι γραμμικώς ανεξάρτητα (υπενθύμιση: διαφορετικά ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν σε διαφορετικές ιδιοτιμές είναι μεταξύ τους γραμμικώς ανεξάρτητα, άρα αν έχω n ιδιοδιανύσματα τότε Α διαγωνοποιήσιμη, **αλλιώς Α δεν είναι διαγωνοποιήσιμη**)

4. Σχηματίζουμε την μήτρα P με στήλες τα ιδιοδιανύσματα του 3ου βήματος

5. Άρα η μήτρα $P^{-1} \cdot A \cdot P$ είναι διαγώνιος, οι στήλες της οποίας αποτελούνται από τις ιδιοτιμές της Α

Παράδειγμα

Σε συνέχεια προηγούμενου π.χ. για την μήτρα $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

είχαμε βρει τις ιδιοτιμές λ_1 = -1 (διπλή) και λ_2 = 8 με τα ιδιοδιανύσματα {(1,-2,0), (0,-2,1)} & {(2,1,2)} αντίστοιχα.

Άρα μία διαγωνοποίηση της A είναι η: $A = P \cdot \Delta \cdot P^{-1}$ όπου: $\Delta = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$

με $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ & $P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{5}{9} & -\frac{2}{9} & -\frac{4}{9} \\ -\frac{4}{9} & -\frac{2}{9} & \frac{5}{9} \\ \frac{2}{9} & \frac{1}{9} & \frac{2}{9} \end{pmatrix}$

Επίσης $A^5 = P \cdot \Delta^5 \cdot P^{-1} = [P] \cdot \begin{pmatrix} (-1)^5 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^5 & 0 \\ 0 & 0 & 8^5 \end{pmatrix} \cdot [P^{-1}]$

Άσκηση

Βρείτε την μήτρα P που διαγωνοποιεί την $A=\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$

Λύση:

Υπολογίζουμε πρώτα το χαρακτηριστικό πολυώνυμο

$$\det(\lambda I - A) = \det\begin{pmatrix} \lambda & -2 \\ 3 & \lambda-5 \end{pmatrix} = \lambda^2 - 5\lambda + 6$$

1. Από την χαρακτηριστική της εξίσωση βρίσκουμε τις ιδιοτιμές της A: $\lambda_1=2$ και $\lambda_2=3$

2. Για $\lambda_1=2$: $\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{matrix} -2x_1+2x_2=0 \\ -3x_1+3x_2=0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x_2=x_1 \\ x_1\in\mathbb{R} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \boldsymbol{x} = x_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ x_1\in\mathbb{R}$

Για $\lambda_2=3$: $\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{matrix} -3x_1+2x_2=0 \\ -3x_1+2x_2=0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x_2=\frac{3}{2}x_1 \\ x_1\in\mathbb{R} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \boldsymbol{x} = x_1\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix},\ x_1\in\mathbb{R}$

Άσκηση συνέχεια

Κάθε μη μηδενικό διάνυσμα είναι ιδιοδιάνυσμα της A:

άρα επιλέγουμε το $[1,1]^T$ για $\lambda_1=2$ και το $[2,3]^T$ για $\lambda_2=3$ $(x_1=2)$

3. Άρα $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

4. Επειδή $|P|=1 \neq 0$, τα διανύσματα είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, άρα A διαγωνοποιήσιμη

5. $P^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

και κάνοντας τις πράξεις αποδεικνύεται ότι $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

Άσκηση

Να δείξετε ότι η διπλανή μήτρα διαγωνοποιείται

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Λύση

- Οι ιδιοτιμές της A είναι 2 (πολλαπλότητας 2) και 8
- Διανύσματα βάσης έχουμε τα $[1\ 0\ -1]^T$, $[0\ 1\ -1]^T$ και $[1\ 1\ 1]^T$
- Άρα έχουμε την μήτρα $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$
- Αφού $|P| \neq 0$ τα διανύσματα είναι γραμμικώς ανεξάρτητα
- $P^{-1} \cdot A \cdot P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$

Δυνάμεις μητρών

Αν Α διαγωνοποιήσιμη τότε υπάρχει Ρ αντιστρέψιμη: $Δ=P^{-1} \cdot A \cdot P$

Από το προηγούμενο έχουμε ότι $A=P \cdot Δ \cdot P^{-1}$ και ισχύει ότι

$$A^κ = P \cdot Δ^κ \cdot P^{-1}$$

δηλ. η δύναμη μιας μήτρας εκφράζεται από την δύναμη της διαγωνίου

(υψώνουμε στην δύναμή μόνο τα στοιχεία της διαγωνίου)

Παράδειγμα

Έστω η μήτρα $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ που διαγωνοποιείται

από την $P = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ έτσι ώστε $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

$$\begin{aligned} A^{13} &= P\,\Delta^{13} P^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1^{13} & 0 & 0 \\ 0 & 2^{13} & 0 \\ 0 & 0 & 2^{13} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -8190 & 0 & -16382 \\ 8191 & 8192 & 8191 \\ 8191 & 0 & 16383 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Θεώρημα Cayley-Hamilton

Κάθε μήτρα $A=[\alpha_{ij}]_{nxn}$ είναι ρίζα του χαρακτηριστικού της πολυωνύμου, δηλ. $P_A(A) = 0$

Παράδειγμα:

Αν $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ τότε $P_A(\lambda) = |A-\lambda\cdot I| = \lambda^2 - 3\cdot\lambda - 4$

Κάνοντας πράξεις $P_A(A) = 0$, άρα A ρίζα του $P_A(\lambda)$

Παρατήρηση

Από το προηγούμενο θεώρημα μπορούμε να υπολογίσουμε την A^{-1} πολλαπλασιάζοντας την εξίσωση $P_A(A) = 0$ με A^{-1} και στα 2 μέλη της

Παράδειγμα: Βρείτε την A^{-1} αν $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

$P_A(\lambda) = |A-\lambda \cdot I| = \lambda^3-10\lambda^2+3\lambda+40$

Άρα $P_A(\lambda) = 0 \Leftrightarrow$

$A^3-10A^2+3A+40 = 0 \Leftrightarrow$

$A^{-1} \cdot (A^3-10A^2+3A+40) = A^{-1} \cdot 0 \Leftrightarrow$

$A^2-10A+3 \cdot I+40A^{-1} = 0 \Leftrightarrow$

$A^{-1} = (1/40) \cdot (-A^2+10A-30 \cdot I)$

Μιγαδικοί αριθμοί

Στοιχεία Μιγαδικών

Το πρόβλημα

Η εξίσωση $a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$ με $\Delta < 0$ δεν έχει λύσεις στο $\mathbb{R}$, π.χ. η $x^2 = -1$

Για να ξεπεραστεί η αδυναμία ο Ιταλός Τζερόλαμο Καρντάνο δημιούργησε τους μιγαδικούς με μία διεύρυνση αριθμών του $\mathbb{R}$, το $\mathbb{C}$, τους οποίους ονόμασε «φανταστικούς αριθμούς» έτσι ώστε η $x^2 = -1$ να έχει τουλάχιστον μία ρίζα, την φανταστική μονάδα i: $i^2 = -1$

Ορισμοί:

- Ορίζουμε ως φανταστικό αριθμό ένα αριθμό της μορφής $\beta \cdot i$, $\beta \in \mathbb{R}$
  - Το σύνολο των φανταστικών αριθμών το συμβολίζουμε με $\mathbb{I}$
  - Παράδειγμα: 4i, -2i, ⅔i, κ.λπ.
- Ορίζουμε ως μιγαδικό αριθμό, κάθε αριθμό της μορφής $\alpha + \beta \cdot i$, όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$
  - Το σύνολο των μιγαδικών αριθμών το συμβολίζουμε με $\mathbb{C}$
  - Παράδειγμα: -2+4i, ⅔ -2i, 4-⅔i, κ.λπ.

Ορισμός

Το σύνολο $\mathbb{C}$ των μιγαδικών είναι ένα υπερ-σύνολο του $\mathbb{R}$:

1. επεκτείνει τις πράξεις + & · με τις ίδιες ιδιότητες
2. έχει την φανταστική μονάδα i: $i^2 = -1$ (άρα $i=\pm\sqrt{-1}$)
3. κάθε $z \in \mathbb{C}$ γράφεται με μοναδικό τρόπο:

$$\boxed{z = \alpha + \beta \cdot i}$$

a=Re(z), το πραγματικό μέρος

β=Im(z), το φανταστικό μέρος

δηλ. $\mathbb{C} = \{z: z=\alpha + \beta\cdot i \quad \text{με} \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R} \ \ \& \ i^2 = -1\}$

Παράδειγμα: ο μιγαδικός αριθμός -2+4i έχει τον Re(-2+4i) = -2 ως το πραγματικό του μέρος και τον Im(2+4) = 4 ως το φανταστικό του μέρος

Ισότητα μιγαδικών

Εστω a, b, c, d ϵ $\mathbb{R}$, τότε δύο μιγαδικοί αριθμοί z_1=a + b·i και z_2= c + d·i είναι ίσοι όταν a = c και b = d

Παράδειγμα:

Ποια η τιμή των x και y ώστε οι επόμενοι μιγαδικοί αριθμοί να είναι μεταξύ τους ίσοι (x, y ϵ $\mathbb{R}$);

z_1= -2x + 4y·i και z_2= x-2 + (y-1)·i

Απάντηση:

Πρέπει τα πραγματικά μέρη να είναι ίσα και τα φανταστικά αντίστοιχα, δηλ.

-2x = x-2 και 4y = y-1, ήτοι x = 2/3 και y = -1/3

Πρόσθεση μιγαδικών

Εστω a, b, c, d ϵ $\mathbb{R}$, τότε το άθροισμα δύο μιγαδικών z_1=a + b·i και z_2= c + d·i αριθμών δίνεται από την σχέση:

$$z_1 + z_2 = (a + b\cdot i) + (c + d\cdot i) = (a + b) + (c + d)\cdot i$$

$$z_1 - z_2 = (a + b\cdot i) - (c + d\cdot i) = (a - c) + (b - d)\cdot i$$

Ιδιότητες πρόσθεσης

1. Αντιμεταθετική: $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$
2. Προσεταιριστική: $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$
3. Υπάρχει ένας και μόνο ένας μιγαδικός z’: z + z’ = z, για κάθε z ϵ $\mathbb{C}$

   Αυτός ο αριθμός είναι το ουδέτερο στοιχείο της πρόσθεσης των μιγαδικών, ήτοι: z’ = 0 + 0 ·i (συμβολίζεται με το 0)
4. Υπάρχει ένας και μόνο ένας μιγαδικός z*: z + z* = 0, για κάθε z ϵ $\mathbb{C}$

   Αυτός ο αριθμός είναι ο αντίθετος του μιγαδικού z

   (Αν z = a + b·i τότε **z*** = -a + (-b)·i = - a - b·i = **- z**)

Πολλαπλασιασμός μιγαδικών

Εστω a, b, c, d ϵ $\mathbb{R}$, τότε το γινόμενο δύο μιγαδικών αριθμών z_1=a + b·i και z_2= c + d·i δίνεται από την σχέση:

$$z_1 \cdot z_2 = (a + b\cdot i) \cdot (c + d\cdot i) = (ac - bd) + (ad + bc)\cdot i$$

Ιδιότητες γινόμενου

1. Αντιμεταθετική: $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$
2. Προσεταιριστική: $(z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3)$
3. Υπάρχει ένας και μόνο ένας μιγαδικός z’: z · z’ = z, για κάθε z ϵ $\mathbb{C}$

   Αυτός ο αριθμός είναι το ουδέτερο στοιχείο του πολλαπλασιασμού των μιγαδικών, ήτοι: z’ = 1 + 0 ·i (συμβολίζεται με το 1)
4. Υπάρχει ένας και μόνο ένας μιγαδικός z*: z · z* = 1, για κάθε z ϵ $\mathbb{C}^*$

   Αυτός ο αριθμός είναι ο αντίστροφος του μιγαδικού z

   (Αν z = a + b·i τότε **z*** = 1/(a + b·i) = **1/ z**)

Πηλίκο μιγαδικών

Έστω a, b, c, d ϵ $\mathbb{R}$, τότε το πηλίκο δύο μιγαδικών αριθμών z_1=a + b·i και z_2= c + d·i δίνεται από την σχέση: z_1 / z_2 , το οποίο σε μορφή μιγαδικού παρουσιάζεται:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\mathrm{a+bi}}{\mathrm{c+di}} = \frac{\mathrm{(a+bi)\cdot(c\text{-}di)}}{\mathrm{(c+di)\cdot(c\text{-}di)}} = \frac{\mathrm{(ac+bd)+(bc\text{-}ad)i}}{\mathrm{c^2+d^2}} = \frac{\mathrm{ac+bd}}{\mathrm{c^2+d^2}} + \frac{\mathrm{bc\text{-}ad}}{\mathrm{c^2+d^2}}\mathrm{i}$$

<u>Σημείωση</u>: Το πηλίκο z_1 / z_2 συμβολίζεται και ως $z_1 \cdot z_2^{-1}$

Άσκηση:

Αν z_1=a + b·i και z_2= c + d·i :

να μετατρέψετε το πηλίκο z_1 / z_2 σε μορφή Re(z_1/z_2) + Im(z_1/z_2)

Δυνάμεις μιγαδικών

Έστω a, b ϵ $\mathbb{R}$, τότε ορίζουμε τη δύναμη σε ακέραιο αριθμό κ του μιγαδικού αριθμού z = a + b·i :

$$z^{\kappa} = z^{\kappa-1} \cdot z$$

Σημείωση: Για z ϵ $\mathbb{C}^*$:

- $z^0 = 1$
- Αν κ > 0, τότε $z^{-\kappa} = 1/ z^{\kappa}$

Ιδιότητες δυνάμεων

$$i^0 = 1$$

$i^1 = i$ $i^2 = -1$ $i^3 = i^2 \cdot i = -i$ $i^4 = 1$ 4 βήματα

$i^5 = i$ $i^6 = -1$ $i^7 = -i$ $i^8 = 1$ κ.ο.κ. 4 βήματα

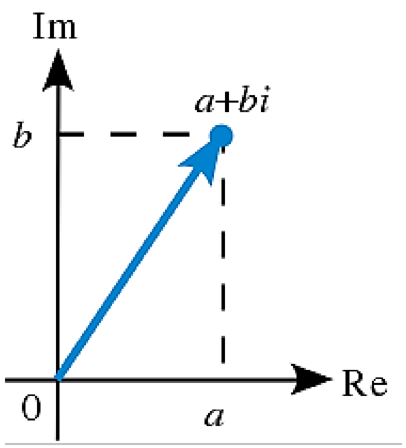
Ασκήσεις

1. Αν $z = (2-3\cdot i)$, να βρείτε το z^2 και το z^3

2. Να υπολογίσετε την τιμή των φανταστικών αριθμών:
   - $-3\cdot i^{14}$
   - $-1\cdot i^{29}$

Οι μιγαδικοί γεωμετρικά

Κάθε **$z = a + b \cdot i$** $x, y \in \mathbb{R}$ & $i^2 = -1$ παριστάνεται με ένα σημείο, π.χ. M(a, b), όπως επίσης και με την διανυσματική ακτίνα ΟΜ του σημείου Μ



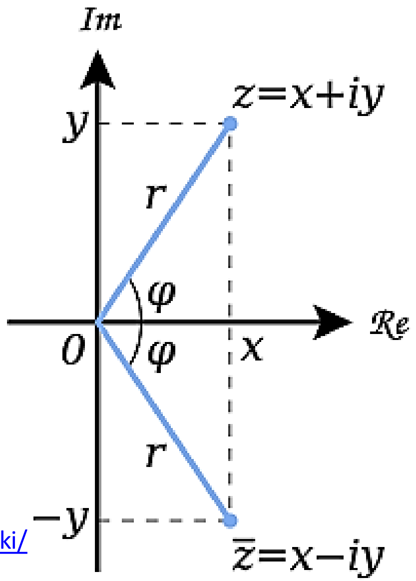
εικόνα:https://el.wikipedia.org/wiki/Μιγαδικός_αριθμός

Ορισμός: Αν $z=x+y \cdot i$ μιγαδικός, τότε ο $\hat{z}=x - y \cdot i$ λέγεται συζυγής του z

Πόρισμα:

$z \cdot \hat{z} = (x+yi) \cdot (x-yi)=x^2+y^2$

$z + \hat{z} = 2x$

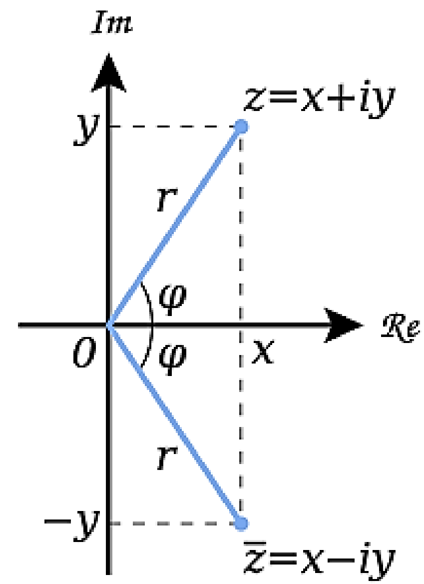


εικόνα: https://el.wikipedia.org/wiki/Συζυγής_μιγαδικός_αριθμός

Ιδιότητες συζυγών

- $|z|^2 = z\bar{z}$
- $|z| = |\bar{z}| = |-z| = |\overline{-z}|$
- $\overline{z+w} = \bar{z} + \bar{w}$
- $\overline{zw} = \bar{z}\bar{w}$
- $\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{w}}$
- $\bar{z} = z$ αν και μόνο αν $Im(z) = 0$
- $\bar{z} = -z$ αν και μόνο αν $Re(z) = 0$
- $\overline{(\bar{z})} = z$
- $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}, \ z \neq 0$

$\overline{(z^{\nu})} = (\bar{z})^{\nu}$



εικόνα: https://el.wikipedia.org/wiki/Συζυγής_μιγαδικός_αριθμός

Για να εκφράσουμε ένα κλάσμα μιγαδικών σε μορφή α+βi, πολλαπλασιάζουμε και τους 2 όρους με τον συζυγή του παρονομαστή

Συζυγείς συντεταγμένες

Αν z=a + b·i μιγαδικός αριθμός (a, b ϵ $\mathbb{R}$), τότε μπορούμε να εκφράσουμε το Re(z) και το Im(z) συναρτήσει των z και ẑ = a - b·i (τον συζυγή):

$$a = \frac{z+\hat{z}}{2} \quad \& \quad b = \frac{z-\hat{z}}{2i}$$

Άσκηση

Να βρεθεί το σύνολο των εικόνων των μιγαδικών z στις περιπτώσεις κατά τις οποίες ο αριθμός $\frac{z-1}{z-2i}$ είναι α) φανταστικός β) πραγματικός.

Απάντηση

α) τα σημεία του κύκλου με κέντρο $K\left(\frac{1}{2},1\right)$ και ακτίνα $\frac{\sqrt{5}}{2}$, με εξαίρεση το σημείο $A(0,2)$

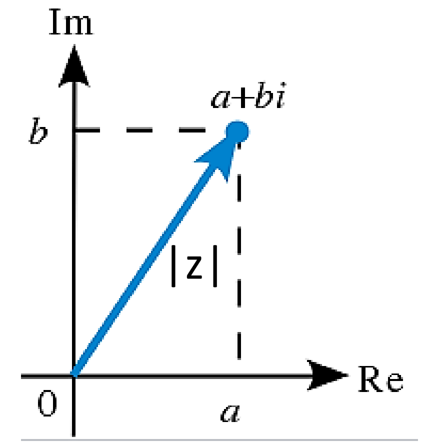
β) τα σημεία της ευθείας με εξίσωση 2x+y-2=0, με εξαίρεση το σημείο A(0,2).

Μέτρο μιγαδικού

Ορισμός: Αν z = a + b·i, ορίζουμε μέτρο του z, την απόσταση του σημείου από το Ο, δηλ.:

$$|z| = |OM| = |a + b\cdot i| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Παράδειγμα: $|3-4i|=5$



εικόνα:https://el.wikipedia.org/wiki/Μιγαδικός_αριθμός

Ιδιότητες του μέτρου

1. $|z| = |\hat{z}| = |-z|$
2. $|z|^2 = z \cdot \hat{z}$
3. $|z \cdot z'| = |z| \cdot |z'|$
4. $|z / z'| = |z| / |z'|$
5. $||z|-|z'|| \le |z + z'| \le |z| + |z'|$

Γενικά, αποδεικνύεται ότι

$$|z_1 z_2 \dots z_\nu| = |z_1|\cdot|z_2|\cdot\dots\cdot|z_\nu|$$

και ειδικότερα

$$|z^\nu| = |z|^\nu$$

Ασκήσεις

1. Βρείτε το μέτρο των παρακάτω μιγαδικών αριθμών:

   - $4-3i$
   - $\dfrac{1+2i}{2+3i}$
   - $(4-3i)^2$

2. Ποιος πρέπει να είναι ο μιγαδικός αριθμός z ώστε να ισχύει ότι: $|z-1| = |z-2| = |z-i|$

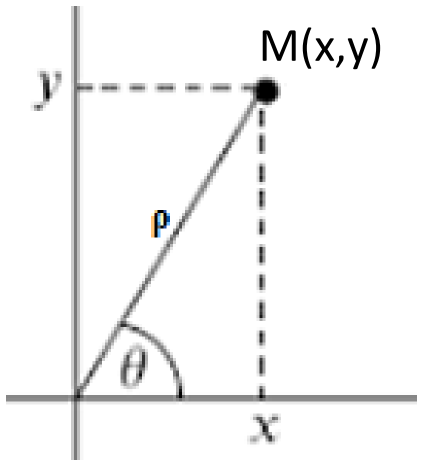
3. Στο $\mathbb{R}$ ισχύει ότι αν $\alpha^2+\beta^2=0$, τότε $\alpha=\beta=0$. Αποδείξτε ότι **δεν** ισχύει στους μιγαδικούς.

Υπόδειξη: Αν z,z': $z^2+z'^2=0$ ή $z^2-(i\cdot z')^2=0$ κ.λπ.

Μορφές μιγαδικών αριθμών

Στοιχεία Μιγαδικών

Τριγωνομετρική μορφή μιγαδικού



Ορισμός: Έστω z=x+y·i μιγαδικός ≠ 0 με OM την αντίστοιχη διανυσματική ακτίνα

Όρισμα του z είναι οι γωνίες του OM με τον Re(z)

$$\theta + 2\kappa\pi,\ \kappa \in \mathbb{Z}$$

Από όλα τα ορίσματα η γωνία ∊ [0, 2π) = θ λέγεται πρωτεύον όρισμα του z (= Arg(z))

(Δύο ορίσματα του z διαφέρουν κατά 2κπ, κ ∊ $\mathbb{Z}$)

Για z=0 δεν ορίζεται όρισμα

Το μέτρο του $|z| = \sqrt{x^2+y^2} = \rho$

cosθ = προσκείμενη / υποτείνουσα
sinθ = απέναντι / υποτείνουσα

και αν θ ένα όρισμα τότε $\cos\theta = \frac{x}{\rho}$ και $\sin\theta = \frac{y}{\rho}$ **(I)**

Από την (I): z=x+y·i ⇔ z=ρ·cosθ+ρ·sinθ·i ⇔ $\boxed{z=\rho\cdot(\cos\theta+\cdot i\cdot\sin\theta)}$ η τριγωνομετρική ή πολική μορφή του z (polar form)

Παράδειγμα

Έστω $z= -\sqrt{3}+i$

Αφού ρ=2 και αν θ ένα όρισμα, τότε ισχύουν:

$$\cos\theta=-\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ και } \sin\theta=\frac{1}{2}$$

Άρα μία τιμή του θ είναι θ=5π/6 και η τριγωνομετρική μορφή του z είναι:

$$z=2\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\cdot\sin\frac{5\pi}{6}\right)$$

& γενικά:

$$z= -\sqrt{3}+i == 2\cdot\left[\cos\left(2\kappa\pi+\frac{5\pi}{6}\right)+i\cdot\sin\left(2\kappa\pi+\frac{5\pi}{6}\right)\right]$$

$\kappa \in \mathbb{Z}$

Ιδιότητες τριγωνομετρικής μορφής

1. $z = z' \Leftrightarrow \begin{cases} \rho = \rho' \\ \theta - \theta' = 2\kappa\pi, \ \kappa \in \mathbb{Z} \end{cases}$

"Δύο μη μηδενικοί μιγαδικοί αριθμοί είναι ίσοι, αν και μόνο αν έχουν ίσα μέτρα και η διαφορά των ορισμάτων τους είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του 2π".

2. $z_1 \cdot z_2 = \rho_1\rho_2 \cdot [\cos(\theta_1+\theta_2) + i\cdot\sin(\theta_1+\theta_2)]$

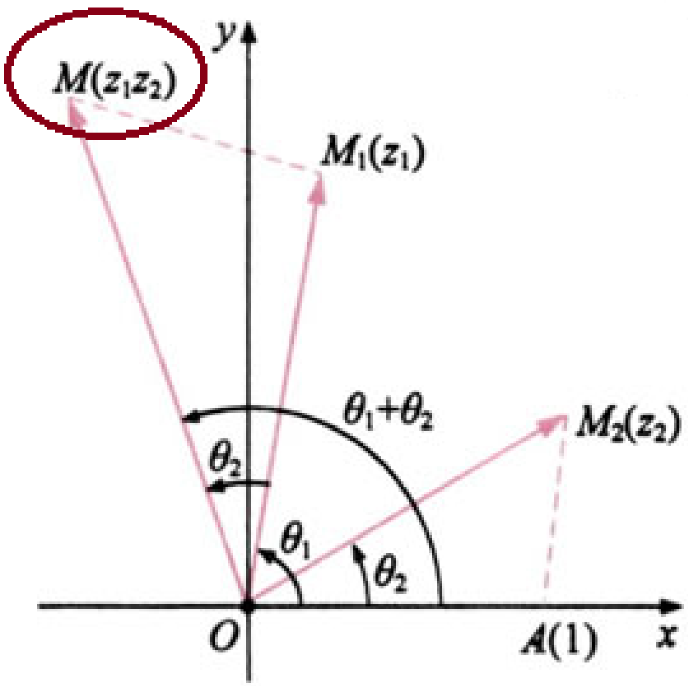
3. $z_1 / z_2 = (\rho_1 / \rho_2) \cdot [\cos(\theta_1-\theta_2) + i\cdot\sin(\theta_1-\theta_2)]$

Υπενθύμιση:
cos(a+b)=cosa·cosb–sina·sin b
cos(a–b)=cosa·cosb+sina·sin b
sin(a±b)=sina·cosb±cosa·sin b

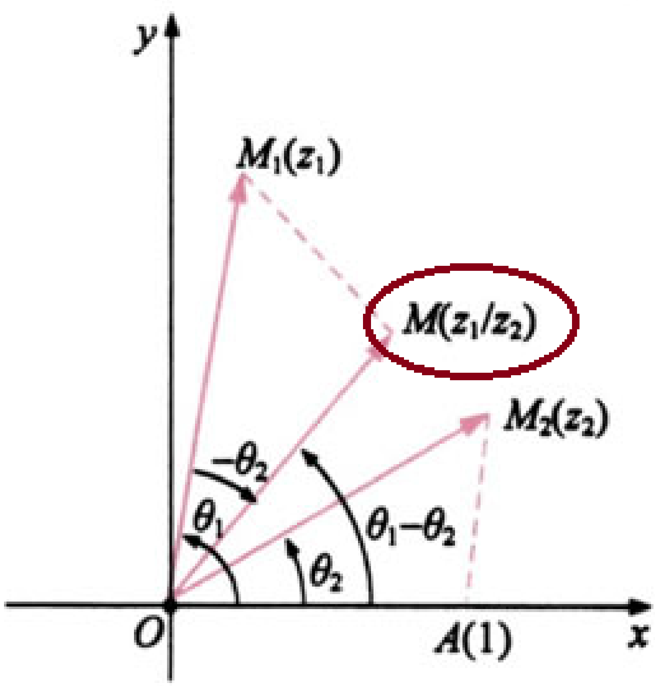
Άσκηση: Να αποδείξετε την 2η και την 3η ιδιότητα

Γεωμετρική ερμηνεία

Η **γεωμετρική ερμηνεία του <u>γινομένου</u> και του <u>πηλίκου</u> δύο μιγαδικών αριθμών** δίνεται από τα αντίστοιχα επόμενα σχήματα:



Τα τρίγωνα OAM_2 και OM_1M είναι όμοια



Τα τρίγωνα OAM_2 και OMM_1 είναι όμοια

βλ. http://ebooks.edu.gr/modules/ebook/show.php/DSGL-C105/492/3196,12967/

Παράδειγμα

Αν $z_1 = 2\left(\text{συν}\,\frac{2\pi}{3} + i\,\text{ημ}\,\frac{2\pi}{3}\right)$ και $z_2 = 3\left(\text{συν}\,\frac{11\pi}{6} + i\,\text{ημ}\,\frac{11\pi}{6}\right)$

Τότε:

$$z_1 \cdot z_2 = 2 \cdot 3\left[\text{συν}\left(\frac{2\pi}{3} + \frac{11\pi}{6}\right) + i\,\text{ημ}\left(\frac{2\pi}{3} + \frac{11\pi}{6}\right)\right] = 6\left(\text{συν}\,\frac{5\pi}{2} + i\,\text{ημ}\,\frac{5\pi}{2}\right) = 6i$$

και

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2}{3}\left[\text{συν}\left(\frac{2\pi}{3} - \frac{11\pi}{6}\right) + i\,\text{ημ}\left(\frac{2\pi}{3} - \frac{11\pi}{6}\right)\right] = \frac{2}{3}\left[\text{συν}\left(\frac{-7\pi}{6}\right) + i\,\text{ημ}\left(\frac{-7\pi}{6}\right)\right]$$

$$= \frac{2}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\,\frac{1}{2}\right) = \frac{-\sqrt{3}}{3} + i\,\frac{1}{3}\,.$$

Θεώρημα του Moivre

Έστω $z = \rho \cdot (\cos\theta + i \cdot \sin\theta)$ και $\nu \in \mathbb{Z}^+$, τότε:

$$\mathbf{z^\nu = \rho^\nu \cdot [\cos(\nu\cdot\theta)+i\cdot\sin(\nu\cdot\theta)]}$$

Απόδειξη: (με την μέθοδο της επαγωγής)

- Για ν=1, τότε $z=\rho\cdot(\cos\theta+i\cdot\sin\theta)$, που ισχύει
- Έστω ισχύει για ν, δηλ. $z^\nu = \rho^\nu\cdot[\cos(\nu\cdot\theta)+i\cdot\sin(\nu\cdot\theta)]$, θα δείξουμε ότι ισχύει για ν+1
- $z^{\nu+1} = z^\nu\cdot z^1 = \rho^\nu\cdot[\cos(\nu\cdot\theta)+i\cdot\sin(\nu\cdot\theta)]\cdot \rho\cdot(\cos\theta+i\cdot\sin\theta) =$

  $= \rho^{\nu+1}\cdot\{\cos[(\nu+1)\cdot\theta]+i\cdot\sin[(\nu+1)\cdot\theta]\}$, που ισχύει

Υπενθύμιση:
cos(a+b)=cosa · cosb–sina · sin b
cos(a–b)=cosa · cosb+sina · sin b
sin(a±b)=sina · cosb±cosa · sin b

Παράδειγμα: Αν $z=2(\cos\frac{\pi}{6}+i\cdot\sin\frac{\pi}{6})$

$$\textit{τότε}: \quad z^4 = 2^4(\cos\frac{4\pi}{6}+i\cdot\sin\frac{4\pi}{6})=16(\cos\frac{2\pi}{3}+i\cdot\sin\frac{2\pi}{3})$$

Παρατήρηση

Το θεώρημα του Moivre ισχύει και για εκθέτη αρνητικό, δηλ.:

$$\mathbf{z^{-\nu} = \rho^{-\nu} \cdot [\cos(-\nu\cdot\theta)+i\cdot\sin(-\nu\cdot\theta)]}$$

Απόδειξη:

$$[p\cdot(\cos\theta+i\sin\theta)]^{-\nu}=\frac{1}{[p\cdot(\cos\theta+i\sin\theta)]^{\nu}}=$$

Προσοχή: μηδέν και όχι θ

$$=\frac{1}{p^{\nu}\cdot(\cos\theta+i\sin\theta)^{\nu}}=\frac{1\cdot(\cos 0+i\sin 0)}{p^{\nu}\cdot[\cos(\nu\theta)+i\sin(\nu\theta)]}=$$

$$=p^{-\nu}\cdot[\cos(0-\nu\theta)+i\sin(0-\nu\theta)]=$$

$$=p^{-\nu}\cdot[\cos(-\nu\theta)+i\sin(-\nu\theta)]$$

Άσκηση

Αν $z = -\sqrt{3} + i$, να βρείτε το z^{1998}

Υπόδειξη:

1. Μετατρέψτε πρώτα τον μιγαδικό στην τριγωνομετρική του μορφή με το πρωτεύον μέρισμα
2. Στη συνέχεια κάντε χρήση του θεωρήματος του Moivre για να υπολογίσετε τη δύναμη

Angelos Giannoulas

Λύση

$$z=2[\cos(\frac{5\pi}{6})+i\cdot\sin(\frac{5\pi}{6})]$$

$$\text{Άρα } z^{1998}=2^{1998}\cdot[\cos(1998\frac{5\pi}{6})+i\cdot\sin(1998\frac{5\pi}{6})]=$$

$$=2^{1998}\cdot[\cos(333\cdot5\pi)+i\cdot\sin(333\cdot5\pi)]=2^{1998}\cdot(\cos\pi+i\cdot\sin\pi)=$$

$$=-2^{1998}$$

Διότι:

$\cos(333\cdot5\pi) = \cos1665\pi = \cos\pi = -1$

$\sin(333\cdot5\pi) = \sin1665\pi = \sin\pi = 0$

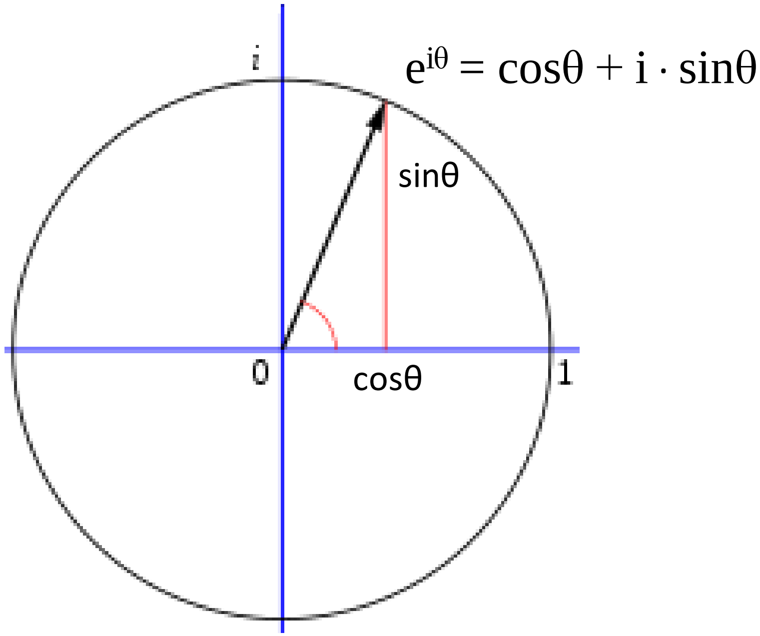
εφόσον $1665=1664+1=(2*832)+1$

Μορφή Euler (Εκθετική μορφή)

Ο Euler μας λέει ότι για **κάθε πραγματικό αριθμό θ** (σε ακτίνια) ισχύει η επόμενη εκθετική μορφή:

$$\mathbf{e^{i\theta} = \cos\theta + i \cdot \sin\theta}$$

Γεωμετρική ερμηνεία:



Άρα κάθε μιγαδικός μπορεί να γραφτεί στην εκθετική μορφή:

$$\boxed{\mathbf{z} = |z|\cdot(\cos\theta + i\cdot\sin\theta) = \mathbf{|z|\cdot e^{i\theta}}}$$

με θ = Arg(z)

cos & sin από την μορφή Euler

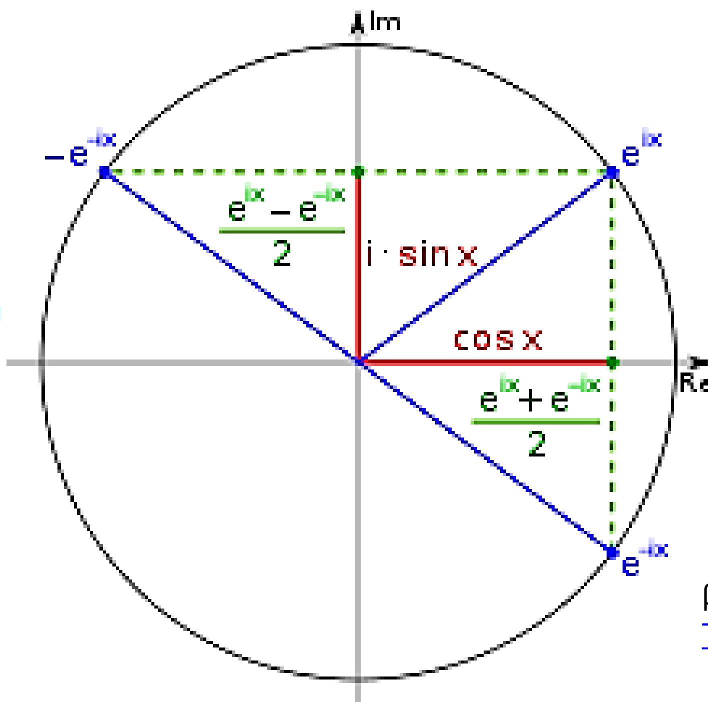
$$(1)\quad e^{i\theta} = \cos\theta + i\cdot\sin\theta$$

$$(2)\quad e^{-i\theta} = \cos\theta - i\cdot\sin\theta$$

εφόσον
$e^{-i\theta} = \cos(-\theta) + i\cdot\sin(-\theta) = \cos(\theta) - i\cdot\sin(\theta)$

(1) & (2) $\begin{cases} e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2\cos\theta \\ e^{i\theta} - e^{-i\theta} = 2\,i\cdot\sin\theta \end{cases} \Rightarrow \boxed{\cos\theta = \dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \;\;\&\;\; \sin\theta = \dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}}$

Σχέση μεταξύ ημιτόνου, συνημιτόνου και εκθετικής συνάρτησης



βλ. https://el.wikipedia.org/wiki/Τύπος_του_Όιλερ

Πράξεις με την εκθετική μορφή

1. Αν $n \in \mathbb{Z}$, τότε $z^n = \rho^n \cdot e^{in\theta}$

2. $\hat{z} = \rho \cdot e^{-i\theta}$

3. $z = z' \Leftrightarrow \begin{cases} \rho = \rho' \ \& \\ \theta - \theta' = 2\kappa\pi, \kappa \in \mathbb{Z} \end{cases}$

4. $z \cdot z' = \rho \cdot \rho' \cdot e^{i(\theta+\theta')}$

5. $z / z' = (\rho / \rho') \cdot e^{i(\theta-\theta')}$

6. $z^{-1} = (1/\rho) \cdot e^{-i\theta}$

Παράδειγμα

$$\text{Αν } z_1 = -\sqrt{3}+i,\ z_2 = 1+\sqrt{3}\cdot i$$

$$\text{Βρείτε τα: } z_1 \cdot z_2 \ \ \& \ \ z_1 / z_2$$

Απάντηση:

$$z_1 = -\sqrt{3}+i = 2\ (\cos\frac{5\pi}{6} + i\cdot\sin\frac{5\pi}{6})$$

$$z_2 = 1+\sqrt{3}\cdot i = 2\ (\cos\frac{\pi}{3} + i\cdot\sin\frac{\pi}{3})$$

Άρα:

$$z_1 \cdot z_2 = 4(\cos(\frac{5\pi}{6}+\frac{\pi}{3}) + i\cdot\sin(\frac{5\pi}{6}+\frac{\pi}{3})) = 4(\cos\frac{7\pi}{6} + i\cdot\sin\frac{7\pi}{6})$$

$$z_1 / z_2 = \cos(\frac{5\pi}{6}-\frac{\pi}{3}) + i\cdot\sin(\frac{5\pi}{6}-\frac{\pi}{3}) = \cos\frac{\pi}{2} + i\cdot\sin\frac{\pi}{2}$$

Ορισμός ν-τάξης ρίζας μιγαδικού

Νιοστή ρίζα ενός μιγαδικού αριθμού $z=a+b\cdot i$, ορίζεται κάθε μιγαδικός $\zeta=x+y\cdot i$ τ.ώ. $\zeta^{\nu} = z$, δηλ.

$$(x+y\cdot i)^{\nu} = a+b\cdot i$$

$\nu\ n \in \mathbb{Z}^{+}$

Υπενθύμιση: **Θεμελιώδες Θεώρημα της Άλγεβρας**
'Κάθε μη μηδενικό πολυώνυμο μίας μεταβλητής και βαθμού *n* *με μιγαδικούς συντελεστές* έχει ακριβώς *n μιγαδικές ρίζες*'

Αν $z=\rho\cdot(\cos\theta+i\cdot\sin\theta)$, $z \neq 0$, τότε :

υπάρχουν ακριβώς ν διαφορετικές ρίζες

$$\boxed{z_{\kappa} = \sqrt[\nu]{\rho}\cdot(\cos\frac{\theta+2\kappa\pi}{\nu}+i\cdot\sin\frac{\theta+2\kappa\pi}{\nu}),\ \kappa=0..\nu\text{-}1}$$

δηλ. επαληθεύουν την εξίσωση: $\boldsymbol{\zeta^{\nu} = z}$, όπου $\zeta \in \mathbb{C}^{*}$

Άσκηση

Να βρεθούν οι κυβικές ρίζες του $z=\sqrt{2}+i\cdot\sqrt{2}$

Λύση:

Η πολική μορφή του $z=2(\cos\frac{\pi}{4}+i\cdot\sin\frac{\pi}{4})$, άρα οι κυβικές του ρίζες:

$$z_0=\sqrt[3]{2}\cdot(\cos\frac{\frac{\pi}{4}+2\cdot 0\cdot\pi}{3}+i\cdot\sin\frac{\frac{\pi}{4}+2\cdot 0\cdot\pi}{3})=\sqrt[3]{2}\cdot(\cos\frac{\pi}{12}+i\cdot\sin\frac{\pi}{12})$$

- Οι z_1 & z_2 να λυθούν ως άσκηση

Οι 3 ρίζες z_0, z_1, z_2 διαιρούν τον κύκλο Κ(0, $\sqrt[3]{2}$) σε 3 ίσα τόξα (γωνίας 2π/3)

Διωνυμική εξίσωση

Διωνυμική λέγεται κάθε εξίσωση της μορφής:

$$\boxed{z^{\nu} = \zeta}$$ $\zeta \in \mathbb{C}^*$ & ν n $\in \mathbb{Z}^+$

Παράδειγμα: Να λύσετε την $z^5 = -32 \cdot i$

Λύση:

$$\text{Εφόσον το } -i = \cos(-\frac{\pi}{2}) + i \cdot \sin(-\frac{\pi}{2})$$

$$\text{Άρα } z^5 = -32 \cdot i = 32[\cos(-\frac{\pi}{2}) + i \cdot \sin(-\frac{\pi}{2})]$$

Άρα από τον ορισμό της ρίζας ν-οστής τάξης:

$$z_k = \sqrt[5]{32}[\cos(\frac{2\kappa\pi - \frac{\pi}{2}}{5}) + i \cdot \sin(\frac{2\kappa\pi - \frac{\pi}{2}}{5})] \text{ για k=0...4}$$

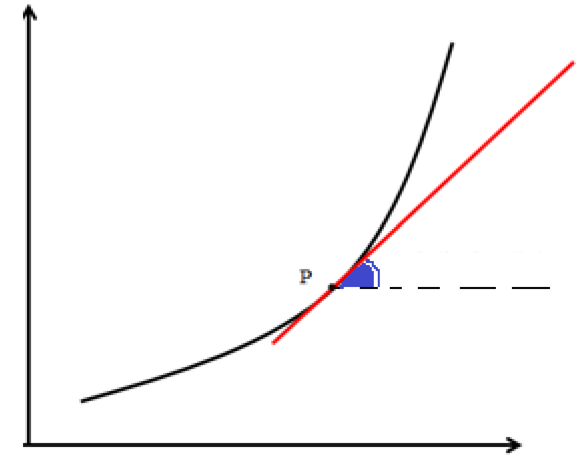
Ορισμός

Διαφορικός Λογισμός
μιας μεταβλητής Ι

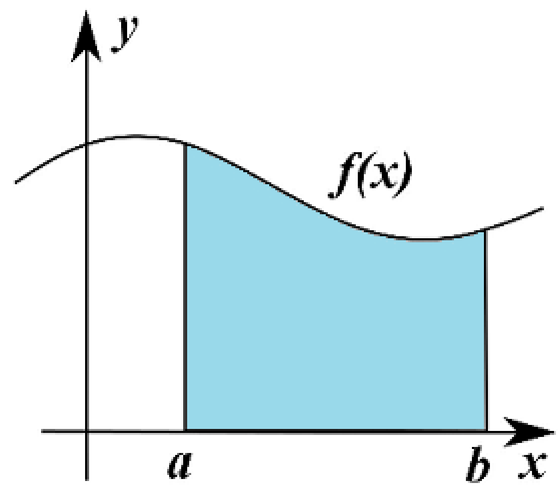
Τι είναι ο Λογισμός

Ο 'Λογισμός' ασχολείται κυρίως με 2 θεμελιώδη γεωμετρικά προβλήματα. Και τα 2 διερευνώνται για περισσότερο από 2000 έτη:

1.<u>Το πρόβλημα της εφαπτομένης</u>:
Έστω η καμπύλη y=f(x) και σημείο P(x,f(x)).
«*Πώς μπορούμε να βρούμε την κλίση της καμπύλης στο P;*»



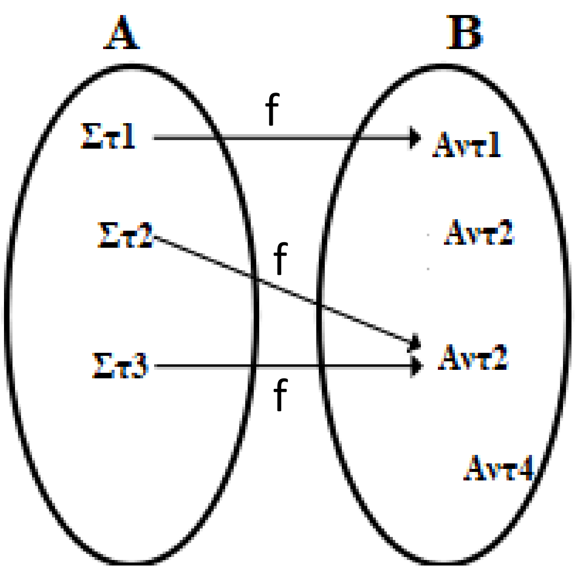
2.<u>Το πρόβλημα του εμβαδού</u>:
Έστω y=f(x) ≥ 0 για x ϵ [a, b]
«*Πώς μπορούμε να βρούμε το εμβαδόν που περικλείεται από την καμπύλη y=f(x) και τον άξονα xx' στο [a, b];*»



Συνάρτηση

Ορισμός:

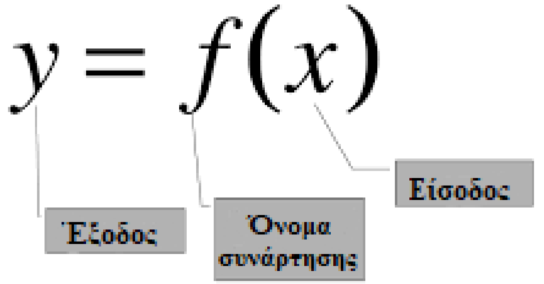
Συνάρτηση f από ένα σύνολο A σε ένα σύνολο B είναι μια αντιστοίχιση η οποία σε κάθε σημείο του A αντιστοιχεί ΕΝΑ ΜΟΝΟ στοιχείο του B, και συμβολ. f: $\begin{cases} A \rightarrow B \\ x \mapsto y=f(x) \end{cases}$



- **A** είναι το 'Πεδίο Ορισμού' της f (η είσοδος)
  όπου το x είναι η 'ανεξάρτητη μεταβλητή'
- **B** είναι το 'Πεδίο Τιμών' της f (η έξοδος)
  όπου το y είναι η 'εξαρτημένη μεταβλητή'
- **f** είναι ο 'κανόνας' που κάνει την αντιστοίχιση

Παραδείγματα:

<u>ανεξάρτητης μεταβλ.</u> –	<u>εξαρτημένη μεταβλ.</u>
υψόμετρο	σημείο βρασμού
επιτόκιο	$ στον λογαριασμό



Συνάρτηση (συνέχεια)

Εστω η συνάρτηση f από ένα σύνολο A σε ένα σύνολο B

- Αν $A \subseteq \mathbb{R}$, τότε η f λέγεται συνάρτηση πραγματικής μεταβλητής
- Αν $f(A) \subseteq \mathbb{R}$, τότε η f λέγεται συνάρτηση πραγματικών τιμών

Παραδείγματα:

1) $f(x)=x^2$ συνάρτηση με Π.Ο.$=\mathbb{R}$ & Π.Τ.$=\mathbb{R}^+$

2) $f(x)=\dfrac{2x}{3x+2}$ συνάρτηση με Π.Ο.$=\mathbb{R} \setminus \{-\dfrac{2}{3}\}$ & Π.Τ.$=\mathbb{R}$

3) $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ συνάρτηση με Π.Ο.$=[-1,1]$ & Π.Τ.$=[0,1]$

Παρατήρηση: Για τα σύνολα Π.Ο. & Π.Τ. χρησιμοποιούνται διαστήματα. Τα ακραία σημεία αυτών λέγονται 'συνοριακά σημεία'

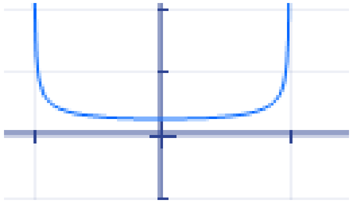
π.χ.: $(\alpha,+\infty)$, $[\alpha,+\infty)$, $(-\infty,+\infty)$, $(-\infty,\beta)$, $(-\infty,\beta]$ κ.ά.

Άσκηση: Δώστε τα Π.Ο.& τα Π.Τ. των: $y=1/x$, $y=\sqrt{x}$, $y=\sqrt{4-x}$

Γραφική παράσταση

Γράφημα ή γραφική παράσταση μιας συνάρτησης y=f(x) είναι η τοποθέτηση των σημείων (x,f(x)) στο επίπεδο

Παράδειγμα: Ποιό το γράφημα της $y=f(x)=1/\sqrt{4-x^2}$



Για να ισχύει πρέπει $4-x^2>0 \Leftrightarrow x^2<4 \Leftrightarrow -2<x<2$ ή $x \in (-2,+2)$

Παρατήρηση: Πάντα κοιτάμε τι συμβαίνει στο γράφημα καθώς $x \to -\infty$ και αντίστοιχα όταν $x \to +\infty$ ώστε να κρίνουμε (θεωρητικά) αν f αύξουσα ή όχι

Ασκήσεις: Δημιουργήστε τα γραφήματα των συναρτήσεων

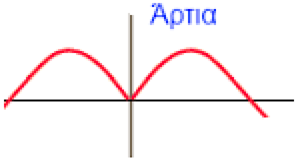
$$y=x^2, \quad y=x^3, \quad y=1/x, \quad y=\sqrt{x}, \quad y=|x|$$

Προσοχή: η τελευταία ορίζεται κατά τμήματα

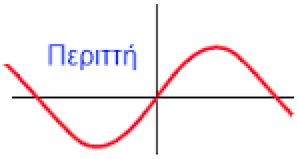
ΕΡΩΤΗΣΗ: Ο κύκλος είναι γραφική παράσταση συνάρτησης;

Ορισμοί

- Η συνάρτηση $y=f(x)$ & για κάθε $x \in$ Π.Ο. λέγεται:
  - άρτια αν: $f(-x)=f(x)$
  - περιττή αν: $f(-x)= - f(x)$



Το γράφημα μιας f άρτιας συμμετρικό ως προς yy'



Το γράφημα μιας f περιττής συμμετρικό ως προς to 0

- Αμφιμονοσήμαντη: είναι η συνάρτηση που για κάθε $x_1,x_2 \in$ Π.Ο.:

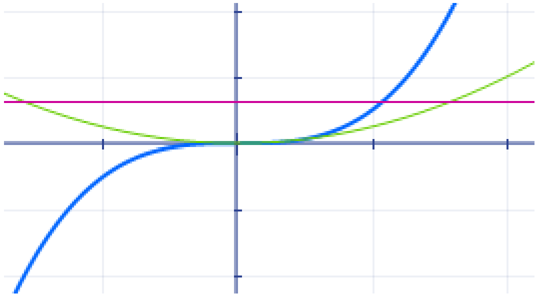
ή ένα προς ένα (1-1)

$$\text{αν για } x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

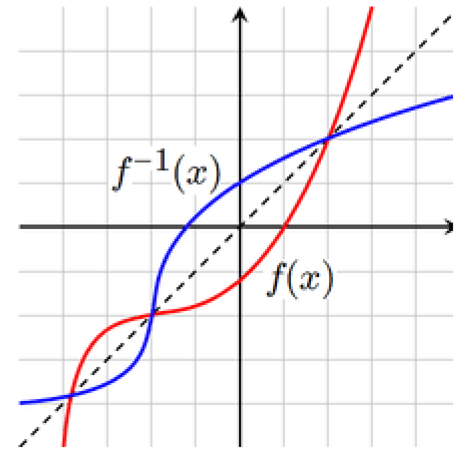
ή αλλιώς αν $f(x_1)=f(x_2) \Rightarrow x1=x2$

- **Κριτήριο οριζόντιας ευθείας**: Αν μία οριζόντια ευθεία (//xx') τέμνει σε περισσότερο από 1 σημεία το γράφημα της f, τότε $f \neq$ (1-1)

(**π.χ.** $y=x^3$:(1-1) ενώ $y=x^2$:$\neq$ (1-1))



Εύρεση της f^{-1}



1ο βήμα: a. Λύνουμε την y=f(x) ως προς x

Αλγεβρικά b. Εναλλάσσω τα x & y

2ο βήμα : f & f^{-1} είναι συμμετρικές

Γεωμετρικά ως προς τον άξονα x = y

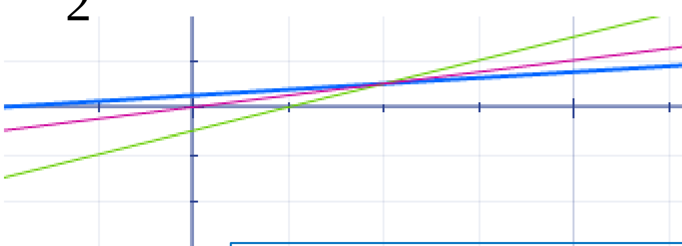
3ο βήμα : Ελέγχουμε αν

Έλεγχος (i) $f^{-1}f(x)=x$ & (ii) $f(f^{-1}(x))=x$ Κριτήριο αντιστρόφων

Παράδειγμα: Αν $y=\frac{1}{2}x+1$, ποια είναι η f^{-1};

1) $y=\frac{1}{2}x+1 \Rightarrow x=2y-2 \overset{x\leftrightarrow y}{\Rightarrow} y=2x-2$, άρα $f^{-1}(x)=2x-2$

2)



3) $f(f^{-1}(x))=\frac{1}{2}(2x-2)+1=x$

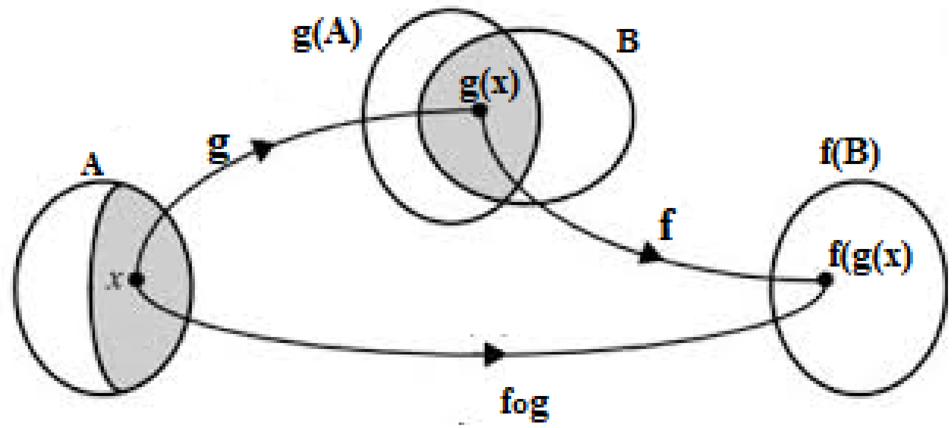
$f^{-1}(f(x))=2(\frac{1}{2}x+1)-2=x$

Άσκηση: Όμοια βρείτε την f^{-1} για την $y=x^2$, $x\geq 0$

Σύνθετες συναρτήσεις

Εστω $g: x \mapsto g(x)$

και $f: g(x) \mapsto f(g(x))$



Άρα Σύνθεση συναρτήσεων:

$$\boxed{\mathbf{(f \circ g)(x) = f(g(x))}}$$

Παράδειγμα: Αν $f(x) = \ln x$ & $g(x)=x^{½}$, $f_o g$=; και $g_o f$=;

Π.Ο.(f)=(0,+∞) και Π.Ο.(g)=[0,+∞)

1. $g_o f$: Έστω $\begin{cases} x \in ΠΟ(f) \\ f(x) \in ΠΟ(g) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ f(x) > 0) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \ln x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow$ Άρα $x \geq 1$

   Άρα $g_o f(x) = g(f(x))=g(\ln x)=(\ln x)^{½}$, $x \in [1,+\infty)$

2. Όμοια το Π.Ο. της $f_o g$: $x>0$ και $f_o g(x)=\ln(x^{½})$, $x \in (0,+\infty)$

Ασκήσεις: (**1**)Αν $g=1-x^2$ & $f=x^{½}$, $f_o g$=?
(**2**) Αν $g=x^2$ & $f=x-7$, $(f_o g)(2)$=?

Περιοδική συνάρτηση

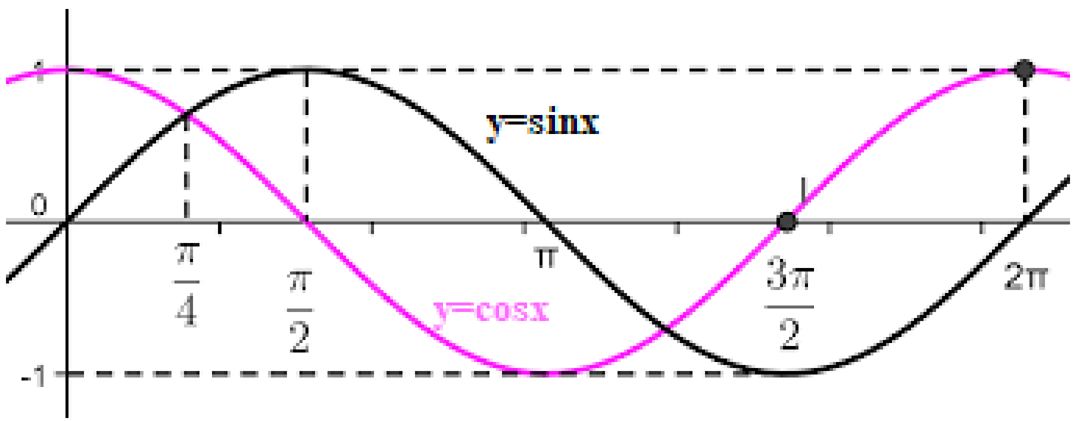
f(x) περιοδική αν υπάρχει ρ>0: f(x+ρ)=f(x), για κάθε x ϵ Π.Ο.

Η μικρότερη δυνατή τιμή της ρ λέγεται περίοδος

Παραδείγματα: Οι πιο γνωστές περιοδικές συναρτήσεις είναι οι τριγωνομετρικές, όπως:

cos(x+2π)=cosx   tan(x+2π)=tanx

sin(x+2π)=sinx   cot(x+2π)=cotx



y=cosx

Π.Ο.: -∞ < x < +∞

Π.Τ.: -1 < y < +1

Περίοδος: 2π

y=sinx

Π.Ο.: -∞ < x < +∞

Π.Τ.: -1 < y < +1

Περίοδος: 2π

Ασκήσεις συναρτήσεων

1. Έστω η εκθετική συνάρτηση: $f(x)=2e^{3x-2}+1$

   Να δ.ό. η f είναι αμφιμονοσήμαντη (1-1) & να βρείτε την f^{-1}

2. Να λύσετε την εξίσωση: $3^{\log_3 7} - 4^{\log_4 2} = 5^{(\log_5 x - \log_5 x^2)}$

3. Να δημιουργήσετε το γράφημα της $f(x) = \log_2 x$

Μονοτονία & ακρότατα συναρτήσεων

Ορισμός: Η f είναι γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ ⊆Π.Ο. αν:

$x_1 < x_2 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$, για κάθε $x_1, x_2 \in \Delta$

αύξουσα αν $f(x_1) \leq f(x_2)$

Αντίστοιχα η f γνησίως φθίνουσα στο Δ αν:

$x_1 < x_2 \Leftrightarrow f(x_1) > f(x_2)$, για κάθε $x_1, x_2 \in \Delta$

φθίνουσα αν $f(x_1) \geq f(x_2)$

Ορισμός: Η f με Π.Ο.=Α παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ (ολικό) μέγιστο $f(x_0)$

αν $f(x) \leq f(x_0)$, για κάθε $x \in A$

Αντίστοιχα η f παρουσιάζει στο $x_1 \in A$ (ολικό) ελάχιστο $f(x_1)$

αν $f(x) \geq f(x_0)$, για κάθε $x \in A$

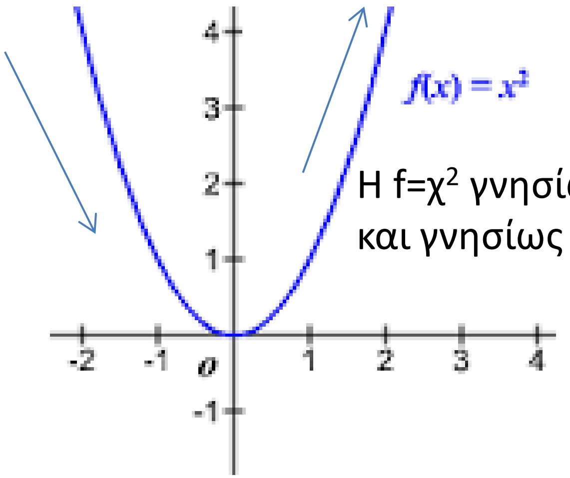
Ορισμός: Η $f: D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ άνω φραγμένη αν:

υπάρχει φ ε $\mathbb{R}$: για κάθε $x \in D$ $f(x) \leq \varphi$

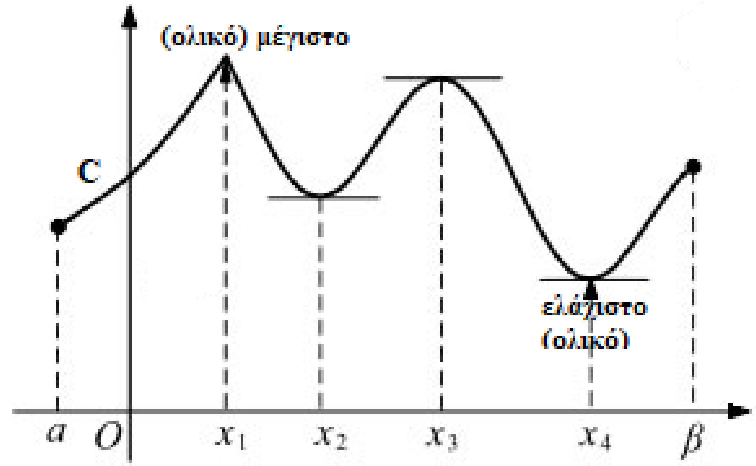
Η f κάτω φραγμένη αν υπάρχει ψ ε $\mathbb{R}$: για κάθε $x \in D$ $f(x) \geq \psi$

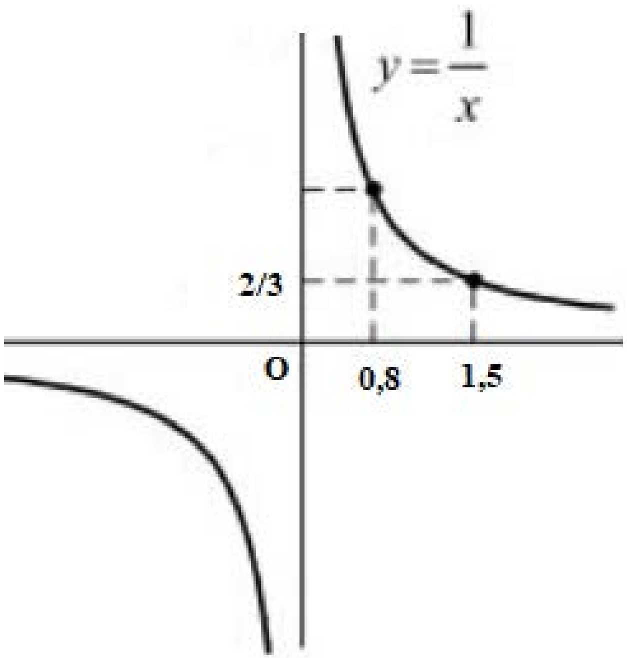
Η f φραγμένη αν είναι και άνω και κάτω φραγμένη

Παραδείγματα



Η f=χ^2 γνησίως φθίνουσα στο (-∞ 0]
και γνησίως αύξουσα στο [0,+∞)





Η f = 1/x δεν είναι άνω φραγμένη
Αν όμως περιοριστώ στο διάστημα
Δ=[0.8, 1.5] τότε είναι φραγμένη άνω

Ασκήσεις: Βρείτε τα (ολικά) ακρότατα των:

1. f(x) = -x^2+1
2. f(x) = |x-1|

Πράξεις συναρτήσεων

- Αν f = g τότε: $\begin{cases} \text{ΠΟ}(f) = \text{ΠΟ}(g) \quad \& \\ f(x)=g(x), \text{ για κάθε } x \end{cases}$

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ (f \pm g)(x)=f(x) \pm g(x) \\ \\ \bullet\ (f \cdot g)(x)=f(x) \cdot g(x) \end{array}\right\} \text{ με ΠΟ} = \text{ΠΟ}(f)\cap\text{ΠΟ}(g)$$

- $(f / g)(x)=f(x) / g(x)$ με ΠΟ = $\text{ΠΟ}(f)\cap\text{ΠΟ}(g)\setminus\{g(x)=0\}$

- $(f\circ g)(x) = f(g(x))$ με ΠΟ = $\{x \in \text{ΠΟ}(g)\colon g(x) \in \text{ΠΟ}(f)\}$

Μετατοπίσεις γραφήματος

Έστω η $\phi(x)$ για την οποία έχουμε κάνει και την γραφική της αναπαράσταση C_ϕ, τότε:

- αν $f(x) = \phi(x) + \kappa$ με $\kappa>0$, έχει ως γραφική αναπαράσταση την C_ϕ μετατοπισμένη κατά κ προς τα πάνω (άξονα yy')
  - Όμοια προς τα κάτω στον yy' αν $\kappa<0$
- αν $f(x) = \phi(x - \kappa)$ με $\kappa>0$, έχει ως γραφική αναπαράσταση την C_ϕ μετατοπισμένη κατά κ προς τα δεξιά (άξονα xx')
  - Όμοια προς τα αριστερά στον xx' αν $\kappa<0$
- Όμοια εργαζόμαστε βήμα – βήμα όταν έχουμε σύνθετες μορφές, π.χ. $f(x) = \phi(x \pm \lambda) \pm \kappa$

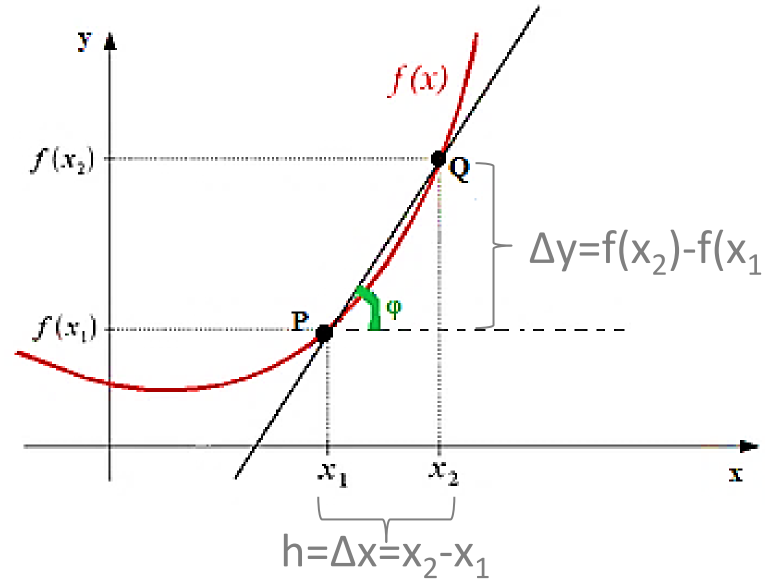
Angelos Giannoulas

Όρια συναρτήσεων

Διαφορικός Λογισμός
μιας μεταβλητής Ι

Μέσος ρυθμός μεταβολής

Έστω μία συνάρτηση f(x) όπως στο διπλανό σχήμα. Καθώς προχωράμε σε μεγαλύτερα x, περνάμε από το σημείο P στο Q.



Άρα ο μέσος ρυθμός μεταβολής του y ως προς το x στο $[x_1,x_2]$ είναι:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_2)\text{-}f(x_1)}{x_2\text{-}x_1}=\frac{f(x_1+h)\text{-}f(x_1)}{h},h\neq 0$$

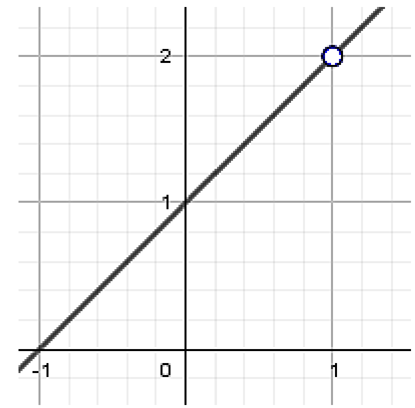
Και από το σχήμα φαίνεται ότι ο μέσος ρυθμός μεταβολής της f από το x_1 στο x_2 ‘ταυτίζεται’ με την κλίση της τέμνουσας PQ, άρα όταν το P ‘πέσει’ πάνω στο Q: η τέμνουσα PQ ≡ εφαπτομένη στο Q, δηλ.

κλίση εφαπτομένης = $\lim\limits_{P\to Q}(\text{κλίσεων τεμνουσών})$

Παράδειγμα

Πώς συμπεριφέρεται η συνάρτηση κοντά στο σημείο x=1;

$$f(x)=\frac{x^2-1}{x-1}$$



- Για x ≠ 1:

$$f(x)=\frac{x^2-1}{x-1}=\frac{(x-1)\cdot(x+1)}{x-1}=x+1$$

Το γράφημα C της f θα έχει ένα κενό στο (1, f(1)) = (1,2)

- Παρότι η f δεν ορίζεται στο x=1, μπορούμε να ‘πλησιάσουμε’ την τιμή f(x)=2 όσο πιο κοντά επιθυμούμε, π.χ.:
  - o f(0.9)=1.9
  - o f(0.99)=1.99
  - o f(1.001)=2.001
  - κ.λπ.

Τότε λέμε ότι $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=2$

Άτυπος ορισμός

Έστω f(x) συνάρτηση που ορίζεται σε ανοικτό διάστημα εκατέρωθεν του x_0. Αν η f(x) για κάθε x κοντά στο x_0 'πλησιάζει' πολύ την τιμή L, τότε λέμε ότι η f τείνει στο όριο L: $\boxed{\lim_{x \to x_0} f(x) = L}$

Για να δ.ό. το όριο της $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$ πρέπει να δ.ό. η απόσταση μεταξύ f(x) & L (|f(x)-L|) γίνεται όσο μικρή θέλουμε όταν επιλέγουμε x πολύ κοντά στο x_0.

Παράδειγμα: Πόσο κοντά στο $x_0=4$ πρέπει να επιλέγω τα x ώστε η τιμή εξόδου στην y=2x-1 να απέχει λιγότερο από 2 μονάδες από το y=7;

(Το ερώτημα είναι: ? <|x-4|<? τ.ώ. |y-7|<2)

Λύνοντας την |y-7|<2 ⇔ …. …. ⇔ -1<x-4<1, δηλ. σε απόσταση 1 μονάδας από το x_0

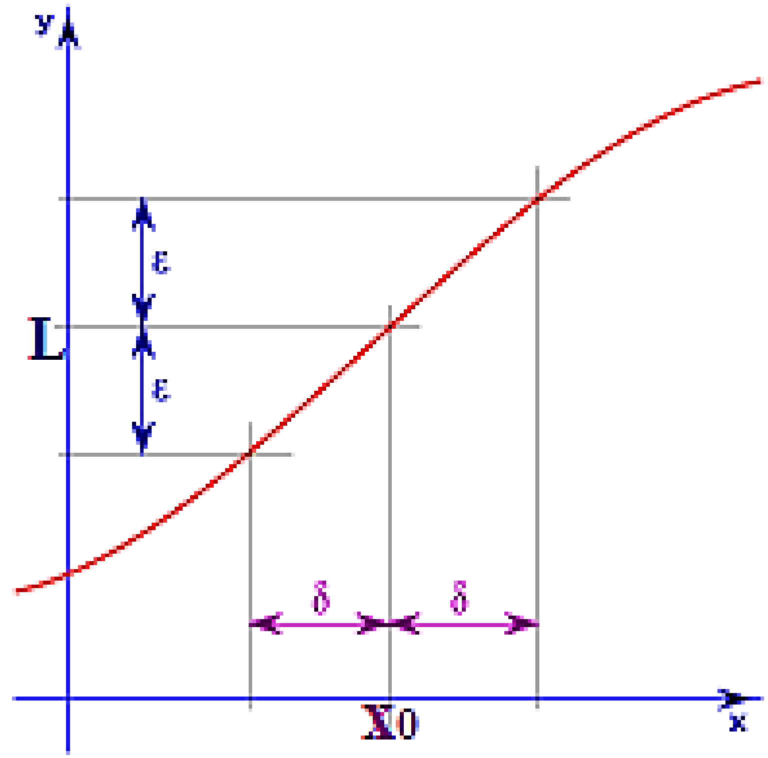
Άρα, πρέπει να εξασφαλίσουμε ότι:

«*καθώς πλησιάζουμε το x_0 όλο και περισσότερο,*
η f(x) πλησιάζει όλο και περισσότερο το L»

Ορισμός ορίου

Έστω η f(x) ορίζεται σε ανοικτό διάστημα που περιέχει το x_0, ίσως εκτός του x_0 :

π.χ. ανοικτό στο x_0



Εικόνα: https://el.wikipedia.org/wiki/Όριο_συνάρτησης

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0,\ \exists \text{ ένα } \delta > 0 :$$
$$\forall x \text{ με } 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

$\forall$: για κάθε

$\exists$: υπάρχει

Παραδείγματα

1ο(Αλγεβρική εύρεση του δ <u>για κάθε ε</u>)

Να δ.ό. $\lim_{x\to 1}(5x-3)=2$

$\boxed{\text{δηλ. ? } \exists \text{ ένα } \delta > 0 : 0 < |x-1| < \delta \text{ τ.ώ. } |f(x)-2| < \varepsilon \ \forall \varepsilon > 0\,?}$

|f(x)-2|<ε ⇔|5x-5|<ε ⇔|x-1|<ε/5, άρα $\forall \varepsilon > 0, \exists\ \delta = \varepsilon / 5$

2ο (Αλγεβρική εύρεση του δ όταν το <u>ε είναι δεδομένο</u>)

Αν ε=1, ποιο είναι το δ ώστε $\lim_{x\to 5}\sqrt{x-1}=2$

$\boxed{\text{δηλ. ? } \exists \text{ ένα } \delta > 0 : 0 < |x-5| < \delta \text{ τ.ώ. } |f(x)-2| < 1\,?}$

Βήμα 1ο: |f(x)-2|<1 ⇔ -1< $(x-1)^{½}$-2 <1 ⇔ 1< x-1 <9 ⇔ 2<x<10
Άρα η $1^η$ ανισότητα ισχύει για κάθε x ϵ (2, 10)\{5}

Βήμα 2ο: Η απόσταση του 5 από το πιο κοντινό άκρο του (2,10) είναι το 3 (από το 2). Άρα για δ=3 ή μικρότερο:
0<|x-5|<δ ⇒|f(x)-2|<1

Ιδιότητες ορίων

Έστω $\lim\limits_{x\to c} \mathrm{f(x)=L}, \ \lim\limits_{x\to c} \mathrm{g(x)=M}$ L, M, c, k ϵ $\mathbb{R}$

i. $\lim\limits_{x\to c} (\mathrm{f(x) \pm g(x)) = L \pm M}$

ii. $\lim\limits_{x\to c} (\mathrm{f(x) \cdot g(x)) = L \cdot M}$

iii. $\lim\limits_{x\to c} (\mathrm{k \cdot f(x)) = k \cdot L}$

iv. $\lim\limits_{x\to c} \left(\dfrac{\mathrm{f(x)}}{\mathrm{g(x)}}\right) = \dfrac{\mathrm{L}}{\mathrm{M}}, \ \mathrm{M} \neq 0$

v. $\lim\limits_{x\to c} (\mathrm{f(x)}^{\frac{r}{s}}) = \mathrm{L}^{\frac{r}{s}}$

αρκεί $\mathrm{L} \in \mathbb{R}$

vi. $\lim\limits_{x\to c} (\mathrm{x}) = \mathrm{c}$ ταυτοτική

vii. $\lim\limits_{x\to c} \mathrm{k} = \mathrm{k}$ σταθερή

viii. $\lim\limits_{x\to x_0} \sin x = \sin x_0$

$\lim\limits_{x\to x_0} \cos x = \cos x_0$

ix. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin \alpha x}{\alpha x} = 1$

x. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x - 1}{x} = 0$

Όρια πολυωνύμων & ρητών συναρτήσεων

- Τα όρια των πολυωνύμων προκύπτουν από απλή αντικατάσταση:

δηλ. $\mathrm{P(x)}=\mathrm{a}_0+\mathrm{a}_1\mathrm{x}^1+\cdots+\mathrm{a}_\mathrm{n}\mathrm{x}^\mathrm{n} \Rightarrow \lim_{x\to c}\mathrm{P(x)}=\mathrm{a}_0+\mathrm{a}_1\mathrm{c}^1+\cdots+\mathrm{a}_\mathrm{n}\mathrm{c}^\mathrm{n}$

- Όμοια για τις ρητές συναρτήσεις αρκεί ο παρονομαστής ≠ 0

Παρατήρηση: Στην περίπτωση που μηδενίζεται ο παρονομαστής κοιτάμε να κάνουμε απαλοιφή κοινού παράγοντα

Ασκήσεις: Βρείτε τα όρια των παρακάτω συναρτήσεων

$$(1)\ \lim_{x\to -1}\frac{x^3+4x^2-3}{x^2+5} \quad (2)\ \lim_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{x^2-x} \quad (3)\ \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{2+h}-\sqrt{2}}{h}$$

Υπόδειξη: Στις 2 πρώτες κάντε παραγοντοποίηση
Στην 3η πολλαπλασιάστε αριθμητή &
παρονομαστή με τον (√2+h + √2)

Κριτήριο παρεμβολής

(Χρησιμοποιείται σε περιπτώσεις που δεν βρίσκουμε άμεσα το όριο)

Έστω g(x) ≤ f(x) ≤ h(x), για κάθε x ϵ στο ανοικτό διάστημα εκατέρωθεν του c, εκτός ίσως του c. Τότε:

$$\boxed{\text{αν } \lim_{x\to c} \mathrm{g(x)} = \lim_{x\to c} \mathrm{h(x)} = \mathrm{L} \Rightarrow \lim_{x\to c} \mathrm{f(x)} = \mathrm{L}}$$

Παράδειγμα 1ο: αν $1-\dfrac{x^2}{4} \le u(x) \le 1+\dfrac{x^2}{2} \quad \forall x \neq 0, \quad \lim\limits_{x\to 0} \mathrm{u(x)} = ?$

$$\lim_{x\to 0}(1-\frac{x^2}{4}) = 1 = \lim_{x\to 0}(1+\frac{x^2}{2}) \Rightarrow \lim_{x\to 0} \mathrm{u(x)} = 1$$

Παράδειγμα 2ο: $\lim\limits_{x\to 0}(x \cdot \sin\dfrac{1}{x}) = 0\,?$

Υπενθύμιση:
|sinx|≤ |x|

$$|\mathrm{x} \cdot \sin\frac{1}{\mathrm{x}}| = |\mathrm{x}| \cdot |\sin\frac{1}{\mathrm{x}}| \le |\mathrm{x}| \;\Rightarrow\; -|\mathrm{x}| \le x \cdot \sin\frac{1}{x} \le |\mathrm{x}|$$

$$\&\ \text{επειδή} \quad \lim_{x\to 0}(-|\mathrm{x}|) = 0 = \lim_{x\to 0}(|\mathrm{x}|) \Rightarrow \lim_{x\to 0}(x \cdot \sin\frac{1}{x}) = 0$$

Πλευρικά όρια

Μάθαμε ότι το $\lim_{x\to\alpha} f(x)=L$ υπάρχει όταν ορίζονται τιμές για το x **εκατέρωθεν** του α : οι τιμές f(x) να ‘πλησιάζουν’ το L

(**εκατέρωθεν** =και από τις 2 μεριές του α, από δεξιά και αριστερά)

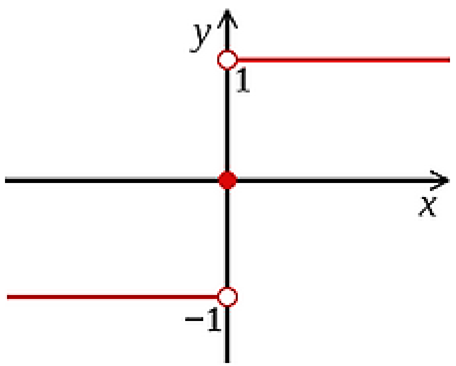
Υπάρχουν όμως περιπτώσεις που το όριο ορίζεται για x μόνο από την μια πλευρά:

- Αν από δεξιά x → α, τότε έχω το δεξιό όριο
- Αν από αριστερά x → α, τότε έχω το αριστερό όριο

Παράδειγμα: Έστω f(x)=x/|x|

Αν από δεξιά x → 0: $\lim_{x\to 0^+} f(x)=1$

Αν από αριστερά x → 0: $\lim_{x\to 0^-} f(x)= -1$



Ορισμός: Έστω f: (**α**,β) → ℝ. Αν η f→L καθώς x→α έχει δεξιό όριο L στο α (συμβολ. $x\to\alpha^+$)

Έστω f: (c,**a**) → ℝ. Αν η f→L καθώς x→α έχει αριστερό όριο L στο α (συμβολ. $x\to\alpha^-$)

Ορισμός πλευρικών ορίων

Η f: (α,β) → ℝ έχει δεξιό όριο το L ϵ ℝ:

$$\lim_{x\to\alpha^+} f(x)=L \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0,\ \exists \text{ ένα } \delta>0 : \forall x \text{ με } \alpha<x<\alpha+\delta \Rightarrow |f(x)-L|<\varepsilon$$

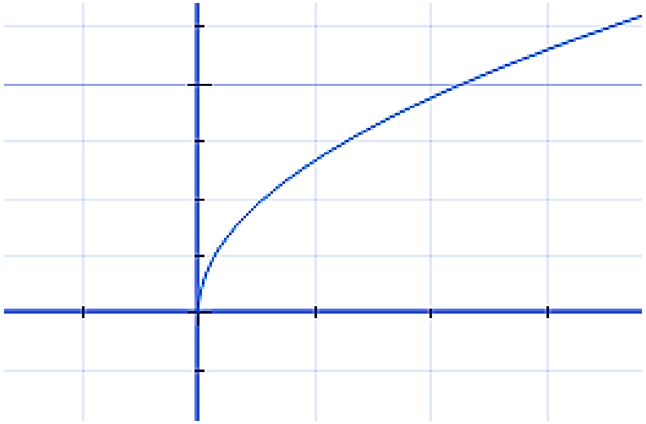
Η f: (α,β) → ℝ έχει αριστερό όριο το L ϵ ℝ:

$$\lim_{x\to\alpha^-} f(x)=L \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0,\ \exists \text{ ένα } \delta>0 : \forall x \text{ με } \alpha-\delta<x<\alpha \Rightarrow |f(x)-L|<\varepsilon$$

Παράδειγμα 1ο : $y=\sqrt{x}\ \ \&\ \ x\to 0$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\sqrt{x}=0$$

$$\text{Άρα } \lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\sqrt{x}=0$$



Άρα το όριο της f(x) στο x=0 υπάρχει και είναι ίσο με 0

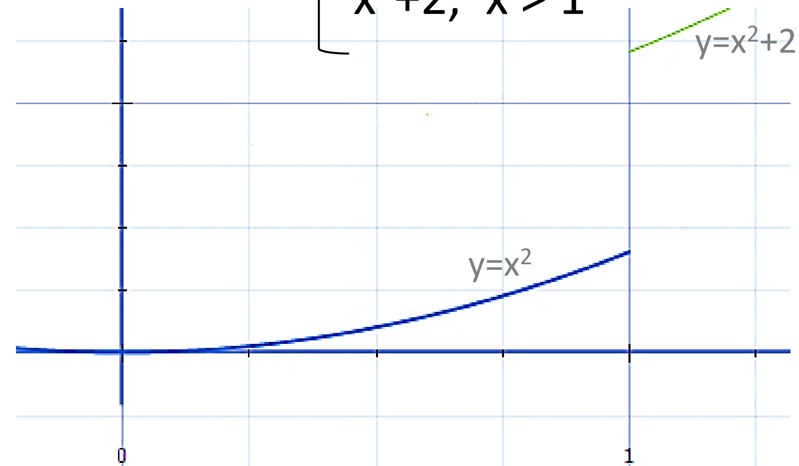
Θεώρημα σχέσης ορίου & πλευρικών ορίων

$$\lim_{x \to \alpha} f(x) = L \Leftrightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x \to \alpha^-} f(x) = L \\ \& \\ \lim\limits_{x \to \alpha^+} f(x) = L \end{cases}$$

δηλ. το όριο της f ισούται με L όταν το x → α
όταν και τα δύο πλευρικά όρια τείνουν στο L

Ασκήσεις

Άσκηση 1η: Να βρείτε το όριο για x → 1 της f(x) = $\begin{cases} x^2, & x \le 1 \\ x^2+2, & x > 1 \end{cases}$



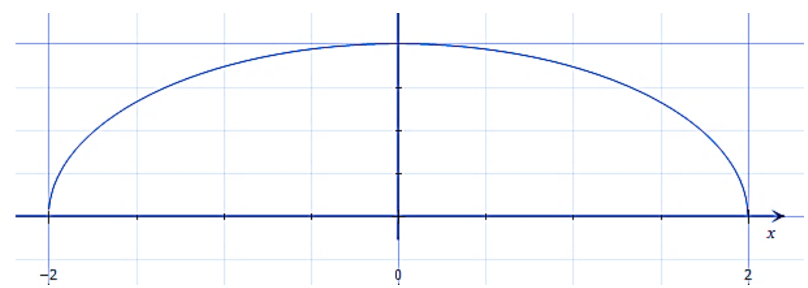
$$\lim_{x\to 1^+} \mathrm{f}(x) = \lim_{x\to 1^+}(x^2+2) = 3$$

$$\lim_{x\to 1^-} \mathrm{f}(x) = \lim_{x\to 0^-}(x^2) = 1$$

Εφόσον το **αριστερό όριο ≠ δεξιού** ορίου
ΔΕΝ υπάρχει το όριο της f στο x→1

Άσκηση 2η: Να βρείτε τα όρια για x → ± 2 της f(x) = $\sqrt{4-x^2}$

ΠΟ(f)={$4-x^2 \ge 0$, x ϵ ℝ} =
{$x^2 \le 4$, x ϵ ℝ} = {|x| ≤ 2, x ϵ ℝ}=
{-2 ≤ x ≤ 2, x ϵ ℝ}



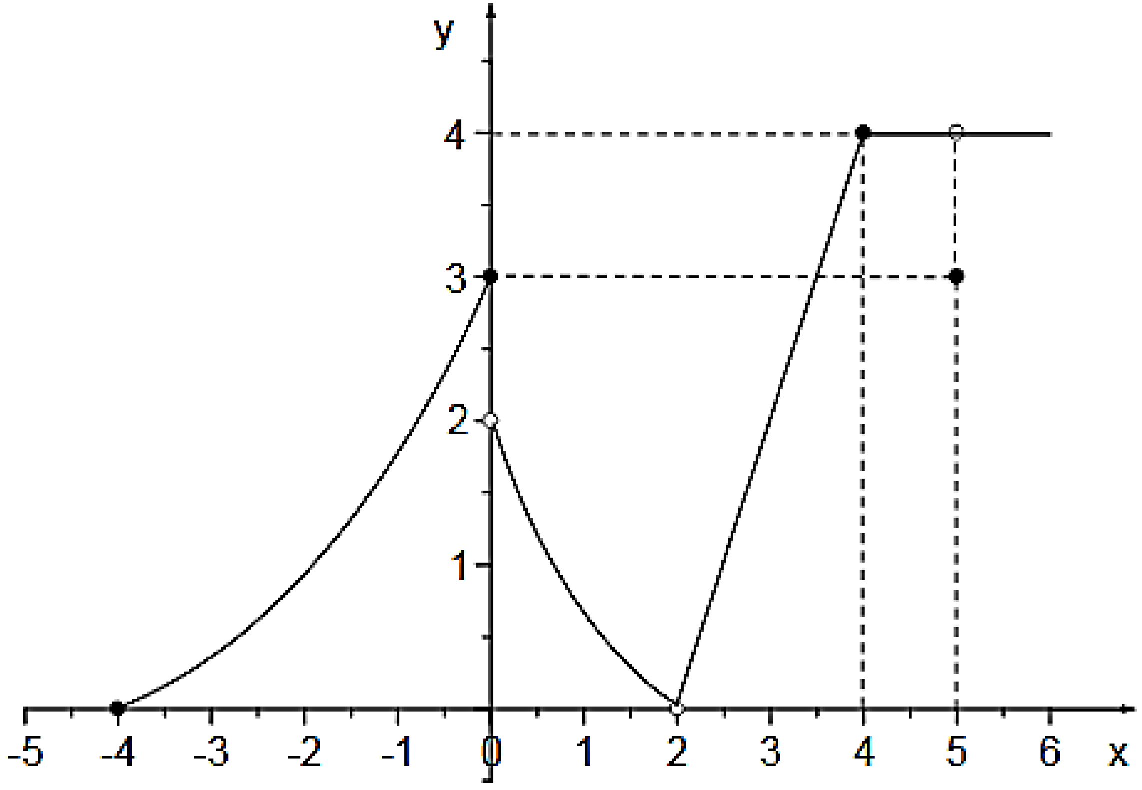
$$\lim_{x\to -2^+} \mathrm{f}(x) = 0 \text{ αλλά } \lim_{x\to -2^-} \mathrm{f}(x) \text{ δεν υπάρχει αφού τα x} \notin \text{ ΠΟ(f)}$$

$$\lim_{x\to 2^-} \mathrm{f}(x) = 0 \text{ αλλά } \lim_{x\to 2^+} \mathrm{f}(x) \text{ δεν υπάρχει αφού τα x} \notin \text{ ΠΟ(f)}$$

Άρα **ΔΕΝ** υπάρχουν
τα όρια
για x → ± 2 της f(x)

Άσκηση

Να βρείτε το $\lim_{x \to x_0} f(x)$ (αν υπάρχει) όπου η f έχει πεδίο ορισμού το $[-4,+\infty)$ και γραφική παράσταση που φαίνεται στο παρακάτω σχήμα για: α) $x_0=-4$, β) $x_0=0$, γ) $x_0=2$, δ) $x_0=4$, ε) $x_0=5$



Όριο σύνθετης συνάρτησης

Για να βρω το όριο για x → x_0 μιας σύνθετης συνάρτησης f∘g(x)=f(gx)):

Βήμα 1ο: Θέτω u=g(x)

Βήμα 2ο: Υπολογίζω (αν υπάρχει) το: $u_0 = \lim_{x \to x_0} g(x)$

Βήμα 3ο: Υπολογίζω (αν υπάρχει) το: $\mathrm{L} = \lim_{u \to u_0} \mathrm{f(u)}$

$$\boxed{\text{δηλ. } \lim_{x \to x_0} \mathrm{f(g(x))} = \lim_{u \to u_0} \mathrm{f(u)}}$$

Παράδειγμα: Βρείτε το : $\lim_{x \to 0} \sin(\mathrm{x}^2 + \frac{\pi}{4})$

Βήμα 1ο : Θέτω u=x^2+π/4

Βήμα 2ο : $\lim_{x \to 0} \mathrm{u} = \lim_{x \to 0} (\mathrm{x}^2 + \frac{\pi}{4}) = \frac{\pi}{4}$

Βήμα 3ο: Άρα $\lim_{x \to 0} \sin(\mathrm{x}^2 + \frac{\pi}{4}) = \lim_{u \to \frac{\pi}{4}} \sin\mathrm{u} = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Άσκηση:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(3x)}{x} = ?$$

Υπόδειξη. Πολ/στε αριθμ. + παρον.με 3

Άπειρα όρια

Διαφορικός Λογισμός
μιας μεταβλητής Ι

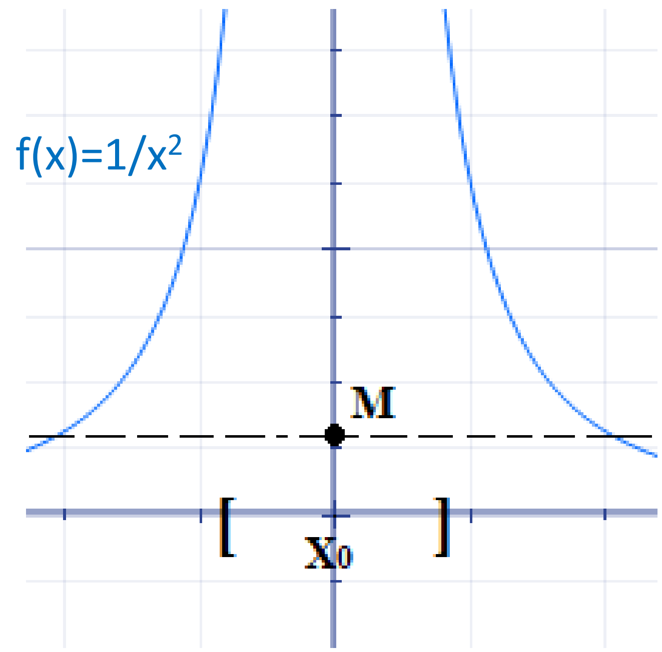
Άπειρα όρια καθώς $x \to x_0$

Ορισμός: Έστω f ορισμένη στο ανοικτό διάστημα που περιέχει το x_0 χωρίς το x_0, δηλ. ΠΟ(f) = $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$, τότε:

(i) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall M>0\ \exists$ ένα $\delta>0$: $\forall x \in$ ΠΟ(f) με $|x-x_0|<\delta \Rightarrow f(x)>M$

(ii) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall M>0\ \exists$ ένα $\delta>0$: $\forall x \in$ ΠΟ(f) με $<|x-x_0|<\delta \Rightarrow f(x)< -M$

Παράδειγμα:



$f(x)= 1/x^2$ & $x_0 =0$
όποιο x και να πάρω μέσα στο [...]: $f(x)>M$, άρα $\lim_{x\to 0}=+\infty$

Όμοια αν πάρω την $f(x)= - 1/x^2$, όπου $\lim_{x\to 0}= -\infty$

Ιδιότητες

(i) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty \Rightarrow f(x)>0$ όταν το x είναι κοντά στο x_0

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=-\infty \Rightarrow f(x)<0$ όταν το x είναι κοντά στο x_0

(ii) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0}(-f(x))=-\infty$

(iii) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\pm\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{1}{f(x)}=0$

(iv) $$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0 \\ f(x)>0 \text{ κοντά στο } x_0\end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0}\frac{1}{f(x)}=+\infty$$

Όμοια το όριο = $-\infty$ αν $f(x)<0$ κοντά στο x_0

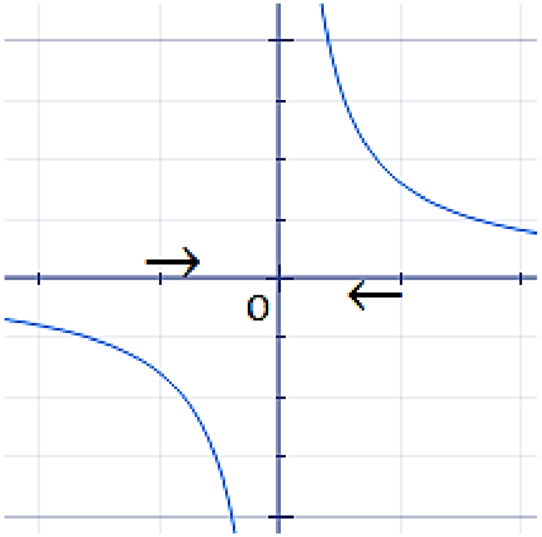
(v) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\pm\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0}|f(x)|=+\infty$

(vi) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0}\sqrt[k]{f(x)}=+\infty$

Άσκηση :
Επαληθεύστε τις ιδιότητες με χρήση του ορισμού

Παραδείγματα

Παράδειγμα 1ο : $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}=?$



$$\left.\begin{aligned}\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}&=+\infty\\ \lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x}&=-\infty\end{aligned}\right\}\quad \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\ \text{δεν υπάρχει}$$

Και γενικά ΔΕΝ υπάρχει το : $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^{2\nu+1}},\ \nu\in\mathbb{N}$

Άσκηση: Να δ.ό. αντιθέτως υπάρχει το όριο για $1/x^2$ και γενικά για $1/x^{2\nu}$

Υπόδειξη: βλ. π.χ. ορισμού

Παράδειγμα 2ο :

$$\left.\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\left(-\frac{1}{x^2}\right)&=-\infty\\ \lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}&=+\infty\end{aligned}\right\}\quad \text{τότε } \lim_{x\to 0}(f(x)+g(x))=\lim_{x\to 0}(0)=0$$

Απροσδιόριστες μορφές

Οι επόμενες μορφές πράξεων δεν ορίζονται:

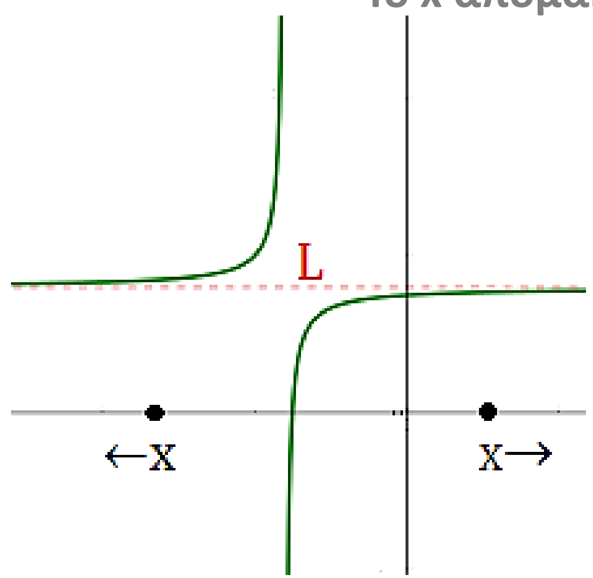
- $(+\infty) + (-\infty)$
- $0 \cdot (\pm\infty)$
- $0 / 0$
- 0^0
- $(\pm\infty)/(\pm\infty)$

Πεπερασμένα όρια όταν x→±∞

Ορισμός:

$$\text{(i)}\quad \lim_{x\to+\infty} f(x)=L \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists\ N>0:\ \forall x \text{ με } \underbrace{x>N}_{\text{Το x απομακρύνεται κινούμενο στον xx'+}} \Rightarrow |f(x)-L|<\varepsilon$$

$$\text{(ii)}\quad \lim_{x\to-\infty} f(x)=L \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists\ N>0:\ \forall x \text{ με } \underbrace{x<-N}_{\text{Το x απομακρύνεται κινούμενο στον xx'−}} \Rightarrow |f(x)-L|<\varepsilon$$



Άπειρα όρια όταν x → ±∞

Ορισμός:

(i) $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty \Leftrightarrow \forall M>0\ \exists\ N>0: \forall x$ με $x>N \Rightarrow f(x)>M$

(ii) $\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty \Leftrightarrow \forall M>0\ \exists\ N>0: \forall x$ με $x<-N \Rightarrow f(x)>M$

(iii) $\lim_{x\to+\infty} f(x)= -\infty \Leftrightarrow \forall M>0\ \exists\ N>0: \forall x$ με $x>N \Rightarrow f(x)< -M$

(iv) $\lim_{x\to-\infty} f(x)= -\infty \Leftrightarrow \forall M>0\ \exists\ N>0: \forall x$ με $x<-N \Rightarrow f(x)< -M$

Παρατήρηση: Από τα προηγούμενα αντιλαμβανόμαστε ότι:

- για να βρούμε το όριο μιας f στο +∞, πρέπει το Π.Ο.(f) να είναι της μορφής (α, +∞) (με α αριθμός ή -∞).
- αντίστοιχα (-∞, β) για f στο -∞.

Κανόνες ορίων καθώς x→ ± ∞

Αν L, M, και k πραγματικοί αριθμοί &

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = L \quad \text{και} \quad \lim_{x\to\pm\infty} g(x) = M, \quad \text{τότε:}$$

1. Όριο αθροίσματος/δαφοράς: $\lim_{x\to\pm\infty}[f(x)\pm g(x)] = L \pm \mathrm{M}$

2. Όριο γινομένου: $\lim_{x\to\pm\infty}[f(x)\cdot g(x)] = L\cdot \mathrm{M}$

3. Όριο σταθερού πολλαπλάσιου: $\lim_{x\to\pm\infty}[\mathrm{k}\cdot f(x)] = \mathrm{k}\cdot L$

4. Όριο πηλίκου: $\lim_{x\to\pm\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{L}{M}, \quad \mathrm{M}\neq 0$

5. Όριο δύναμης: $\lim_{x\to\pm\infty}[f(x)]^{\frac{r}{s}} = L^{\frac{r}{s}}, \quad \mathrm{r,s} \in \mathbb{Z},\ s\neq 0$

Παρατήρηση: Οι πράξεις μας είναι ίδιες όπως και στα πεπερασμένα όρια, π.χ.

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\pi\sqrt{3}}{\mathrm{x}^2} = \lim_{x\to-\infty}(\pi\sqrt{3})\cdot\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{\mathrm{x}}\cdot\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{\mathrm{x}} = \pi\sqrt{3}\cdot 0\cdot 0 = 0$$

Όρια ρητών συναρτήσεων με x → ±∞

Διαιρώ πάντα με τον μεγαλύτερο βαθμό του παρονομαστή

Παράδειγμα 1ο : (Βαθμός αριθμητή = Βαθμός παρονομαστή)

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{5x^2+8x-3}{3x^2+2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{5+\frac{8}{x}-\frac{3}{x^2}}{3+\frac{2}{x^2}}=\frac{5+0-0}{3+0}=\frac{5}{3}$$

Παράδειγμα 2ο : (Βαθμός αριθμητή < Βαθμός παρονομαστή)

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{11x+2}{2x^3-1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{11}{x^2}+\frac{2}{x^3}}{2-\frac{1}{x^3}}=\frac{0}{2}=0$$

Παράδειγμα 3ο : (Βαθμός αριθμητή > Βαθμός παρονομαστή)

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{-4x^3+7x}{2x^2-3x-10}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-4x+\frac{7}{x}}{2-\frac{3}{x}-\frac{10}{x^2}}=\frac{+\infty+0}{2-0-0}=+\infty$$

Παραδείγματα με αντικατάσταση

Παράδειγμα 1ο : Να βρεθεί το $\lim\limits_{x \to +\infty} \sin\dfrac{1}{x}$

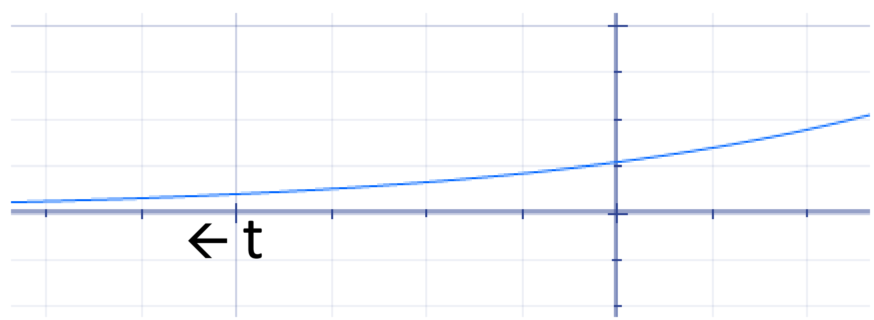
Έστω t=1/x, τότε όταν x→ +∞, το t → 0^+

$$\text{Άρα } \lim_{x \to +\infty} \sin\frac{1}{x} = \lim_{t \to 0^+} \sin t = 0$$

Παράδειγμα 2ο : Να βρεθεί το $\lim\limits_{x \to 0^-} e^{\frac{1}{x}}$

Έστω t=1/x, τότε όταν x→ 0^-, το t → −∞

$$\text{Άρα } \lim_{x \to 0^-} e^{\frac{1}{x}} = \lim_{t \to -\infty} e^t = 0$$



Όρια πολυωνυμικής συνάρτησης με x → ±∞

- Αν $P(x)=\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+\ldots\alpha_1 x+\alpha_0$, $\alpha_\nu \neq 0$ τότε:

$$\boxed{\lim_{x\to\pm\infty} P(x)=\lim_{x\to\pm\infty}(\alpha_\nu x^\nu)}$$

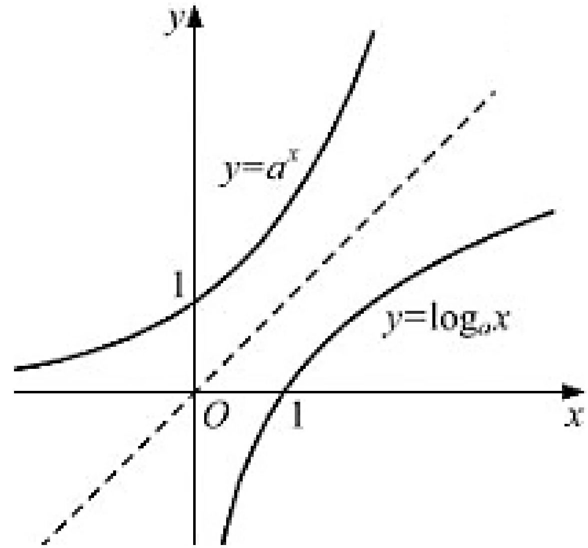
π.χ. $\lim\limits_{x\to-\infty}(4x^5-3x^3+6x^2+7)=\lim\limits_{x\to-\infty}(4x^5)=-\infty$

- Και αν $Q(x)=\beta_\kappa x^\kappa+\beta_{\kappa-1}x^{\kappa-1}+\ldots\beta_1 x+\beta_0$, $\beta_\kappa \neq 0$ τότε:

$$\boxed{\lim_{x\to\pm\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{\alpha_\nu x^\nu}{\beta_\kappa x^\kappa}\right)}$$

Συμπεριφορά της εκθετικής & της λογαριθμικής συνάρτησης με x → ±∞

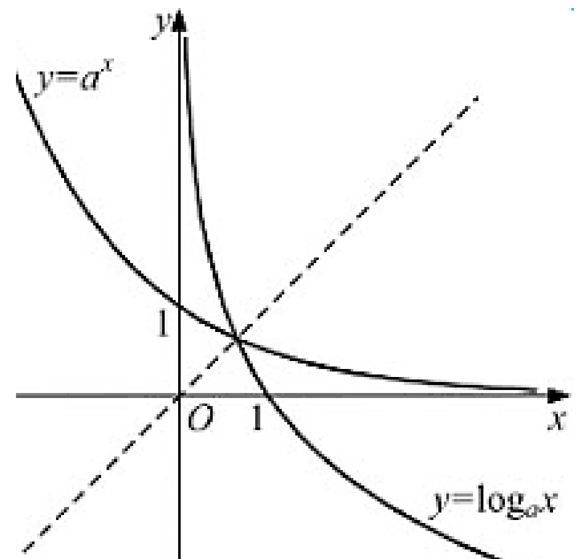
- **Αν α > 1**



$$\lim_{x\to-\infty} \alpha^{x} = 0 \quad \& \quad \lim_{x\to+\infty} \alpha^{x} = +\infty$$

$$\lim_{x\to 0} \log_{\alpha} x = 0 \quad \& \quad \lim_{x\to+\infty} \log_{\alpha} x = +\infty$$

- **Αν 0 < α < 1**



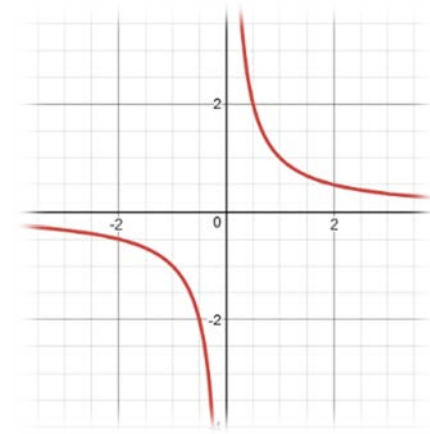
$$\lim_{x\to-\infty} \alpha^{x} = +\infty \quad \& \quad \lim_{x\to+\infty} \alpha^{x} = 0$$

$$\lim_{x\to 0} \log_{\alpha} x = +\infty \quad \& \quad \lim_{x\to+\infty} \log_{\alpha} x = -\infty$$

Εικόνες: http://eisatopon.blogspot.com/2013/11/blog-post_20.html

Άπειρα όρια: **Οριζόντιες** **και** **κατακόρυφες ασύμπτωτες**

Έστω η f(x)=1/x, τότε παρατηρούμε ότι:



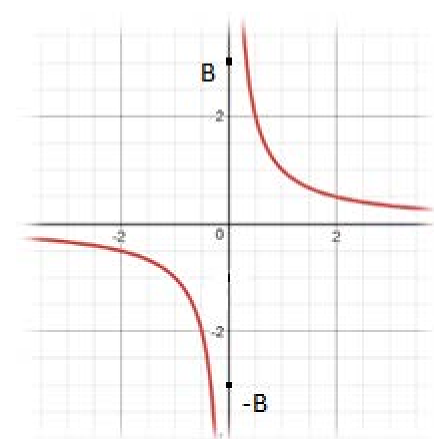
- καθώς x→+∞, (1/x)→0 & $\lim_{x\to+\infty}(\frac{1}{x}) = 0$
- καθώς x→-∞, (1/x)→0 & $\lim_{x\to-\infty}(\frac{1}{x}) = 0$

Λέμε ότι η γραφική παράσταση «τείνει ασυμπτωτικά» σε μια ευθεία όταν η απόσταση του γραφήματος της συνάρτησης και της ευθείας τείνει στο μηδέν. Η ευθεία λέγεται «ασύμπτωτη» της γραφικής παράστασης

Δηλ. στο π.χ. της f(x)=1/x, όποιο B>0 και να διαλέξω πάνω στην ασύμπτωτη yy', υπάρχουν άπειρα x τ.ώ. f(x)>B,

δηλ. $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}(\frac{1}{x}) = +\infty$

(Όμοια για f(x)<-B, δηλ. $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-}(\frac{1}{x}) = -\infty$)



Ορισμός

Μία ευθεία y=b είναι οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης y=f(x) αν ισχύει ότι:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = b \quad ή \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = b$$

Μία ευθεία x=α είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης y=f(x) αν ισχύει ότι:

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = \pm\infty \quad ή \quad \lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty$$

Παράδειγμα

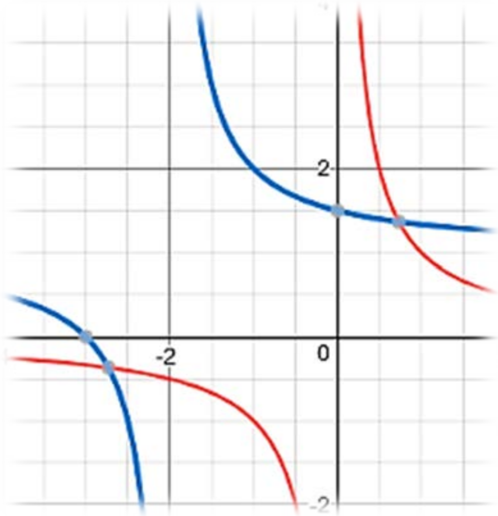
Να βρεθούν οι ασύμπτωτες της $y = \dfrac{x+3}{x+2}$

δηλ. να βρούμε την συμπεριφορά της y καθώς

1. x→ ±∞
2. x→ - 2 (όπου μηδενίζεται ο παρονομαστής)

Επειδή: $y = \dfrac{x+3}{x+2} = 1 + \dfrac{1}{x+2}$

Έχω το γράφημα της 1/x μετατοπισμένο 1 μονάδα πάνω και 2 μονάδες αριστερά. Άρα οι ασύμπτωτες είναι οι y=1 και x=-2

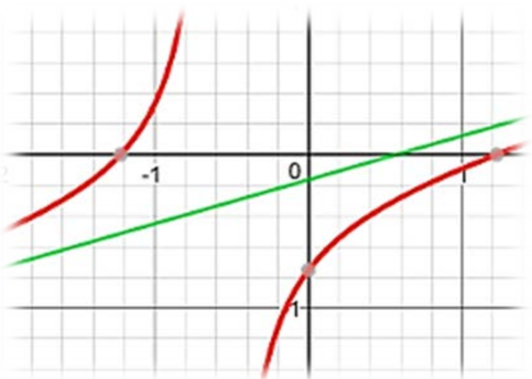


Πλάγια ασύμπτωτη ρητών συναρτήσεων με βαθμός αριθμητής = βαθμός παρονομαστής +1

Βρίσκουμε την πλάγια ασύμπτωτη διαιρώντας κατά μέλη ώστε να εκφράσουμε την συνάρτηση με κάποιο <u>υπόλοιπο</u> τ.ώ. τείνει στο 0 όταν x→ ±∞

Παράδειγμα: Ποια η πλάγια ασύμπτωτη της $y = \dfrac{2x^2 - 3}{7x + 4}$

$$y = \frac{2x^2 - 3}{7x + 4} = \underbrace{(\frac{2}{7}x - \frac{8}{49})}_{\text{γραμμική συνάρτηση } g(x)} - \underbrace{\frac{115}{49(7x - 4)}}_{\text{υπόλοιπο}}$$



Καθώς x→ ±∞ το <u>υπόλοιπο</u> →0, δηλ. η g(x) είναι η πλάγια ασύμπτωτη της f(x) = y

Angelos Giannoulas

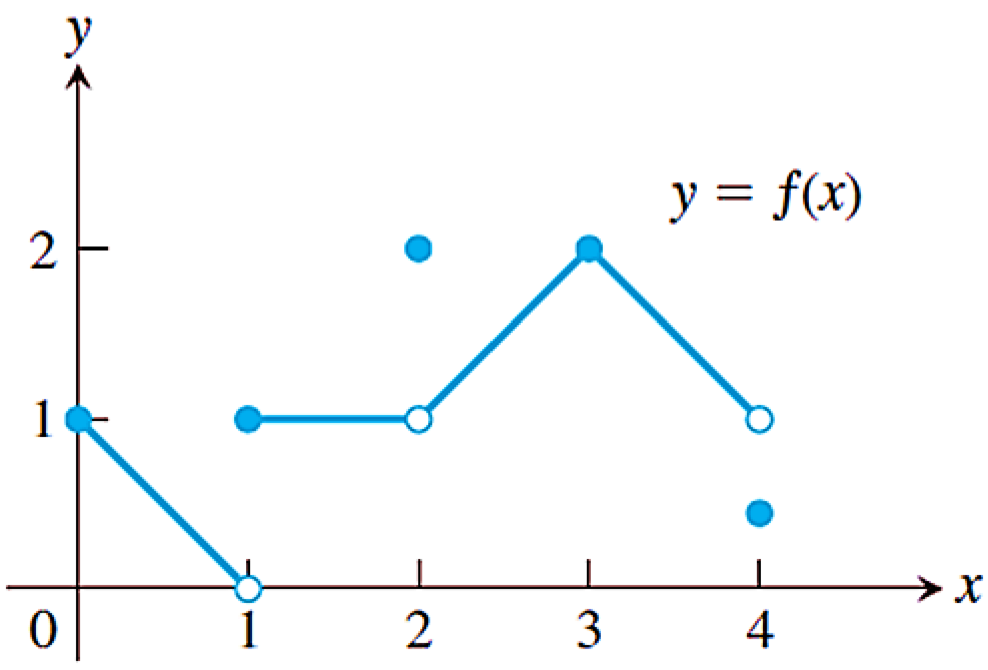
Συνέχεια

Διαφορικός Λογισμός
μιας μεταβλητής Ι

Συνέχεια συνάρτησης – άτυπος ορισμός

Θα λέγαμε ότι μια συνάρτηση είναι συνεχής αν ζωγραφίζοντας το γράφημά της δεν σηκώνουμε το μολύβι από το χαρτί

Παράδειγμα συνέχειας – ασυνέχειας γραφικής παράστασης



Για την συνέχεια μιας συνάρτησης εξετάζουμε αρχικά τα εσωτερικά σημεία του Π.Ο. (αμφίπλευρα όρια) και στα ακραία σημεία του Π.Ο. (πλευρικά)

Συνέχεια συνάρτησης

Ορισμός: Έστω f: (α, β) → $\mathbb{R}$,τότε:

- f συνεχής στο x_0 ϵ (α,β) ⇔ $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$
- f συνεχής στο α ⇔ $\lim_{x \to \alpha^+} f(x) = f(\alpha)$ δηλ. συνεχής στο αριστερό άκρο του Π.Ο.
- f συνεχής στο β ⇔ $\lim_{x \to \beta^-} f(x) = f(\beta)$ δηλ. συνεχής στο δεξί άκρο του Π.Ο.

Δηλ. μια συνάρτηση είναι συνεχής ⇔ συνεχής για κάθε x ϵ Π.Ο.

- <u>αν Π.Ο. = (α, β)</u> η f συνεχής για κάθε x ϵ (α, β)
- <u>αν Π.Ο. = [α, β]</u> η f: (i) συνεχής για κάθε x ϵ (α, β) & (ii) $\begin{cases} \lim_{x \to \alpha^+} f(x) = f(\alpha) \\ \lim_{x \to \beta^-} f(x) = f(\beta) \end{cases}$

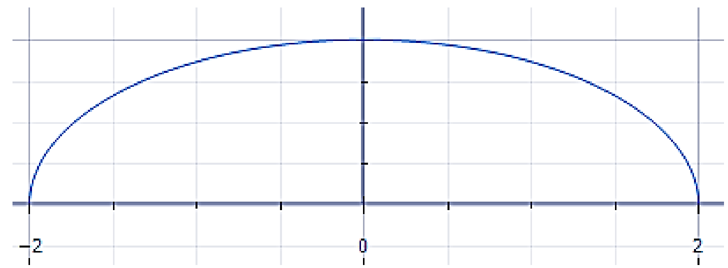
Παραδείγματα / Ασκήσεις

Παράδειγμα 1ο : (συνάρτηση συνεχής σε όλο το Π.Ο.)

Ελέγξτε την συνέχεια για κάθε x ϵ [-2,2] της $f(x)=\sqrt{4-x^2}$

- Για x= - 2, f(x) συνεχής από αριστερά
- Για x= +2, f(x) συνεχής από δεξιά

δηλ. συνεχής στο αριστερό άκρο του Π.Ο.
& συνεχής στο δεξί άκρο του Π.Ο.

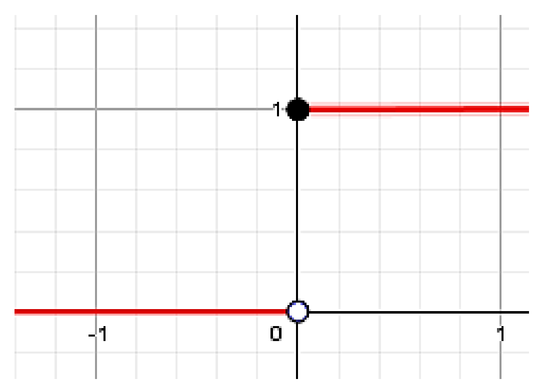


Παράδειγμα 2ο : (συνάρτηση με άλμα)

Όμοια ελέγξτε την συνέχεια στο x=0 της $f(x)=\begin{cases} 1, & x\geq 0 \\ 0, & x<0 \end{cases}$

- f συνεχής από δεξιά στο x=0
- f ασυνεχής από αριστερά στο x=0

Άρα f μη συνεχής στο 0



Κριτήριο συνέχειας

f συνεχής στο x_0 $\Leftrightarrow$

1. Υπάρχει $f(x_0)$, $x_0 \in$ Π.Ο.
2. Υπάρχει $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$
3. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

Αν ψάχνουμε πλευρική συνέχεια αντικαθιστούμε τα 2 & 3 με τα αντίστοιχα πλευρικά όρια

Οι ακόλουθοι τύποι συναρτήσεων είναι συνεχείς:

1. πολυώνυμα **&** ρητές
2. συναρτήσεις με ρίζες
3. τριγωνομετρικές **&** αντίστροφες τριγωνομετρικές
4. εκθετικές **&** λογαριθμικές
5. αντίστροφη συνεχούς συνάρτησης
6. αν f, g συνεχείς στο x_0: $f \pm g$, $f \cdot g$, $\lambda \cdot f$, f/g ($g(x_0) \neq 0$) συνεχείς στο x_0
7. αν f συνεχής στο x_0 & g συνεχής στο $f(x_0)$, τότε $g \circ f$ συνεχής στο x_0

Ιδιότητες συνεχών συναρτήσεων

Αν οι f, g συνεχείς στο x=c, τότε είναι συνεχείς και οι:

1. f + g
2. f – g
3. f · g
4. k · f, k πραγματικός αριθμός
5. f/g , g(c) μη μηδενικό

Συνέχεια σύνθετων συναρτήσεων:

Αν f συνεχής στο c
&
g συνεχής στο f(c)

τότε $g_o f$ συνεχής στο c

π.χ. $y = \sin x^2$

$y = |\cos x|$

Παραδείγματα

δεν ορίζεται στο 0

Παράδειγμα 1ο : Η f(x)=sinx/x είναι συνεχής στο Π.Ο.=$\mathbb{R}\setminus\{0\}$

Αν θέλαμε να 'ναι συνεχής σ' όλο το $\mathbb{R}$ θα την ορίζαμε: $g(x)=\begin{cases} \sin x/x, & x\neq 0 \\ 1, & x=0 \end{cases}$

Παράδειγμα 2ο : Να δ.ό. η $f(x)=\begin{cases} x-3, & x \geq 1 \\ x, & x < 1 \end{cases}$ είναι ασυνεχής στο $x_0=1$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=1 \neq -2 = \lim_{x\to 1^+} f(x), \text{ άρα f ασυνεχής στο } 1$$

Άσκηση

Για ποιο α είναι συνεχής η $f(x)= \begin{cases} x^2+2\alpha, & x \le 0 \\ \sin x/x, & x > 0 \end{cases}$

- Στο $(-\infty, 0)$: $f(x)=x^2+2\alpha$ πολυωνυμική, άρα συνεχής
- Στο $(0, +\infty)$: $f(x)=\sin x/x$ ρητή, άρα συνεχής
- Για να είναι συνεχής πρέπει να είναι και στο $x_0=0$, δηλ. $\lim_{x\to 0} f(x)=0$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)= \lim_{x\to 0^-} (x^2+2\alpha)=2\alpha$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)= \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{x}=1$$

Άρα α=1/2

Θεώρημα ενδιάμεσων τιμών

Έστω f: [α, β] $\to \mathbb{R}$

Αν f συνεχής στο [α, β]

& $f(\alpha) \neq f(\beta)$

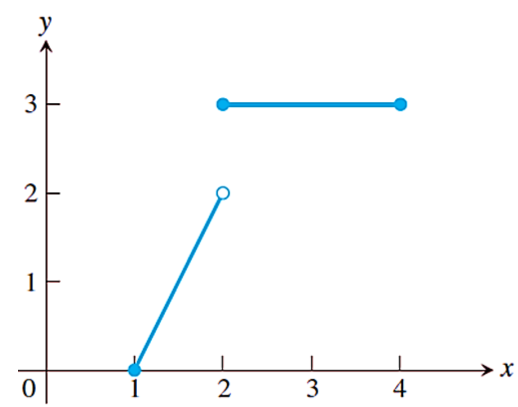
$\Rightarrow$ για κάθε η με $f(\alpha) < y_0 < f(\beta)$

υπάρχει $x_0 \in [\alpha, \beta]$: $f(x_0) = y_0$

δηλ. η y = f(x) παίρνει όλες τις τιμές μεταξύ f(α) & f(β)

Γεωμετρικά:
κάθε οριζόντια ευθεία $y=y_0$ που τέμνει τον yy'
κάπου μεταξύ f(α) & f(β) θα τέμνει και την y=f(x)
σε τουλάχιστον ένα σημείο του [α, β], π.χ. η συνάρτηση:

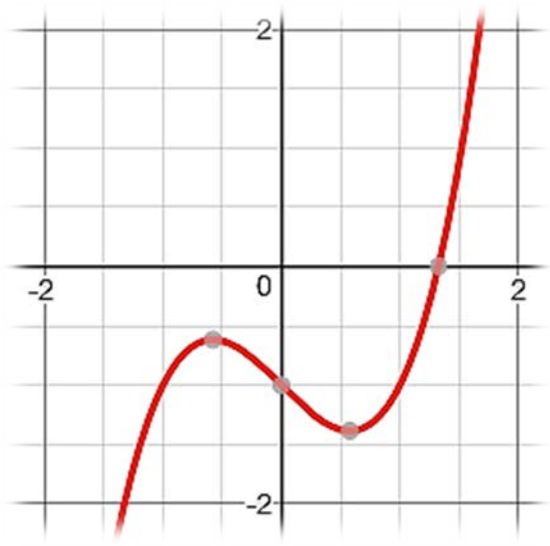
$$f(x) = \begin{cases} 2x - 2, & 1 \leq x < 2 \\ 3, & 2 \leq x \leq 4 \end{cases}$$



Επίσης από το θεώρημα αντιλαμβανόμαστε ότι αν f συνεχής και από ένα διάστημα πάμε σε άλλο όπου αλλάζει το πρόσημό της, τότε έχουμε σε κάποιο από τα δύο ένα σημείο μηδενισμού (είναι τα σημεία τομής στον xx')

Παράδειγμα

Υπάρχει πραγματικός αριθμός ίσος με τον κύβο του μείον 1;



Η ερώτηση αναφέρεται στα σημεία
x: $x=x^3-1$, δηλ. τα σημεία μηδενισμού
της $y=x^3-x-1$

Μεταξύ των σημείων 0 και 2 η y αλλάζει
πρόσημο, άρα κάπου ανάμεσα υπάρχει
c τέτοιο ώστε f(c)=0

Θεώρημα Bolzano

Έστω f: [α, β] → $\mathbb{R}$

$$\left.\begin{array}{l}\text{Αν } f \text{ συνεχής στο } [\alpha, \beta] \\ \& \ f(\alpha) \cdot f(\beta) < 0\end{array}\right\} \Rightarrow \text{ υπάρχει } x_0 \in (\alpha, \beta)\text{: } f(x_0)=0$$

δηλ. υπάρχει μία ρίζα της f(x) = 0

Θεώρημα μέγιστης & ελάχιστης τιμής

Έστω f: [α, β] → $\mathbb{R}$

Αν f συνεχής στο [α, β] ⇒ η f παίρνει στο [α, β] μία μέγιστη (max) & μία ελάχιστη (min) τιμή

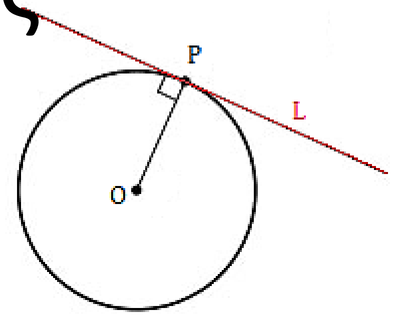
δηλ. $m \leq f(x) \leq M$, για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$

Angelos Giannoulas

Παράγωγος

Διαφορικός Λογισμός
μιας μεταβλητής Ι

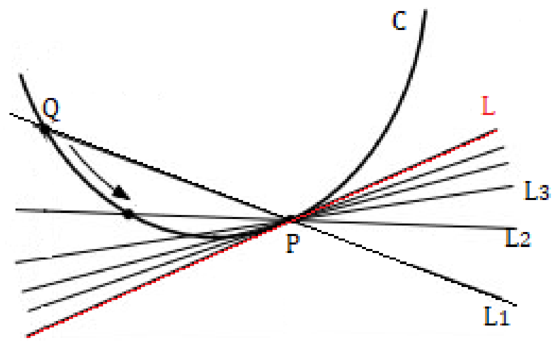
Η έννοια της εφαπτομένης



Τι είναι η εφαπτομένη;

- Στην περίπτωση ενός κύκλου: είναι εύκολα κατανοητό ότι η L ‘αγγίζει’ σε ένα σημείο μόνο & L κάθετη στην OP

- Δυναμική ερμηνεία εφαπτομένης σε καμπύλη C: Εφαπτομένη της C είναι η ευθεία L που περνά από το P: κλίση(L)= $\lim\limits_{Q \to P}$ (κλίσεων τεμνουσών)



- **Ορισμός**: Η κλίση της καμπύλης y=f(x) στο $P(x_0,f(x_0))$ είναι $m = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$

  Η εξίσωση της εφαπτομένης δίνεται από:

$$y - y_0 = m \cdot (x - x_0)$$

Πώς βρίσκω την εφαπτομένη

Έστω θέλω την εξίσωση της εφαπτομένης στο $(x_0,f(x_0))$ της f(x)

1. Υπολογίζω τις τιμές $f(x_0)$ & $f(x_0+h)$
2. Υπολογίζω την κλίση m= $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$
3. Αν υπάρχει η κλίση m, τότε η εξίσωση της εφαπτομένης είναι:

$$y = y_0 + m \cdot (x - x_0)$$

Παράδειγμα: Ποια η κλίση της y=1/x στο x=α; Σε ποιο σημείο η κλίση είναι -1/4;

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{a+h}-\frac{1}{a}}{h}=\lim_{h\to 0}\left(\frac{1}{h}\cdot\frac{\alpha-(\alpha+h)}{\alpha\cdot(\alpha+h)}\right)=$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{-h}{h\alpha\cdot(\alpha+h)}=\lim_{h\to 0}\frac{-1}{\alpha\cdot(\alpha+h)}=-\frac{1}{\alpha^2}$$

& $-1/\alpha^2= -1/4 \Leftrightarrow \alpha= \pm 2$, άρα στα σημεία (2, ½) και (-2, -½)

Ταυτόσημες έννοιες

- y’ = η κλίση της y=f(x) στο x_0
- y’ = η κλίση της εφαπτομένης της y=f(x) στο x_0
- y’ = ο ρυθμός μεταβολής της f(x) ως προς x στο x_0
- y’ = η παράγωγος της f στο x_0
- y’ = $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$
- y’ = εφω (ω είναι η γωνία της εφαπτομένης με τον xx’)

Παράγωγος συνάρτηση

Ορισμός: Η παράγωγος της f(x) ως προς την μεταβλητή x είναι η συνάρτηση f'(x):

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

υπό την προϋπόθεση ότι το όριο αυτό υπάρχει

- Π.Ο. f'(x) = {τα σημεία του Π.Ο.f(x): υπάρχει αυτό το όριο} δηλ. το ίδιο ΠΟ(f) ή υποσύνολο
- Αν υπάρχει η f' στο x, λέμε η f παραγωγίσιμη ή διαφορίσιμη στο x
- Αν υπάρχει η f' για κάθε x ϵ ΠΟf(x), λέμε η f παραγωγίσιμη

Εύρεση της f'(x) με τον ορισμό:

1. Αναπτύσσω τα f(x) & f(x+h)
2. Αναπτύσσω και απλοποιώ το: $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$
3. Βρίσκω το όριο αυτού όταν h→0

Άσκηση:

1. Βρείτε με τον ορισμό την παράγωγο της y= √x, για x>0
2. Ποια είναι η εξίσωση της εφαπτομένης για x=4;

Ιδιότητες της παραγώγου

- Παράγωγος σταθεράς: Αν $f(x)=c$, τότε $f'(x) = c' = 0$
- Παράγωγος θετικής ακέραιης δύναμης: $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$, $n \in \mathbb{Z}$
- Παράγωγος σταθερού πολλαπλάσιου: $(c \cdot f(x))' = c \cdot f'(x)$
- Παράγωγος αθροίσματος: $(f \pm g)' = f' \pm g'$
- $(\sin x)' = \cos x$ | $(\cos x)' = -\sin x$ | $(\tan x)' = 1/\cos^2 x$ | $(\cot x)' = -1/\sin^2 x$
- Παράγωγος πολυωνύμου: ως γενίκευση του αθροίσματος, "<u>κάθε πολυώνυμο είναι παραγωγίσιμο</u>"

Άσκηση: Αποδείξτε τα παραπάνω (εκτός του τελευταίου) με τον ορισμό

Συμβολισμοί

$$y',\quad \frac{dy}{dx},\quad \frac{df}{dx},\quad \frac{d}{dx}f(x),\quad y'|_{x=\alpha},\quad \frac{dy}{dx}|_{x=\alpha},\quad \frac{d}{dx}f(x)|_{x=\alpha}$$

σύμβολο αποτίμησης

Άσκηση

Ποιες είναι οι ‘οριζόντιες’ εφαπτόμενες της καμπύλης:
$y=x^4-2x^2+2$;

1. $y'=4x^3-4x$ (η κλίση)
2. Οι οριζόντιες (//xx’) έχουν κλίση =0

   Άρα από (1) & (2) $y'=0 \Leftrightarrow x= -1, 0, 1$

3. Δηλ. υπάρχουν 3 οριζόντιες εφαπτόμενες:
   1. στο (0, 2) → $y - 2= 0 \Leftrightarrow y = 2$
   2. στο (1, 1) → $y - 1= 0 \Leftrightarrow y = 1$
   3. στο (-1, 1) → $y = 1$

είναι η ίδια εφαπτομένη αλλά βρίσκει την C σε 2 διαφορετικά σημεία

Πλευρικές παράγωγοι
Ιδιότητες παραγώγων

Διαφορικός Λογισμός

μιας μεταβλητής Ι

Παράγωγος & Πλευρικές παράγωγοι

λόγω του 'θεωρήματος των πλευρικών ορίων':

f παραγωγίσιμη στο x_0 ϵ ΠΟ(f) $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} \text{υπάρχουν τα πλευρικά όρια στο } x_0 \\ \& \\ \text{τα 2 πλευρικά όρια είναι ίσα} \end{cases}$

Πλευρικές παράγωγοι

(στα όρια του διαστήματος ορισμού)

- **y=f(x) παραγωγίσιμη σε ένα ανοικτό διάστημα** (πεπερασμένο ή άπειρο): αν για κάθε x ϵ διάστημα υπάρχει η f’(x)

- **y=f(x) παραγωγίσιμη σε ένα κλειστό διάστημα** [α, β] αν:
  1. f(x) παραγωγίσιμη στο (α, β)

     &

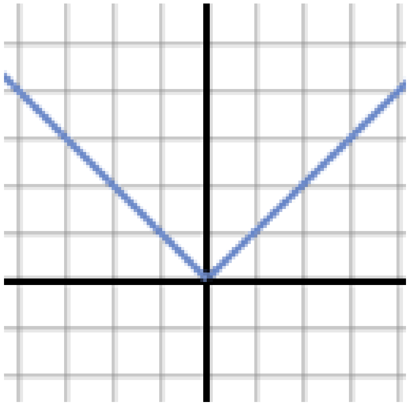
  2. υπάρχουν τα όρια:

$$\begin{cases} \lim\limits_{h\to 0^{+}} \dfrac{f(\alpha+h)-f(\alpha)}{h} & \text{δεξιά παράγωγος της f στο α} \\ \lim\limits_{h\to 0^{-}} \dfrac{f(\beta+h)-f(\beta)}{h} & \text{αριστερή παράγωγος της f στο α} \end{cases}$$

Άσκηση

Έστω y=|x|. Να δ.ό. f δεν είναι παραγωγίσιμη στο σ. (0,0)

Λύση: (Θα δ.ό. υπάρχει η f’ στο (-∞, 0) U(0, +∞), αλλά όχι στο (0,0))



α’ τρόπος:

από αριστερά του (0, 0): d/dx(|x|) = –1

από δεξιά του (0,0): d/dx(|x|) = +1

β’ τρόπος: (με τον ορισμό)

$x \to 0^-$:lim(f(x))= –1

$x \to 0^+$:lim(f(x))= +1

Και με τους 2 τρόπους αποδεικνύεται ότι:
ΔΕΝ υπάρχει εφαπτομένη στο (0, 0)
αφού τα όρια είναι διαφορετικά

Άρα, η ύπαρξη της εφαπτομένης σημαίνει ‘ομαλότητα’ της καμπύλης

Θεώρημα παραγώγου & συνέχειας

Αν υπάρχει η f' στο x = c ⇒ f συνεχής στο x = c

(δηλ. αν υπάρχει το $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\text{f(c+h)-f(c)}}{\text{h}} \underset{\nLeftarrow}{\Rightarrow} \lim\limits_{x\to c}\text{f(x)=f(c)}$)

Απόδειξη:

$$\text{f(c+h)} = \text{f(c)} + (\text{f(c+h)} - \text{f(c)}) = \text{f(c)} + \frac{(\text{f(c+h)} - \text{f(c)})}{\text{h}} \cdot \text{h} \Rightarrow$$

$$\lim_{h\to 0}\text{f(c+h)}=\lim_{h\to 0}\text{f(c)}+\lim_{h\to 0}\frac{\text{f(c+h)}-\text{f(c)}}{\text{h}}\cdot\lim_{h\to 0}\text{h} \Rightarrow$$

$$\lim_{h\to 0}\text{f(c+h)=f(c)+f '(c)}\cdot 0 \Rightarrow \lim_{h\to 0}\text{f(c+h)=f(c)}, \text{ άρα f συνεχής στο c}$$

- Όμοια αν υπάρχει f'αριστερό , τότε f συνεχής στο c^-
- Όμοια αν υπάρχει f'δεξιό, τότε f συνεχής στο c^+

Το θεώρημα μας λέει πως:
Αν η f ≠ συνεχής στο c ⇒ ∄ f' στο c

βλ. το προηγούμενο παράδειγμα για c=0

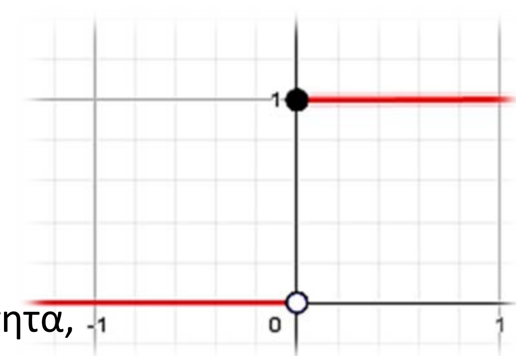
Θεώρημα ενδιάμεσης τιμής για παραγώγους

Αν f παραγωγίσιμη στο διάστημα (α, β), τότε η f’ παίρνει όλες τις τιμές μεταξύ f’(α) και f’(β)

δηλ. μια F τυχαία συνάρτηση είναι παράγωγος μιας άλλης f σε κάποιο διάστημα (f’(α), f’(β)), μόνο αν η F = f’ παρουσιάζει την ιδιότητα της ενδιάμεσης τιμής στο διάστημα αυτό

Το πότε μια f είναι παράγωγος ήταν και είναι από τα θεμελιώδη ερωτήματα των Μαθηματικών

$$F(x)=\begin{cases} 1, & x\geq 0 \\ 0, & x<0 \end{cases}$$



Η F(x) δεν έχει αυτήν την ιδιότητα, άρα δεν μπορεί να είναι παράγωγος άλλης συνάρτησης

Παράγωγοι ψηλότερης τάξης

Έστω y=dy/dx η 1^{ης} τάξης παράγωγος της y ως προς x, ενδέχεται να είναι και η ίδια εκ νέου παραγωγίσιμη ως προς x.

Τότε ονομάζουμε παράγωγο 2ας τάξης την παράγωγο:

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d^2y}{dx^2}$$

Όμοια για την 3^η παράγωγο κ.λπ.

Ερμηνεύουμε γεωμετρικά την y’’ ως τον ρυθμό μεταβολής της κλίσης της εφαπτομένης στην καμπύλη y = f(c)

(Θα δούμε στη συνέχεια ότι η y’’ μας ‘ενημερώνει’ αν η καμπύλη κάμπτεται προς τα πάνω ή προς τα κάτω στο σημείο επαφής)

π.χ.: $y = x^3 - 3x^2 + 2 \Rightarrow y' = 3x^2 - 6x \Rightarrow y'' = 6x - 6 \Rightarrow y''' = 6 \Rightarrow y^{4\prime} = 0$

και όλες οι επόμενες είναι 0

Παράγωγος γινομένου

Αν u & v διαφορίσιμες στο x, τότε u·v επίσης, δηλ.:

$$\frac{d}{dx}(uv) = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$$

<u>Απόδειξη</u>:

$$\frac{d}{dx}(uv) = \lim_{h\to 0}\frac{u(x+h)\cdot v(x+h) - u(x)\cdot v(x)}{h} =$$

προσθέτω & αφαιρώ το u(x+h) ·v(x) στον αριθμητή

$$\lim_{h\to 0}\frac{u(x+h)\cdot v(x+h) - u(x+h)\cdot v(x) + u(x+h)\cdot v(x) - u(x)\cdot v(x)}{h} =$$

$$\lim_{h\to 0}[u(x+h)\cdot\frac{v(x+h)-v(x)}{h} + v(x)\cdot\frac{u(x+h)-u(x)}{h}] =$$

$$\lim_{h\to 0}u(x+h)\cdot\lim_{h\to 0}\frac{v(x+h)-v(x)}{h} + v(x)\cdot\lim_{h\to 0}\frac{u(x+h)-u(x)}{h} =$$

$$u(x)\cdot v'(x) + v(x)\cdot u'(x)$$

Άσκηση: y’=? αν

$$y = \frac{1}{x}\cdot(x^2 + \frac{1}{x})$$

Παράγωγος πηλίκου

Αν u & v διαφορίσιμες στο x και v(x) ≠ 0, τότε u/v επίσης, δηλ.:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{v\cdot\frac{du}{dx}-u\frac{dv}{dx}}{v^2} \qquad \text{ή } \left(\frac{f}{g}\right)'=\frac{g\cdot f'-f\cdot g'}{g^2}$$

Απόδειξη:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right)=\lim_{h\to0}\frac{\frac{u(x+h)}{v(x+h)}-\frac{u(x)}{v(x)}}{h}=\lim_{h\to0}\frac{u(x+h)\cdot v(x)-u(x)\cdot v(x+h)}{h\cdot v(x+h)\cdot v(x)}=$$

$$\lim_{h\to0}\frac{u(x+h)\cdot v(x)-v(x)\cdot u(x)+v(x)\cdot u(x)-u(x)\cdot v(x+h)}{h\cdot v(x+h)\cdot v(x)}=$$

Προσθέτω & αφαιρώ στον αριθμητή το v(x)u(x)

$$\lim_{h\to0}\frac{\frac{u(x+h)-u(x)}{h}\cdot v(x)-u(x)\cdot\frac{v(x+h)-v(x)}{h}}{v(x+h)\cdot v(x)}=$$

$$\frac{\lim\limits_{h\to0}\frac{u(x+h)-u(x)}{h}\cdot v(x)-u(x)\cdot\lim\limits_{h\to0}\frac{v(x+h)-v(x)}{h}}{\lim\limits_{h\to0}v(x+h)\cdot v(x)}=$$

$$\frac{u'(x)\cdot v(x)-u(x)\cdot v'(x)}{v(x)\cdot v(x)}=\frac{u'(x)\cdot v(x)-u(x)\cdot v'(x)}{v(x)^2}$$

Άσκηση: y’=? αν

$$y=\frac{t^2-1}{t^2+1}$$

Παράγωγος αρνητικής δύναμης ϵ $\mathbb{Z}$

Ισχύει ακριβώς η ιδιότητα όπως και με τις θετικές δυνάμεις, δηλ.

$$\frac{d}{dx}x^n = n \cdot x^{n-1}$$

Απόδειξη:

$\frac{d}{dx}x^n = \frac{d}{dx}\frac{1}{x^m}$, m= -n   και από την ιδιότητα του πηλίκου έχω την απόδειξη (**Άσκηση**)

Άσκηση:

Βρείτε την y’ αν y = 1/x

$(1/x)' = (x^{-1})' = (-1) \cdot (x^{-1-1}) = - (x^{-2}) = - 1/ x^2$

Ασκήσεις

Άσκηση 1η : Βρείτε μία εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης y = x + 2/x στο σημείο (1, 3)

Λύση: $$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}x + 2\frac{d}{dx}\frac{1}{x} = 1 + 2(-\frac{1}{x^2}) = 1 - \frac{2}{x^2}$$

Άρα στο x = 1 η κλίση είναι y’ = -1

Δηλ. η εφαπτομένη που διέρχεται από το (1, 3) είναι η: y-3=(-1)(x-1)

Άσκηση 2η : y’ = ? αν $y = \frac{(x-1)(x^2-2x)}{x^4}$

(Αντί να κάνω πράξεις στο κλάσμα, θα διαιρέσω & τα 2 μέλη με x^4)

$$y = \frac{(x-1)(x^2-2x)}{x^4} = \frac{x^3 - 3x^2 + 2x}{x^4} = \frac{\frac{x^3}{x^4} - 3\frac{x^2}{x^4} + 2\frac{x}{x^4}}{\frac{x^4}{x^4}} = x^{-1} - 3x^{-2} + 2x^{-3}$$

$$\acute{A}\rho\alpha \ \mathrm{y}' = (x^{-1} - 3x^{-2} + 2x^{-3})' = -\frac{1}{x^2} + \frac{6}{x^3} - \frac{6}{x^4}$$

Angelos Giannoulas

Παράγωγοι εκθετικής/λογαριθμικής

$$\frac{d}{dx}e^x = e^x,\ \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x},\ \forall x \in (0, +\infty)$$

$$\frac{d}{dx}(a^x) = a^x \ln \alpha,\ \forall x \in \mathbb{R},\ \alpha>0$$

u = x · lnα

Απόδειξη:

Αν $y=\alpha^x \Leftrightarrow y=e^{x\cdot\ln\alpha} \Rightarrow$
$y' = dy/du \cdot du/dx =$
$e^u \cdot \ln\alpha = e^{x\cdot\ln\alpha} \cdot \ln\alpha=$
$\alpha^x \cdot \ln\alpha$

--- εξήγηση της 1ης αλλαγής---
($y=\alpha^x \Leftrightarrow x=\log_\alpha y \Leftrightarrow$
$x=\ln y/\ln\alpha \Leftrightarrow \ln y=x\ln\alpha$
$\Leftrightarrow y=e^{x\cdot\ln\alpha}$)

$$\frac{d}{dx}(\ln|x|) = \frac{1}{x},\ \forall x \in \mathbb{R}$$

u = - x

Απόδειξη:

- Αν $x > 0$: $y'=(\ln x)'=1/x$
- Αν $x < 0$: $y'=(\ln(-x))'=$
  $dy/du \cdot du/dx =$
  $(1/(-x)) \cdot (-1) = 1/x$

Παράγωγος σύνθετης συνάρτησης

Παράδειγμα: έστω η y=6x-10=2(3x-5). Θα μπορούσαμε να υποθέσουμε ότι η y είναι σύνθεση των y=2u & u=3x-5, άρα οι παράγωγοι: dy/du=2 & du/dx=3

Αν είχα από την αρχή κάνει dy/dx=6

μήπως τελικά :
dy/dx = dy/du ·du/dx

Θεώρημα (<u>Κανόνας αλυσιδωτής παραγώγισης</u>):

Έστω f(u) διαφορίσιμη στο σημείο u=g(x)
Έστω ότι και η g(x) διαφορίσιμη στο x

$\Rightarrow$ (fog)(x)=f(g(x)) διαφορίσιμη στο x

ή αλλιώς αν y=f(u) & u=g(x)

τότε: $$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

ή (fog)'(x)=f'(g(x))·g'(x)

Παράδειγμα: Βρείτε την y' αν y = sin(x^2+x)

$$\frac{d}{dx}\sin(x^2+x) = \cos(x^2+x)\cdot(2x+1)$$

Άσκηση: $(\sin(e^{2x}))' = ?$

Υπόδειξη: χρειάζεται να κάνετε 2 φορές τον κανόνα

Άσκηση

Έστω $y = \begin{cases} x^2+x+\alpha^2, & x<0 \\ x^3+\alpha x+1, & x\geq 0 \end{cases}$

1. Πόσο πρέπει να είναι το $\alpha \in \mathbb{R}$ ώστε η f να είναι συνεχής στο $x_0=0$;

2. Πόσο πρέπει να είναι το $\alpha \in \mathbb{R}$ ώστε να υπάρχει η f' στο $x_0=0$;

Πεπλεγμένες συναρτήσεις

Διαφορικός Λογισμός
μιας μεταβλητής Ι

Angelos Giannoulas

Αλυσιδωτή παραγώγιση

(συνέχεια παραδειγμάτων από το προηγούμενο κεφάλαιο)

1. $\dfrac{d}{dx}(1-x^2)^{1/4} = ?$

2. $\dfrac{d}{dx}(\cos x)^{-1/5} = ?$

Πεπλεγμένες συναρτήσεις

Ορισμός: Πεπλεγμένη είναι μια συνάρτηση της μορφής $F(x, y)=0$

Συχνά υπάρχει δυσκολία στο να εκφράσουμε την $F(x, y)=0$ ως y συναρτήσει του x (άρα και το dy/dx).

Θεώρημα πεπλεγμένων συναρτήσεων (συλλογισμός)

Έστω η συνάρτηση $F: A\subseteq\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ και (x_0,y_0) σημείο του A τ.ώ. $F(x_0,y_0)=0$

Θέλουμε να βρούμε μία **f διαφορίσιμη** (παραγωγίσιμη) τ.ώ.:

1. $y_0=f(x_0)$
2. $F(x,f(x))=0$, για κάθε $x \in$ Π.Ο.(f)

Παραγώγιση πεπλεγμένων

Βήμα 1ο: Παραγωγίζω κάθε μέλος ως προς x (θεωρώ ότι ∃ το dy/dx)

Βήμα 2ο: Συγκεντρώνω όλα τα dy/dx στο ένα μέλος

Βήμα 3ο: Βγάζω κοινό παράγοντα το dy/dx

Βήμα 4ο: Λύνω ως προς dy/dx

Παράδειγμα: $y^2 - x = 0$

$$y^2 = x \overset{\text{B. 1}}{\Rightarrow} \frac{d}{dx}(y^2) = \frac{d}{dx}x \overset{\text{B. 2}}{\Rightarrow} 2y\frac{dy}{dx} = 1 \overset{\text{B. 3}}{\Rightarrow} \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2y}$$

Ασκήσεις

Άσκηση 1η: $y^2 = x^2 + \sin xy$, $y'=?$

Άσκηση 2η: $y' = ?$ αν $x^2+y^2 = 1$

Άσκηση 3η:

Έστω η έκφραση $f(x,y)$: $xy^2+y=\tan(x)$. Βρείτε την τιμή της $y'(1,1)$

Προσοχή: το y είναι της μορφής $y=f(x)$

Παράδειγμα (λύστε την όπως την προηγούμενη άσκηση)

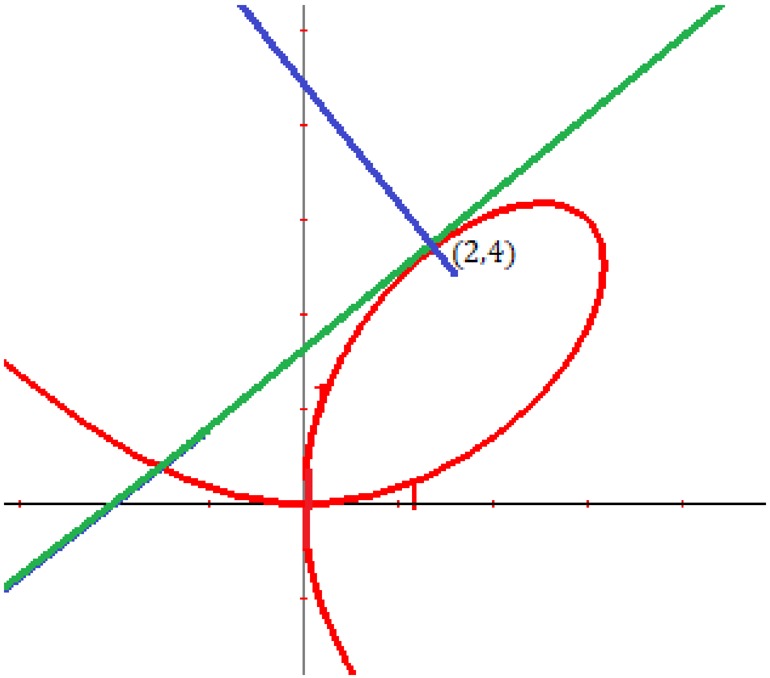
(εφαπτομένη & κάθετη στο φύλλο του Καρτέσιου

Προσοχή: το y είναι της μορφής y=f(x)

Έστω η F(x, y)=0: $x^3+y^3-9xy=0$

(α) Να δ.ό. το σημείο (2, 4) ανήκει στην καμπύλη C_F

(β) να βρείτε την εφαπτομένη και την κάθετη στο σημείο (2,4)



Δείτε την λύση στο τέλος της επόμενης ενότητας

Παράγωγος αντίστροφης

Διαφορικός Λογισμός μιας μεταβλητής I

Θεώρημα παραγώγου της f^{-1}

Έστω $f: (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$ αμφιμονοσήμαντη (δηλ. 1-1)

$$\left.\begin{array}{l}\text{Αν } f \text{ παραγωγίσιμη στο } (\alpha, \beta)\\ \text{\& αν } f' \neq 0 \text{ στο } (\alpha, \beta)\end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}(\alpha)\ \exists\ \eta\ f^{-1}(y)\\ (\beta)\ (f^{-1})'(y) = 1/f'(x)\end{array}\right.$$

$$\text{δηλ. } f'(x) = \frac{dy}{dx} \Leftrightarrow \boxed{\frac{1}{f'(x)} = \frac{dx}{dy} = (f^{-1})'(y)}$$

Παραδείγματα

Παράδειγμα: Έστω η $f(x) = x^2+\ln x+4$. Να βρείτε την $(f^{-1})'(x)$ και στην συνέχεια την $(f^{-1})'(5)$

Παράδειγμα: Έστω η $f(x) = e^x+x^2$. Να βρείτε την $(f^{-1})'(x)$ και στην συνέχεια την $(f^{-1})'(1)$

Διαφορικό

Έστω f(x) διαφορίσιμη (δηλ. υπάρχει το $dy/dx=f'(x)$)

Το διαφορικό είναι η έκφραση: $\boxed{dy = f'(x) \cdot dx}$

δηλ. dx ανεξάρτητη μεταβλητή
& dy εξαρτημένη (από x & dx)

π.χ.: $y = x^5+37x \Rightarrow dy = (5x^4+37)dx$

$y=\sin 3x \Rightarrow dy = (3\cos 3x)dx$

Το διαφορικό συμβολίζεται και με df

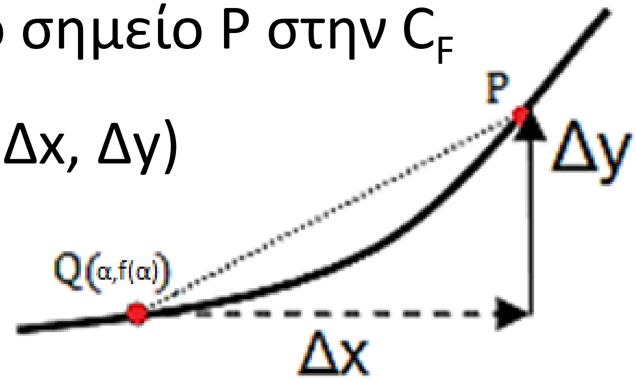
π.χ.: $$d\left(\frac{x}{x+1}\right) = \frac{(x+1)\cdot dx - x\cdot d(x+1)}{(x+1)^2} = \frac{dx}{(x+1)^2}$$

Από το παράδειγμα γίνεται κατανοητό ότι στο διαφορικό χρησιμοποιούμε όλους τους κανόνες παραγώγισης

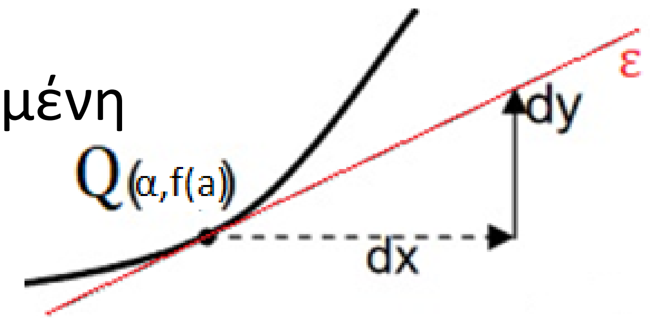
Μεταβολή & Διαφορικό

1. Οι μεταβολές ορίζονται ως οι μετατοπίσεις πάνω στην καμπύλη, π.χ το σημείο Q κινείται προς το σημείο P στην C_F

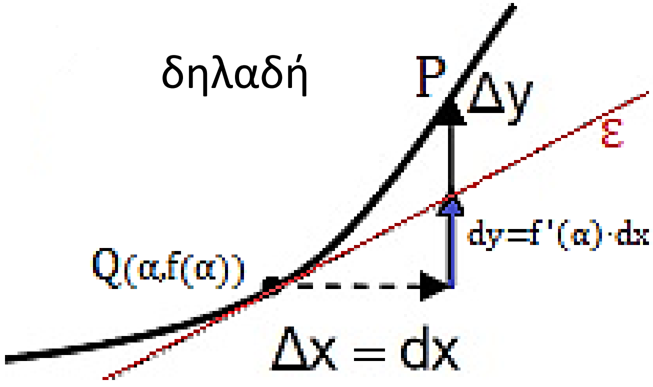
   Οι μετατοπίσεις αυτές συμβολίζονται με (Δx, Δy) και ικανοποιούν την $\Delta y = f(x+\Delta x)-f(x)$



2. Αντίστοιχα, τα διαφορικά ορίζονται ως οι μετακινήσεις του σημείου Q στην εφαπτομένη και ικανοποιούν την $dy = f'(x)\cdot dx$

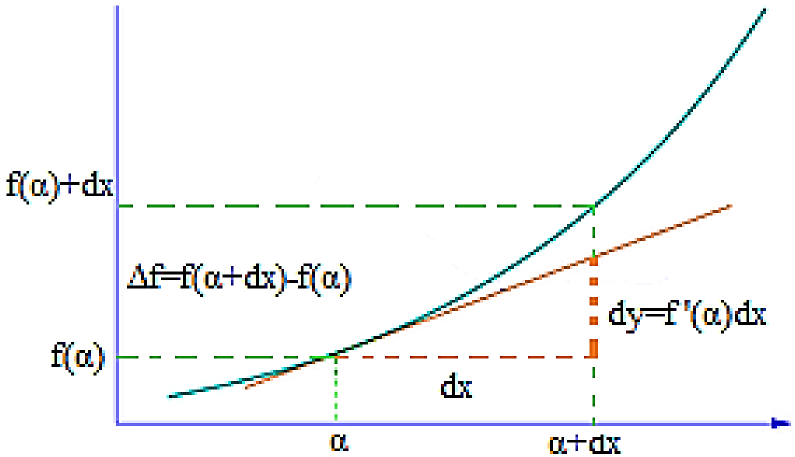


δηλαδή



Εύρεση μεταβολών με διαφορικό

Έστω ξέρω ότι στο σημείο α η f παίρνει την τιμή f(α). Θέλω να ξέρω πόσο θα αλλάξει η f(α) αν μετακινήσω το α στην θέση α+dx



Όταν λοιπόν το α → α+dx, τότε μετακινείται και η f κατά Δf:

$$\Delta f = f(\alpha+dx)-f(\alpha)$$

και η 'μεταβολή' της κλίσης της εφαπτομένης είναι πια:

$$\boxed{dy = f'(\alpha) \cdot dx}$$

(δηλ. το διαφορικό αποκτά γεωμετρική ερμηνεία)

Παράδειγμα

Έστω κύκλος με την ακτίνα του r να αυξάνεται από r=10 m σε r=10,1 m.

1. Πόσο μεταβλήθηκε η επιφάνειά του;

2. Ποια είναι η πραγματική μεταβολή;

Πεπλεγμένες συναρτήσεις με το ολικό διαφορικό

Έστω η συνάρτηση f(x,y)=0 σε πεπλεγμένη μορφή. Τότε το ολικό διαφορικό της είναι:

$$f_x(x,y)\cdot dx+f_y(x,y)\cdot dy=0\Rightarrow\frac{dy}{dx}=-\frac{f_x(x,y)}{f_y(x,y)}$$

Ασκήσεις:

1. Βρείτε την y’ αν $xy^3-3x^2=xy+5$

2. Βρείτε την y’ αν $3x^5+8y^2-10=0$

Παράδειγμα

(εφαπτομένη & κάθετη στο φύλλο του Καρτέσιου

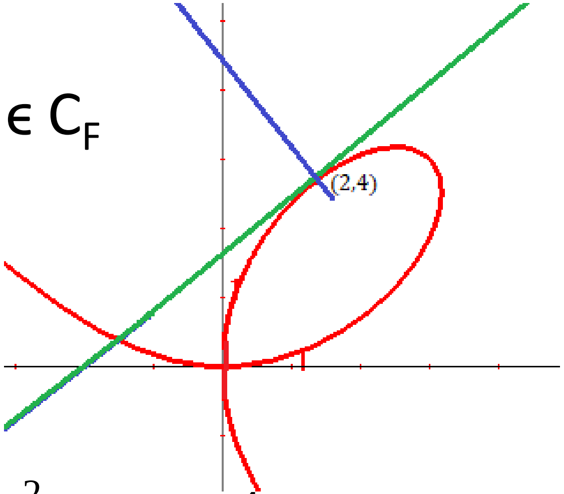
Έστω η F(x, y)=0: $x^3+y^3-9xy=0$

(α) Να δ.ό. το σημείο (2, 4) ανήκει στην καμπύλη C_F

(β) να βρείτε την εφαπτομένη και την κάθετη στο σημείο (2,4)

Προσοχή: το y είναι της μορφής y=f(x)

Λύση:



(α) $x^3+y^3-9xy = 2^3+4^3-9\cdot 2\cdot 4=72-72 = 0 \Rightarrow (2, 4) \in C_F$

(β) $x^3+y^3\text{-}9xy=0 \Rightarrow \frac{d}{dx}x^3+\frac{d}{dx}y^3-9\frac{d}{dx}xy=0 \Rightarrow$

$$3x^2+3y^2\frac{dy}{dx}-9(y+x\frac{dy}{dx})=0 \Rightarrow \cdots \frac{dy}{dx}=\frac{3y-x^2}{y^2-3x}$$

Η παράγωγος στο (2, 4) είναι: $\frac{dy}{dx}\Big|_{(2,4)}=\frac{3y-x^2}{y^2-3x}\Big|_{(2,4)}=\frac{4}{5}$

- η εφαπτομένη στο (2, 4) είναι: y – 4 = 4/5 ·(x – 2)
- & η κάθετη στο (2, 4) είναι: y – 4 = (-5/4) ·(x – 2)

Άσκηση

Να βρείτε την y’ στην f(x,y) τ.ώ. $y^3=4x^2-2xy^5$

Μην ξεχνάτε:

- x ανεξάρτητη μεταβλητή
- y εξαρτημένη μεταβλητή (από το x)

Παράδειγμα εύρεσης 2ης παραγώγου πεπλεγμένης συνάρτησης

Προσοχή
Για το y’’ μόνο με τον 1ο τρόπο όπου θεωρούμε το y=y(x), δηλ. εξαρτημένη μεταβλητή, και όχι με το ολικό διαφορικό

Να βρείτε την $\frac{d^2y}{dx^2}$ αν $2x^3-3y^2=8$

Λύση:

$$\frac{d}{dx}(2x^3-3y^2)=\frac{d}{dx}8 \Rightarrow 6x^2-6yy'=0 \Rightarrow y'=\frac{x^2}{y},\ y\neq 0\ (\mathrm{I})$$

$$\text{Από (I): } y''=\frac{d}{dx}\left(\frac{x^2}{y}\right)=\frac{2xy-x^2y'}{y^2}=\frac{2x}{y^2}-\frac{x^4}{y^3},\ y\neq 0$$

από τον κανόνα παραγώγισης πηλίκου

μετά από την αντικατάσταση του y’ από την (I)

Angelos Giannoulas

Εφαρμογές παραγώγων

Διαφορικός Λογισμός
μιας μεταβλητής Ι

A

Ακρότατα

Θα δούμε πώς οι παράγωγοι βοηθούν στην αναζήτηση ακρότατων (μέγιστα και ελάχιστα) μιας συνάρτησης ώστε να αντιλαμβανόμαστε πώς εξελίσσεται και συμπεριφέρεται το γράφημά της.

Ορισμός: Έστω f με Π.Ο. το Α. Η τιμή f(c) είναι:

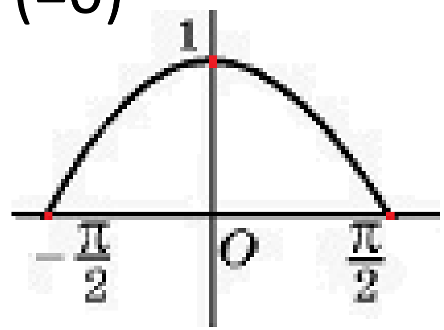
1. ολικό (ή απόλυτο) μέγιστο στο Α $\Leftrightarrow f(x) \le f(c), \forall x \in A$
2. ολικό (ή απόλυτο) ελάχιστο στο Α $\Leftrightarrow f(x) \ge f(c), \forall x \in A$

συχνά αναφερόμαστε απλά στα ‘ακρότατα’

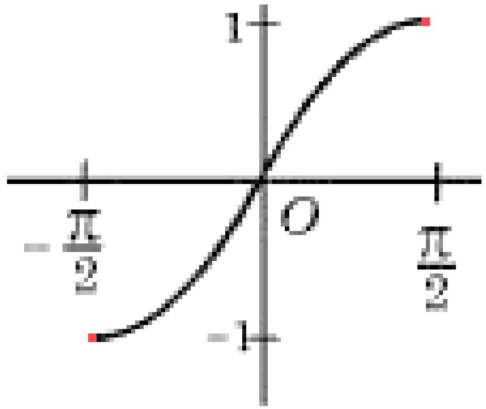
Παράδειγμα - Ασκήσεις

Παράδειγμα: x ϵ [-π/2, π/2]

f(x)=cosx, η f(x) παίρνει μία φορά την max. τιμή (=1) & 2 φορές την min. (=0)

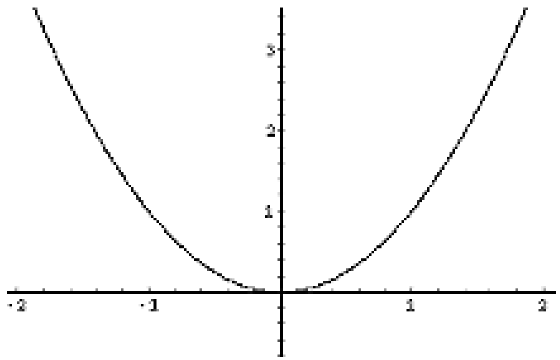


Αντίστοιχα για την f(x)=sinx έχει ένα max. (=1) & ένα min. (=-1)



Ασκήσεις: Ελέγξτε για ακρότατα τις επόμενες συναρτήσεις:

1. $y=x^2$ στο (-∞, +∞)
2. $y=x^2$ στο [0, 2]
3. $y=x^2$ στο (0, 2]
4. $y=x^2$ στο (0, 2)



Το παράδειγμα μας λέει ότι μια συνάρτηση μπορεί να μην έχει μέγιστο ή ελάχιστο

B

Θεώρημα ακρότατων για συνεχείς

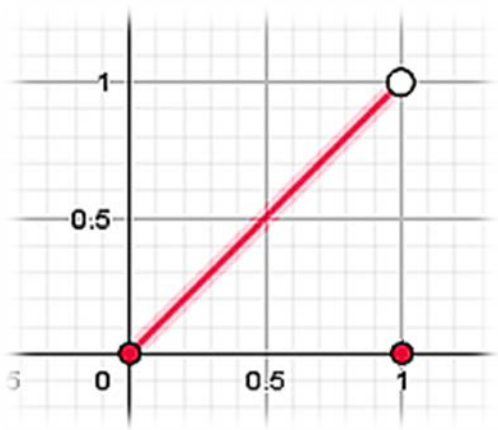
Έστω **f συνεχής σε κάθε σημείο** του **κλειστού διαστήματος [α, β]** ⇒ η f έχει ολικό μέγιστο & ολικό ελάχιστο στο [α, β]

(δηλ. ∃ x_1 & x_2 στο [α, β]: $f(x_1)=m$ & $f(x_2)=M$ με $m \le f(x) \le M$, ∀ x ϵ [α, β])

(τα x_1 & x_2 μπορεί να είναι και τα άκρα του διαστήματος)

π.χ.: Έστω $y = \begin{cases} x, & 0 \le x < 1 \\ 0, & x=1 \end{cases}$

y είναι συνεχής ∀ x ϵ [0, 1] εκτός του x=1 ⇒ το γράφημα δεν έχει μέγιστο στο [0, 1]



Από το παραπάνω: έχουμε <u>μέγιστο & ελάχιστο</u> αν ισχύουν και οι 2 προϋποθέσεις του θεωρήματος: **f συνεχής σε όλο το διάστημα** & **το διάστημα κλειστό**

Γ

Τοπικά ακρότατα

Ορισμός: Έστω c ένα σημείο ϵ Π.Ο.(f). Η f(c) λέγεται:

1. τοπικό (ή σχετικό) μέγιστο στο c ⇔ $f(x) \le f(c)$, ∀ x ϵ σε ανοικτό διάστημα που περιέχει το c
2. τοπικό (ή σχετικό) ελάχιστο στο c ⇔ $f(x) \ge f(c)$, ∀ x ϵ σε ανοικτό διάστημα που περιέχει το c

«$f(x) \le f(c)$, ∀ x ϵ σε ανοικτό διάστημα που περιέχει το c»
σημαίνει $\exists\ \delta > 0$: $f(x) \le f(c)$ ∀ x ϵ Π.Ο.(f) $\cap (c-\delta, c+\delta)$

ΠΡΟΣΟΧΗ
Η τιμή σε ένα τοπικό μέγιστο μπορεί να είναι μικρότερη ενός ελάχιστου και αντίστοιχα για ένα τοπικό ελάχιστο και ένα μέγιστο

Δ

Θεώρημα Fermat

Έστω f τ.ώ.

$$\left.\begin{array}{ll}\text{(i)} & \text{Αν c εσωτερικό σημείο του Π.Ο.(f)} \\ \text{(ii)} & \text{Υπάρχει η } f'(c) \\ \text{(iii)} & \text{c \underline{τοπικό} ακρότατο της f}\end{array}\right\} \Rightarrow f'(c)=0$$

δηλαδή: η 1η παράγωγος μιας f μηδενίζεται σε κάθε εσωτερικό σημείο του Π.Ο.(f) όπου εκεί υπάρχει τοπικό ακρότατο (τοπικό μέγιστο ή τοπικό ελάχιστο και αν βέβαια ορίζεται η f' εκεί).

Άρα τα μόνα σημεία που η f μπορεί να έχει ακρότατα (τοπικά ή ολικά) είναι τα:

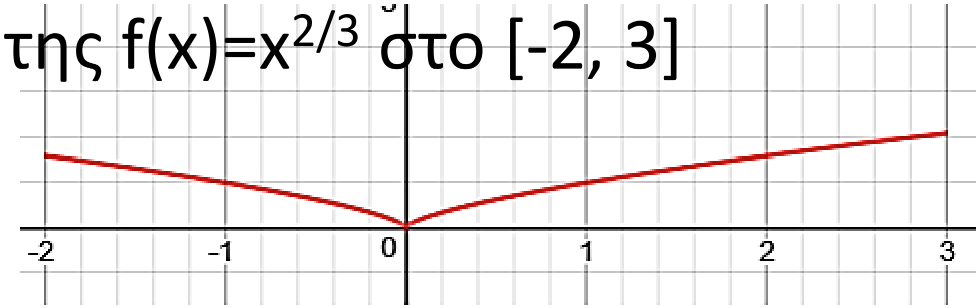
κρίσιμα σημεία

1. εσωτερικά σ. της f : f'=0
2. εσωτερικά σ. της f όπου η f' δεν ορίζεται
3. άκρα του Π.Ο. της f

Από όλες τις τιμές επιλέγουμε την μέγιστη και την ελάχιστη

Άσκηση

Να βρείτε τα ολικά ακρότατα της $f(x)=x^{2/3}$ στο [-2, 3]



Λύση:

Από το σχήμα βλέπουμε

ότι η f παρουσιάζει ολικό μέγιστο περίπου ίσο με y=2 στο x=3 και ολικό ελάχιστο στο y=0 στο x=0. Επαληθεύούμε σύμφωνα με το προηγούμενο θεώρημα:

1. Η $f'(x)=\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}=\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$ δεν μηδενίζεται πουθενά

άρα δεν έχω κρίσιμα σημεία αρό την f'=0

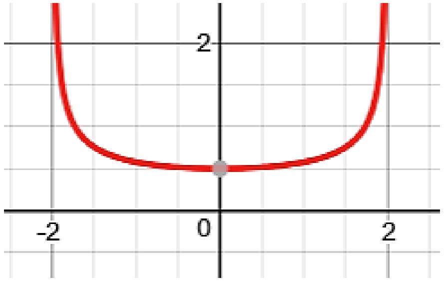
2. Η f'(x) δεν ορίζεται για x=0 (άρα έχω κρίσιμο σημείο)

   και f(0)=0

3. Οι τιμές στα άκρα είναι: $\begin{cases} f(-2)=(-2)^{2/3}=\sqrt[3]{4} \\ f(3)=3^{2/3}=\sqrt[3]{9} \end{cases}$

Άρα έχω ολικό μέγιστο στο f(3) και ολικό ελάχιστο στο f(0)

Άσκηση



Να βρείτε τα ακρότατα της $y = \dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}}$

(Από το σχήμα φαίνεται πως έχω ολικό ελάχιστο στο x=0 και μέγιστα για x=-2 και x=2)

Το Π.Ο. (f)=(-2, 2) δεν έχει άκρα, άρα όλα τα ακρότατα, αν υπάρχουν θα εμφανίζονται σε κρίσιμα σημεία: $y = \dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}} \Rightarrow y' = \dfrac{x}{(4-x^2)^{3/2}}$

Το μόνο κ.σ. είναι το 0 και f(0)=1/2, το μοναδικό υποψήφιο ακρότατο.

Αν πάρουμε τιμές είτε μεγαλύτερες είτε μικρότερες του 0, η τιμή της f αυξάνεται (η γραφική παράσταση ανέρχεται συνεχώς) άρα στο x=0 έχουμε ολικό ελάχιστο (μέγιστα - τοπικά ή ολικά - δεν υπάρχουν).

Προσοχή: δεν παραβιάζεται το θεώρημα των ακρότατων για συνεχείς συναρτήσεις εφόσον το Π.Ο.(f) είναι ανοικτό σύνολο (εξ ου και δεν ελέγχω τις τιμές στα άκρα)

Θεώρημα του Rolle

E

Έστω f τ.ώ.

(i) f συνεχής στο $[\alpha, \beta]$

(ii) Υπάρχει η f’ στο (α, β)

(iii) $f(\alpha) = f(\beta)$

$\Rightarrow$ ∃ τουλάχιστον ένα $\xi \in (\alpha, \beta)$: $f'(\xi)=0$

δηλ. ξ εσωτερικό σ. του (α, β)

(δηλ. ∃ τουλάχιστον ένα $\xi \in (\alpha, \beta)$: η εφαπτομένη στο $(\xi, f(\xi))$//xx’)

π.χ.: $f(x)=x^2-4x+5$, $x \in [1, 3]$

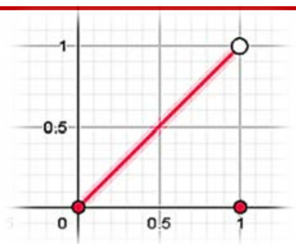
(i) f συνεχής στο $[1, 3]$ ως πρόσθεση συνεχών

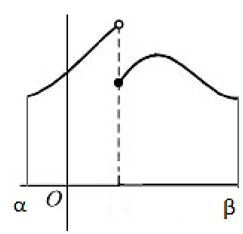
(ii) Υπάρχει η f’ στο $(1, 3)$: $f'(x)=2x-4$

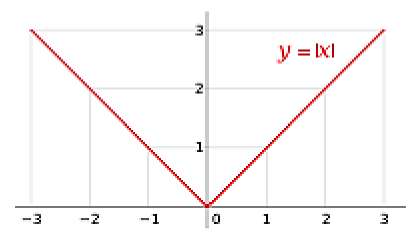
(iii) $f(1)=2=f(3)$

$\Rightarrow$ ∃ ένα $\xi \in (1, 3)$: $f'(\xi)=0$
δηλ. $2\xi-4=0$, άρα $\xi=2$

ΠΡΟΣΟΧΗ: Μία συνθήκη να μην ισχύει, το θεώρημα ΔΕΝ ισχύει π.χ.:







Θεώρημα Μέσης Τιμής (ΘΜΤ)

ΣΤ

Έστω f τ.ώ.

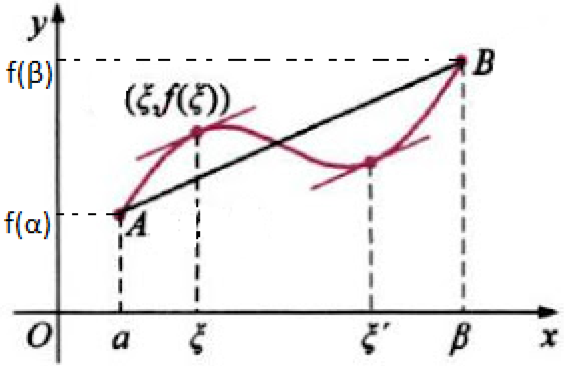
(i) f συνεχής στο [α, β]

(ii) Υπάρχει η f’ στο (α, β)

$\Rightarrow$ ∃ τουλάχιστον ένα ξ ϵ (α, β): $f'(\xi)=\dfrac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$

<u>Φυσική ερμηνεία</u>:

- Το κλάσμα είναι ο **μέσος ρυθμός μεταβολής** της f στο [α, β]
- Το f’(ξ) είναι ο **στιγμιαίος ρυθμός μεταβολής**



Το θεώρημα μας λέει πότε αυτά τα 2 είναι ίσα

<u>Γεωμετρική ερμηνεία</u>: υπάρχει ένα ξ ϵ (α, β): (εφαπτομένη στο ξ) // AB

π.χ.: f(x)=√x, x ϵ [0, 4]

(i) f συνεχής στο [0,4]

(ii) ∃ f’ στο (0,4): f’(x)=1/(2√x)

$\Rightarrow$ ∃ τουλάχιστον ένα ξ ϵ (0, 4): $f'(\xi)=\dfrac{f(4)-f(0)}{4-0}=\dfrac{1}{2}$

Άρα 1/(2√ξ)=1/2 ⇒ ξ =1

Τρία (3) Πορίσματα

Πόρισμα 1ο: Αν $f'(x) = 0 \ \forall \ x \in (\alpha, \beta)$ ανοικτό

$\Rightarrow f(x) = c$, c σταθερός αριθμός

δηλ. f σταθερή

Γνωρίζουμε ότι $c'=0$, άρα ισχύει και το αντίστροφο

Πόρισμα 2ο: Αν $f'(x) = g'(x) \ \forall \ x \in (\alpha, \beta)$ ανοικτό

$\Rightarrow f(x) = g(x) + c$, $\forall \ x \in (\alpha,\beta)$

c σταθερός αριθμός

Παράδειγμα:

Η f(x) που έχει παράγωγο την sinx και που διέρχεται από το σημείο (0, 2), είναι της μορφής $f(x) = -\cos x + c$, c σταθερά.

Άρα $f(0)= -1 + c = 2$, άρα $c=3$

Angelos Giannoulas

Z

Παράγωγος & Μονοτονία

Μας βοηθά στο να κατανοήσουμε το σχήμα της καμπύλης

Πόρισμα 3ο (**Κριτήριο 1ης παραγώγου:Κ1ης**):

$$\left.\begin{array}{l}\text{Έστω } f \text{ συνεχής στο } [\alpha, \beta] \\ \text{Έστω υπάρχει η } f' \text{ στο } (\alpha, \beta) \\ \text{Αν } f'(x) > 0,\ \forall\, x \in (\alpha, \beta)\end{array}\right\} \underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow} f \text{ \underline{γνησίως αύξουσα} στο } [\alpha, \beta]$$

Αντίστοιχα: αν $f'(x) < 0$, $\forall\, x \in (\alpha, \beta) \Rightarrow f$ γνησίως φθίνουσα στο $[\alpha, \beta]$

ΠΡΟΣΟΧΗ: το $[\alpha, \beta]$ μπορεί να είναι $\subseteq$ Π.Ο.(f)

Απόδειξη:

Έστω $x_1, x_2 \in [\alpha, \beta]$: $x_1 < x_2$

Από ΘΜΤ για την f στο $[x_1, x_2]$ έχω:

$$f(x_2)-f(x_1)=f'(c) \cdot \underbrace{(x_2 - x_1)}_{\text{Θετικό, άρα το πρόσημο εξαρτάται από την τιμή της } f'(c)}$$

Δηλ. $f(x_2)-f(x_1) > 0$ αν $f'(c) > 0$ (και αντίστροφα για το $\leq$)

Χρήση ΘΜΤ & 3 Πορισμάτων

1ο Βρίσκω τα κρίσιμα σημεία (κ.σ.) της f

2ο Κοιτώ σε όλα τα διαστήματα μεταξύ των κ.σ. αν $f' > 0$ ή $f' < 0$

3ο Εφαρμόζω το ‘Πόρισμα 3’

x κρίσιμο σημείο της f:

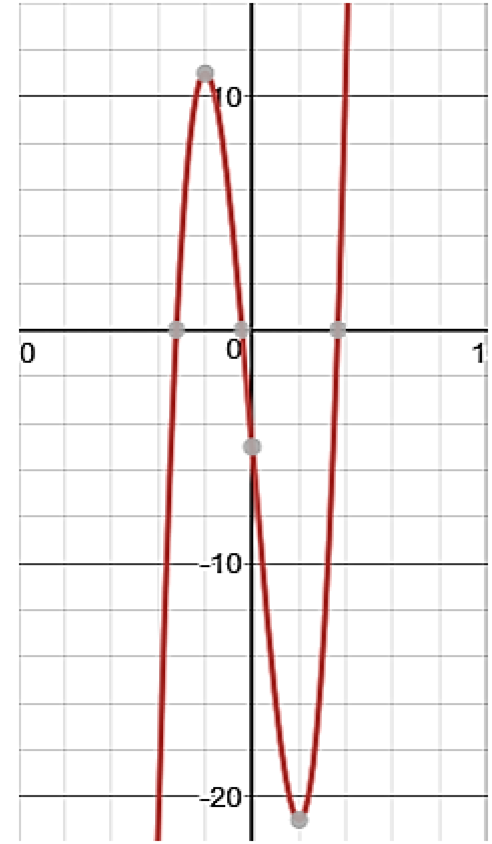
1. αν $f'(x) = 0$
2. αν $f'(x) \nexists$
3. για $x = \alpha$ ή $x = \beta$ στο $[\alpha, \beta]$

Το (3) μόνο αν η f ορίζεται στο $[\alpha, \beta]$
Αν η f ορίζεται στο (α, β) **δεν** το ελέγχω

Από το κριτήριο της 1ης παραγώγου:

1. Η f εμφανίζει τοπικό ελάχιστο αν η f’ αλλάζει πρόσημο από – σε +
2. Η f εμφανίζει τοπικό μέγιστο αν η f’ αλλάζει πρόσημο από + σε –
3. Η f ΔΕΝ εμφανίζει τοπικό ακρότατο αν έχει σταθερό πρόσημο

Παράδειγμα



Αν $f(x)=x^3-12x-5$

(α) Να βρείτε τα κρίσιμα σημεία της f

(β) Να ελέγξετε την μονοτονία της

Λύση: (α) Τα κ.σ. της f είναι τα x:

είτε $f'(x)=0$ είτε $f'(x)$ δεν υπάρχει

(το 3ο δεν το ελέγχουμε αφού Π.Ο.= $\mathbb{R}$)

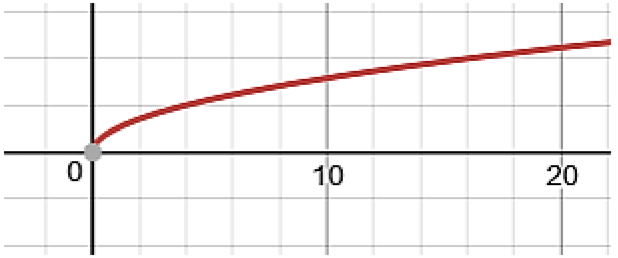
Άρα $f'(x)=0 \Rightarrow x = \pm 2$,

(β) Εφόσον έχω 3 κ.σ., ο άξονας xx' χωρίζεται σε 3 μέρη:

Διάστημα	$-\infty < x < -2$	$-2 < x < +2$	$+2 < x < +\infty$
Πρόσημο f'	+	−	+
Συμπεριφορά f	↗	↘	↗

Άρα γνωρίζοντας και πώς μεταβάλλεται η f, βρίσκουμε και τι τοπικά ακρότατα είναι

Ασκήσεις

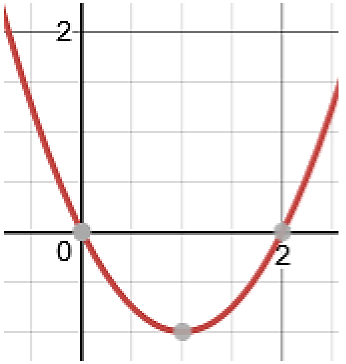


Άσκηση 1η: $f(x) = \sqrt{x}$ στο $[0, +\infty)$ – Μονοτονία?

- f συνεχής $\forall\ x \in [0, +\infty)$
- $f' \exists\ \forall\ x \in (0, +\infty)$: $f'(x)=1/(2\sqrt{x})$

Υπάρχει 1 μόνο κ.σ., το 0 που δεν χωρίζει σε διαστήματα (βλ. σχήμα), το μόνο είναι το $(0, +\infty)$ όπου $f'(x) > 0$, για κάθε $x \in (0, +\infty)$

Άρα (από Κ1ης : η f γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$



Άσκηση 2η: $f(x) = x^2-2x$ στο $\mathbb{R}$ - τοπικά ακρότατα?

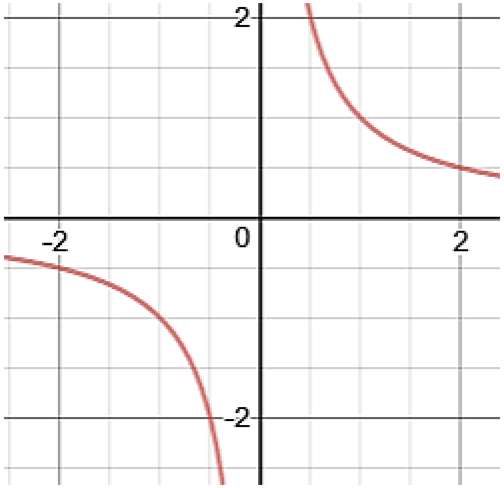
- f συνεχής για κάθε $x \in \mathbb{R}$
- $f' \exists$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$: $f'(x)=2x-2$

Για $f'(x)=0$ έχω ένα κ.σ., το 1

Διάστημα	$-\infty < x < +1$	$+1 < x < +\infty$
Πρόσημο f’	**–**	**+**
Συμπεριφορά f	↘	↗

δηλ. στο (1, f(1)), η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο

Άσκηση



$f(x) = 1/x$ – Ακρότατα?

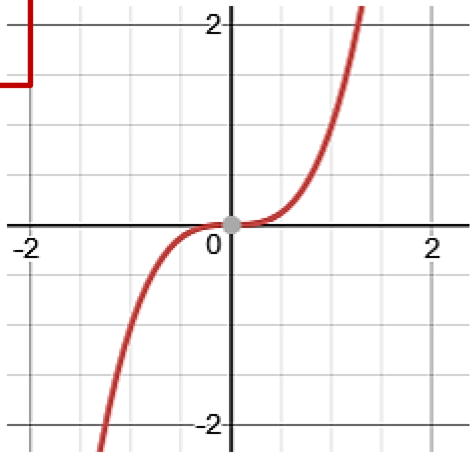
- f συνεχής για κάθε $x \in (-\infty, +\infty)$
- f' ∃ για κάθε $x \in (-\infty, +\infty)$: $f'(x) = -1/x^2$

Υπάρχει 1 κ.σ., το x=0, άρα

Διάστημα	$-\infty < x < 0$	$0 < x < +\infty$
Πρόσημο f'	**–**	**–**
Συμπεριφορά f	↘	↘

δηλ. στο x = 0 η f **ΔΕΝ** παρουσιάζει τοπικό ακρότατο

Παρατήρηση: ΔΕΝ ισχύει το αντίστροφο του Κ1ης
(δηλ. αν f γνησίως μονότονη $\not\Rightarrow$ f' > 0 (ή f' < 0)

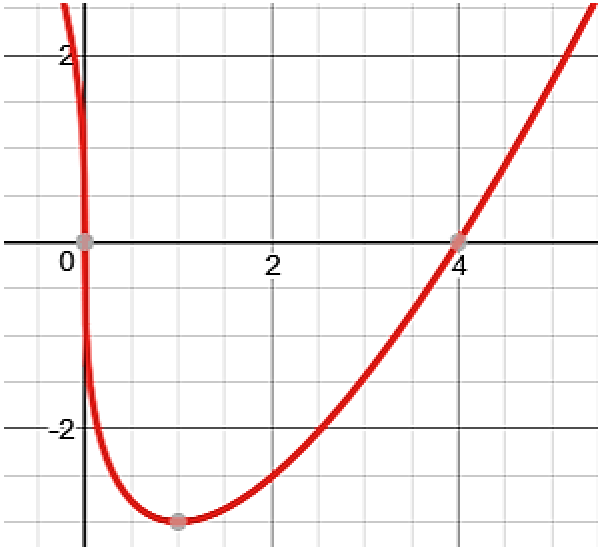


Παράδειγμα: $f(x) = x^3$
Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$
Όμως $f'(x)=3x^2 \not> 0$, αφού $f'(0)=0$

Ασκήσεις

Άσκηση 1η : $f=(x^{1/3})\cdot(x-4)$, Τοπικά & Ολικά ακρότατα? Μονοτονία?

- f συνεχής για κάθε $x \in \mathbb{R}$
- $f' \exists\ \forall x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$: $f'(x)= 4/3 \cdot x^{-2/3} \cdot (x-1)$



Η $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$,
όμως υπάρχει και το 0 (όπου ∄ η f'),
Άρα έχω 2 κ.σ.: 0 και 1

Διάστημα	$-\infty < x < 0$	$0 < x < +1$	$+1 < x < +\infty$
Πρόσημο f'	–	–	+
Συμπεριφορά f	↘	↘	↗

Άρα έχω μόνο το τοπικό ελάχιστο (1, f(1)), που είναι & ολικό αφού σε όλο το διάστημα πριν ↘

Ασκήσεις

Άσκηση 2η : Πόσο πρέπει να είναι το x ϵ [0, √3] στην $f(x)=3-x^2$: το παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ να έχει μέγιστο εμβαδόν;

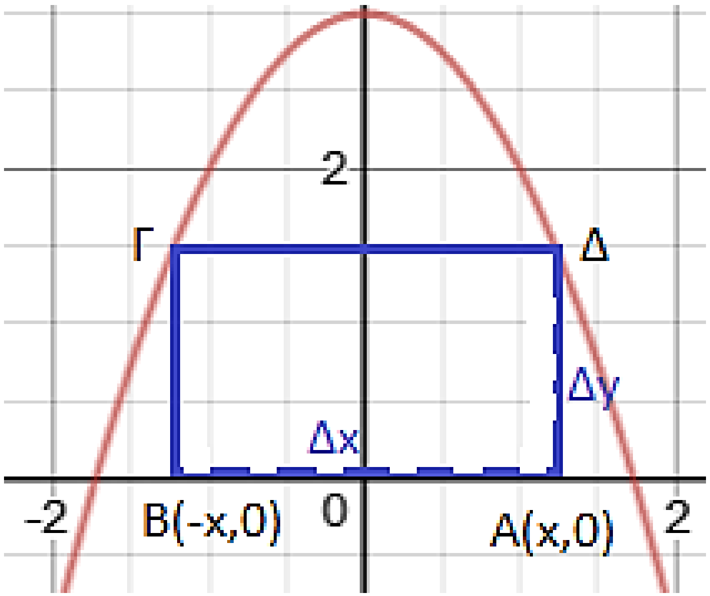
Εμβαδόν $(E)=AB\cdot A\Delta=\Delta x\cdot\Delta y=[x-(-x)]\cdot[(3-x^2)-0]=$

$2x\cdot(3-x^2)= -2x^3+6x$

Το $(-1) \notin$ Π.Ο.

Άρα $E'(x)= -6x^2+6= -6\cdot(x-1)\cdot(x+1)$, δηλ. έχω ένα μόνο κ.σ., το +1

Διάστημα	0 < x < 1	1 < x < √3
Πρόσημο f’	**+**	**–**
Συμπεριφορά f	**↗**	**↘**



Άρα E=max στο (1, f(1))

Κοιλότητα

Διαφορικός Λογισμός

μιας μεταβλητής Ι

Κυρτή & Κοίλη συνάρτηση

Ορισμός:

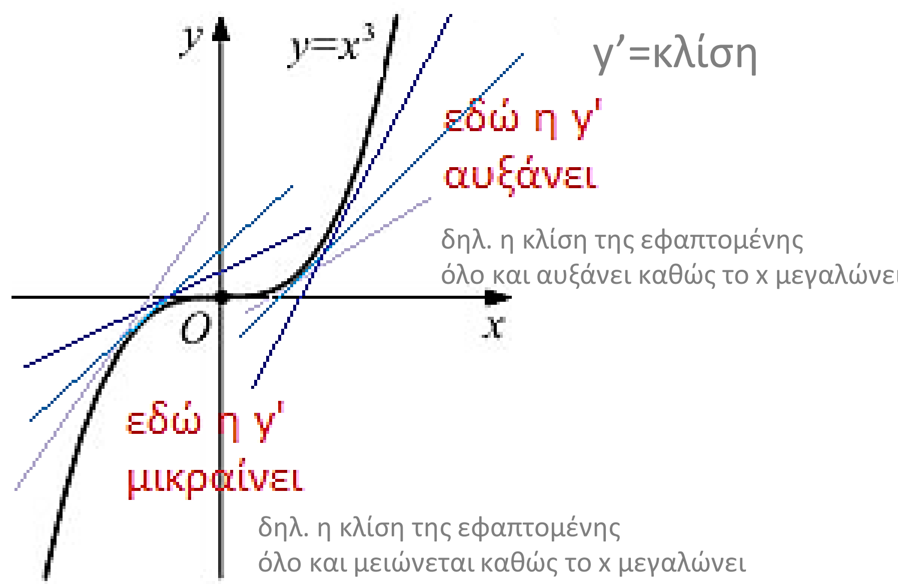
Έστω y=f(x): ∃ f’(x), λέμε ότι :

η f(x) στρέφει
- (1) τα κοίλα άνω στο (α, β) ανοικτό αν y’= f’(x) (γνησίως) αύξουσα στο (α, β) (κυρτή)
- (2) τα κοίλα κάτω στο (α, β) ανοικτό αν y’= f’(x) (γνησίως) φθίνουσα στο (α, β) (κοίλη)

Συμβολίζεται ως εξής:

(1) για κυρτή: ↺

(2) για κοίλη: ↷



Με άλλα λόγια η κοιλότητα μας δείχνει ΠΩΣ κάμπτεται η καμπύλη

Κριτήριο 2ης παραγώγου

Κριτήριο 2ης παραγώγου:Κ2ης για την κοιλότητα

Το γράφημα της f στρέφει:
(1) τα κοίλα άνω σε κάθε διάστημα όπου $y'' > 0$
(2) τα κοίλα κάτω σε κάθε διάστημα όπου $y'' < 0$

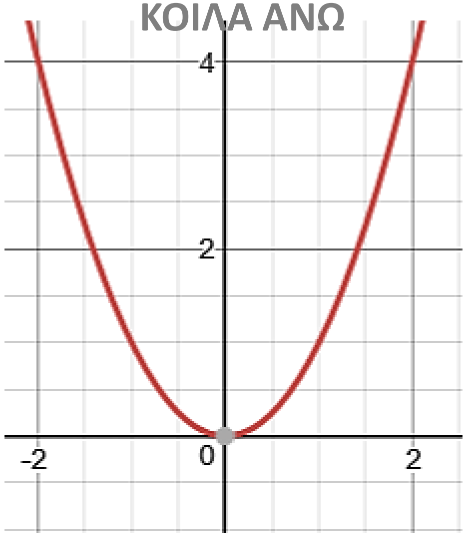
Παράδειγμα: Έστω $y=x^2$ (ΠΟ=$\mathbb{R}$)

- f συνεχής για κάθε $x \in \mathbb{R}$
- f' $\exists$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$: $f'(x)=2x$

Υπάρχει 1 μόνο κ.σ.: $x = 0$

Διάστημα	$-\infty < x < 0$	$0 < x < +\infty$
Πρόσημο f’	–	+
Συμπεριφορά f	↘	↗

(από Κ1ης)



- $y''=2 > 0$ για κάθε x σε κάθε διάστημα, άρα στρέφει τα κοίλα άνω

(από Κ2ης)

Άσκηση

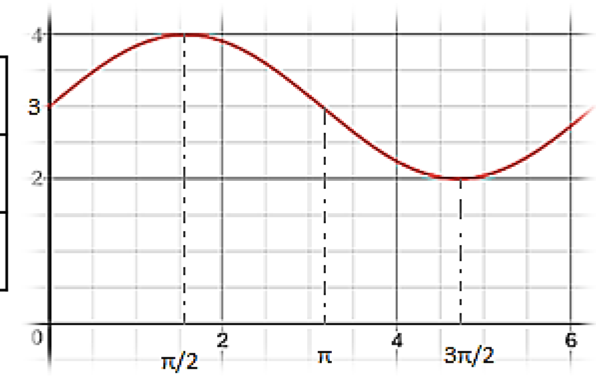
Ελέγξτε την κοιλότητα αν y = f(x) = 3+sinx στο διάστημα **[0, 2π]**

Λύση:

- f συνεχής για κάθε x ϵ [0, 2π]
- f’ ∃ για κάθε x ϵ (0, 2π): f’(x)=cosx

Υπάρχει 2 κ.σ.: x = π/2 & 3π/2 (όπου f’=0)

Διάστημα	**0 < x < π/2**	**π/2 < x < 3π/2**	**3π/2 < x < π**
Πρόσημο f’	**+**	**–**	**+**
Συμπεριφορά f	**↗**	**↘**	**↗**



- y’’ = -sinx
  - < 0 στο (0, π/2) , άρα στρέφει τα κοίλα κάτω – όμοια στο (π/2, π)
  - > 0 στο (π, 3π/2), άρα στρέφει τα κοίλα άνω – όμοια στο (3π/2, 2π)

ΠΡΟΣΟΧΗ: Δεν αναφερόμαστε στα ίδια διαστήματα

Σημεία καμπής

Ορισμός: Ένα σημείο της γραφικής παράστασης της f όπου υπάρχει εφαπτομένη και όπου αλλάζει η κοιλότητα λέγεται: σημείο καμπής

Δηλ. είναι ένα σημείο όπου η f'' **εκατέρωθεν** αλλάζει πρόσημο

- Σε αυτό το σημείο η f'': $\begin{cases} f''=0 \text{ ή} \\ f'' \text{ δεν ορίζεται} \end{cases}$

δηλ. τα σημεία καμπής είναι εσωτερικά σημεία: ή y''= 0 ή y'' δεν υπάρχει

- Αν λοιπόν υπάρχει η f'' και $f''(x_0)= 0$ $\Rightarrow$ 1. x_0 είναι σημείο καμπής & 2. $(x_0, f'(x_0))$ τοπικό ακρότατο

ΠΡΟΣΟΧΗ: της **f'** τοπικό ακρότατο

Αναζήτηση σημείων καμπής

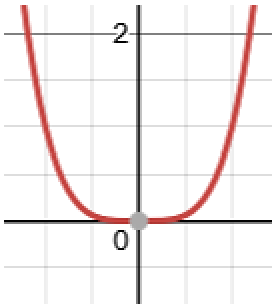
Θεώρημα:

$$\left.\begin{array}{l}\text{Αν } (x_0, f(x_0)) \text{ σημείο καμπής της } f \\ \quad\quad \text{\& στο σημείο υπάρχει η } f'' \end{array}\right\} \Rightarrow \quad f''(x_0)=0$$

$$\begin{array}{r}\text{Άρα πιθανά σημεία καμπής} \\ \text{είναι εσωτερικά σημεία:}\end{array} \left\{\begin{array}{l}\text{ή } f'' = 0 \\ \text{ή } f'' \nexists\end{array}\right.$$

Παρατήρηση: **Δεν ισχύει το αντίστροφο του Κ2ης** , δηλ.
«Ένα σημείο με f''=0 δεν είναι πάντα σημείο καμπής»

π.χ.: Έστω $f(x)=x^4$, άρα $f'(x)=4x^3$, γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$
και $f(x)=x^4$ κυρτή στο $\mathbb{R}$. Παρότι $f''(0) = 0$, δεν αλλάζει
το πρόσημό της εκατέρωθεν

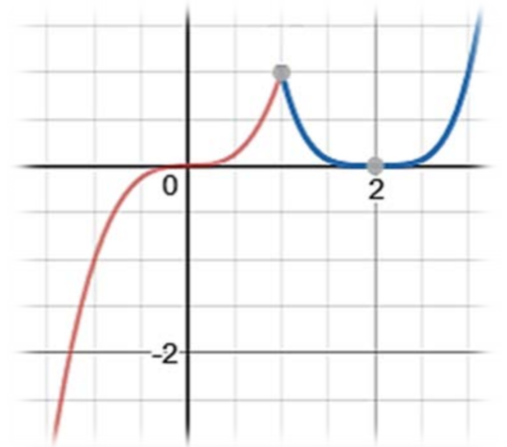


Παράδειγμα

Ελέγξτε την συμπεριφορά του γραφήματος της $f(x)= \begin{cases} x^3 & , x < 1 \\ (x-2)^4, & x \geq 1 \end{cases}$

Λύση:

Το 1 είναι σημείο ένωσης δύο ξεχωριστών γραφημάτων, άρα δεν υπάρχει «ομαλή» συνέχεια



Υπάρχει η $f''(x)$ στο $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ και είναι

$$f''(x) = \begin{cases} 6x , & x < 1 \\ 12(x-2)^2, & x > 1 \end{cases}$$

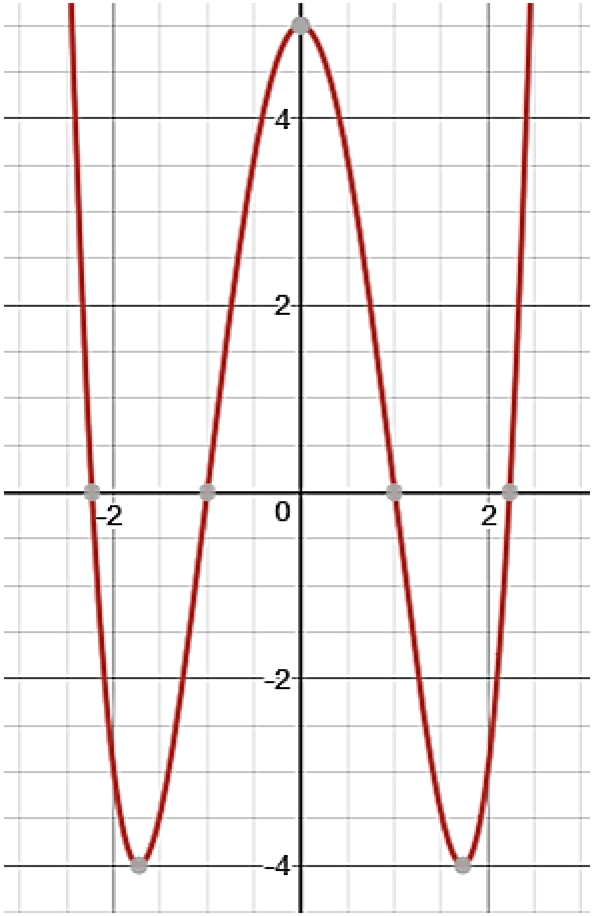
Άρα κ.σ. είναι {0, 2} (από $f''=0$) & το {1} ($\nexists f''$)

Διάστημα	**$-\infty < x < 0$**	**$0 < x < 1$**	**$1 < x < 2$**	**$2 < x < +\infty$**
Πρόσημο f''	**–**	**+**	**+**	**+**
Συμπεριφορά f	↷	↺	↺	↺

Άρα η f είναι <u>κοίλη στο 1ο διάστημα</u> και <u>κυρτή στα υπόλοιπα</u>

Άσκηση

Να βρείτε τα σημεία καμπής και την κοιλότητα της $f(x)=x^4-6x^2+5$



Λύση:

Η f’’ υπάρχει στο $\mathbb{R}$

$f''(x) = 12x^2 – 12 = 12 \cdot (x-1) \cdot (x+1)$

Αν $f''(x) = 0 \Rightarrow x = \pm 1$
(που είναι τα 2 κρίσιμα σημεία)

Διάστημα	**$-\infty < x < -1$**	**$-1 < x < 1$**	**$1 < x < +\infty$**
Πρόσημο f’’	**+**	**–**	**+**
Συμπεριφορά f	↺	↷	↺

Δηλ. η f στα ακριανά διαστήματα έχει τα κοίλα προς τα πάνω ενώ στο μεσαίο προς τα κάτω

Θεώρημα (K2^{ης} για τοπικά ακρότατα)

(i) Αν $\left.\begin{array}{l} f'(c) = 0 \\ \& \ f''(c) < 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$ η f έχει τοπικό μέγιστο στο c

(ii) Αν $\left.\begin{array}{l} f'(c) = 0 \\ \& \ f''(c) > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$ η f έχει τοπικό ελάχιστο στο c

Η διαφορά με τα προηγούμενα είναι ότι εδώ ψάχνω μόνο το c & όχι μια περιοχή γύρω από αυτό

Το θεώρημα ΔΕΝ ισχύει αν $f''=0$ ή αν $f'' \nexists$.
Σε αυτή την περίπτωση εκτελούμε σύμφωνα με K1^{ης} για τοπικά ακρότατα

Παράδειγμα

Ποια τα ακρότατα της $f(x) = x^3-12x-5$

Λύση

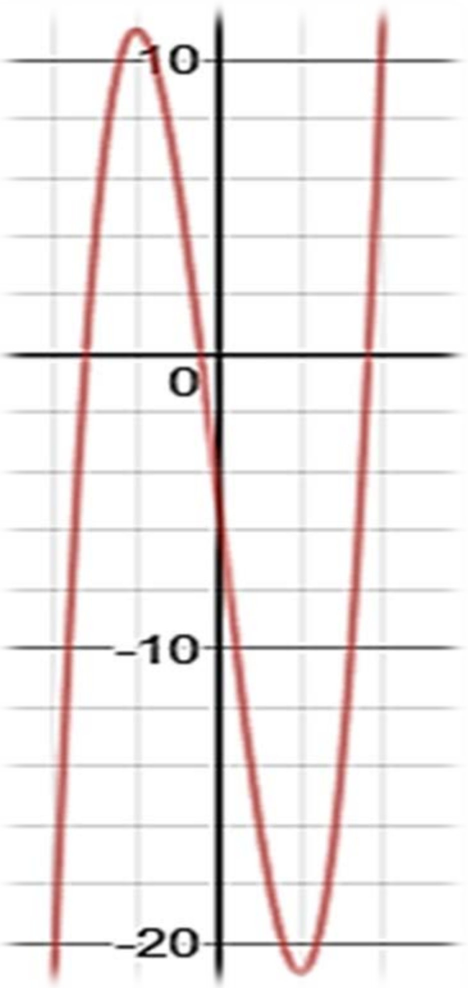
(η f ορίζεται στο $\mathbb{R}$)

- $f'(x) = 3\,(x^2-4)$
- $f''(x) = 6x$

Άρα ως κ.σ. έχω τα ± 2

- $f''(-2)= -12 < 0$, δηλ. η f στο -2 παρουσιάζει τοπικό μέγιστο ($f(-2)= 11$)

- $f''(2)= 12 > 0$, δηλ. η f στο 2 παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο ($f(2)= -21$)



Παράδειγμα (σχεδίασης της f με χρήση των f’ & f’’)

Έστω η συνάρτηση: $f(x)=x^4-4x^3+10$:

(α) να προσδιορίσετε τα ακρότατά της

(β) να βρείτε σε ποια διαστήματα είναι γνησίως μονότονη

(γ) να βρείτε πότε στρέφει τα κοίλα άνω ή κάτω

(δ) να σχεδιάσετε ένα ορθό γράφημα

ΠΡΟΣΟΧΗ: αυτά είναι τα βήματα που κάνουμε για ένα γράφημα

Λύση:

(α)• f συνεχής για κάθε $x \in \mathbb{R}$

• f’ ∃: $f'(x)= 4x^2(x-3)$

Υπάρχουν 2 κ.σ.: {0, 3}

Από Κ1ης ∃ τοπικό ελάχιστο στο 3

Διάστημα	**$-\infty < x < 0$**	**$0 < x < 3$**	**$3 < x < +\infty$**
Πρόσημο f’	−	−	+
Συμπεριφορά f	↘	↘	↗

(β) $f''(x)=12x(x-2)$ που μηδενίζεται στα {0, 2}

Διάστημα	**$x < 0$**	**$0 < x < 2$**	**$2 < x$**
Πρόσημο f’’	+	−	+
Συμπεριφορά f	↺	↷	↺

δηλ. η f στρέφει τα κοίλα προς τα πάνω στα ακριανά διαστήματα και προς τα κάτω στο μεσαίο (**Κ2ης**)

συνέχεια →

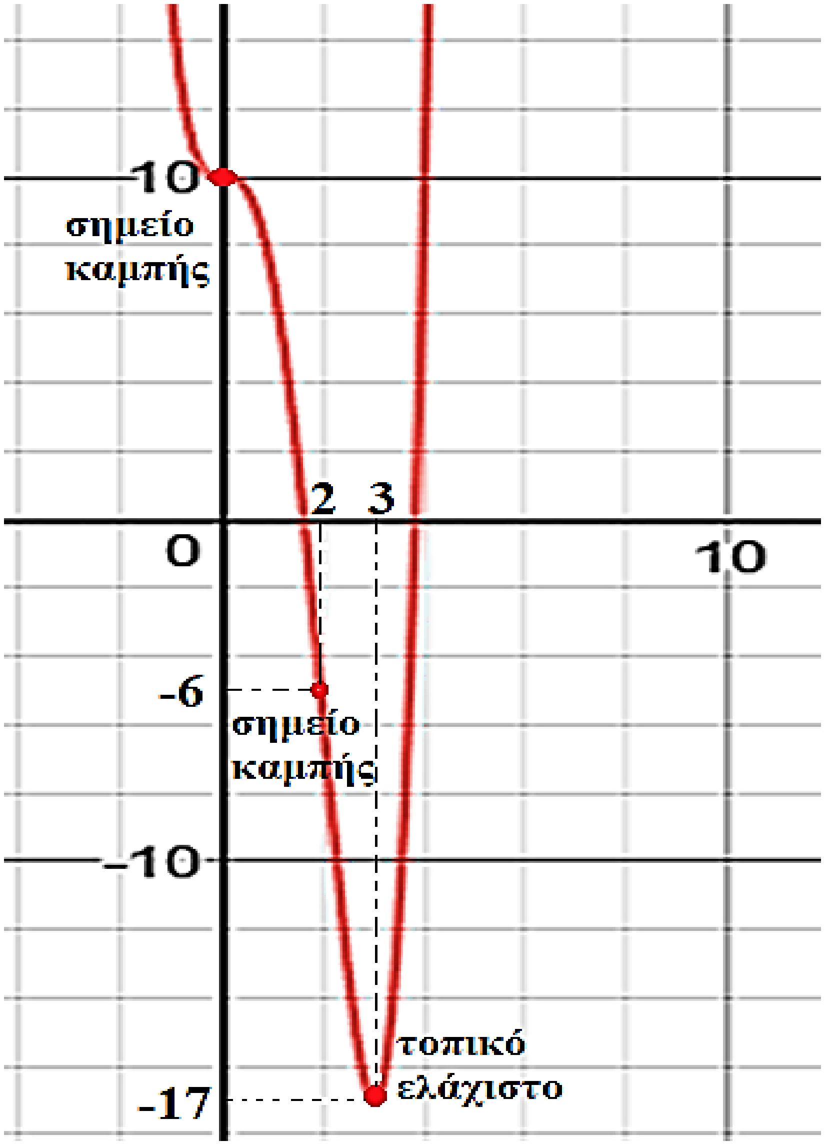
Παράδειγμα (συνέχεια)

Συνοψίζοντας τώρα και τους δύο πίνακες, έχουμε:

x < 0	0 < x < 2	2 < x < 3	3 < x
↘	↘	↘	↗
↺	↷	↺	↺

f(0) = 10 f(2) = - 6 f(3) = - 17

και το γράφημα γίνεται:



ΒΗΜΑΤΑ ΣΧΕΔΙΑΣΗΣ

1. Βρίσκω τις f’ & f’’

2. Βρίσκω πού η f είναι γνησίως μονότονη
(↘ & ↗)

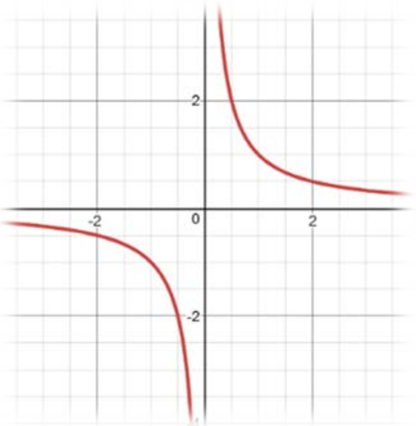
3. Βρίσκω την κοιλότητα στα σημεία καμπής
(↺ & ↷)

4. Συνοψίζω τα σημεία & κάνω το γράφημα

Ασύμπτωτες

Διαφορικός Λογισμός
μιας μεταβλητής Ι

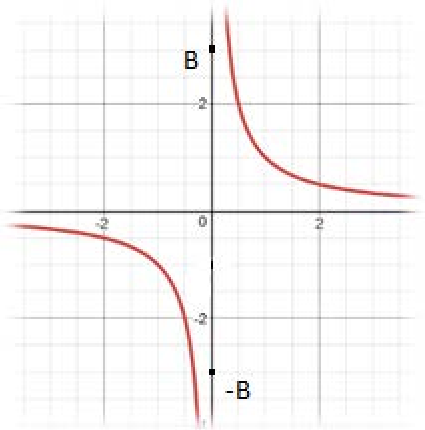
Άπειρα όρια: **Οριζόντιες και κατακόρυφες ασύμπτωτες**



Έστω η f(x)=1/x, τότε παρατηρούμε ότι:

- καθώς x→+∞, (1/x)→0 & $\lim_{x\to+\infty}(\frac{1}{x})=0$
- καθώς x→-∞, (1/x)→0 & $\lim_{x\to-\infty}(\frac{1}{x})=0$

Λέμε ότι η γραφική παράσταση «τείνει ασυμπτωτικά» σε μια ευθεία όταν η απόσταση του γραφήματος της συνάρτησης και της ευθείας τείνει στο μηδέν. Η ευθεία λέγεται «ασύμπτωτη» της γραφικής παράστασης



Επίσης στο π.χ. της f(x)=1/x, όποιο B>0 και να διαλέξω πάνω στην (ασύμπτωτη) yy', υπάρχουν άπειρα x τ.ώ. f(x)>B,

δηλ. $\lim_{x\to0^+} f(x)=\lim_{x\to0^+}(\frac{1}{x})=+\infty$

(Όμοια για f(x)<-B, δηλ. $\lim_{x\to0^-} f(x)=\lim_{x\to0^-}(\frac{1}{x})=-\infty$)

Ορισμός

Μία ευθεία y=b είναι οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης y=f(x) αν ισχύει ότι:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = b \quad \acute{\eta} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = b$$

Μία ευθεία x=α είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης y=f(x) αν ισχύει ότι:

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = \pm\infty \quad \acute{\eta} \quad \lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty$$

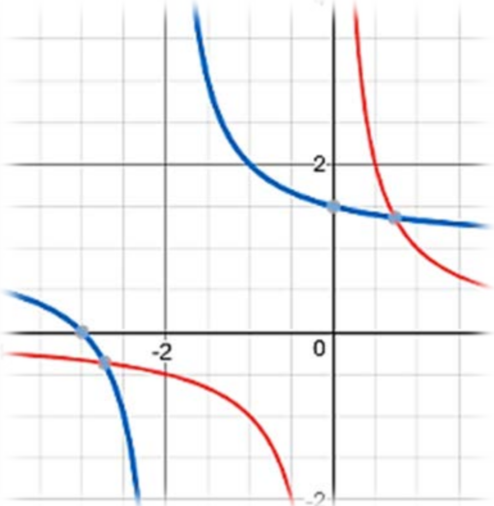
Παράδειγμα

Να βρεθούν οι ασύμπτωτες της $y = \dfrac{x+3}{x+2}$

δηλ. να βρούμε την συμπεριφορά της y καθώς
1. x→ ±∞
2. x→ - 2 (όπου μηδενίζεται ο παρονομαστής)

Επειδή: $y = \dfrac{x+3}{x+2} = 1 + \dfrac{1}{x+2}$

Έχω το γράφημα της 1/x μετατοπισμένο 1 μονάδα πάνω και 2 μονάδες αριστερά. Άρα οι ασύμπτωτες είναι οι y=1 και x=-2



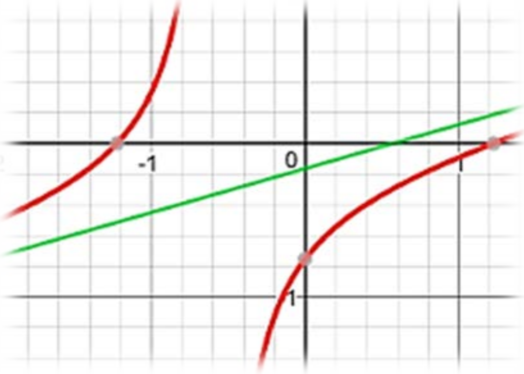
Πλάγια ασύμπτωτη ρητών συναρτήσεων με βαθμός αριθμητής = βαθμός παρονομαστής +1

Βρίσκουμε την πλάγια ασύμπτωτη διαιρώντας κατά μέλη ώστε να εκφράσουμε την συνάρτηση με κάποιο <u>υπόλοιπο</u> τ.ώ. τείνει στο 0 όταν x→ ±∞

(δηλ. της μορφής: (αx+β)+υ(x))

Παράδειγμα: Ποια η πλάγια ασύμπτωτη της

$$y=\frac{2x^2-3}{7x+4}=\underbrace{(\frac{2}{7}x-\frac{8}{49})}_{\text{γραμμική συνάρτηση } g(x)}-\underbrace{\frac{115}{49(7x-4)}}_{\text{υπόλοιπο}}$$



Καθώς x→ ±∞ το <u>υπόλοιπο</u> →0, δηλ. η g(x) είναι η πλάγια ασύμπτωτη της f(x) = y

$$\frac{2x^2-3}{7x+4}=(\frac{2}{7}x-\frac{8}{49})\cdot(7x+4)-\frac{115}{49}$$

$$\text{Άρα } y=\frac{2x^2-3}{7x+4}=\frac{(\frac{2}{7}x-\frac{8}{49})\cdot(7x+4)-\frac{115}{49}}{7x+4}=(\frac{2}{7}x-\frac{8}{49})-\frac{115}{49(7x+4)}$$

Άσκηση

Ποια η πλάγια ασύμπτωτη της $f(x) = \dfrac{2x^2 - 4x - 9}{x - 1}$

Υπόδειξη: όπως η προηγούμενη άσκηση (ασύμπτωτη: y=2x-2)

Κανόνες de l’ Hospital

Υπάρχουν περιπτώσεις όπου οδηγούμαστε να βρούμε το όριο σε μορφές όπως:
0/0 ή ±∞ / ±∞ (π.χ. $f(x)=(e^x-1)x^3$)

1ο Θεώρημα de l’ Hospital (για 0/0):

όπου x_0 πεπερασμένο ή ±∞

Αν $\begin{cases} \lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0 \ \& \ \lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0 \\ \& \ \exists \ \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} \text{ πεπερασμένο ή } \pm\infty \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$

2ο Θεώρημα de l’ Hospital (για ±∞/±∞):

όπου x_0 πεπερασμένο ή ±∞

Αν $\begin{cases} \lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty \ \& \ \lim\limits_{x\to x_0} g(x)=+\infty \\ \& \ \exists \ \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} \text{ πεπερασμένο ή } \pm\infty \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$

τα παραπάνω θεωρήματα ισχύουν και για πλευρικά όρια

Παράδειγμα

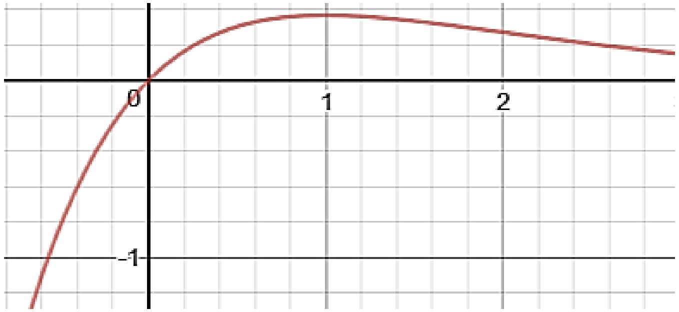
Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x}$

Λύση:

Επειδή $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = \frac{+\infty}{+\infty}$ θα χρησιμοποιήσω το 2ο Θεώρημα:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{(e^x)'}{x'} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{1} = +\infty$$

Άσκηση



Ποιες είναι οι ασύμπτωτες ευθείες της συνάρτησης $f(x) = x/e^x$?

Λύση:

- f συνεχής στο $\mathbb{R}$
- Από την C_f βλέπω ∄ κατακόρυφη ασύμπτωτη
- Άρα θα ψάξω το όριο στο ± ∞

(i) $$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{e^x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{e^x} = \frac{\lim_{x\to-\infty} 1}{\lim_{x\to-\infty} e^x}$$

που είναι της μορφής $\frac{1}{0}$, το οποίο δεν ορίζεται

δηλ. η **f δεν έχει ασύμπτωτη στο -∞**

(ii) $$\lim_{x\to+\infty} \mathrm{f(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{x}}{\mathrm{e^x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\mathrm{e^x}} = 0$$

δηλ. **η f έχει ασύμπτωτη στο +∞** την ευθεία y=0

Μελέτη & Χάραξη της C_f

Βήμα 1ο: Βρίσκω το Π.Ο.(f)

Βήμα 2ο: Εξετάζω την συνέχεια της f στο Π.Ο.(f)

Βήμα 3ο: (3i) Βρίσκω τις f' και f''

(3ii) Κατασκευάζω τους πίνακες των πρόσημων

(3iii) Από την f' προσδιορίζω τα ακρότατα της f

(3iv) Από την f'' προσδιορίζω τα διαστήματα κοιλότητας

Βήμα 4ο: Μελετάω την συμπεριφορά της C_f με τις ασύμπτωτες

Βήμα 5ο: Συνοψίζω και δημιουργώ την C_f

Μην ξεχνάτε:
- αν **f άρτια** → η C_f συμμετρική γγ'
- αν **f περιττή** → η C_f συμμετρική xx'
- αν **f περιοδική με περίοδο Τ** → ψάχνω την C_f μόνο σε διάστημα πλάτους Τ

Πορίσματα

Αποδεικνύεται πώς:

(α) οι πολυωνυμικές συναρτήσεις που έχουν βαθμό μεγαλύτερο ή ίσο του 2, **δεν έχουν ασύμπτωτες**

(β) οι ρητές συναρτήσεις με βαθμό αριθμητή μεγαλύτερο ή ίσο των 2 μονάδων του βαθμού του παρονομαστή, δεν έχουν **πλάγιες ή οριζόντιες** ασύμπτωτες

Άσκηση

Να μελετηθεί γραφικά η συνάρτηση $y = x^4-4x^3+11$

Λύση:

1. Π.Ο.(f) = $\mathbb{R}$
2. f συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως πολυωνυμική συνάρτηση
3. $f'(x)=4x^3-12x^2=4x^2(x-3)$

   Και f'=0 δίνει τα κ.σ. {0, 3} (0 διπλή)

Διάστημα	**x < 0**	**0 < x < 3**	**3 < x**
Πρόσημο f'	**–**	**–**	**+**
Συμπεριφορά f	↘	↘	↗

δηλ. στο (3, f(3))
∃ τοπικό ελάχιστο

$f''(x)=12(x-2)$

Και f''=0 δίνει τα σημεία καμπής {0,2}

Διάστημα	**x < 0**	**0 < x < 2**	**2 < x**
Πρόσημο f''	**+**	**–**	**+**
Συμπεριφορά f	↺	↷	↺

δηλ. στα ακριανά διαστήματα
η f στρέφει τα κοίλα πάνω, ενώ
στο μεσαίο τα στρέφει κάτω

συνεχίζεται →

Άσκηση (συνέχεια)

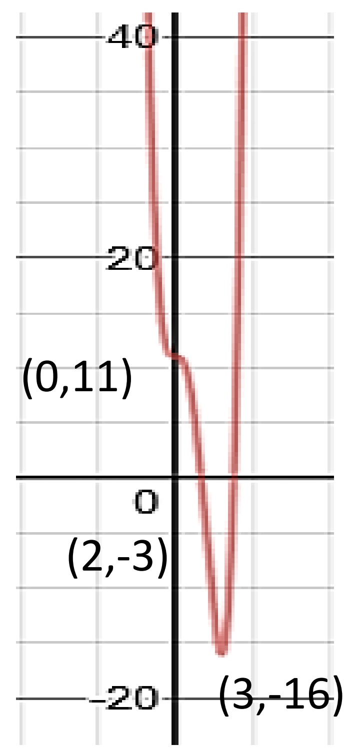
4. Η f δεν έχει ασύμπτωτες αφού είναι πολυωνυμική βαθμού μεγαλύτερου - ίσου του 2
5. Άρα ο πίνακας μεταβολών της f γίνεται:

Δ	**x < 0**	**0 < x < 2**	**2 < x < 3**	**3 < x**
f’	−	−	−	+
f’’	+	−	+	+
f	⤻	↷	↷	⤻

f(0)=11

f(2)=-3

f(3)=-16



Άσκηση

Να μελετηθεί γραφικά η συνάρτηση $y = (x^2 - x + 4)/(x-1)$

1. Π.Ο.(f) = $\mathbb{R}\setminus\{1\}$
2. f συνεχής ως ρητή στο Π.Ο.(f)
3. $f'(x) = (x^2 - 2x - 3)/(x-1)^2$, άρα αν $f' = 0$ έχω σ.κ. τα $\{-1, 3\}$

Διάστημα	**x < -1**	**-1 < x < 1**	**1 < x < 3**	**3 < x**
Πρόσημο f’	**+**	**–**	**–**	**+**
Συμπεριφορά f	↗	↘	↘	↗

$f''(x) = 8/(x-1)^3$, άρα αν $f'' = 0$ έχω σ.κ. το $\{1\}$

Διάστημα	**x < 1**	**1 < x**
Πρόσημο f’’	**–**	**+**
Συμπεριφορά f	↷	↺

συνεχίζεται →

Άσκηση (συνέχεια)

4. $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=+\infty$ & $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)= -\infty$ άρα η C_f έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη την x=1

- Εξετάζω αν ∃ ασύμπτωτη οριζόντια

$$\left.\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-x+4}{x-1} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x(x-1)+4}{x-1} = \lim_{x\to+\infty} x + \lim_{x\to+\infty}\frac{4}{x-1}\right\} \Rightarrow$$

Η y=x ασύμπτωτη της C_f στο +∞

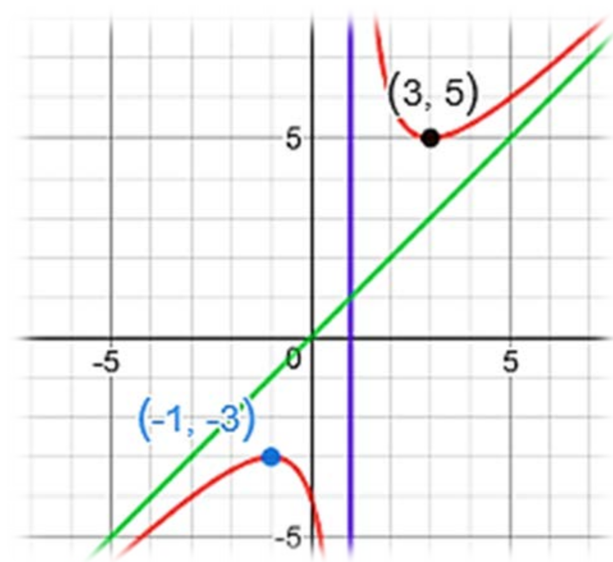
δηλ. μιας γραμμικής g(x) + υπόλοιπο (υπόλοιπο που τείνει στο 0 όταν το x→ + ∞)

- Όμοια αποδεικνύω ότι y=x ασύμπτωτη της C_f στο -∞

5. Άρα ο πίνακας μεταβολών:

Δ	x < -1	-1< x <1	1 < x < 3	3 < x
f’	+	–	–	+
f’’	–	–	+	+
f	↗	↘	↘	↗

f(-1)=-3 f(3)=5



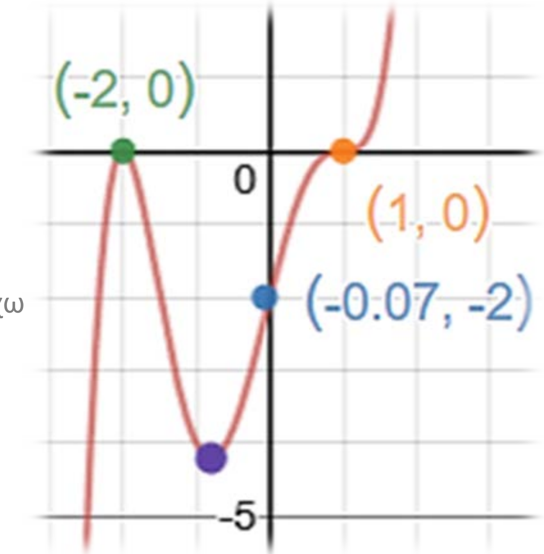
Άσκηση

Να μελετηθεί γραφικά η συνάρτηση $f(x)=\frac{1}{2}(x+2)^2(x-1)^3$

1. Π.Ο.(f) = $\mathbb{R}$
2. f συνεχής στο Π.Ο. ως πολυωνυμική
3. f’=0 → κ.σ. {-2, -4/5, 1}

   f’’=0 → σ.κ. {-1.5, -0.07, 1}

Υπόδειξη: Αν κάνω πράξεις θα έχω μια πολυωνυμική βαθμού 5



4. Δεν υπάρχουν ασύμπτωτες (άσκηση)
5. Ο πίνακας μεταβολών:

Δ	**x <- 2**	**-2< x <-1.5**	**-1.5 < x <-0.8**	**-0.8 < x<-0.07**	**-0.07< x<1**	**1<x**
f’	+	–	–	**+**	**+**	**+**
f’’	–	–	**+**	**+**	–	**+**
f	⤻	↷	↷	⤻	⤻	⤻

f(-2)=0 f(-0.8)=-4.20 f(-0.07)=-2 f(1)=1

Άσκηση

Να μελετηθεί γραφικά η συνάρτηση y=lnx/x

1. Π.Ο.(f) = (0, +∞)
2. f’=0 → κ.σ. {0, e} & f’’=0 → σ.κ. τα {0, $e^{3/2}$}

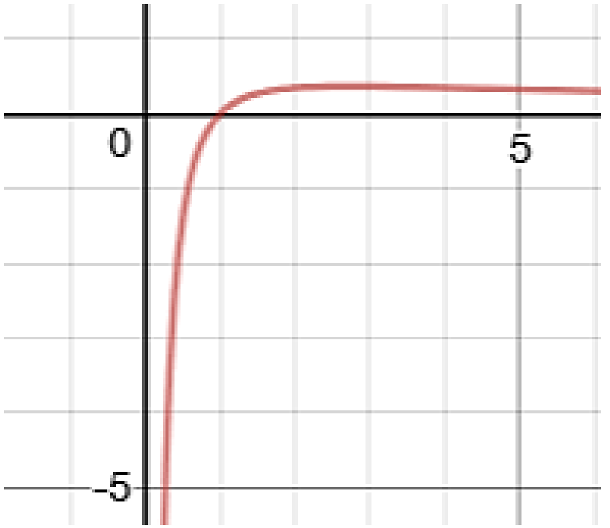
$$f'(x)=\frac{(\ln x)'\cdot x-\ln x\cdot x'}{x^2}=\frac{\frac{1}{x}\cdot x-\ln x\cdot 1}{x^2}=\frac{1-\ln x}{x^2}$$

Η f’ μηδενίζεται στο e και δεν ορίζεται στο 0

$$f''(x)=\frac{-\frac{1}{x}\cdot x^2-(1-\ln x)\cdot 2x}{x^4}=\frac{-3+2\ln x}{x^3}$$

Η f’’ μηδενίζεται στο $e^{3/2}$ και δεν ορίζεται στο 0

Δ	**0<x <e**	**e< x <$e^{3/2}$**	**$e^{3/2}$ < x**
f’	+	–	–
f’’	–	–	+
f	↷	↷	⤻



Ολοκλήρωση

Ολοκληρωτικός Λογισμός
μιας μεταβλητής Ι

Το ζητούμενο

- Είδαμε μεθόδους υπολογισμού για το πώς μεταβάλλονται οι συναρτήσεις ‘στιγμιαία’.
- Αν ‘αθροίσουμε’ αυτές τις στιγμιαίες μεταβολές θα έχουμε ένα συνολικό αποτέλεσμα για ένα πεπερασμένο χρονικό διάστημα;
- **Μέλημά μας δηλ. είναι**:
  1. Αν ξέρω την τιμή $f(c)$
  2. Αν ξέρω & την $f'(x)$

  $\Rightarrow$ Πώς θα βρω την $f(x)$?

- **Βήμα 1ο** : Βρίσκω όλες τις συναρτήσεις (F): $F'(x) = f(x)$
- **Βήμα 2ο** : Δημιουργώ τον γενικό τύπο που περιέχει όλες τις συναρτήσεις αυτές (*αόριστο ολοκλήρωμα*)
- **Βήμα 3ο** : Από την γνωστή τιμή $f(c)$ στο c, βρίσκω την σωστή συνάρτηση $f(x)$

Αντιπαράγωγος της f

‘παράγουσα’
ή ‘αρχική συνάρτηση’

Ορισμός: Έστω f(x) με ΠΟ(f)

F(x) αντιπαράγωγος της f αν:

1. υπάρχει F’(x)
2. F’(x) = f(x), για κάθε x ϵ ΠΟ(f)

Το σύνολο των αντιπαραγώγων της f = ‘Αόριστο ολοκλήρωμα της f’

Το αόριστο ολοκλήρωμα της f συμβολίζεται ως: ∫f(x)dx

Υπενθυμίσεις:

(1) Θ.Μ.Τ.: Αν f(x) στο [α,β] & ∃ f’ στο (α,β) ⇒ ∃ τουλάχιστον 1 c ϵ(α,β):
f’(c) = (f(β) - f(α)) / (β - α)

(2) Πόρισμα 2ο του ΘΜΤ: Αν f’(x)=g’(x), για κάθε x ϵ (α,β) ⇒ ∃ c σταθερά:
f(x) = g(x) + c , για κάθε x ϵ (α,β)

Από το (2) αν βρω μία αντιπαράγωγο F ⇒ οι υπόλοιπες διαφέρουν από την F κατά μία σταθερά, δηλ.

$$\boxed{\int f(x)dx = F(x) + c}$$

Διαβάζεται: «**Το αόριστο ολοκλήρωμα της f ως προς x**»
(c η αυθαίρετη σταθερά)

π.χ.: $\int 2x \cdot dx = x^2 + c$

H f μπορεί δηλ. να είναι x^2+1, x^2+2, $x^2-π$ (όλες αντιπαράγουσες της 2x)

Βασικά ολοκληρώματα

$$\int x^n dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}+c,\ n\in Z\setminus\{-1\}$$

$$\int \frac{1}{x}dx=\ln|x|+c$$ (αν x>0 το ∫ = lnx + c)

$$\int e^x dx=e^x+c$$

$$\int \alpha^x dx=\frac{1}{\ln\alpha}\alpha^x+c,\ \alpha>0,\ \alpha\neq 1$$

$$\int \sin x dx= -\cos x+c \quad \& \quad \int \sin kx dx= -\frac{\cos kx}{k}+c$$

$$\int \cos x dx= \sin x+c \quad \& \quad \int \cos kx dx= \frac{\sin kx}{k}+c$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x}dx= \tan x+c$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x}dx= -\cot x+c$$

$$\int 0\cdot dx=c$$

$$\int 1\cdot dx=x+c$$

$$\int k\cdot dx=kx+c$$

τους τύπους των ∫tan & ∫cot επειδή είναι πιο σύνθετοι θα τους δούμε αργότερα σε άσκηση

Παραδείγματα

Παράδειγμα 1ο: $$\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \int x^{-\frac{1}{2}} dx = 2x^{\frac{1}{2}} + c = 2\sqrt{x} + c$$

$$\int \sin 2x dx = -\frac{\cos 2x}{2} + c$$

$$\int \cos\frac{x}{2} dx = \int \cos(\frac{1}{2}x) dx = \frac{\sin(\frac{1}{2}x)}{\frac{1}{2}} + c = 2\sin(\frac{1}{2}x) + c$$

Παρατήρηση: Συχνά η ολοκλήρωση είναι πιο περίπλοκη. Όμως έχουμε <u>πάντα</u> την δυνατότητα <u>επαλήθευσης</u>, αφού μπορούμε να παραγωγίσουμε το 2ο μέλος αν μας δίνει την ολοκληρωτέα συνάρτηση

π.χ.: Ισχύει ότι : $\int x \cdot \cos x dx = x\sin x + \cos x + c$?

Πράγματι $(x\sin x + \cos x + c)' = \sin x + x\cos x - \sin x = x\cos x$

Προβλήματα αρχικής συνθήκης

Είναι προβλήματα για τα οποία γνωρίζουμε μία τιμή f(c) για το σημείο c (αρχική τιμή: (c, f(c))) και την f'(x)

Παράδειγμα:

Ποια η καμπύλη με κλίση $3x^2$ στο σημείο (x,y) που περνά από το σημείο (1, -1);

δηλ. ξέρω την κλίση (=f'(x)) & ένα σημείο αρχικό (1, -1)

Λύση:

(α) $f'(x)=3x^2 \Leftrightarrow \int f'(x)dx = \int 3x^2\,dx \Leftrightarrow$

$f(x) + c_1 = x^3 + c_2 \Leftrightarrow f(x) = x^3 + c$ (*) (με $c= c_2 - c_1$)

(β) Η f περνά από το (1, f(1)) = (1, -1)

άρα από την (*) έχω: $-1 = 1 + c \Rightarrow c = -2$

Άρα η καμπύλη μου είναι η $y = f(x) = x^3 - 2$

Αλγεβρικοί κανόνες

$$(i)\quad \int kf(x)dx=k\int f(x)dx,\ \ k\in R$$

$$(ii)\quad \int [f(x)\pm g(x)]dx=\int f(x)dx\pm\int g(x)dx$$

Πριν ψάξω το ολοκλήρωμα απλοποιώ την παράσταση

Παράδειγμα 1ο :

$$\int (x^2-2x+5)dx=\int x^2dx-2\int xdx+5\int dx=\frac{x^3}{3}+c_1-2\frac{x2}{2}+c_2+5x+c_3=\frac{x^3}{3}-x2+5x+c$$

όπου $c=c_1+c_2+c_3$

Παράδειγμα 2ο : $$\int\frac{3x-1}{\sqrt{x}}dx=\int\frac{3x}{\sqrt{x}}dx-\int\frac{1}{\sqrt{x}}dx=3\int x^{\frac{1}{2}}dx-\int x^{-\frac{1}{2}}dx=$$

$$3\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}-\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}+c=2x^{\frac{3}{2}}-2x^{\frac{1}{2}}+c$$

Άσκηση

(i) $\int \sin^2 x dx = ?$

Υπενθύμιση: $\sin^2 x=(1-\cos 2x)/2$

$$\int \sin^2 x dx=\int \frac{1-\cos 2x}{2} dx=\frac{1}{2}\int dx-\frac{1}{2}\int \cos 2x dx=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\cdot\frac{\sin 2x}{2}+c$$

(ii) $\int \cos^2 x dx = ?$

Υπενθύμιση: $\cos^2 x=(1+\cos 2x)/2$

$$\int \cos^2 x dx=\int \frac{1+\cos 2x}{2} dx=\ldots=\frac{x}{2}+\frac{\sin 2x}{4}+c$$

Υπενθύμιση: 'Παράγωγος σύνθετης συνάρτησης':

Αν f(u) παραγωγίσιμη στο u=g(x)
και αν g(x) παραγωγίσιμη στο x

$\Rightarrow$ $(f\circ g)'(x)=f'(g(x))\cdot g'(x)$

ή σε μορφή Leibniz: dy/dx=dy/du·du/dx

= f'(u) · du

Παραδείγματα

Παράδειγμα 1: $\int \sqrt{1+\mathrm{y}^2}\cdot 2\mathrm{y}\cdot \mathrm{dy}=?$

g(x)=u
f(g(x))=f(u)

Λύση:

Αν $u=1+y^2 \Rightarrow du=2ydy$

Άρα: $\int \sqrt{1+\mathrm{y}^2}\cdot 2\mathrm{y}\cdot \mathrm{dy}=\int \sqrt{\mathrm{u}}\,\mathrm{du} = \frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}+c=\frac{2}{3}(1+y^2)^{\frac{3}{2}}+c$

Παράδειγμα 2: $\int \cos(5\theta+3)d\theta = ?$

Λύση: Αν $u=5\theta+3 \Rightarrow du=5\theta d\theta \Rightarrow d\theta =(1/5)\, du$

$$\int \cos(5\theta+3)d\theta = \int \cos u\cdot\frac{1}{5}du=\frac{1}{5}\int \cos u\, du =$$

$$\frac{1}{5}\sin u + c = \frac{1}{5}\sin(5\theta+3)+c$$

Ασκήσεις

1η: $\int \sqrt{4t\text{-}1}\,dt = ?$

Λύση: αν u=4t-1 ⇒ du = 4dt ⇒ dt = du/4

Άρα: $\int \sqrt{4t\text{-}1}\,dt = \int \sqrt{u}\,\frac{du}{4} = \frac{1}{4}\int \sqrt{u}\,du = \frac{1}{4}\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c = \frac{1}{6}(4t-1)^{\frac{3}{2}} + c$

2η: $\int x^2 \sin(x^3)\,dx = ?$

Λύση: αν u=x^3 ⇒ du = 3x^{2}dx ⇒ x^{2}dx = (1/3)du

Άρα: $\int x^2 \sin(x^3)\,dx = \int \sin(u)\frac{1}{3}du = \frac{1}{3}\int \sin(u)\,du =$

$$\frac{1}{3}(-\cos u) + c = -\frac{1}{3}\cos(x^3) + c$$

Άσκηση

Να βρείτε το ολοκλήρωμα: $\int \frac{2x}{\sqrt[3]{x^2+1}}dx = ?$

Λύση:

1ος τρόπος: αν $u=x^2+1 \Rightarrow du = 3xdx$

$$\int \frac{2x}{\sqrt[3]{x^2+1}}dx = \int \frac{1}{u^{\frac{1}{3}}}du = \frac{u^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}} + c = \frac{3}{2}u^{\frac{2}{3}} + c = \frac{3}{2}(x^2+1)^{\frac{2}{3}} + c$$

2ος τρόπος: αν $u=\sqrt[3]{x^2+1}$ $\Rightarrow u^3=x^2+1 \Rightarrow 3u^2du = 2xdx$

$$\int \frac{2x}{\sqrt[3]{x^2+1}}dx = \int \frac{3u^2}{u}du = 3\int udu = 3\frac{u^2}{2} + c = \frac{3}{2}(\sqrt[3]{x^2+1})^2 + c$$

Μέθοδοι ολοκλήρωσης

Ολοκληρωτικός Λογισμός
μιας μεταβλητής Ι

(Α) Μέθοδος Αντικατάστασης

$$\boxed{\int f(\underbrace{g(x)}_{u}) \cdot \underbrace{g'(x)dx}_{du} = \int f(u)du}$$

Βήμα 1ο : Αντικαθιστώ

u=g(x) & du=g'(x)dx → ψάχνω το ∫f(u)du

Βήμα 2ο : Ολοκληρώνω ως προς u

Βήμα 3ο : Αντικαθιστώ με την αρχική έκφραση g(x) το u

π.χ.: $\int x^2 \sin x^3 dx = ?$

Αν $u=x^3 \Rightarrow du=3x^2dx \Rightarrow 1/3 \cdot du=x^2dx$

Άρα: $\int x^2 \sin x^3 dx = \int \frac{1}{3} \sin u du = -\frac{1}{3}\cos u + c = -\frac{1}{3}\cos x^3 + c$

ΠΡΟΣΟΧΗ: Ενδεχομένως να χρειάζεται για την ολοκλήρωση και περισσότερες της μία αντικατάστασης

Ασκήσεις

Άσκηση 1η : $\int \frac{2x}{x^2+1}dx = ?$

$$u=x^2+1 \Rightarrow du=2xdx \Rightarrow \int \frac{2x}{x^2+1}dx=\int \frac{1}{u}du=\ln|u|+c=\ln|x^2+1|+c$$

Άσκηση 2η : $\int (x+1)^2dx=?$

$$u=x+1 \Rightarrow du=dx \Rightarrow \int (x+1)^2dx=\int u^2du=\frac{u^3}{3}+c=\frac{(x+1)^3}{3}+c$$

Άσκηση 3η : $\int \frac{\cos^5x-3\cos^2x-7}{\cos^4x}\sin x dx=?$

$$\text{Αν } u=\cos x \Rightarrow du=-\sin x dx \ \textit{τότε}:$$

$$-\int \frac{u^5-3u^2-7}{u^4}du=-\int \frac{u^5}{u^4}du+\int \frac{u^2}{u^4}du+7\int \frac{1}{u^4}du=-\frac{\cos x^2}{2}-3\cos^{-1}x-7\frac{\cos x^{-3}}{3}+c$$

Άσκηση 4η : $\int \frac{e^x}{(1+e^x)^2}dx=?$

$$\text{Αν } u=1+e^x \Rightarrow du=e^xdx \Rightarrow \int \frac{e^x}{(1+e^x)^2}dx=\int \frac{1}{u^2}du=-\frac{1}{u}+c=-\frac{1}{1+e^x}+c$$

Άσκηση 5η : $\boxed{\int \tan x dx=?}$

$$\tan x=\frac{\sin x}{\cos x},\ \text{αν } u=\cos x \Rightarrow du=-\sin x dx \Rightarrow \int \tan x dx=-\int \frac{1}{u}du=-\ln|u|+c=-\ln|\cos x|+c$$

Άσκηση: Να κάνετε όμοια για την cotx – Υπόδειξη: u=sinx

Μέθοδος μερικών κλασμάτων

Υπενθύμιση της διαδικασίας:

1. Κάνουμε τα κλάσματα ομώνυμα

2. Αθροίζουμε τα ομώνυμα κλάσματα

3. Απλοποιούμε τα κλάσματα

Παράδειγμα

1ο άθροισμα μερικών κλασμάτων: $\frac{3}{x-3}+\frac{2}{x+1}=$

2ο κάνω ομώνυμα & αθροίζω:

$$=\frac{3\cdot(x+1)}{(x-3)\cdot(x+1)}+\frac{2\cdot(x-3)}{(x-3)\cdot(x+1)}=\frac{3\cdot(x+1)+2\cdot(x-3)}{(x+1)\cdot(x-3)}=$$

3ο τέλος απλοποιώ: $=\frac{5x-3}{x^2-2x-3}$

Άρα για να βρω το $\int\frac{5x-3}{x^2-2x-3}dx$

αρκεί να **<u>κάνω τα βήματα προς τα πίσω (3ο → 2ο → 1ο)</u>**:

$$\int\frac{5x-3}{x^2-2x-3}dx=\int\frac{3}{x-3}dx+\int\frac{2}{x+1}dx=3\cdot\ln|x-3|+c_1+2\cdot\ln|x+1|+c_2$$

(B) Μέθοδος Ρητών Συναρτήσεων

1. Αν ο **βαθμός του αριθμητή < βαθμού του παρονομαστή** :
   αναλύω σε απλά κλάσματα (μέθοδος μερικών κλασμάτων)

2. Αν ο **βαθμού του αριθμητή ≥ βαθμός του παρονομαστή** :

   (i) κάνω την διαίρεση:

   βρίσκω το p(x) σύμφωνα με τα γνωστά

$$\frac{\mathrm{f(x)}}{\mathrm{g(x)}} = p(x) + \frac{v(x)}{h(x)}$$

   (ii) αναλύω σε απλά κλάσματα το $\dfrac{v(x)}{h(x)}$

Μέθοδος Ρητών Συναρτήσεων συνέχεια

Έστω η g(x) έχει ρίζες ε ℝ:

- αν έχει μία ρίζα α: $\frac{\mathrm{f(x)}}{\mathrm{g(x)}} = \frac{\mathrm{A}}{x-a}$
- αν έχει μία ρίζα α πολλαπλότητας ν: $\frac{\mathrm{f(x)}}{\mathrm{g(x)}} = \frac{\mathrm{A}_1}{x-\alpha} + \frac{\mathrm{A}_2}{(x-\alpha)^2} + \frac{\mathrm{A}_3}{(x-\alpha)^3} + \cdots + \frac{\mathrm{A}_\nu}{(x-\alpha)^\nu}$

Έστω η g(x) έχει 2 (ή περισσότερες) ρίζες ε ℝ:

- αν έχει 2 ρίζες, α & β: $\frac{\mathrm{f(x)}}{\mathrm{g(x)}} = \frac{\mathrm{A}}{(x-\alpha)} + \frac{\mathrm{B}}{(x-\beta)}$

ανάλογα για περισσότερες ρίζες

- αν μία ρίζα είναι πολλαπλότητας ν χρησιμοποιούμε και την πολλαπλότητα αυτής όπως στο προηγούμενο

Μέθοδος Ρητών Συναρτήσεων συνέχεια

Έστω η g(x) έχει ρίζες ένα ζευγάρι συζυγών (α ± βi) ϵ ℂ :

- αν έχει ένα ζευγάρι ρίζες συζυγών (α ± βi) : $\frac{\mathrm{f(x)}}{\mathrm{g(x)}} = \frac{\mathrm{A}x + B}{(x-a)^2 + b^2}$

- αν έχει ένα ζευγάρι ρίζες συζυγών (α ± βi) πολλαπλότητας ν:

$$\frac{\mathrm{f(x)}}{\mathrm{g(x)}} = \frac{\mathrm{A}_1 x + B_1}{(x-a)^2 + b^2} + \frac{\mathrm{A}_2 x + B_2}{[(x-a)^2 + b^2]^2} + \frac{\mathrm{A}_3 x + B_3}{[(x-a)^2 + b^2]^3} + \cdots + \frac{\mathrm{A}_\nu x + B_\nu}{[(x-a)^2 + b^2]^\nu}$$

Ασκήσεις

Άσκηση 1η: $$I = \int \frac{5x-3}{x^2-2x-3}\,dx = ?$$

Ο παρονομαστής g(x) έχει 2 ρίζες: {-1, 3} ϵ $\mathbb{R}$

$$\frac{5x-3}{x^2-2x-3} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-3} \Rightarrow \begin{cases} A = 2 \\ B = 3 \end{cases}$$

Άρα: I = $\int \left(\frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-3}\right)dx = 2\ln|x+1| + 3\ln|x-3| + c$

Άσκηση 2η: $$I = \int \frac{x^2+1}{(x-1)(x-2)(x-3)}\,dx = ?$$

Ο παρονομαστής g(x) έχει 3 ρίζες: {1, 2, 3} ϵ $\mathbb{R}$

$$\frac{x^2+1}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x-3} \Rightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = -5 \\ C = 5 \end{cases}$$

Άρα: I = ln|x-1| + 5ln|x-2| - 5|x-3| + c

Ασκήσεις (συνέχεια)

Άσκηση 3η: $\mathrm{I} = \int \frac{6x+7}{(x^2+4x+4)(x+1)}dx = ?$

Ο παρονομαστής g(x) έχει 3 ρίζες: {-1, -2 πολλαπλότητας 2} ϵ $\mathbb{R}$

$$\frac{6x+7}{(x^2+4x+4)(x+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{(x+2)^2} \Rightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = -1 \\ C = 5 \end{cases}$$

Άρα I = ... = $-\frac{5}{x+2} - \ln|x+2| + \ln|x+1| + c$

Άσκηση 4η: $\mathrm{I} = \int \frac{1}{(x^2+1)(x-1)^2}dx = ?$

Ο παρονομαστής g(x) έχει 4 ρίζες: 2 ϵ $\mathbb{C}$ συζυγείς και 1 ϵ $\mathbb{R}$ διπλή

$$\frac{1}{(x^2+1)(x-1)^2} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{C}{x-1} + \frac{D}{(x-1)^2} \Rightarrow \begin{cases} A = 1/2 \\ B = 0 \\ C = -1/2 \\ D = 1/2 \end{cases}$$

Άρα I = $\int [-\frac{1}{2x-1} + \frac{1}{2(x-1)^2} + \frac{x}{2(x^2+1)}]dx = \frac{1}{2}\ln|x-1| - \frac{1}{2(x-1)} + \frac{1}{4}\ln|x^2+1| + c$

Ασκήσεις (συνέχεια)

Άσκηση 5η: $\mathrm{I} = \int \frac{x^3 - 3x + 2}{x^2 - 5x + 6} dx = ?$

Επειδή ο βαθμός αριθμητή ≥ βαθμός παρονομαστή → διαιρώ:

$\underline{x^3+0\cdot x^2-3\cdot x+2}$: $\underline{x^2-5\cdot x+6}$ → Π=x+5, Υ=16·x-28

Δηλ. $\frac{x^3 - 3x + 2}{x^2 - 5x + 6} = (x+5) + \frac{16x - 28}{x^2 - 5x + 6}$

Άρα I = $\int \frac{x^3 - 3x + 2}{x^2 - 5x + 6} dx = \int (x+5) dx + \int \frac{16x - 28}{x^2 - 5x + 6} dx$

Το 2ο ολοκλήρωμα στο 2ο μέλος έχει 2 ρίζες στον παρονομαστή g(x): {2, 3}

$\frac{16x - 28}{x^2 - 5x + 6} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-3} \Rightarrow \begin{cases} A = -4 \\ B = 20 \end{cases}$

& ∫f/g = -4ln|x-2|+20ln|x-3|+c

Τελικά: I = $(x^2/2)$+5x-4·ln|x-2|+20·ln|x-3|+c’

(Γ) Μέθοδος κατά παράγοντες

$$\boxed{\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx}$$

ΠΡΟΣΟΧΗ στην επιλογή της g'(x)

Υπενθύμιση: προέρχεται από την παραγοντοποίηση του γινόμενου:

$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

(έκφραση που έχω αν ολοκληρώσω τον παραπάνω τύπο)

Παράδειγμα: $\int x \cdot e^x dx = ?$

Άρα $\int x \cdot (e^x)' dx = x \cdot e^x - \int x' \cdot e^x dx =$

$$x \cdot e^x - e^x + c = e^x (x-1) + c$$

Ασκήσεις

Άσκηση 1η: $\int x^2 e^x dx = ?$

$$\int x^2 (e^x)' dx = x^2 e^x - \int (x^2)' e^x dx = x^2 e^x - \int 2x e^x dx = x^2 e^x - 2[\overbrace{\int x (e^x)' dx}^{\text{Αναλύω εκ νέου ανά παράγοντες}}] =$$

$$x^2 e^x - 2[x e^x - \int x' e^x dx] = x^2 e^x - 2[x e^x - \int e^x dx] = x^2 e^x - 2(x e^x - e^x) + c$$

Έτσι λύνονται όλα της μορφής **∫p(x)·e^{ax}·dx** , a ∊ $\mathbb{R}^*$

Άσκηση 2η: $\int x \sin 2x dx = ?$

$$\frac{1}{2}\int x(-\cos 2x)' dx = -\frac{1}{2} x \cos 2x + \frac{1}{2}\int \cos 2x dx = -\frac{1}{2} x \cos 2x + \frac{1}{4}\sin 2x + c$$

Όμοια για όλα της μορφής **∫p(x)sin(ax)dx** & **∫p(x)·cos(ax)·dx** , a ∊ $\mathbb{R}^*$

Άσκηση 3η: $\int (4x^3 + 1) \ln x dx = ?$

$$\int (x^4 + x)' \ln x dx = (x^4 + x)\ln x - \int (x^4 + x)\frac{1}{x} dx = (x^4 + x)\ln x - \frac{x^4}{4} - x + c$$

Όμοια για όλα της μορφής **∫p(x)·ln(ax)·dx**, a ∊ $\mathbb{R}^*$

Ασκήσεις (συνέχεια)

Άσκηση 4η: $I = \int e^x \sin(2x)dx = ?$

$$e^x \sin(2x) - 2\int e^x \cos(2x)dx = e^x \sin(2x) - \overbrace{2[\int (e^x)'\cos(2x)dx]}^{\text{Αναλύω εκ νέου ανά παράγοντες}} =$$

$$e^x \sin(2x) - 2[e^x \cos(2x) + 2\int e^x \sin(2x)dx] =$$

$$e^x \sin(2x) - 2e^x \cos(2x) - 4\mathrm{I}$$

$$\acute{A}\rho\alpha \quad 5\mathrm{I} = e^x \sin(2x) - 2e^x \cos(2x) \Rightarrow \mathrm{I} = \frac{e^x \sin(2x)}{5} - \frac{2e^x \cos(2x)}{5}$$

Όμοια για όλα της μορφής **$\int e^{ax}\cdot\cos(ax)\cdot dx$** & **$\int e^{ax}\cdot\sin(ax)\cdot dx$**, $a \in \mathbb{R}^*$

Άσκηση

Μετά από όσα μάθατε, πώς θα βρείτε το:

$$\int \ln x dx = ?$$

Λύση: Επιλέγουμε την (Γ) μέθοδο «κατά παράγοντες»:

$$\int 1 \cdot \ln x \cdot dx = \int (x)' \cdot \ln x \cdot dx = x \cdot \ln x - \int x \cdot (\ln x)' dx =$$

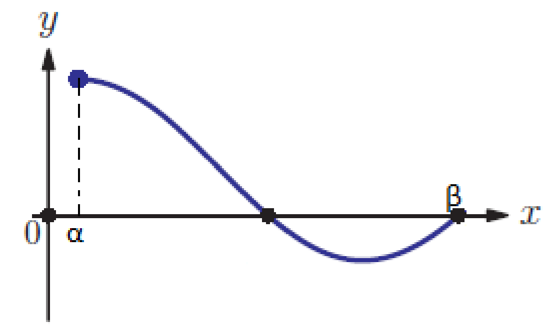
$$= x \cdot \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} \cdot dx = x \cdot \ln x - \int dx = x \cdot \ln x - x + c$$

Ορισμένα ολοκληρώματα

Ολοκληρωτικός Λογισμός

μιας μεταβλητής Ι

Άθροισμα Riemann



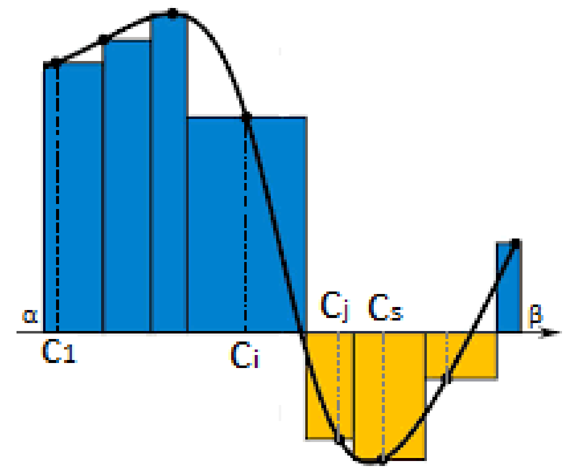
- Έστω f ορισμένη και συνεχής στο [α, β]. Ενδεχομένως το x να παίρνει και αρνητικές τιμές (κάποια $f(x) < 0$ δηλ.).
- Διαμερίζω το [α, β] σε n υποδιαστήματα επιλέγοντας n-1 σημεία: $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ ανάμεσα στα α & β: $\alpha < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < \beta$

Συμβολίζω για ευκολία: $\alpha = x_0$ & $\beta = x_n$

- Καλώ διαμέριση του [α, β] το σύνολο $P=\{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n\}$
- Ορίζουμε στην P εύρος του υποδιαστήματος x_k: $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$
- Σε κάθε υποδιάστημα Δx_k επιλέγω και έναν αριθμό c_k
- Ορθώνω κατακόρυφο ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με την μία βάση στον xx' και την άλλη να περιέχει το $(c_k, f(c_k))$, για κάθε $\Delta x_k \in P$
- Αυτά τα ορθογώνια (με εμβαδόν: $f(c_k) \cdot \Delta x_k$) (δηλ. ύψος x βάση) όλα μαζί προσεγγίζουν τον χώρο μεταξύ του xx' & του γραφήματος C_f της f

Άθροισμα Riemann (συνέχεια)

- Θεωρώ το άθροισμα: $\boxed{S_n = \sum_{k=1}^{n} f(c_k) \cdot \Delta x_k}$



- Λέγεται Άθροισμα Riemann της f στο [a, b]

  και εξαρτάται από:

  a. την διαμέριση P

  b. την επιλογή των σημείων c_k

- Όσο πυκνώνουμε την διαμέριση P είναι φυσικό ότι τα ορθογώνια θα προσεγγίζουν καλύτερα τον χώρο μεταξύ του γραφήματος C_f & του άξονα xx’
- Με άλλα λόγια τα αθροίσματα Riemann συγκλίνουν σε μια οριακή τιμή
- Αποδεικνύεται ότι υπάρχει μία οριακή τιμή όταν το εύρος των υποδιαστημάτων συγκλίνει στο 0 ($\|P\| \to 0$)

Το $\|P\|$ λέγεται λεπτότητα ή μέτρο του P

Ολοκλήρωμα Riemann

Ορισμός:

Αν f συνεχής στο κλειστό [α, β]

P τυχαία διαμέριση του [α, β]

Αν επιλέξω τυχαία $c_k \in [x_{k-1}, x_k]$

Αν υπάρχει αριθμός L=$\lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\cdot \Delta x_k$

η f είναι ολοκληρώσιμη στο [α, β]
(με L το ορισμένο της ολοκλήρωμα)

- Η επιλογή μιας διαμέρισης P με το μεγαλύτερο δυνατό n υποδιαστημάτων ώστε ‖P‖→0, σημαίνει ότι n→ ∞
- Άρα το όριο γράφεται και ως $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\cdot \Delta x_k = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$

Είναι σαν να αθροίζω όλα τα f(x)dx
καθώς x κινείται από το α στο β

Ολοκλήρωμα της f από το α στο β: $\boxed{\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx}$

α = κάτω όριο

β = πάνω όριο

f(x) = η ολοκληρωτέα συνάρτηση

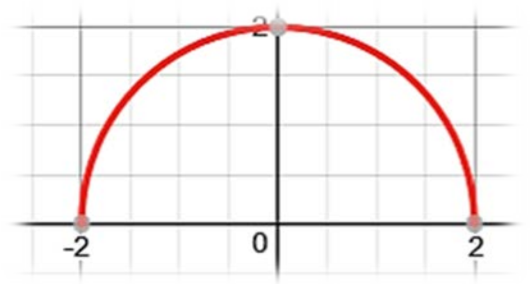
dx = η μεταβλητή ολοκλήρωσης

Μέση τιμή

Ορισμός:

Έστω f ολοκληρώσιμη στο [α, β], τότε η μέση τιμή της στο [α, β] είναι ίση με:

$$M.T. = av(f) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$



Παράδειγμα:

Ποια η μέση τιμή στο [-2, 2] της f(x)= $\sqrt{4-x^2}$

Το εμβαδόν της περιοχής ισούται με E=(1/2)πr^2=2π

Αυτό το εμβαδόν είναι ίσο με το $\int_{-2}^{2}\sqrt{4-x^2}dx$

Άρα η μέση τιμή της θα είναι:

$$av(f) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = \frac{1}{2-(-2)}\int_{-2}^{2}\sqrt{4-x^2}dx = \frac{1}{4}(2\pi) = \frac{\pi}{2}$$

Θεώρημα συνέχειας & ολοκληρώματος

Από τα προηγούμενα έχουμε ως αποτέλεσμα:

Όλες οι συνεχείς συναρτήσεις είναι ολοκληρώσιμες

δηλ. αν f συνεχής στο [α, β], τότε υπάρχει και το ορισμένο ολοκλήρωμα της f στο [α, β]

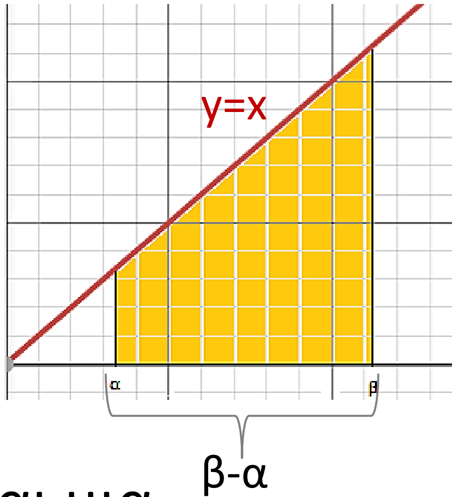
Εμβαδόν κάτω από το γράφημα (f(x)≥0)

Έστω y=f(x) ≥ 0 στο [α, β]
& y ολοκληρώσιμη στο [α, β] $\Rightarrow$ το χωρίο μεταξύ της καμπύλης C_f από το α στο β στον άξονα xx' δίνεται από το : $\displaystyle\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$

π.χ.: f(x)=x, πόσο είναι το εμβαδόν μεταξύ C_f και xx' από το α στο β;

Το χωρίο μεταξύ την C_f και xx' είναι ένα τραπέζιο με βάσεις α και β και ύψος (β-α)

(Εμβαδόν = ύψος · ημιάθροισμα βάσεων)



Άρα $$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = (\beta-\alpha)\cdot\frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{\beta^2}{2} - \frac{\alpha^2}{2}$$

Παρατήρηση: Από το π.χ. η ποσότητα $g(x)=x^2/2$ είναι μια αντιπαράγωγος της f(x)=x, άρα όπως θα δούμε και στην συνέχεια:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = g'(x)\big|_{x=\beta} - g'(x)\big|_{x=\alpha} = \frac{\beta^2}{2} - \frac{\alpha^2}{2}$$

Ιδιότητες ορισμένου ολοκληρώματος

- Αν α>β, τότε: $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = -\int_{\beta}^{\alpha} f(x)dx$

εφόσον f συνεχής στο [α, β] υπάρχει min & max

- Αν maxf και minf η μέγιστη & η ελάχιστη τιμή της f στο [α,β], τότε:

$$\min f \cdot (\beta\text{-}\alpha) \le \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx \le \max f \cdot (\beta\text{-}\alpha)$$

- $\int_{\alpha}^{\alpha} f(x)dx = 0$

- $\int_{\alpha}^{\beta} \kappa \cdot f(x)dx = \kappa \cdot \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx, \quad \forall \kappa \in \mathbb{R}$

Με άλλα λόγια το minf·(β-α) είναι ένα κάτω φράγμα του ολοκληρώματος στο [α, β] (& maxf·(β-α) είναι ένα άνω φράγμα του)

- $\int_{\alpha}^{\beta} (f(x) \pm g(x))dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx \pm \int_{\alpha}^{\beta} g(x)dx$

- $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx + \int_{\beta}^{\gamma} f(x)dx = \int_{\alpha}^{\gamma} f(x)dx$

- Αν $f(x) \ge g(x)$ στο $[\alpha,\beta] \Rightarrow \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx \ge \int_{\alpha}^{\beta} g(x)dx$

ισχύει και για g(x)=0

Παραδείγματα

Βρείτε τις παρακάτω παραστάσεις αν γνωρίζετε ότι:

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = 5 \qquad \int_{1}^{4} f(x)dx = -2 \qquad \int_{-1}^{1} h(x)dx = 7$$

1. $\int_{4}^{1} f(x)dx = -\int_{1}^{4} f(x)dx = -(-2) = 2$

2. $\int_{-1}^{1} [2f(x) + 3h(x)]dx = 2\int_{-1}^{1} f(x)dx + 3\int_{-1}^{1} h(x)dx = 2 \cdot 5 + 3 \cdot 7 = 31$

3. $\int_{-1}^{4} f(x)dx = \int_{-1}^{1} f(x)dx + \int_{1}^{4} f(x)dx = 5 + (-2) = 3$

Παράδειγμα

Να δείξετε ότι: $\int_0^1 \sqrt{1+\cos x}\,dx < \frac{3}{2}$

Από την τελευταία ιδιότητα έχουμε ότι:

- το minf·(β-α) είναι ένα κάτω φράγμα της f στο [0, 1]
- & το maxf·(β-α) ένα άνω φράγμα της f στο [0, 1]

Η μέγιστη τιμή της $\sqrt{1+\cos x}$ γίνεται όταν το cosx γίνεται μέγιστο, δηλ. όταν cosx = 1 (⇔ x = 0 ή 2π), άρα maxf = √2

Άρα: $\int_0^1 \sqrt{1+\cos x}\,dx \le \sqrt{2}\cdot(1-0) = \sqrt{2} = 1,44.. < \frac{3}{2}$

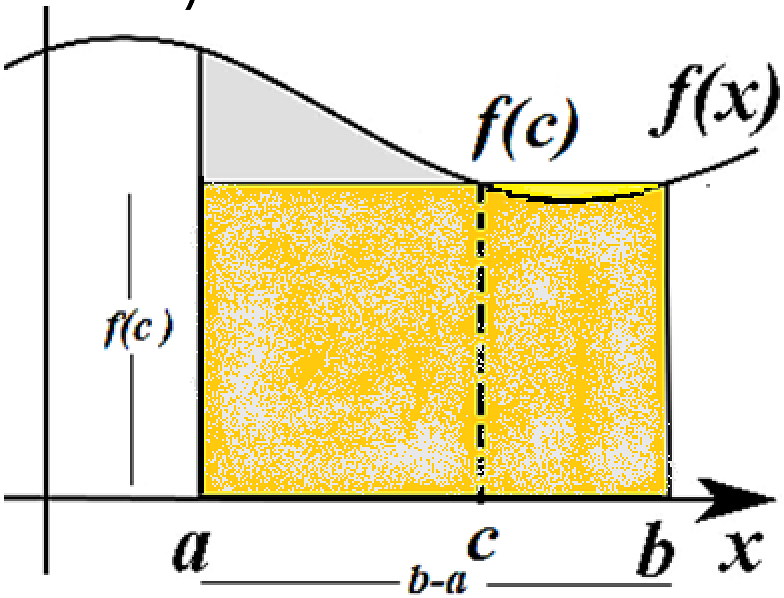
Θεώρημα Μέσης Τιμής (ΘΜΤ)

(ολοκληρωτικού λογισμού)

Έστω f συνεχής στο [α, β]. Υπάρχει c ϵ [α, β], η μέση τιμή της f στο [α, β] : $f(c) = \dfrac{\int_{\alpha}^{\beta} f(x)}{\beta - \alpha}$

Γεωμετρικά:

$$f(c)\cdot(b-a) = \int_{a}^{b} f(x)dx$$



δηλ.,

το εμβαδόν του παραλληλογράμμου (κίτρινο και κίτρινο -γκρι) **είναι ίσο** με το ολοκλήρωμα από α σε b (χωρίο γκρι και κίτρινο-γκρι κάτω από την C_f από το α στο b).

Παραδείγματα

Παράδειγμα 1ο: (α) Ποια η μέση τιμή της f(x)=4-x στο [0, 3];

(β) Σε ποιο σημείο του Π.Ο.(f) η f παίρνει αυτήν την τιμή;

Λύση: (α) $$\mathrm{M.T.} = \frac{\int_{\alpha}^{\beta} \mathrm{f(x)dx}}{\beta\text{-}\alpha} = \frac{\int_{0}^{3} (4\text{-x})\mathrm{dx}}{3\text{-}0} = \frac{1}{3}\left(\int_{0}^{3} 4\mathrm{dx} - \int_{0}^{3} \mathrm{xdx}\right) = \frac{5}{2}$$

(β) Αφού f(x)=4-x=5/2 στο [0, 3] ⇒ x = 3/2

Παράδειγμα 2ο: Να δ.ό.

$$\left.\begin{array}{l} \text{Αν f συνεχής στο } [\alpha, \beta],\ \alpha \neq \beta \\ \& \quad \int_{\alpha}^{\beta} \mathrm{f(x)dx} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{c} \mathrm{f(x)} = 0 \\ \text{τουλάχιστον} \\ \text{μία φορά στο } [\alpha, \beta] \end{array}$$

Λύση:

$$\mathrm{M.T.} = \frac{\int_{\alpha}^{\beta} \mathrm{f(x)dx}}{\beta - \alpha} = \frac{0}{\beta - \alpha} = 0$$

, άρα από ΘΜΤ υπάρχει ξ ϵ [α, β]: f(ξ)=0

I. Θεώρημα ύπαρξης παράγωγου (ΘΥΠ)

Έστω f (t) **συνεχής** σε κλειστό διάστημα
και έστω α τυχαίο σταθερό σημείο

$$\left.\begin{array}{l}\\\end{array}\right\} \Rightarrow F(x)=\int_{\alpha}^{x} f(t)dt \text{ είναι}$$

μια παράγωγος της f

Με άλλα λόγια: $F'(x)=(\int_{\alpha}^{x} f(t)dt)'= f(x)$

το ολοκλήρωμα δηλώνει το εμβαδόν από το α στο x μεταξύ της C_f και του άξονα xx'

ή ακόμη και σε μορφή Leibnitz: $\dfrac{d}{dx}F(x)=\dfrac{d}{dx}\int_{\alpha}^{x} f(t)dt = f(x)$

Παρατήρηση: Από το Θεώρημα και την παραγώγιση σύνθετης συνάρτησης έχουμε ότι: $(\int_{\alpha}^{g(x)} f(t)dt)'= f(g(x))\cdot g'(x)$

π.χ.: $(\int_{0}^{x^3} \ln(t)dt)'=\ln(x^3)\cdot(x^3)'=9x^2\ln(x)$

Τι μας λέει το ΘΥΠ

1. Η διαφορική εξίσωση dF(x)/dx=f(x) έχει λύση για κάθε f που είναι συνεχής

2. Κάθε f συνεχής είναι παράγωγος άλλης συνάρτησης: της $\int_{\alpha}^{x} f(t)dt$

$$\text{δηλ. } \frac{d}{dx}\int_{\alpha}^{x} f(t)dt = \left(\int_{\alpha}^{x} f(t)dt\right)' = f(x)$$

3. Κάθε f συνεχής έχει αντιπαράγωγο (π.χ. την F(x): F'(x)=f(x))

4. Οι έννοιες της παραγώγου και του ολοκληρώματος είναι έννοιες 'αντίστροφες' η μία της άλλης

Παραδείγματα

Παράδειγμα 1ο: $\frac{d}{dx}\int_0^x \cos(t)dt = ?$ & $\frac{d}{dx}\int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt = ?$

$$\frac{d}{dx}\int_0^x \cos(t)dt = \cos(x) \quad \& \quad \frac{d}{dx}\int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt = \frac{1}{1+x^2}$$

Παράδειγμα 2ο: (με συνδυασμό του κανόνα αλυσιδωτής παραγώγισης)

$$\frac{dy}{dx} = ? \quad \text{αν} \quad \mathrm{y} = \int_1^{x^2} \cos(\mathrm{t})\mathrm{dt}$$

- Εδώ το άνω όριο δεν έχει x αλλά x^2, δηλ. έχω σύνθετη συνάρτηση

$$\mathrm{y} = \int_1^{u} \cos(\mathrm{t})\mathrm{dt} \quad \& \quad \mathrm{u} = \mathrm{x}^2$$

- . $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx} = (\frac{d}{du}\int_1^{u} \cos(\mathrm{t})\mathrm{dt})\cdot\frac{du}{dx} = \cos(u)\cdot 2x = 2x\cos(\mathrm{x}^2)$

Παραδείγματα (συνέχεια)

Παράδειγμα 3ο: (με μεταβλητό κάτω όριο ολοκλήρωσης)

$$\frac{dy}{dx} = ? \quad \text{αν} \quad (\alpha)\ y = \int_x^3 3t\sin(t)dt \quad \& \quad (b)\ y = \int_{1+3x^2}^4 \frac{1}{2+t^2} dt$$

(a) $$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\int_x^3 3t\sin(t)dt = -\frac{d}{dx}\int_3^x 3t\sin(t)dt = -3x\sin x$$

(b) $$\left.\begin{array}{l} \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_{1+3x^2}^4 \frac{1}{2+t^2} dt = -\frac{d}{dx}\int_4^{1+3x^2} \frac{1}{2+t^2} dt \\ \text{Αν } u = 1+3x^2 \Rightarrow du = 6x dx \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$-\frac{d}{dx}\int_4^{1+3x^2} \frac{1}{2+t^2} dt = -\frac{1}{2+(1+3x^2)^2}\cdot\frac{d}{dx}(1+3x^2) = -\frac{2x}{1+2x^2+3x^4}$$

II. Θεώρημα υπολογισμού ολοκληρώματος (ΘΥΟ)

Εστω f **συνεχής** σε κάθε x ϵ [α, β]
& F μία αντιπαράγωγός της στο [α, β]

$$\Rightarrow \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = F(\beta) - F(\alpha)$$

(συμβολ. $[F(x)]_{\alpha}^{\beta}$)

Απόδειξη:

- Από το ΘΥΠ (δηλ. το 1ο Μέρος):
  υπάρχει αντιπαράγωγος G(x) της f(x): $G(x) = \int_{\alpha}^{x} f(t)dt$
- Άρα αν F μία άλλη τυχαία αντιπαράγωγος της f ⇒ F(x) = G(x) + c
- Τότε F(β) – F(α) = [G(β) + c] – [G(α) + c] = G(β) – G(α) =

$$= \int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt - \int_{\alpha}^{\alpha} f(t)dt = \int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt - 0 = \int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt$$

Πόρισμα: Αν f'(x) = g'(x), ∀ x ϵ [α, β] ⇒ ∃ c ϵ $\mathbb{R}$:

f(x) = g(x) + c, ∀ x ϵ [α, β]

Τι μας λέει το ΘΥΟ

- Ότι **για να βρούμε οποιοδήποτε ορισμένο ολοκλήρωμα**
  - ΔΕΝ χρειάζονται όρια (lim),
  - ΔΕΝ χρειάζονται αθροίσματα Riemann,

  αλλά **η εύρεση μιας αντιπαραγώγου**

- **Πώς βρίσκουμε το** $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$ **?**
  - <u>Βήμα 1ο</u>: Βρίσκω μια αντιπαράγωγο F της f.

    Οποιαδήποτε μας κάνει, προτιμάμε μια απλή
  - <u>Βήμα 2ο</u>: Υπολογίζω το F(β) – F(α)
  - <u>Βήμα 3ο</u>: Το αποτέλεσμα είναι το $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$

Παράδειγμα

$$\int_{-1}^{3}(x^3+1)dx = ?$$

Μια αντιπαράγωγος της (x^3+1) είναι η [(x^4/4)+x]

Άρα: $$\int_{-1}^{3}(x^3+1)dx = [\frac{x^4}{4}+x]_{-1}^{3} = 24$$

ΠΡΟΣΟΧΗ:

Άρα εύκολα ολοκληρώνουμε και βρίσκουμε το εμβαδόν (χωρίο) μεταξύ μιας καμπύλης C_f και του άξονα xx'.

Προσοχή όμως στο χωρίο που βρίσκεται κάτω από τον άξονα xx', το οποίο πρέπει να υπολογιστεί σε απόλυτη τιμή και να προστεθεί σε αυτό που βρίσκεται πάνω από τον άξονα.

Άσκηση

Πόσο είναι το εμβαδόν που περικλείεται μεταξύ της καμπύλης C_f και του άξονα xx', αν $f(x)=x^3-x^2-2x$, $-1 \le x \le 2$

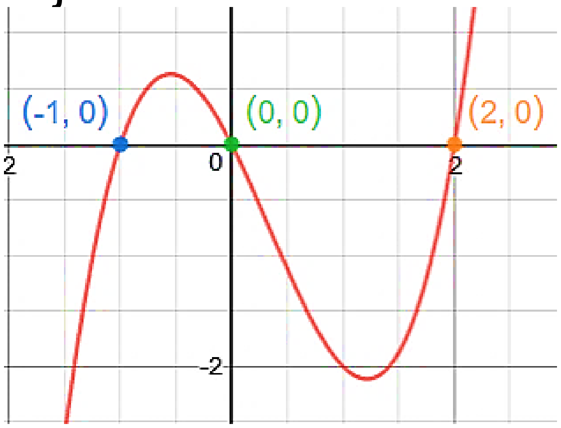
Λύση:

1°) Βρίσκω τα σημεία: f(x) = 0 …. → είναι τα {-1, 0, 2}

2°) Τα σημεία {-1, 0, 2} διαμερίζουν το [-1, 2] έ.ώ.

(α) στο [-1, 0] η f(x) είναι θετική

(β) στο [0, 2] η f(x) είναι αρνητική



"Ερασιτεχνικά" βρίσκω αν f(x) >0 ή <0 βάζοντας τιμές από τα διαστήματα

3°) (α) στο [-1, 0] : $\int_{-1}^{0} f(x)dx = [\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - x^2]_{-1}^{0} = \frac{5}{12}$

(β) στο [0, 2] : $\int_{0}^{2} f(x)dx = [\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - x^2]_{0}^{2} = -\frac{8}{3}$

4°)Άρα το εμβαδόν είναι: 5/12+|-8/3|=37/12

Angelos Giannoulas

Μέθοδοι ολοκλήρωσης

Ολοκληρωτικός Λογισμός
μιας μεταβλητής Ι

Ολοκλήρωση κατά παράγοντες

Έστω f, g που ορίζονται στο [α, β] & τ.ώ. f’ & g’ συνεχείς στο [α, β]:

$$\boxed{\int_{\alpha}^{\beta} f(x)g'(x)dx = [f(x)\cdot g(x)]_{\alpha}^{\beta} - \int_{\alpha}^{\beta} f'(x)g(x)dx}$$

π.χ.:

$$\int_{0}^{\pi/2} x\cos x dx = ?$$

Περιπτώσεις κατά παράγοντες

Οι επόμενες μορφές ολοκληρωμάτων αντιμετωπίζονται στην επίλυσή τους σε ολοκλήρωση κατά παράγοντες:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) \cdot g(x) dx$$

όπου g(x) της μορφής:

$\sin(\lambda x+\kappa)$

$\cos(\lambda x+\kappa)$

$e^{\lambda x+\kappa}$

$\ln(\lambda x+k)$

και συνδυασμός τους

$\lambda, \kappa \in \mathbb{R}$

Ασκήσεις

1. Να βρεθεί το ολοκλήρωμα I = $\int_0^{\pi/2} (x^2 + x + 1) \cdot e^{3x-1} dx = ?$

2. Να βρεθεί το ολοκλήρωμα $I = \int_0^1 (3x^2 + 2x + 1) \cdot \ln(3x) dx$

3. Να βρεθεί το ολοκλήρωμα $I = \int_0^{\pi/2} (x^2 + x + 1) \cdot \sin(3x + 1) dx$

Ολοκλήρωση με αντικατάσταση

$$\boxed{\int_{\alpha}^{\beta} f(g(x)) \cdot g'(x)dx = \int_{g(\alpha)}^{g(\beta)} f(u)du}$$

με u=g(x) & du = g’(x)dx

π.χ.:

$$\int_{-1}^{1} 3x^2\sqrt{x^3+1}dx = ?$$

Ασκήσεις

Άσκηση 1η: $\displaystyle\int_1^2 \frac{x^2+x-1}{x}dx = ?$

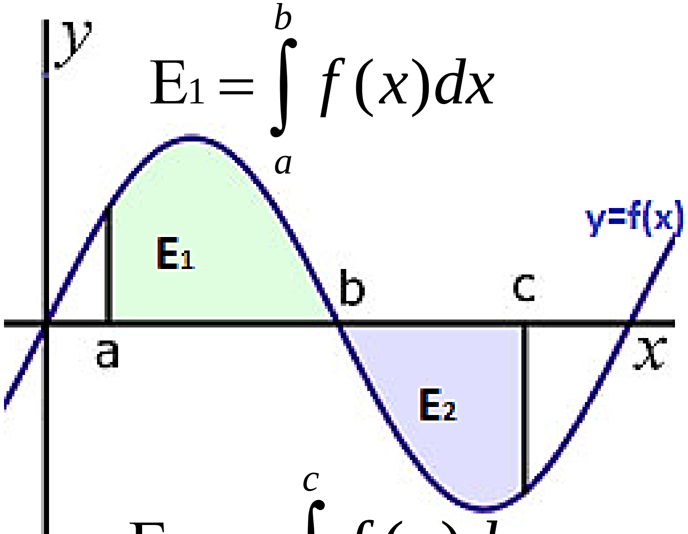
Άσκηση 2η: $\displaystyle\int_1^4 \frac{x-1}{\sqrt{x}}dx = ?$

Άσκηση 3η: $\displaystyle\int_{-1}^5 |x-2|dx = ?$

Εμβαδόν μεταξύ καμπύλης & άξονα

Έως τώρα είδαμε τις περιπτώσεις:

$$E_1 = \int_a^b f(x)dx$$



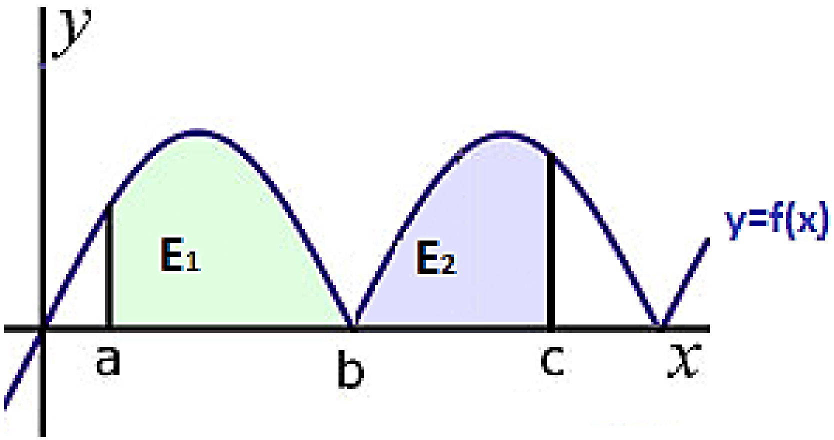
$$E_2 = -\int_b^c f(x)dx$$

Άρα

$$E_{ολικό} = E_1 + E_2 = \int_a^b f(x)dx - \int_b^c f(x)dx$$

ή ακόμη:

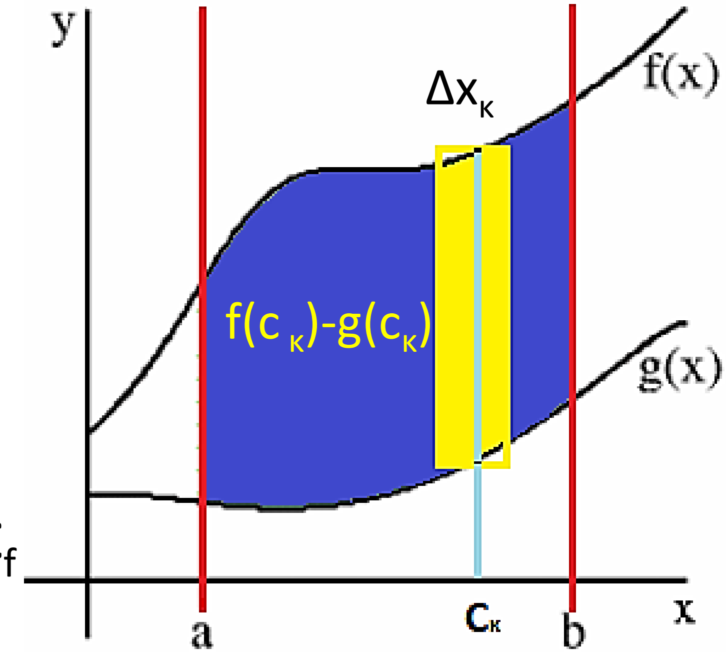
$$E_{ολικό} = \int_a^c | f(x) | dx$$

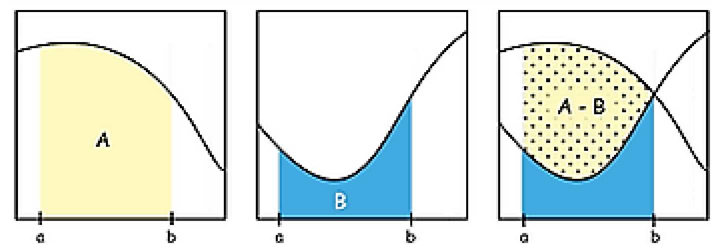


Εμβαδόν μεταξύ καμπυλών

Αν πράξουμε όπως πριν:

- με μία διαμέριση P του [α, β] και
- τα αθροίσματα των χωρίων όταν το εύρος των υποδιαστημάτων $\|P\| \to 0$
- με την διαφορά ότι P δεν αφορά την C_f καμπύλη της f(x) με τον xx’, αλλά την C_f της f(x) με την καμπύλη C_g της g(x)





τότε το εμβαδόν E που περικλείεται μεταξύ αυτών είναι:

$$\mathrm{E} = \lim_{\|\mathrm{P}\| \to 0} \sum_{\kappa=1}^{n} [f(c_\kappa) - g(c_\kappa)] \cdot \Delta x_\kappa = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx$$

Εύρεση εμβαδού μεταξύ καμπυλών

Ορισμός:

- Έστω f, g συνεχείς στο [α, β]
- Έστω f(x) ≥ g(x), για κάθε x ϵ [α, β]

$\Rightarrow$

το εμβαδόν Ε μεταξύ f(x) και g(x) από το α στο β:

$$\boxed{\mathrm{E} = \int_{\alpha}^{\beta} [f(x) - g(x)]dx}$$

Τα βήματα εύρεσης για το εμβαδόν μεταξύ 2 καμπυλών

Βήμα 1ο: Κάνουμε τα γραφήματα των C_f & C_g ώστε να δούμε ποια από τις 2 είναι 'πάνω' και ποια 'κάτω'

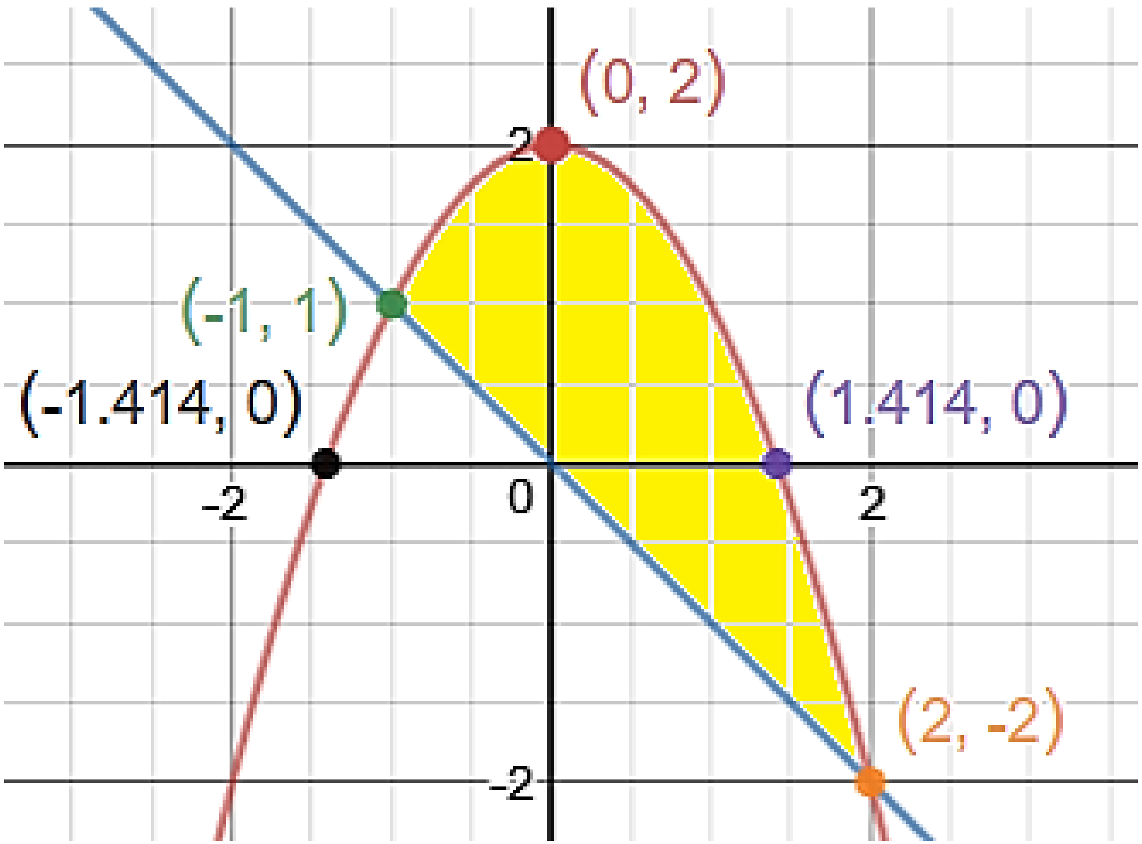
Βήμα 2ο: Βρίσκουμε τα όρια ολοκλήρωσης (αν δεν δίνονται ήδη)

Βήμα 3ο: Αναπτύσσουμε την [f(x)-g(x)] (**θεωρώντας την f(x) από 'πάνω'**) και την απλοποιούμε όσο γίνεται

Βήμα 4ο: Ολοκληρώνουμε από το α στο β. Το αποτέλεσμα είναι το εμβαδόν που ψάχνουμε

Παράδειγμα

Ποιο το εμβαδόν Ε μεταξύ της παραβολής $y=2-x^2$ & της ευθείας $y=-x$;



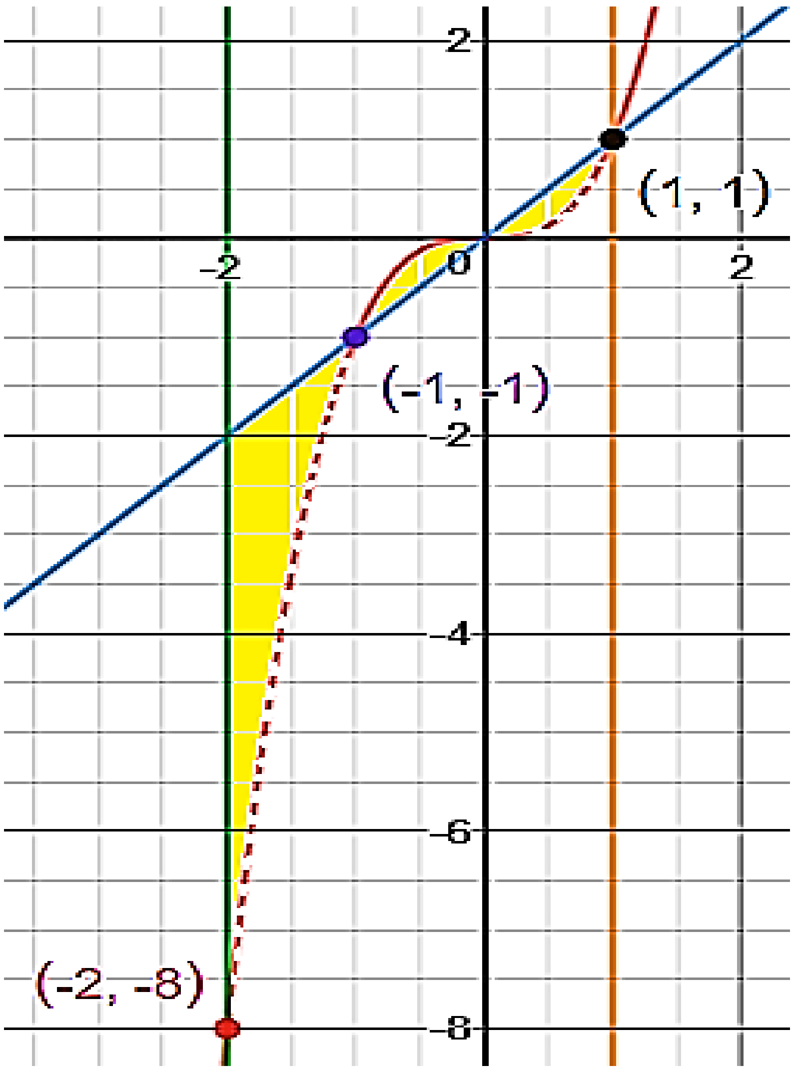
Άσκηση

Ποιο το εμβαδόν Ε μεταξύ των

$f(x) = x^3$

$g(x) = x$

των ευθειών: $x = -2$ & $x = 1$



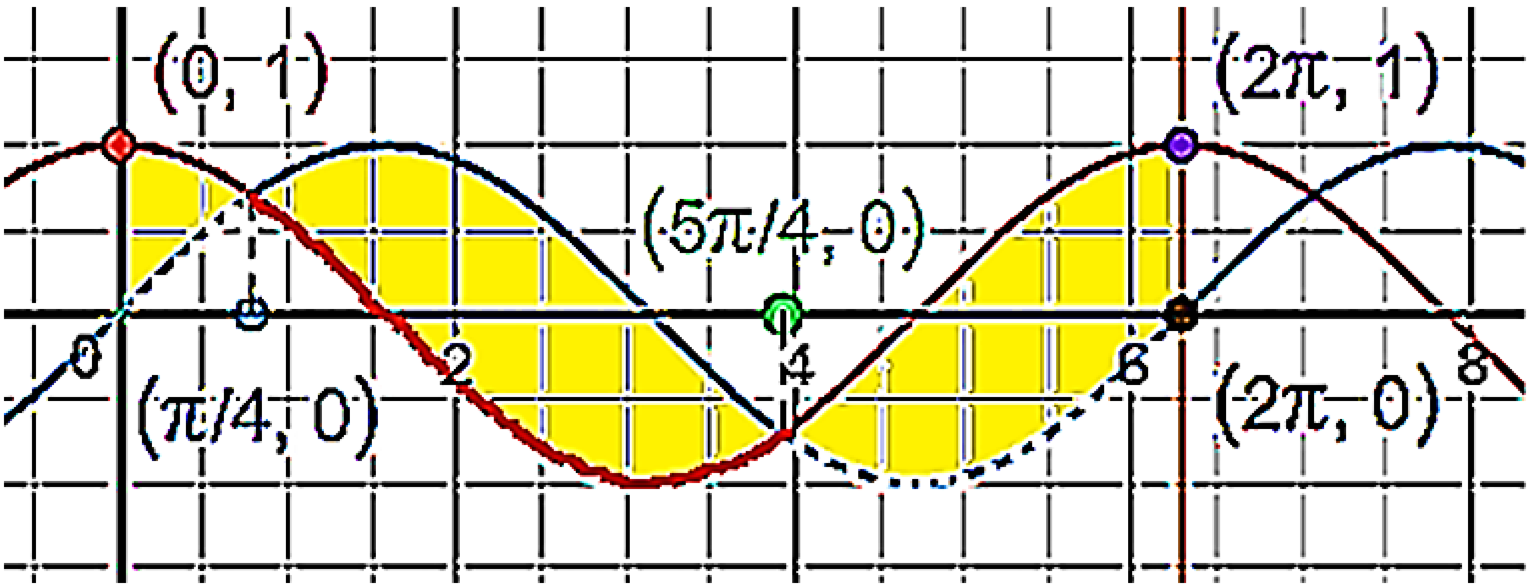
Άσκηση

Ποιο το εμβαδόν Ε μεταξύ των

f(x) = sinx

g(x) = cosx

των ευθειών: x = 0 & x = 2π



Γενικευμένα ολοκληρώματα

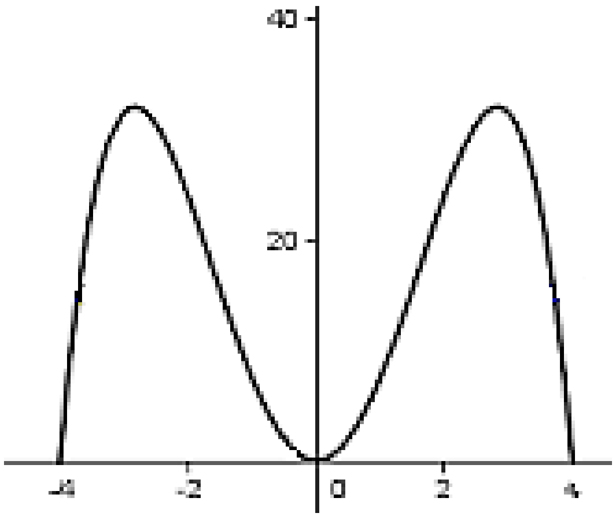
Ολοκληρωτικός Λογισμός
μιας μεταβλητής Ι

Μία πρώτη γνώση

Έως τώρα είδαμε ότι στα ορισμένα ολοκληρώματα πρέπει να ισχύουν 2 συνθήκες:

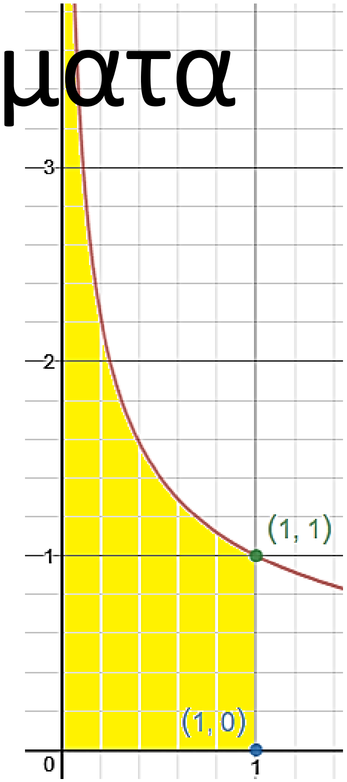
1. το διάστημα ολοκλήρωσης να είναι γνωστό, από το α στο β

2. το πεδίο τιμών της ολοκληρωτέας συνάρτησης να είναι πεπερασμένο

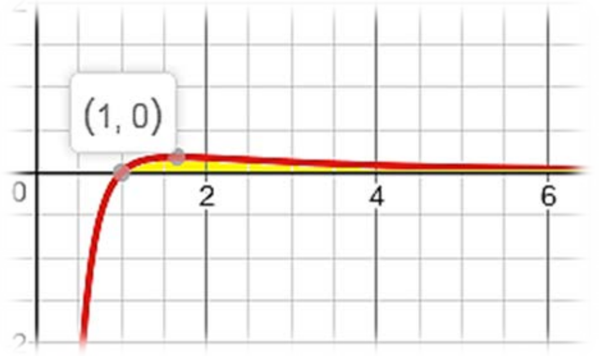


Διαφορετικά παραδείγματα

Στην πράξη δεν ισχύει πάντα αυτό:



- **π.χ. 1ο:** για το εμβαδόν κάτω της καμπύλης C_f της f, όπου $f(x) = 1/\sqrt{x}$ από το $x=0$ στο $x=1$



- **π.χ. 2ο:** για το εμβαδόν μεταξύ της καμπύλης C_f της f, και του άξονα xx', όπου $f(x) = \ln x/x^2$ από το $x=1$ στο $x= +\infty$

Πώς εργαζόμαστε

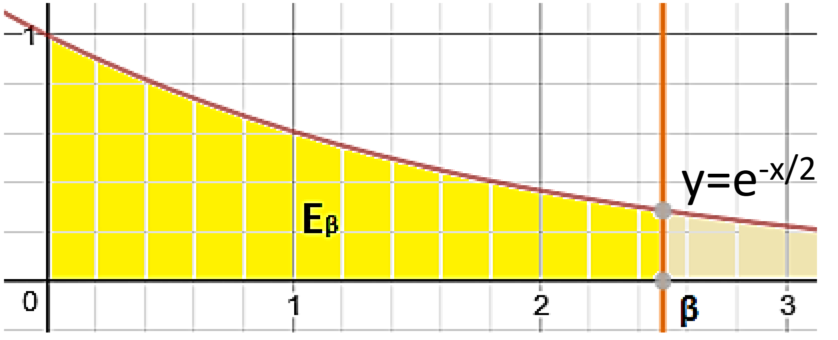
- Βρίσκουμε την λύση για ένα διάστημα «πεπερασμένο» (ώστε να «προσεγγίζει» οριακά το ζητούμενο διάστημα)

- Ελέγχουμε τις αλλαγές καθώς «προσεγγίζουμε» το άπειρο

Άπειρα όρια

Έστω $y=e^{-x/2}$

Ίσως κάποιος να θεωρήσει ότι το εμβαδόν μεταξύ y=f(x) & xx' είναι άπειρο. **Αντιθέτως εμείς θα του δώσουμε 'πεπερασμένη τιμή'**



1. Αρχικά υπολογίζουμε την τιμή από το 0 έως την ευθεία x=β:

$$E_\beta = \int_0^\beta e^{-x/2}dx$$

2. Στη συνέχεια κάνουμε το ίδιο καθώς το β τρέχει στο + ∞:

$$\lim_{\beta\to+\infty} E_\beta$$

3. Άρα:

$$E = \int_0^{+\infty} e^{-x/2}dx = \lim_{\beta\to+\infty}\int_0^\beta e^{-x/2}dx$$

Γενικευμένα ολοκληρώματα με άπειρα όρια ολοκλήρωσης

Ορισμός: Τα ολοκληρώματα με όρια το ± ∞ λέγονται γενικευμένα

i. Αν f συνεχής στο [α, +∞) ⇒ $\int_{\alpha}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{\beta \to +\infty} \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$

ii. Αν f συνεχής στο (-∞, β] ⇒ $\int_{-\infty}^{\beta} f(x)dx = \lim_{\alpha \to -\infty} \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$

iii. Αν f συνεχής στο (-∞, +∞) ⇒ $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)dx$

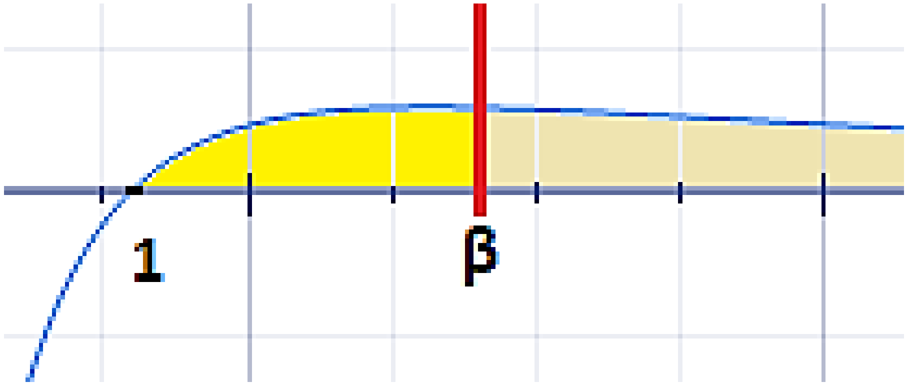
όπου c τυχαίος αριθμός (όποιος μας εξυπηρετεί)

Παρατήρηση:

- Στα (i) & (ii) αν το **όριο** δεν υπάρχει ⇒ το ολοκλήρωμα ‘αποκλίνει’
- Στο (iii) αν ένα από τα 2 ολοκληρώματα του αθροίσματος δεν υπάρχει ⇒ το ολοκλήρωμα ‘αποκλίνει’

Παραδείγματα

1. Πόσο είναι το εμβαδόν Ε από x=1 έως x=+∞ μεταξύ xx’ & $y=(\ln x)/x^2$



$$2. \int_{1}^{+\infty} \frac{1}{x^k} dx = ?$$

Κριτήρια σύγκλισης ή απόκλισης

Όταν αδυνατούμε με τις συνήθεις πράξεις να βρούμε ένα γενικευμένο ολοκλήρωμα ελέγχουμε αν:

1. το ολοκλήρωμα αποκλίνει (οπότε και σταματάμε κάθε προσπάθεια επίλυσης)

   ή

2. το ολοκλήρωμα συγκλίνει , αν ναι χρησιμοποιούμε αριθμητικές μεθόδους ώστε να «προσεγγίσουμε» την τιμή του ολοκληρώματος, με:
   - το «**Κριτήριο της άμεσης σύγκλισης**» &
   - το «**Οριακό Κριτήριο του λόγου**»

Θεώρημα: Κριτήριο άμεσης σύγκρισης

$$\left.\begin{array}{l}\text{Αν f, g συνεχείς στο } [\alpha, +\infty) \\ \& \quad 0 \le f(x) \le g(x) \quad \forall\, x \ge \alpha\end{array}\right\} \text{ τότε:}$$

$$\left\{\begin{array}{l}\text{(i)} \displaystyle\int_{\alpha}^{+\infty} f(x)dx \text{ συγκλίνει αν } \int_{\alpha}^{+\infty} g(x)dx \text{ συγκλίνει} \\ \text{(ii)} \displaystyle\int_{\alpha}^{+\infty} g(x)dx \text{ αποκλίνει αν } \int_{\alpha}^{+\infty} f(x)dx \text{ αποκλίνει}\end{array}\right.$$

Παραδείγματα:

1ο π.χ.: $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x}dx$ συγκλίνει ?

2ο π.χ.: $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2 - 0,1}}dx$ αποκλίνει ?

Angelos Giannoulas

Θεώρημα: Κριτήριο του λόγου

Αν f, g συνεχείς στο [α, + ∞)
& 0 ≤ f(x) & 0 ≤ g(x) ∀ x ≥ [α, + ∞)

τότε αν: $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L$ $\Rightarrow$

$0 < L < +\infty$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \int_a^{+\infty} f(x)dx \\ \int_a^{+\infty} g(x)dx \end{array} \right.$$

συγκλίνουν ή αποκλίνουν ταυτόχρονα

δηλ. ψάχνω να δω αν μία
εκ των δύο συγκλίνει ή αποκλίνει

ΠΡΟΣΟΧΗ: Το ότι ίσως βρούμε ότι f και g συγκλίνουν, δεν σημαίνει ότι έχουν το ίδιο όριο

Παράδειγμα

Ελέγξτε αν οι διπλανές συναρτήσεις συγκλίνουν στο [1, +∞)

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

$$g(x) = \frac{1}{x^2}$$

Παραδείγματα

$$\int_0^\infty e^{-3x} = ?$$

$$\int_2^\infty \frac{1}{x}dx = ?$$

$$\int_0^\infty \sin x dx = ?$$

Παραδείγματα

Παράδειγμα 1ο: Να δ. ό. $\int_0^{+\infty} e^{-sx}dx = \frac{1}{s}$ για s>0

Παράδειγμα 2ο: Να δ. ό. $\int_0^{+\infty} e^{-sx}\cdot c\cdot dx = \frac{c}{s}$ για s>0

Ασκήσεις

Άσκηση 1η: Να δ.ό. $\int_{0}^{+\infty} xe^{-sx} \cdot dx = \frac{1}{s^2}$, s>0

Άσκηση 2η: Να δ.ό. $\int_{0}^{+\infty} e^{ax} \cdot e^{-sx} dx = \frac{1}{s-a}$, για s>α

Το εκθετικό ολοκλήρωμα

Το εκθετικό ολοκλήρωμα έχει τη μορφή:

$$\int_{a}^{+\infty} e^{-\lambda x} dx = ? \quad \text{με } \alpha, \lambda \in \mathbb{R}$$

το εκθετικό συγκλίνει **αν και μόνο αν** λ > 0 και είναι ίσο με:

$$\boxed{\int_{a}^{+\infty} e^{-\lambda x} dx = \frac{e^{-\lambda \alpha}}{\lambda} \quad \forall\ \lambda>0}$$

Άσκηση: Να δ.ό. το:

$$I = \int_{0}^{+\infty} \sin x \cdot e^{-sx} dx = \frac{1}{s^2+1} \quad , s>0$$

Αλγεβρικές διαδικασίες

Ολοκληρωτικός Λογισμός
μιας μεταβλητής Ι

Απλοποίηση με αντικατάσταση

$$\int \frac{2x-9}{\sqrt{x^2-9x+1}}\,dx = ?$$

Απαλοιφή τετραγωνικής ρίζας

$$\int_0^{\pi/4} \sqrt{1+\cos 4x}\,dx = ?$$

(1+cos2θ)/2=cos²θ

Αναγωγή καταχρηστικού κλάσματος

(**Ορισμός**: **Καταχρηστικό κλάσμα** είναι αυτό του οποίου ο βαθμός του αριθμητή είναι μεγαλύτερος από τον βαθμό του παρονομαστή)

$$\int \frac{3x^2 - 7x}{3x+2}dx = ?$$

Ολοκλήρωση κατά παράγοντες

- Στα ολοκληρώματα ΔΕΝ ισχύει η ολοκλήρωση γινομένου. Στην περίπτωση ολοκλήρωσης γινομένου χρησιμοποιούμε την **ολοκλήρωση κατά παράγοντες**:

$$\frac{d}{dx}(uv) = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx} \Rightarrow \int \frac{d}{dx}(uv)dx = \int u\frac{dv}{dx}dx + \int v\frac{du}{dx}dx \Rightarrow uv = \int udv + \int vdu \Rightarrow$$

$$\boxed{\int udv = uv - \int vdu}$$

- & αντίστοιχα για τα ορισμένα ολοκληρώματα:

$$\boxed{\int_{v_1}^{v_2} udv = [uv]_{u_1v_1}^{u_2v_2} - \int_{u_1}^{u_2} vdu}$$

Παραδείγματα

Παράδειγμα 1ο:

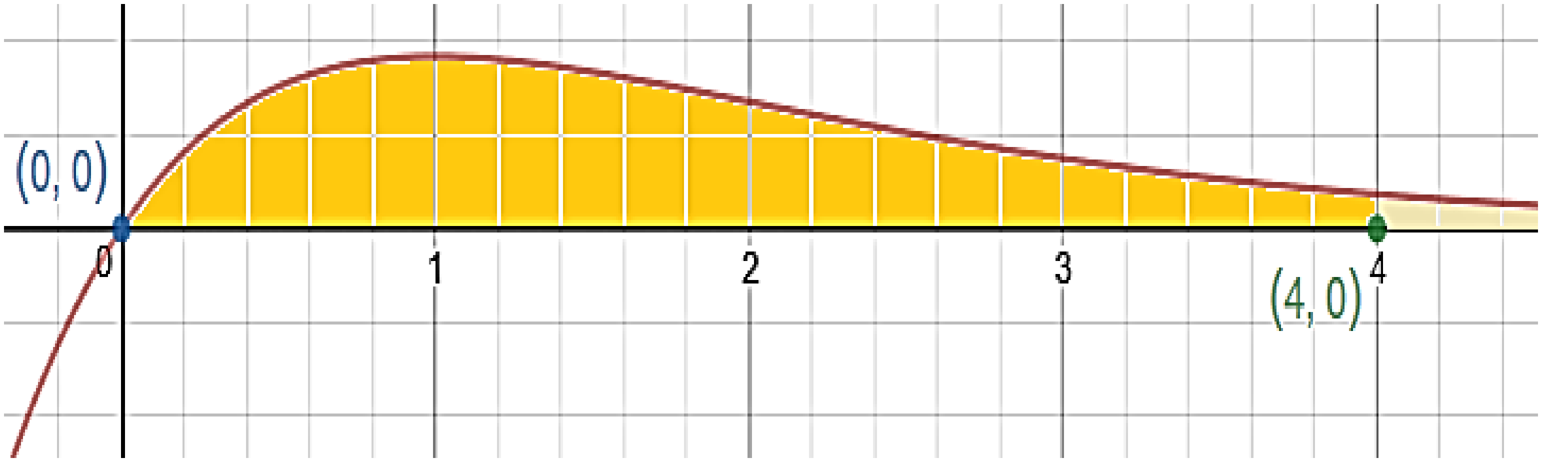
$$\int x\cos x dx = ?$$

Παράδειγμα 2ο:

$$\int \ln x dx = ?$$

Άσκηση

Ποιο το εμβαδόν του χωρίου μεταξύ $y=xe^{-x}$ και του xx’ στο διάστημα [0,4]?



Επανειλημμένη χρήση

$$\int x^2 e^x dx = ?$$

Επιλύοντας ως προς το άγνωστο ολοκλήρωμα

$$\int e^{x} \cos x dx = ?$$

Μερικά (στοιχειώδη) κλάσματα

Υπενθύμιση:

- Έστω το 'γνήσιο' κλάσμα $f(x)/g(x)$ (δηλ. ο βαθμός του αριθμητή είναι μικρότερος του παρονομαστή), τότε αν $(x-r)$ γραμμικός παράγοντας της $g(x)$ με μέγιστη δύναμη την $n \in \mathbb{N}$ (δηλ. η $(x-r)^n$ διαιρεί την $g(x)$), τότε $f(x)/g(x) =[A_1/(x-r)]+[A_2/(x-r)^2]+\ldots[A_n/(x-r)^n]$
- Κάθε ρητή συνάρτηση μπορεί να γραφτεί ως άθροισμα στοιχειωδών κλασμάτων (μερικών κλασμάτων)
- **Παράδειγμα**:

$$\int \frac{5x-3}{x^2-2x-3}\,dx = ?$$

Ασκήσεις

Άσκηση 1η:

$$\int \frac{6x+7}{(x+2)^2}\,dx = ?$$

Άσκηση 2η:

$$\int \frac{2x^3-4x^2-x-3}{x^2-2x-3}\,dx = ?$$

Angelos Giannoulas

Κανόνας l' Hospital – 1η μορφή

Θεώρημα – 1η μορφή:

$$\left.\begin{array}{l}\text{Έστω } f(\alpha)=g(\alpha)=0 \\ \text{Έστω } \exists\, f'(\alpha)\ \&\ g'(\alpha) \neq 0\end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f'(a)}{g'(a)}$$

ΠΡΟΣΟΧΗ: όχι (f/g)'

Όποτε έχουμε μία τέτοια μορφή κάνουμε τον κανόνα. **Σταματάμε όταν αλλάζει η μορφή**

Παραδείγματα:

$$1)\lim_{x\to 0}\frac{3x-\sin x}{x}=?$$

$$2)\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}=?$$

Κανόνας l' Hospital – 2η μορφή

(ισχυρή μορφή)

Θεώρημα – 2η μορφή:

Έστω f(α)=g(α)=0, α ϵ I ανοικτό

Έστω **∃ f'(x) & g'(x) ∀ x ϵ I**

και g(x) ≠ 0 ∀ x ϵ I, με x ≠ α

$$\Rightarrow \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

εφόσον το δεξί όριο υπάρχει

Γενικά ο κανόνας αφορά απροσδιόριστες μορφές: $\frac{0}{0}$ και $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$

Παράδειγμα:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1-\frac{x}{2}}{x^2} = ?$$

Ασκήσεις

Άσκηση 1η:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x+x^2}=?$$

Άσκηση 2η:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{x^2}=$$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{\sin x}{x^2}=$$

Άσκηση 3η:

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{\ln x}{2\sqrt{x}}=?$$

Άσκηση 4η:

$$\lim_{x\to +\infty}(x\sin\frac{1}{x})=?$$

Για την συνέχεια

$$f(x) = e^x \Rightarrow x = \ln f(x) \quad (\mathrm{I})$$

$$\text{Από (I)}: \qquad e^x = e^{\ln f(x)} = f(x)$$

Ασκήσεις (συνέχεια)

Άσκηση 5η:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}\right)=?$$

Άσκηση 6η:

$$\lim_{x\to 0^+} x^x = ?$$

Άσκηση 7η:

$$\lim_{x\to +\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = ?$$

Ασκήσεις (συνέχεια)

Άσκηση 8η:

$$\lim_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{x}} = ?$$

Γενικά μπορούμε να γράψουμε μία συνάρτηση με όριο απροσδιόριστης μορφής:

$$\lim_{x\to a}[\ln f(x)] = L \Rightarrow \lim_{x\to a} f(x) = e^{\ln f(x)} = e^{\lim\limits_{x\to a}[\ln f(x)]} = e^{L}$$

Σειρές

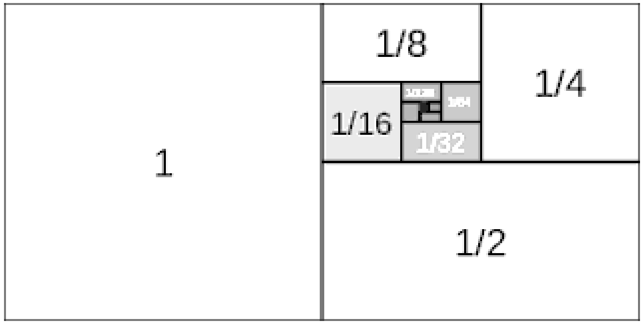
Εκτός ύλης για τις εξετάσεις

Το ερώτημα

- Επί αιώνες ο άνθρωπος ήθελε να δώσει μια απάντηση για το 'πόσο κάνει' ένα άθροισμα με άπειρους όρους

- Έβλεπε π.χ. ότι μια σειρά της μορφής:

  1/2 + 1/4 + 1/8 + … = 1 αλλά δεν γνώριζε 'πώς' να το αποδείξει



εικόνα: http://www.wikiwand.com/el/ Γεωμετρική_πρόοδος

- Ή να αποδείξει ότι το άπειρο άθροισμα 1/1+1/2+1/3+1/4+…=∞, που όμως δεν ήταν κάτι προφανές

- Ή να απαντήσει σε διλήμματα της μορφής 1-1+1-1+1…..=0 ή =1;

- Γνωστοί μαθηματικοί όπως ο Gauss, ο Euler, ο Gauchy, ο Fourier κ.ά. ασχολήθηκαν και εξήραν σημαντικά αποτελέσματα

Ακολουθίες

- Έστω η σειρά των ακέραιων πολλαπλασίων του 3, δηλ. σε κάθε ακέραιο αριθμό να αντιστοιχίζουμε το x3 πολλαπλάσιό του, δηλ.: (1, 2, 3, 4, …, n, …) → (3, 6, 9, 12, …., 3n, ….)

- Το 1ο σύνολο είναι το πεδίο ορισμού και το 2ο το πεδίο τιμών

- Αυτή είναι η βασική ιδέα κατασκευής των ακολουθιών, δηλ. να υπάρχει μία συνάρτηση με Π.Ο. = $\mathbb{Z}$ που τοποθετεί τον κάθε ακέραιο της ακολουθίας στη σωστή – διατεταγμένη θέση

Ορισμός: Άπειρη ακολουθία αριθμών είναι μία συνάρτηση με Π.Ο.=$\mathbb{Z}$ έ.ώ. να είναι όλοι τους ≥ ενός $n_0 \in \mathbb{Z}$ (συνήθως $n_0 = 1$)

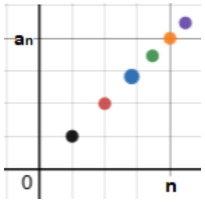
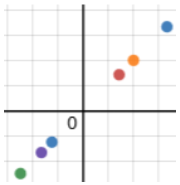
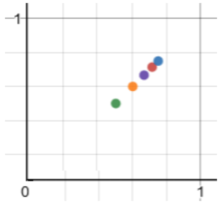
- Οι ακολουθίες ορίζονται όπως όλες οι συναρτήσεις π.χ. a(n)= 1/n

- a(n) : ο n-οστός όρος της ακολουθίας

  a(1) : ο 1ος όρος της, κ.λπ.

Παραδείγματα

Ορισμός: Μία ακολουθία (a_n) είναι σταθερή $\Leftrightarrow a_n=\lambda\ \forall\ n \in \mathbb{Z},\ \forall\ \lambda \in \mathbb{R}$

Όροι ακολουθίας	**Τύπος ακολουθίας**	**Συμβολισμός**	
$1,\ \sqrt{2},\ \sqrt{3},\ \sqrt{4},\ \ldots$	$a_n=\sqrt{n}$	$\{\sqrt{n}\}$	
$1,\ -\frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ -\frac{1}{4},\ \ldots$	$a_n=(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$	$\{(-1)^{n+1}\frac{1}{n}\}$	
$0,\ \frac{1}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{4},\ \ldots$	$a_n=\frac{n-1}{n}$	$\{\frac{n-1}{n}\}$	
$0,\ -\frac{1}{2},\ \frac{2}{3},\ -\frac{3}{4},\ \ldots$	$a_n=(-1)^{n+1}\frac{n-1}{n}$	$\{(-1)^{n+1}\frac{n-1}{n}\}$	
$3,\ 3,\ 3,\ 3,\ \ldots$	$a_n=3$	$\{3\}$	σταθερή

Angelos Giannoulas

Ορισμοί

- $\{a_n\} = \{b_n\}$ ίσες ακολουθίες έ.ώ. $a_n = b_n \ \forall n \in \mathbb{Z}$
- $\{c_n\} = \{a_n\} + \{b_n\}$ άθροισμα ακολουθιών έ.ώ. $c_n = a_n + b_n \ \forall n \in \mathbb{Z}$
- $\{c_n\} = -\{a_n\}$ αντίθετη ακολουθία έ.ώ. $c_n = -a_n \ \forall n \in \mathbb{Z}$
- $\{c_n\} = \{a_n\} \cdot \{b_n\}$ γινόμενο ακολουθιών έ.ώ. $c_n = a_n \cdot b_n \ \forall n \in \mathbb{Z}$
- $\{c_n\} = \{a_n\} / \{b_n\}$ πηλίκο ακολουθιών έ.ώ. $c_n = a_n / b_n \ \forall n \in \mathbb{Z},\ b_n \neq 0$
- $\{c_n\} = \{|a_n|\}$ απόλυτη τιμή ακολουθίας $\forall n \in \mathbb{Z}$
- $\{c_n\} = \{\sqrt{a_n}\}$ τετραγωνική ρίζα ακολουθίας $\forall n \in \mathbb{Z}$

Σύγκλιση & Απόκλιση

- $\{a_n\}$ συγκλίνει στο $L \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$
  $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ N \in \mathbb{Z}\colon \forall\ n>N \Rightarrow\ |a_n - L| < \varepsilon$
- Αν δεν υπάρχει τέτοιο $L \in \mathbb{R}$, τότε λέμε ότι η $\{a_n\}$ αποκλίνει
- Συμβολισμός: $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = L$ (ή $a_n \to L$)
- Το L καλείται το όριο της ακολουθίας

- $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ N \in \mathbb{Z}$, δηλ. το N εξαρτάται του ε (N(ε))
- $\forall\ n > N$, δηλ. μπορώ να πάρω όποιο στοιχείο θέλω της $\{a_n\}$, όσο μακριά και είναι αυτό
- $|a_n - L| < \varepsilon$, δηλ. αυτό θα είναι πάντα πιο μικρό του ε (που ήδη από την αρχή το ε επελέγη πολύ μικρό)

Παραδείγματα

Παράδειγμα 1ο συγκλίνουσας: $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0\,?$

Έστω ε > 0, πρέπει να δ.ό. ∃ Ν ∈ $\mathbb{Z}$: ∀ n ∈ $\mathbb{N}$ να ισχύει |1/n – 0| < ε ⇔

⇔ |1/n| < ε ⇔ 1/n < ε ⇔ n > 1/ε

Άρα ∀ n > 1/ε ισχύει ότι $a_n \to 0$

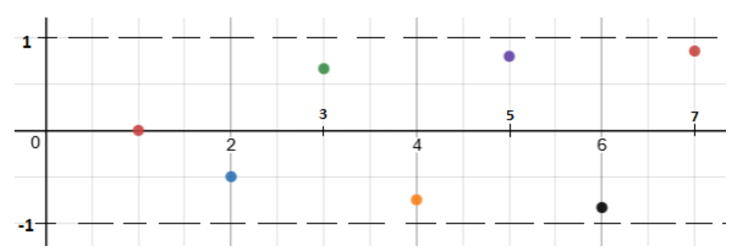
Παράδειγμα 2ο συγκλίνουσας: $\lim_{n \to +\infty} k = k\,? \quad k \in \mathbb{R}$

Έστω ε > 0, πρέπει να δ.ό. ∃ Ν ∈ $\mathbb{Z}$: ∀ n ∈ $\mathbb{N}$ να ισχύει |k – k| < ε ⇔

⇔ ε > 0 που ισχύει, άρα $a_n \to k$

Παράδειγμα 3ο αποκλίνουσας: Να δ.ό. $\{(-1)^{n+1}(\frac{n-1}{n})\}$ αποκλίνει

a_n = 0, -1/2, 2/3, -3/4, 4/5, -5/6, ...



Θεώρημα

Έστω $\{a_n\}$ και $\{b_n\}$ ακολουθίες πραγματικών αριθμών

Έστω $A, B \in \mathbb{R}$: $\lim_{n\to\infty} a_n = A$ και $\lim_{n\to\infty} b_n = B$.

Ισχύουν:

1. $\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = A \pm B$ όριο πρόσθεσης / αφαίρεσης
2. $\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = A \cdot B$ όριο γινομένου
3. $\lim_{n\to\infty}(\kappa \cdot a_n) = \kappa \cdot A$, $\kappa \in \mathbb{R}$ όριο σταθερού πολλαπλάσιου
4. $\lim_{n\to\infty}(a_n / b_n) = A / B$, $B \neq 0$ όριο πηλίκου

Παραδείγματα

1. $$\lim_{n\to+\infty}\left(-\frac{1}{n}\right)=(-1)\cdot\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=(-1)\cdot 0=0$$

2. $$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n-1}{n}\right)=\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)=\lim_{n\to+\infty}1-\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=1-0=1$$

3. $$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{5}{n^2}\right)=\lim_{n\to+\infty}5\cdot\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^2}=\lim_{n\to+\infty}5\cdot\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\cdot\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=5\cdot 0\cdot 0=0$$

4. $$\lim_{n\to+\infty}\frac{4-7n^6}{n^6+3}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{4}{n^6}-7}{1+\frac{3}{n^6}}=\frac{\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{4}{n^6}-7\right)}{\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{3}{n^6}\right)}=\frac{0-7}{1+0}=-7$$

Πόρισμα

Τα σταθερά πολλαπλάσια μιας αποκλίνουσας ακολουθίας αποκλίνουν επίσης

Απόδειξη:

Έστω $\{a_n\}$ αποκλίνει

Υποθέτουμε ότι δεν ισχύει η υπόθεση.

Και ότι αν $c \in \mathbb{Z}$: $\{c \cdot a_n\}$ συγκλίνει σε κάποιο $κ \in \mathbb{R}$

Το τελευταίο θα ισχύει και για το πολλαπλάσιο αυτής με $κ = 1/c$

Άρα $\{κ \cdot c \cdot a_n\} = \{1/c \cdot c \cdot a_n\} = \{a_n\}$, δηλ. η $\{a_n\}$ συγκλίνει , ΑΤΟΠΟ

Θεώρημα *sandwich*

$$\left.\begin{array}{l}\text{Έστω } \{a_n\}, \{b_n\} \text{ και } \{c_n\} \text{ τ.ώ. } a_n \le b_n \le c_n \ \ \forall n \\ \text{Έστω επίσης } \lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \lim\limits_{n\to+\infty} c_n = L\end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} b_n = L$$

Άμεση συνέπεια του θεωρήματος είναι:

$$\left.\begin{array}{l}\text{Αν } |b_n| \le c_n \\ \& \ \{c_n\} \to 0\end{array}\right\} \Rightarrow \{b_n\} \to 0$$

$-b_n \le c_n \le b_n$

Παραδείγματα:

1. $\dfrac{\text{cosn}}{\text{n}} \to 0$ αφού $\left|\dfrac{\text{cosn}}{\text{n}}\right| = \dfrac{|\text{cosn}|}{|\text{n}|} \le \dfrac{1}{\text{n}} \to 0$

2. $\dfrac{1}{2^{\text{n}}} \to 0$ αφού $\left|\dfrac{1}{2^{\text{n}}}\right| \le \dfrac{1}{\text{n}} \to 0$

3. $(-1)^{\text{n}}\dfrac{1}{\text{n}} \to 0$ αφού $\left|(-1)^{\text{n}}\dfrac{1}{\text{n}}\right| \le \dfrac{1}{\text{n}} \to 0$

Μονοτονία

Ορισμός:

- Αν $\{a_n\}$: $a_n \le a_{n+1}$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$, η ακολουθία είναι γνήσια αύξουσα
- Αν $\{a_n\}$: $a_n \ge a_{n+1}$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$, η ακολουθία είναι γνήσια φθίνουσα

Παράδειγμα 1ο: Να δ.ό. η ακολουθία $a_n=(n-1)/(n+1)$ είναι αύξουσα

$$\frac{n-1}{n+1} \le \frac{(n+1)-1}{(n+1)+1} \Leftrightarrow \frac{n-1}{n+1} \le \frac{n}{n+2} \Leftrightarrow (n-1)(n+2) \le n(n+1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n^2+n-2 \le n^2+n \Leftrightarrow -2 \le 0 \quad \text{αληθές}$$

Παράδειγμα 2ο: Να βρείτε την μονοτονία της ακολουθίας $a_n= n!/n^n$

$n \in \mathbb{Z}+$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\dfrac{(n+1)!}{(n+1)^{(n+1)}}}{\dfrac{n!}{n^n}} = \frac{n^n(n+1)!}{(n+1)^{(n+1)}n!} = \frac{n^n}{(n+1)^n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n < 1 \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Άρα } a_{n+1} < a_n \ \text{ και η ακολουθία είναι γνήσια φθίνουσα}$$

Πώς διαπιστώνω την μονοτονία

1. Ψάχνουμε αν:
   - a_{n+1}-$a_n > 0 \Rightarrow \{a_n\}$ γνήσια αύξουσα
     ή αν
   - a_{n+1}-$a_n < 0 \Rightarrow \{a_n\}$ γνήσια φθίνουσα

   (αντίστοιχα αν ≥ & ≤ έχουμε αύξουσα & φθίνουσα)

2. Αν το a_n παρουσιάζεται ως γινόμενο ή ως πηλίκο τότε ψάχνουμε αν:
   - $a_{n+1}/a_n > 1 \Rightarrow \{a_n\}$ γνήσια αύξουσα
     ή αν
   - a_{n+1}-$/a_n$ 1 0 $\Rightarrow \{a_n\}$ γνήσια φθίνουσα

   (αντίστοιχα αν ≥ & ≤ έχουμε αύξουσα & φθίνουσα)

3. Αν η $\{a_n\}$ δίνεται με αναδρομικό τύπο τότε εργαζόμαστε επαγωγικά

Ορισμοί

- $\{a_n\}$ άνω φραγμένη αν $\exists\, M \in \mathbb{R} : a_n \leq M \;\forall\, n \in \mathbb{Z}$

  M : άνω φράγμα της $\{a_n\}$

- $\{a_n\}$ κάτω φραγμένη αν $\exists\, m \in \mathbb{R} : m \leq a_n \;\forall\, n \in \mathbb{Z}$

  M : κάτω φράγμα της $\{a_n\}$

- $\{a_n\}$ φραγμένη αν $\exists\, M, m \in \mathbb{R} : m \leq a_n \leq M \;\forall\, n \in \mathbb{Z}$

- $\{a_n\}$ απόλυτα φραγμένη αν $\exists\, \theta \in \mathbb{R} : |a_n| \leq \theta \;\forall\, n \in \mathbb{Z}$

  M : απόλυτο φράγμα της $\{a_n\}$

Πρόταση: Αν $\{a_n\}$ φραγμένη $\Leftrightarrow$ $\{a_n\}$ απόλυτα φραγμένη

Παραδείγματα:

- 1, 2, 3, … n, … δεν έχει άνω φράγμα, έχει κάτω φράγμα το m=1
- 1/2, 2/3, 3/4, 4/5,… n /(n+1), … έχει M=1 & m=1/2
- -1, 2, -3, 4, …, $(-1)^n \cdot n$, … δεν έχει ούτε άνω ούτε κάτω φράγμα

Παρατηρήσεις

(1) Αν $\{a_n\}$ φραγμένη $\not\Rightarrow$ $\{a_n\}$ συγκλίνει

(π.χ. $a_n = (-1)^n$: $-1 \le a_n \le 1$ αλλά $\{a_n\}$ δεν συγκλίνει)

(2) Αν $\{a_n\}$ μονότονη $\not\Rightarrow$ $\{a_n\}$ συγκλίνει

(π.χ. $a_n = n$: γνήσια αύξουσα αλλά $\{a_n\}$ δεν συγκλίνει)

(3) **Θεώρημα**: Αν $\{a_n\}$ μονότονη & φραγμένη $\Rightarrow$ $\{a_n\}$ συγκλίνει

Παραδείγματα:

$$\left.\begin{array}{l} a_n=n/(n+1) \text{ είναι γνησίως αύξουσα} \\ \{a_n\} \text{ άνω φραγμένη } (M=1) \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \{a_n\} \to 1$$

Ισχύει ότι: $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{1+\frac{1}{n}} = 1$

Παραδείγματα

π.χ. 1ο: Ελέγξτε αν συγκλίνει η ακολουθία: $a_n=1/(n+1)$

$a_n=n/(n+1)$ είναι γνησίως φθίνουσα

$\{a_n\}$ κάτω φραγμένη (m=0)

$\Rightarrow \quad \{a_n\} \to 0$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}}=\frac{0}{1}=0$$

π.χ. 2ο: Ελέγξτε αν είναι φραγμένη η ακολουθία: $a_n=(2n^2+1)/(n+1)^2$

$n \in \mathbb{Z}+$

$$|a_n|=\left|\frac{2n^2+1}{(n+1)^2}\right|=\frac{2n^2+1}{(n+1)^2}\leq\frac{2n^2+n^2}{(n+1)^2}=\frac{3n^2}{(n+1)^2}<3$$

Άρα $|a_n| < 3 \Leftrightarrow -3 < a_n < +3$, δηλ. φραγμένη

$n \in \mathbb{Z}+$

π.χ. 2ο: Ελέγξτε αν είναι φραγμένη η ακολουθία: $a_n=(2n^2+1)/(3n+1)$

$$|a_n|=\left|\frac{2n^2+1}{3n+1}\right|=\frac{2n^2+1}{3n+1}\geq\frac{2n^2}{3n+1}>\frac{2n^2}{3n+n}=\frac{2n^2}{4n}=\frac{n}{2}$$

Όμως n/2 δεν είναι σταθερός αριθμός, άρα $\{a_n\}$ δεν είναι φραγμένη

Παραδείγματα (συνέχεια)

$n \in \mathbb{Z}+$

π.χ. 4ο: Ελέγξτε αν συγκλίνει η ακολουθία: $a_n=(2n^2+1)/(n^2+3n+1)$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2+\frac{1}{n^2}}{1+\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}} = \frac{2+0}{1+0+0} = 2$$

π.χ. 5ο: Ελέγξτε αν συγκλίνει η ακολουθία: $b_n = \sqrt{\frac{n^2+1}{4n^2+3n}}$ $n \in \mathbb{Z}+$

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{n^2+1}{4n^2+3n}} = \sqrt{\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+1}{4n^2+3n}} = \sqrt{\lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{n^2}}{4+\frac{3}{n}}} = \sqrt{\frac{1+0}{4+0}} = \frac{1}{2}$$

π.χ. 5ο: Ελέγξτε αν συγκλίνει η ακολουθία: $c_n = (n+2)/3^n$ $n \in \mathbb{Z}+$

$$\lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n+2}{3^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n3^{n-1}} = 0$$

H(∞/∞)

Άπειρες Σειρές

Εκτός ύλης για τις εξετάσεις

Ορισμοί

Ορισμός: Έστω μια ακολουθία αριθμών $\{a_n\}$. Άπειρη σειρά ονομάζουμε κάθε έκφραση της μορφής $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots \alpha_n + \ldots.$

Τα μερικά αθροίσματα:

$$\begin{cases} s_1 = a_1 \\ s_2 = a_1 + a_2 \\ s_3 = a_1 + a_2 + a_3 \\ \cdots \quad \cdots\cdots \quad \cdots \\ s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \end{cases}$$

είναι όλα τους πεπερασμένα

Ορισμός: Αν η ακολουθία $\{s_n\}$ συγκλίνει σε ένα s (δηλ. $\lim_{n\to\infty} s_n = S$) λέμε ότι η σειρά συγκλίνει στο άθροισμα S και γράφουμε:

$$\lim_{n\to\infty} s_n = S \Leftrightarrow a_1 + a_2 + a_3 + \cdots a_n + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} a_k = S$$

αλλιώς, αν δεν υπάρχει τέτοιο S λέμε ότι αποκλίνει

Παράδειγμα

Ελέγξτε αν η παρακάτω σειρά συγκλίνει:

$3/10 + 3/100 + 3/1000 + \ldots + 3/10^n + \ldots$

Λύση:

Η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων γράφεται ως εξής:

$s_1 , s_2 , s_3 , s_4 , \ldots. = 0.3 , 0.33 , 0.333 , 0.3333 , \ldots$

Άρα η s_n συγκλίνει στο 1/3 $\Leftrightarrow \sum_{\kappa=1}^{\infty} \alpha_\kappa = \frac{1}{3}$

Ιδιότητες

$$(i)\ \ \sum_{\kappa=1}^{n}(a_k+b_k)=\sum_{\kappa=1}^{n}a_k+\sum_{\kappa=1}^{n}b_k$$

$$(ii)\ \ \sum_{\kappa=1}^{n}(\lambda\cdot a_k)=\lambda\cdot\sum_{\kappa=1}^{n}a_k \quad \lambda\in\mathbb{R}$$

Ιδιότητες
πεπερασμένων αθροισμάτων

Θεώρημα:

Έστω Σa_n & Σb_n συγκλίνουσες άπειρες σειρές, λ, μ ϵ $\mathbb{R}$, τότε:

$$(i)\ \ \sum_{n=1}^{\infty}(\lambda\cdot a_n+\mu\cdot b_n) \text{ συγκλίνει επίσης}$$

$$(ii)\ \ \sum_{n=1}^{\infty}(\lambda\cdot a_n+\mu\cdot b_n)=\lambda\cdot\sum_{n=1}^{\infty}a_n+\mu\cdot\sum_{n=1}^{\infty}b_n$$

Πόρισμα:

Έστω Σa_n άπειρη συγκλίνουσα σειρά
Αλλά αν η Σb_n δεν συγκλίνει

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n) \text{ δεν συγκλίνει}$$

Παράδειγμα

Έστω η (άπειρη) σειρά $\Sigma(1/n + 1/2^n)$. Να δ.ό. η σειρά δεν συγκλίνει

Λύση: $$\sum\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{2^n}\right)=\sum\frac{1}{n}+\sum\frac{1}{2^n}$$

Ο συμβολισμός Σ εννοεί την άπειρη ή πεπερασμένη σειρά – ανάλογα την περίπτωση

Το πρώτο μέρος του αθροίσματος είναι μία σειρά που ΔΕΝ συγκλίνει

Το 2ο μέρος συγκλίνει στο 0 (βλ. τελευταίο παρόμοιο π.χ. στο προηγούμενο κεφάλαιο)

Άρα από το Πόρισμα η σειρά ΔΕΝ συγκλίνει

ΠΡΟΣΟΧΗ:

$$\left.\begin{array}{l}\text{Αν } \Sigma a_n \text{ ΔΕΝ συγκλίνει}\\ \&\ \Sigma b_n \text{ ΔΕΝ συγκλίνουν}\end{array}\right\} \Rightarrow \text{ η } \Sigma(a_n + b_n) \begin{array}{l}\text{μπορεί να συγκλίνει}\\ \text{ή να μην συγκλίνει}\end{array}$$

Γεωμετρική σειρά

Μία γεωμετρική σειρά είναι της μορφής:

η σταθερά r μπορεί να είναι > 0 ή < 0

$$a+a\cdot r+a\cdot r^2+a\cdot r^3+\ldots+a\cdot r^n+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}a\cdot r^{n-1}\quad 0\neq a,r\in\mathbb{R}$$

(δηλ. <u>ο επόμενος όρος</u> = <u>ο προηγούμενος όρος</u> · <u>μια σταθερά</u> ,την r)

Αναζήτηση της σύγκλισης της γεωμετρικής σειράς:

$$s_n=a+ar+ar^2+ar^3+\ldots+ar^{n-1}\Leftrightarrow rs_n=ar+ar^2+ar^3+\ldots+ar^n$$

Αν αφαιρέσω ανά μέλη [την αριστερή ισότητα] – [την δεξιά ισότητα]:

$$s_n-rs_n=\alpha-ar^n\Leftrightarrow s_n(1-r)=a(1-r^n)\Leftrightarrow s_n=\frac{a(1-r^n)}{1-r}$$

(i) Αν $|r|<1\Rightarrow r^n\to 0$ & $s_n\to \alpha/1\text{-}r$

(ii) Αν $|r|>1\Rightarrow r^n\to\infty$ & s_n δεν συγκλίνει

(iii) Αν $r=1\Rightarrow s_n=\alpha+\alpha+\alpha+\ldots=n\cdot a$ & s_n δεν συγκλίνει

(iv) Αν $r=-1\Rightarrow s_n$ δεν συγκλίνει

Παραδείγματα

π.χ. 1ο: $\sum_{n=1}^{\infty} 3\cdot(\frac{1}{2})^{n-1}$

- Ο 1ος όρος είναι α=3 και ο σταθερός όρος είναι r=1/2
- |r| < 1, άρα η σειρά συγκλίνει στο α/(1-r) = 3/(1/2) = 6 &
- $\sum_{n=1}^{\infty} a\cdot(r)^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} 3\cdot(\frac{1}{2})^{n-1} = \frac{a}{1-r} = \frac{3}{1-\frac{1}{2}} = 6$

π.χ. 2ο: $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\ldots+(-\frac{1}{2})^{n-1}+\ldots$

- Ο 1ος όρος είναι α=1 και ο σταθερός όρος είναι r= - ½
- |r| < 1, άρα η σειρά συγκλίνει στο α/(1-r) =1/(3/2) = 2/3
- $\sum_{n=1}^{\infty} a\cdot(r)^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} 1\cdot(-\frac{1}{2})^{n-1} = \frac{a}{1-r} = \frac{1}{1+\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$

Παραδείγματα (συνέχεια)

π.χ. 3ο: $$\sum_{\kappa=0}^{\infty}(\frac{3}{5})^{\kappa}=\sum_{\kappa=1}^{\infty}(\frac{3}{5})^{\kappa-1}$$

- Ο 1ος όρος είναι α=$(3/5)^0$=1 και ο σταθερός όρος είναι r=3/5
- |r| < 1, άρα η σειρά συγκλίνει στο α/(1-r) = 1/(2/5) = 5/2 &
- $$\sum_{\kappa=1}^{\infty}a\cdot(r)^{n-1}=\sum_{\kappa=1}^{\infty}(\frac{3}{5})^{\kappa-1}=\frac{a}{1-r}=\frac{1}{1-\frac{3}{5}}=\frac{5}{2}$$

π.χ. 4ο: $$\frac{\pi}{2}+\frac{\pi^2}{4}+\frac{\pi^3}{8}+\ldots$$

- Ο 1ος όρος είναι α=π/2 και ο σταθερός όρος είναι r=π/2 επίσης
- |r| > 1, άρα η σειρά ΔΕΝ συγκλίνει

Τηλεσκοπική σειρά

Έστω ότι αναζητούμε την σύγκλιση σειράς της μορφής: $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$$

- Πρέπει όπως και στην γεωμετρική σειρά να αναζητήσουμε το πεπερασμένο μερικό άθροισμα s_k :

$$s_k = \sum_{n=1}^{k}\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{k\cdot(k+1)}$$

$$\text{Ισχύει όμως ότι } \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$$

- Άρα το s_k γράφεται: $$s_k = \left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right) \Leftrightarrow$$

$$s_k = 1 - \frac{1}{k+1}$$

- Άρα η $s_k \xrightarrow[k\to\infty]{} 1 \Rightarrow$ $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)} = 1$$

Ορισμός

Σa_n τηλεσκοπική σειρά αν κάθε όρος a_n εκφράζεται ως εξής:

$$a_n = b_n - b_{n+1} \quad \forall\, n \in \mathbb{Z}$$

Θεώρημα:

Έστω $\{a_n\}$ & $\{b_n\}$ δύο ακολουθίες: $a_n = b_n - b_{n+1} \quad \forall\, n \in \mathbb{Z}$

$$\Sigma\, a_n \text{ συγκλίνει} \Leftrightarrow \Sigma\, b_n \text{ συγκλίνει}$$

Επίσης

$$\text{αν } L = \lim_{n\to\infty} b_n \quad \text{τότε } \sum_{n=1}^{\infty} a_n = b_1 - L$$

Τριγωνομετρικοί αριθμοί

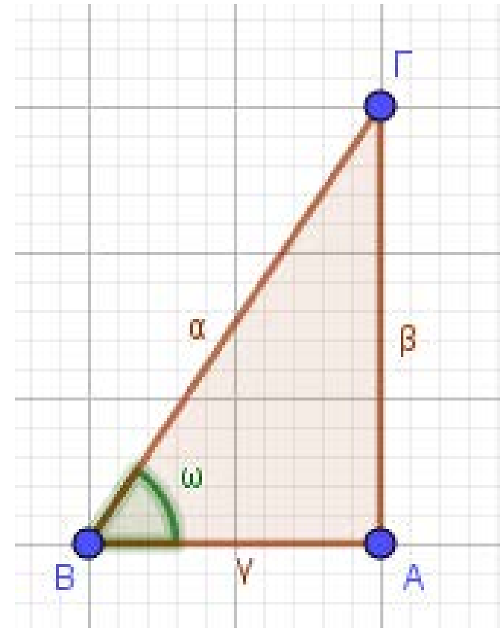
Στοιχεία Μιγαδικών

Angelos Giannoulas

Τριγωνομετρικοί αριθμοί …

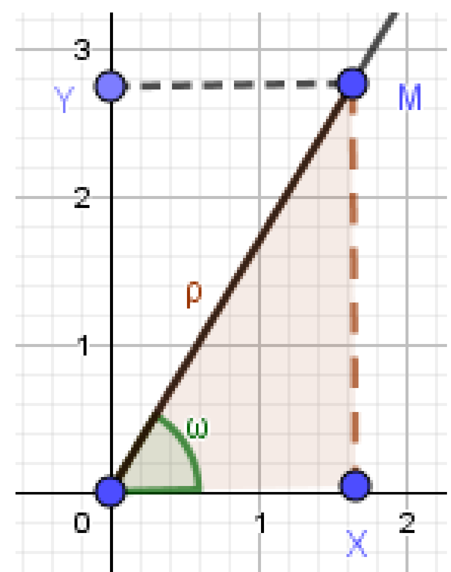
Οξείας γωνίας

$$\begin{cases} \sin\omega = \dfrac{\text{απέναντι κάθετη}}{\text{υποτείνουσα}} = \dfrac{\text{ΑΓ}}{\text{ΒΓ}} \\ \cos\omega = \dfrac{\text{προσκείμενη κάθετη}}{\text{υποτείνουσα}} = \dfrac{\text{ΑΒ}}{\text{ΒΓ}} \\ \tan\omega = \dfrac{\text{απέναντι κάθετη}}{\text{προσκείμενη κάθετη}} = \dfrac{\text{ΑΓ}}{\text{ΑΒ}} \\ \cot\omega = \dfrac{\text{προσκείμενη κάθετη}}{\text{απέναντι κάθετη}} = \dfrac{\text{ΑΒ}}{\text{ΑΓ}} \end{cases}$$



0° ≤ ω ≤ 360°

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} > 0 \\ \text{Άρα } \sin\omega = \dfrac{y}{\rho} \ \& \ \cos\omega = \dfrac{x}{\rho} \\ \tan\omega = \dfrac{y}{x} \ \& \ \cot\omega = \dfrac{x}{y} \end{cases}$$



Τριγωνομετρικοί αριθμοί (συνέχεια)

Γωνίες ω > 360°

Έστω **ω** = $n \cdot 360^o + \mu^o$, $n \in \mathbb{Z}$, $0^o \le \mu \le 360^o$

Βρίσκουμε ότι ισχύουν οι επόμενες ισότητες:

- $\sin\omega = \sin(\kappa \cdot 360^o + \mu) = \sin\mu$
- $\cos\omega = \cos(\kappa \cdot 360^o + \mu) = \cos\mu$
- $\tan\omega = \tan(\kappa \cdot 360^o + \mu) = \tan\mu$
- $\cot\omega = \cot(\kappa \cdot 360^o + \mu) = \cot\mu$

Τριγωνομετρικοί αριθμοί (συνέχεια)

Γωνίες ω > 360°

Έστω **ω** = $n \cdot 360^o + \mu^o$, $n \in \mathbb{Z}$, $0^o \leq \mu \leq 360^o$

Βρίσκουμε ότι ισχύουν οι επόμενες ισότητες:

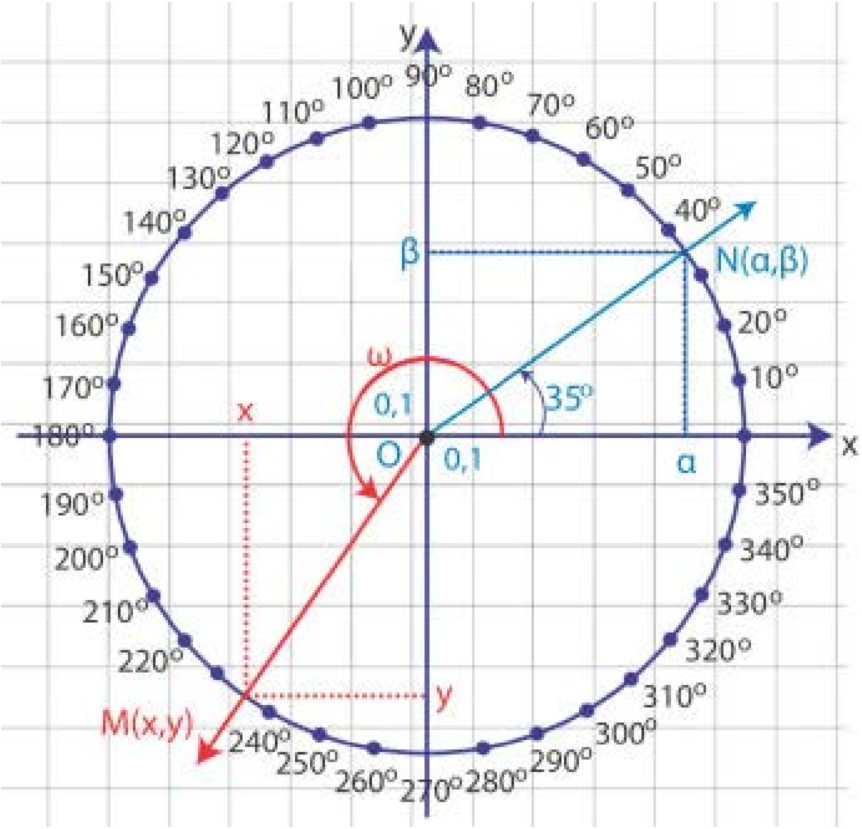
- $\sin\omega = \sin(\kappa \cdot 360^o + \mu) = \sin\mu$
- $\cos\omega = \cos(\kappa \cdot 360^o + \mu) = \cos\mu$
- $\tan\omega = \tan(\kappa \cdot 360^o + \mu) = \tan\mu$
- $\cot\omega = \cot(\kappa \cdot 360^o + \mu) = \cot\mu$

Άρα οι τριγωνομετρικοί αριθμοί της **ω** είναι ίσοι με αυτούς της γωνίας μ

Ο τριγωνομετρικός κύκλος

Μας βοηθάει με σύντομο τρόπο να βρούμε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς (κατά προσέγγιση)

Είναι ένας κύκλος με κέντρο το (0,0) και ακτίνα ρ = 1



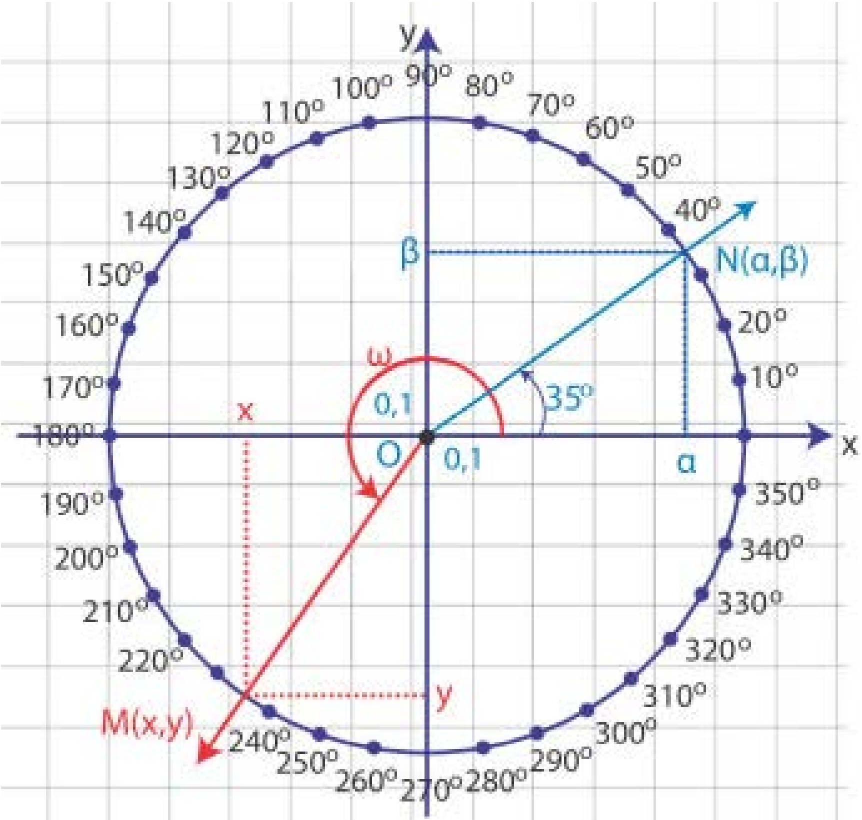
Σχήμα: Άλγεβρα Β'
Γεν. Λυκείου, κεφ. 3.1

Ο τριγωνομετρικός κύκλος

Μας βοηθάει με σύντομο τρόπο να βρούμε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς (κατά προσέγγιση)

Είναι ένας κύκλος με κέντρο το (0,0) και ακτίνα ρ = 1

Y: είναι ο άξονας των ημιτόνων (sin)
X: ο άξονας των συνημίτονων (cos)



Σχήμα: Άλγεβρα Β' Γεν. Λυκείου, κεφ. 3.1

Από τον κύκλο βλέπουμε ότι:

$\boxed{-1 \leq \sin\omega \leq +1}$ & $\boxed{-1 \leq \cos\omega \leq +1}$

Τριγωνομετρικοί αριθμοί
Γεωμετρική ερμηνεία

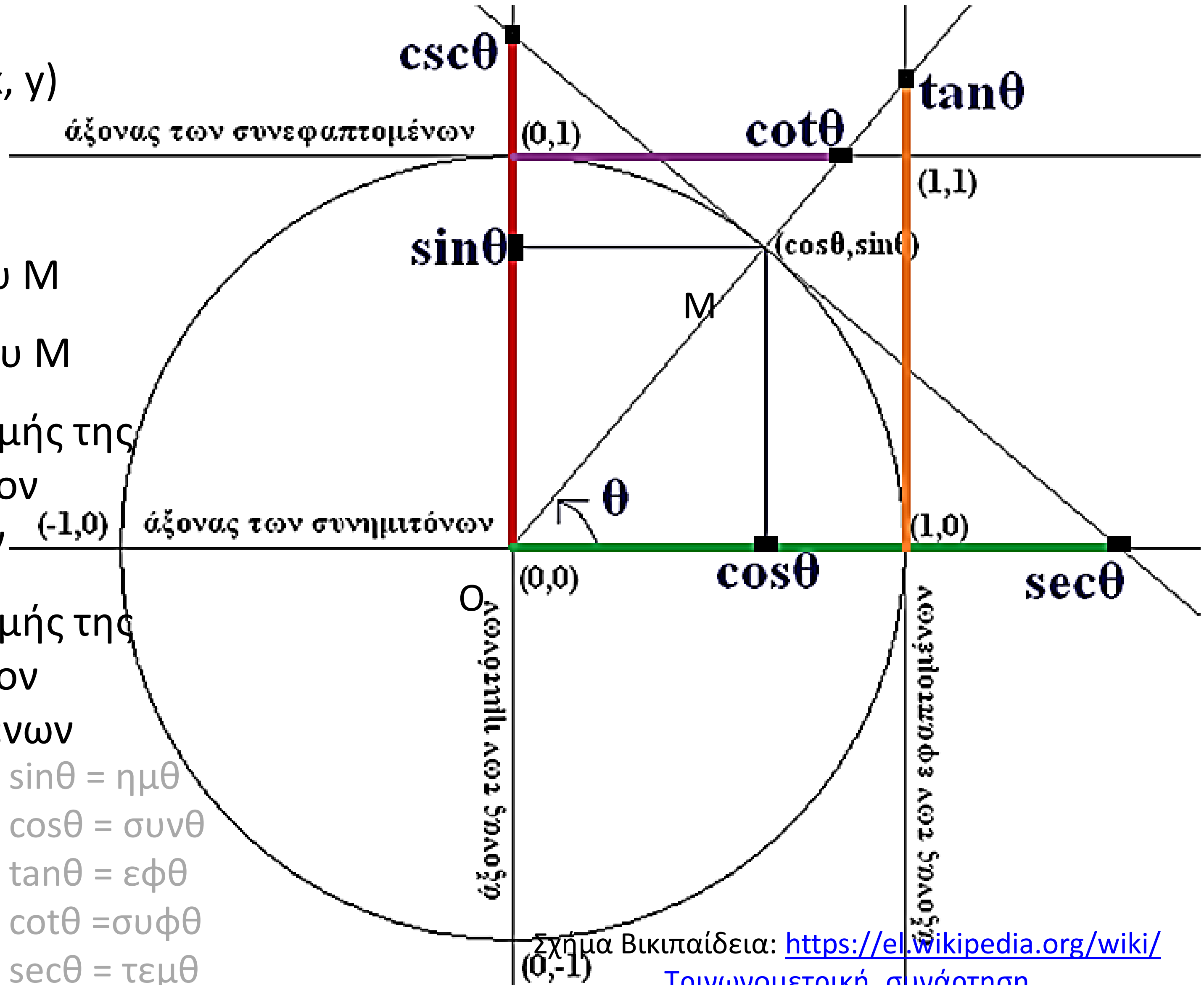
Έστω το σημείο Μ (x, y)
x: τετμημένη
& y: τεταγμένη

sinθ = τεταγμένη του Μ

cosθ = τετμημένη του Μ

tanθ = τεταγμένη τομής της ημιευθείας ΟΜ με τον άξονα εφαπτομένων

cotθ = τετμημένη τομής της ημιευθείας ΟΜ με τον άξονα συνεφαπτομένων

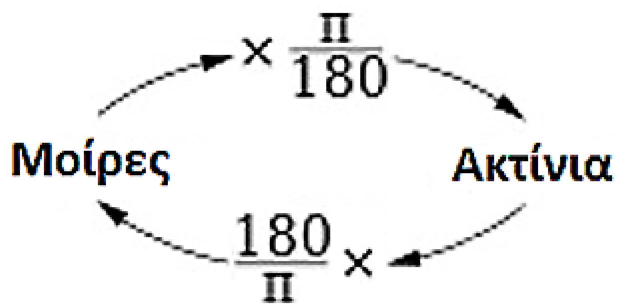


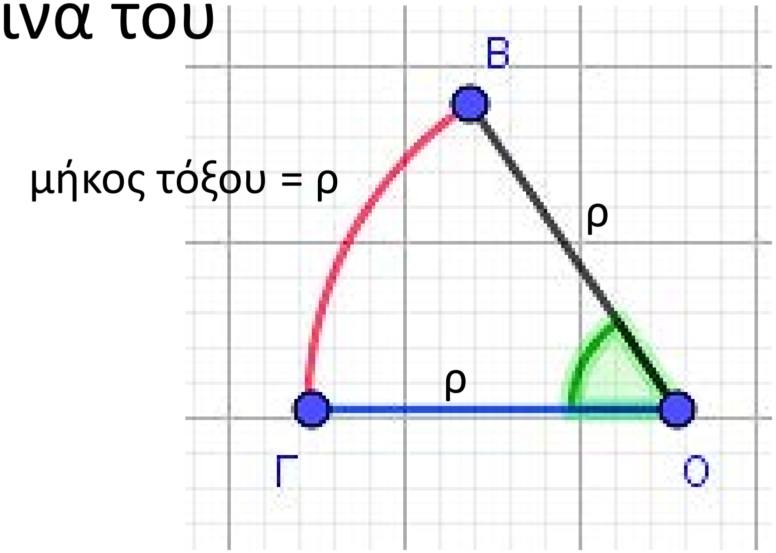
sinθ = ημθ
cosθ = συνθ
tanθ = εφθ
cotθ =συφθ
secθ = τεμθ
cscθ = στεμθ

Σχήμα Βικιπαίδεια: https://el.wikipedia.org/wiki/Τριγωνομετρική_συνάρτηση#Ορισμός_των_τριγωνομετρικών_συναρτήσεων

Μετατροπές γωνίας

1 Ακτίνιο (1 rad) είναι η γωνία που ορίζει σε οποιονδήποτε κύκλο, μήκος τόξου ίσο με την ακτίνα του





[RapidTables](#)

$$\left\{\begin{array}{l} 1^{o} = \dfrac{\pi}{180} \cdot 1\ \mathrm{rad} \\[2em] 1\ \mathrm{rad} = \dfrac{180}{\pi} \cdot 1^{o} \end{array}\right. \quad \text{δηλ.} \quad \left\{\begin{array}{l} \text{μοίρες} = \dfrac{\pi}{180} \cdot \mathrm{X} \cdot \text{ακτίνια} \\[2em] \text{ακτίνια} = \dfrac{180}{\pi} \cdot \mathrm{Y} \cdot \text{μοίρες} \end{array}\right.$$

Τριγωνομετρικές ταυτότητες

$$\sin^2\omega + \cos^2\omega = 1$$

$$\left.\begin{aligned} \tan\omega &= \frac{\sin\omega}{\cos\omega} \\ \cot\omega &= \frac{\cos\omega}{\sin\omega} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \tan\omega \cdot \cot\omega = 1$$

$$\cos^2\omega = \frac{1}{1+\tan^2\omega} \quad \& \quad \sin^2\omega = \frac{\tan^2\omega}{1+\tan^2\omega}$$

Τριγωνομετρικά αθροίσματα

- **cos (a + b)** = $\cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b$
- **cos (a – b)** = $\cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b$
- **sin (a ± b)** = $\sin a \cdot \cos b \pm \cos a \cdot \sin b$
- **sin (2a)** = $\cos^2 a - \sin^2 b = 2 \cos^2 a - 1 = 1 - 2 \sin^2 a$
- **sin a · cos b** = $\frac{1}{2} \cdot [\sin (a + b) + \sin (a - b)]$
- **cos a · sin b** = $\frac{1}{2} \cdot [\sin (a + b) - \sin (a - b)]$
- **sin a · sin b** = $\frac{1}{2} \cdot [\cos (a - b) - \cos (a + b)]$
- **cos a · cos b** = $\frac{1}{2} \cdot [\cos (a + b) + \cos (a - b)]$

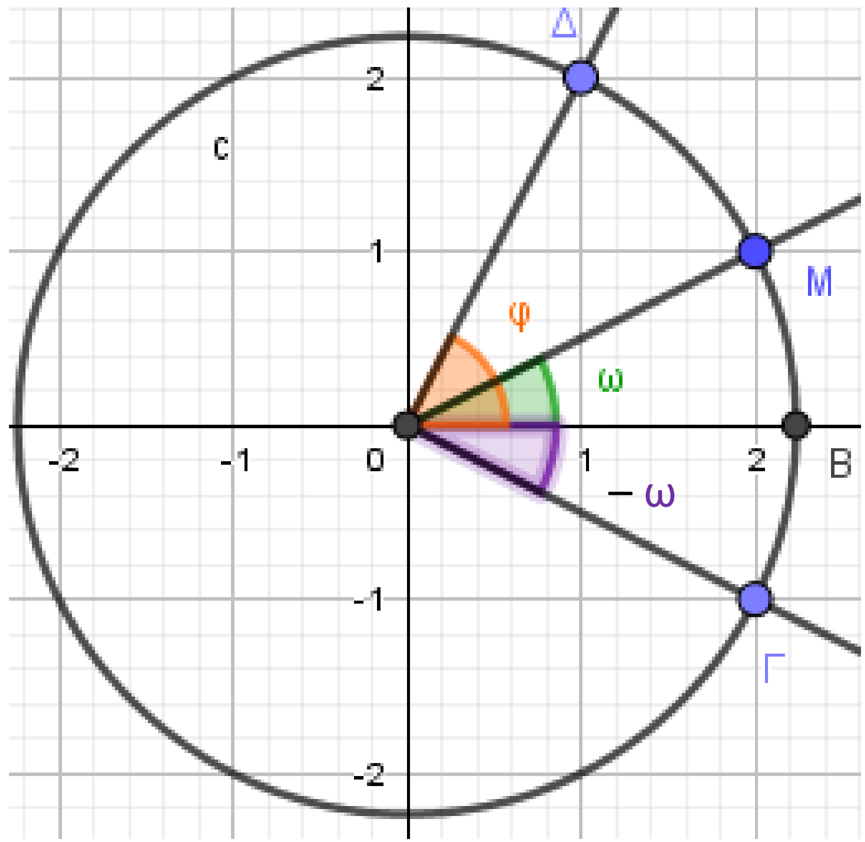
Γωνίες αντίθετες
Γωνίες συμπληρωματικές

Γωνίες αντίθετες (ω & – ω)

- cos (– ω) = cos ω
- sin (– ω) = – sin ω
- tan (– ω) = – tan ω
- cot (– ω) = – cot ω

Γωνίες συμπληρωματικές (ω & 90ο– ω)

- cos (90ο– ω) = sin ω
- sin (90ο– ω) = cos ω
- tan (90ο– ω) = cot ω
- cot (90ο– ω) = tan ω



ϕ = 90ο - ω

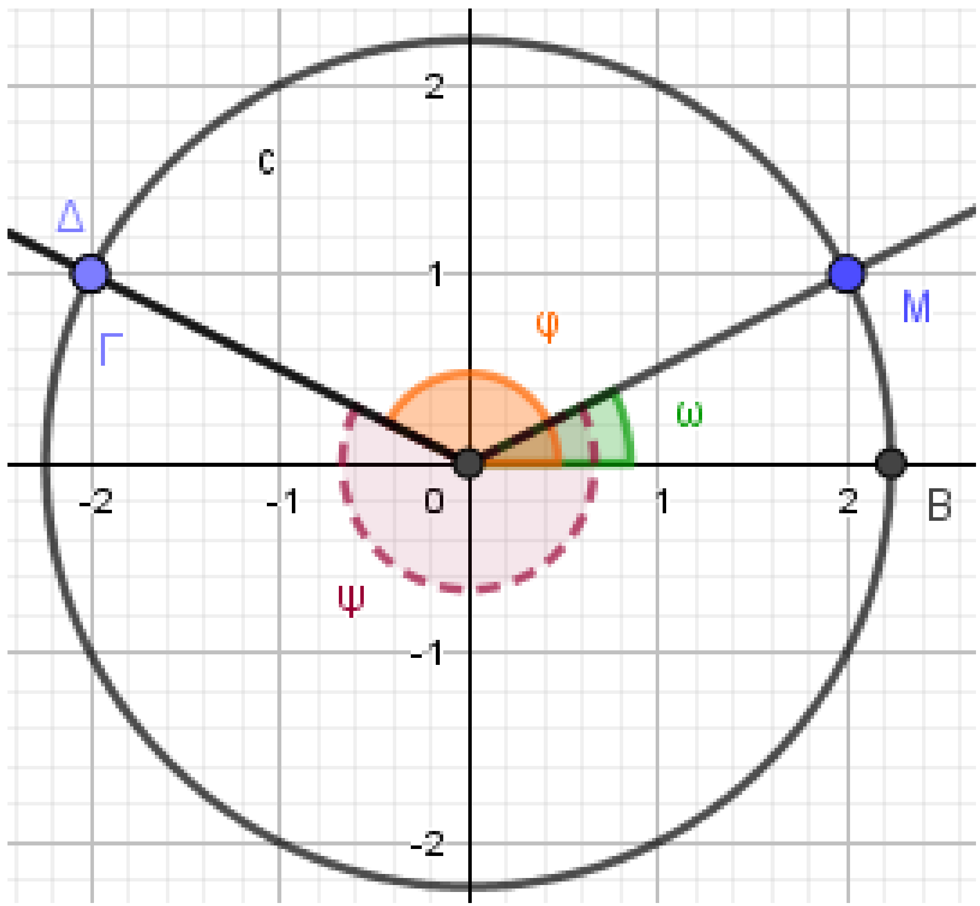
Γωνίες παραπληρωματικές
Γωνίες με διαφορά 180°

Γωνίες παραπληρωματικές
(ω & 180°– ω)

- cos (180°– ω) = – cos ω
- sin (180°– ω) = sin ω
- tan (180°– ω) = – tan ω
- cot (180°– ω) = – cot ω

Γωνίες με διαφορά 180°
(ω & 180° + ω)

- cos (180°+ ω) = – cos ω
- sin (180°+ ω) = – sin ω
- tan (180°+ ω) = tan ω
- cot (180°+ ω) = cot ω



$\phi = 180^o - \omega$
$\psi - \omega = 180^o$

Εξισώσεις & Συναρτήσεις

Στοιχεία Μιγαδικών

2βάθμια εξίσωση

Έστω η εξίσωση 2ου βαθμού: $\alpha \cdot x^2 + \beta \cdot x + \gamma = 0$, $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$

Α' τρόπος:

$p = \beta/\alpha$
$q = \gamma/\alpha$

Διαιρώ με α: $x^2 + (\beta/\alpha) \cdot x + (\gamma/\alpha) = 0 \Leftrightarrow x^2 + p \cdot x + q = 0$

- Αν $p = 0$, τότε $x^2 + q = 0 \Leftrightarrow x^2 = -q \Rightarrow x_{1,2} = \pm\sqrt{-q}$

  [(1) αν $q<0 \Rightarrow x_{1,2} \in \mathbb{R}$ & (2) αν $q>0 \Rightarrow x_{1,2} \in \mathbb{C}$]

- Αν $q = 0$, τότε $x^2 + p \cdot x = 0 \Leftrightarrow x \cdot (x + p) = 0 \Rightarrow x_{1,2} = (0, -p)$

- Αν $p \neq 0 \neq q$, τότε $x^2 + p \cdot x + q = 0 \Leftrightarrow (x + p/2)^2 - ((p/2)^2 - q) = 0$

  $\Leftrightarrow (x + p/2)^2 = \underbrace{(p/2)^2 - q}_{\textbf{D}\ \text{διακρίνουσα}}$

  - Αν $D > 0$: $x_{1,2} = -p/2 \pm \sqrt{D}$
  - Αν $D = 0$: $x_{1,2} = -p/2$ διπλή
  - Αν $D < 0$: $x_{1,2} \in \mathbb{C}$

Άρα:

$x^2 + p \cdot x + q = (x - x_1) \cdot (x - x_2) =$
$x^2 - (x_1 + x_2) \cdot x + x_1 \cdot x_2$

&

$$\boxed{\begin{array}{c} -p = x_1 + x_2 = \beta/\alpha \\ q = x_1 \cdot x_2 = \gamma/\alpha \end{array}}$$

σχέση του Βιέτ

2βάθμια εξίσωση (συνέχεια)

Β' τρόπος:

Βρίσκω την διακρίνουσα $\Delta = \beta^2 - 4\cdot\alpha\cdot\gamma$

- Αν $\Delta > 0$: υπάρχουν 2 διαφορετικές ρίζες $x_{1,2} = \dfrac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha}$

  & $\alpha \cdot x^2 + \beta\cdot x + \gamma = \alpha \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2)$

- Αν $\Delta = 0$: υπάρχουν 2 ίσες ρίζες $x_{1,2} = \dfrac{-\beta}{2\alpha}$

  & $\alpha \cdot x^2 + \beta\cdot x + \gamma = \alpha \cdot (x - x_1)^2$

- Αν $\Delta < 0$: δεν υπάρχουν ρίζες στο $\mathbb{R}$ αλλά στο $\mathbb{C}$

Ισχύει και εδώ ότι: $x_1 + x_2 = \beta/\alpha$
$x_1\cdot x_2 = \gamma/\alpha$

Δείτε την απόδειξη

Εκθετική συνάρτηση

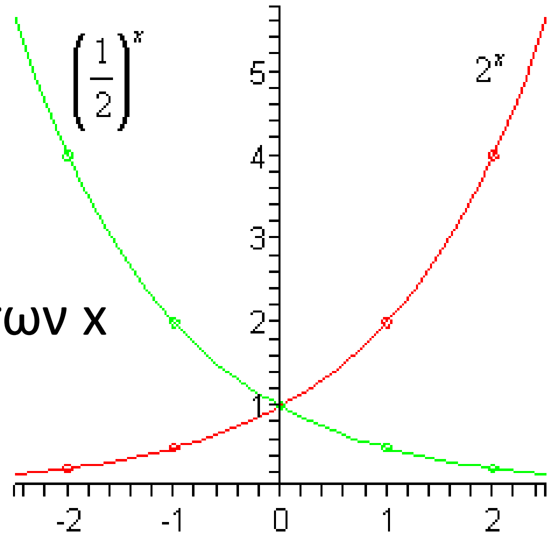
Έστω $\alpha \in \mathbb{R}^{+}\setminus\{1\}$

Ορίζω $\begin{cases} f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto f(x) = a^{x} \end{cases}$ την εκθετική συνάρτηση με βάση το a

(αν α=1 τότε f(x) = 1 σταθερή)

Η $f(x) = a^x$, $a > 1$

- Π.Ο. = $\mathbb{R}$
- Π.Τ. = $(0, +\infty)$
- Η f γνησίως αύξουσα
- Η f τέμνει τον yy' στο (0, 1)
- Έχει ασύμπτωτο άξονα τον αρνητικό ημιάξονα των x



Η $f(x) = a^x$, $0 < a < 1$

- Π.Ο. = $\mathbb{R}$
- Π.Τ. = $(0, +\infty)$
- Η f γνησίως φθίνουσα
- Η f τέμνει τον yy' στο (0, 1)
- Έχει ασύμπτωτο άξονα τον θετικό ημιάξονα των x

Η εκθετική συνάρτηση e^x

Ο αριθμός e ως μαθηματική σταθερά κατά προσέγγιση 5 ψηφίων:

$$\mathrm{e} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 2,71828$$

Η συνάρτηση $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$: $f(x) = e^x$ ονομάζεται συχνά 'εκθετική'

Η συνάρτηση συνδέεται πολύ συχνά σε θέματα όπως προβλήματα με ασύμπτωτες αλλά κυρίως σε συναρτήσεις διαφορικού και ολοκληρωτικού λογισμού (και γενικά οι εκθετικές συναρτήσεις) λόγω της ιδιαιτερότητά του ως αριθμός, π.χ.:

$$\mathrm{e} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \qquad \mathrm{e} = \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} \qquad \mathrm{e} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!} = \frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\ldots \qquad e = \frac{d}{dx}e^x$$

Λογάριθμοι

Πώς λύνεται όμως μια εξίσωση με εκθετική συνάρτηση της μορφής:

$\alpha^x = \theta$ με $\alpha>0$, $\alpha\neq1$, $\theta>0$

Ορίζουμε έτσι την συνάρτηση:

$\log_\alpha\theta$: τον εκθέτη με τον οποίο ανυψώνω το α για να πάρω το θ, δηλ.

$$\alpha^x=\theta \Leftrightarrow x=\log_\alpha\theta$$

και διαβάζεται: log θ ως προς α

Παρατήρηση:

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι:

- $\log_\alpha\alpha^x = x \Rightarrow \alpha^{\log_\alpha\theta} = \theta$
- $\log_\alpha 1 = 0$
- $\log_\alpha\alpha = 1$

Ιδιότητες λογαρίθμων

Έστω α & β >0, α & β ≠1, θ_1 & θ_2 & θ >0, $\kappa \in \mathbb{R}$

1. $\log_\alpha(\theta_1 \cdot \theta_2) = \log_\alpha\theta_1 + \log_\alpha\theta_2$

2. $\log_\alpha(\theta_1/\theta_2) = \log_\alpha\theta_1 - \log_\alpha\theta_2$

3. $\log_\alpha(\theta^\kappa) = \kappa \cdot \log_\alpha\theta$

4. $\log_\beta\theta = \log_\alpha\theta/\log_\alpha\beta$ (ιδιότητα αλλαγής βάσης)

Δεκαδικοί λογάριθμοι:

Είναι οι λογάριθμοι με βάση το 10, δηλ. $10^x = \theta \Leftrightarrow x = \log\theta$

Φυσικοί λογάριθμοι:

Είναι οι λογάριθμοι με βάση το e, δηλ. $e^x = \theta \Leftrightarrow x = \ln\theta$

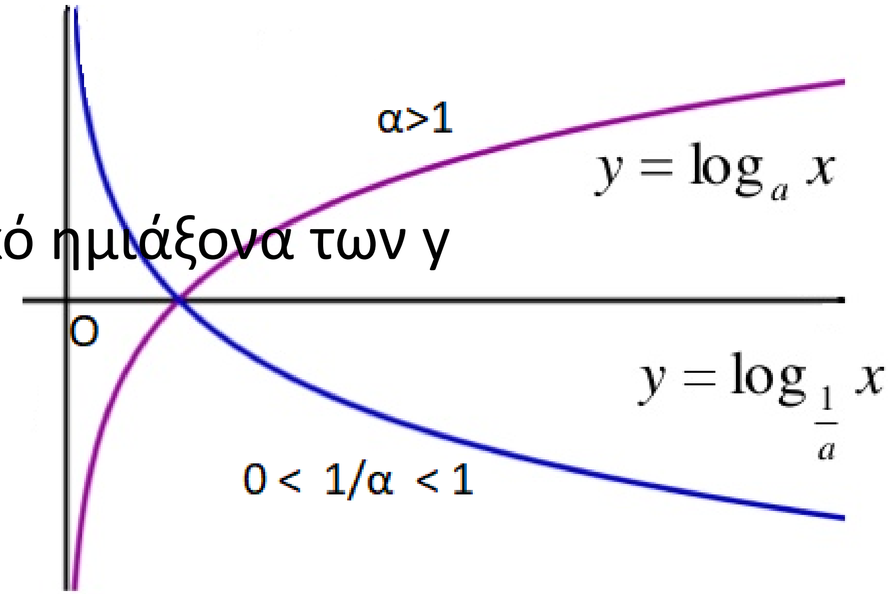
Λογαριθμική συνάρτηση

Εστω α ϵ $\mathbb{R}^+\backslash\{1\}$

Ορίζω $\begin{cases} f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto f(x) = \log_\alpha x \end{cases}$ ως λογαριθμική συνάρτηση με βάση το a

<u>Η $f(x) = \log_\alpha x$, a > 1</u>

- Π.Ο. = $(0, +\infty)$
- Π.Τ. = $\mathbb{R}$
- Η f γνησίως αύξουσα
- Η f τέμνει τον yy’ στο (0, 1)
- Έχει ασύμπτωτο άξονα τον αρνητικό ημιάξονα των y



<u>Η $f(x) = \log_\alpha x$, 0 < a < 1</u>

- Π.Ο. = $(0, +\infty)$
- Π.Τ. = $\mathbb{R}$
- Η f γνησίως φθίνουσα
- Η f τέμνει τον yy’ στο (0, 1)
- Έχει ασύμπτωτο άξονα τον θετικό ημιάξονα των y

Εξίσωση ευθείας

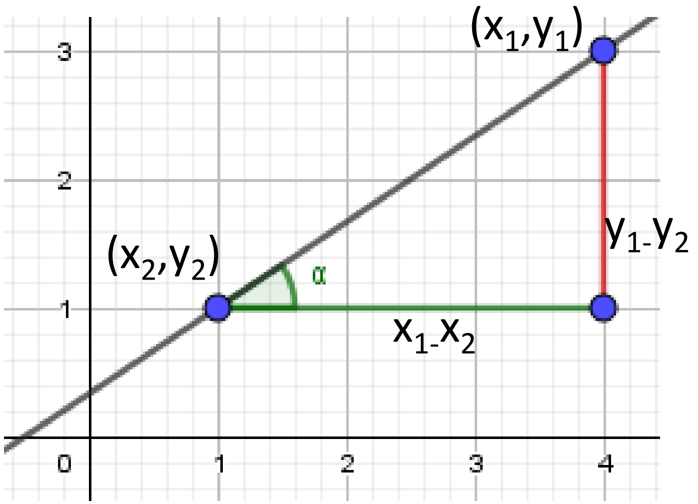
$$\boxed{(\varepsilon):\ y = m \cdot x + b}$$

(ή $y = a \cdot x + b$)

m: ο συντελεστής διεύθυνσης της (ε), η κλίση της (ε)
b: το σημείο τομής με τον yy'

- Αν (ε) // yy', τότε $y = x_M$, όπου το Μ το σημείο τομής με τον xx'
- Αν (ε) // xx', τότε $y_K = x$, όπου το Κ το σημείο τομής με τον yy'

$$m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \tan\alpha$$



- **Αν ξέρω ένα σημείο (x_1,y_1) της (ε) & το m:**

$$(\varepsilon):\ y - y_1 = m \cdot (x - x_1)$$

- **Αν ξέρω 2 διαφορετικά σημεία της (ε)**: $y - y_1 = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot (x - x_1)$

- **(ε) ⊥ (ζ)** $\Leftrightarrow m_\varepsilon \cdot m_\zeta = -1$ & **(ε) // (ζ)** $\Leftrightarrow m_\varepsilon = m_\zeta$