ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

Τμήμα Φυσικής

Εξέταση στην Ειδική Θεωρία Σχετικότητας

19 Ιουνίου 2013

Τα δεδομένα όλων των ερωτημάτων αναφέρονται σε σύστημα μονάδων όπου η ταχύτητα του φωτός c είναι ίση με 1. Σας προτρέπουμε να δουλέψετε τις απαντήσεις σας σε αυτό το σύστημα. Απαντήστε και στα 4 θέματα με σαφήνεια και απλότητα. Καλή σας επιτυχία.

ΘΕΜΑ Α:

1. Πότε δύο τετρανύσματα είναι ορθογώνια το ένα ως προς το άλλο (κάθετα μεταξύ τους); Γράψτε ένα παραδειγμα ζεύγους τέτοιων τετρανυσμάτων θέτοντας συγκεκριμένες αριθμητικές τιμές στις συνιστώσες του. [Η ορθογωνιότητα νοείται υπό τη μετρική του Minkowski.]
2. Μπορούν δύο χωροειδή (space-like) τετρανύσματα να είναι ορθογώνια το ένα στο άλλο; Αν ναι βρείτε ένα τέτοιο ζεύγος, αν όχι αποδείξτε ότι δεν μπορούν.
3. Μπορούν δύο χρονοειδή (time-like) τετρανύσματα να είναι ορθογώνια το ένα στο άλλο; Αν ναι βρείτε ένα τέτοιο ζεύγος, αν όχι αποδείξτε ότι δεν μπορούν.
4. Ποια η σχέση μεταξύ δύο φωτοειδών (light-like) τετρανυσμάτων $\phi^\mu = (\phi^0, \vec{\phi})$, $\psi^\mu = (\psi^0, \vec{\psi})$, έτσι ώστε αυτά να είναι ορθογώνια το ένα ως προς το άλλο.
5. Ένα δεδομένο χωροειδές και ένα δεδομένο χρονοειδές τετράνυσμα είναι ορθογώνια μεταξύ τους. Βρείτε κατάλληλο σύστημα αναφοράς στο οποίο το χρονοειδές γίνεται αμιγώς χρονοειδές, δηλαδή έχει συνιστώσες $(T, 0, 0, 0)$. Στο σύστημα αυτό αναφοράς, τι μορφή παίρνει το εν λόγω χωροειδές;
6. Υπολογίστε, στο σύστημα που βρήκατε στο ερώτημα (5), το εσωτερικό γινόμενο των δύο τετρανυσμάτων. Αιτιολογήστε το αποτέλεσμά σας.

ΘΕΜΑ Β: Ένα επίπεδο ηλεκτρομαγνητικό κύμα διαδίδεται κατά μήκος του άξονα z. Η περιγραφή του κύματος αυτού στο σύστημα Σ είναι:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= A\hat{\mathbf{x}} \sin\omega(t-z), \qquad (1) \\ \mathbf{B} &= A\hat{\mathbf{y}} \sin\omega(t-z). \end{aligned}$$

1. Να υπολογίσετε τη μορφή του παραπάνω ηλεκτρομαγνητικού πεδίου σε ένα σύστημα αναφοράς Σ' που κινείται κατά μήκος του άξονα z με ταχύτητα v. Προσέξτε ότι θα πρέπει να αλλάξετε καταλλήλως και τις συντεταγμένες των χωροχρονικών συντεταγμένων που χαρακτηρίζουν το χωροχρονικό γεγονός στο οποίο μετρώνται τα ηλεκτρικά και μαγνητικά πεδία.
2. Ελέγξτε την αναλλοιότητα των αναλλοιώτων του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου στα δύο συστήματα.
3. Τώρα υποθέστε ότι ένα άλλο σύστημα Σ" κινείται με ταχύτητα v κατά μήκος του άξονα x, ως προς το Σ. Περιγράψτε το Η/Μ πεδίο στο Σ" και δείξτε ότι το πεδίο θα έχει τη μορφή:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= C\hat{\mathbf{n}} \sin\Omega[t'' - (az'' + bx'')], \\ \mathbf{B} &= C\hat{\mathbf{m}} \sin\Omega[t'' - (az'' + bx'')]. \qquad (2) \end{aligned}$$

   Πρέπει να υπολογίσετε τα νέα μεγέθη $C, \Omega, a, b, \hat{\mathbf{n}}, \hat{\mathbf{m}}$ συναρτήσει των A, v, ω.

4. Συγκρίνετε το Ω/ω με τον αντίστοιχο λόγο συχνοτήτων στην περίπτωση ενός φωτονίου κινούμενου κατά τον z άξονα και συχνότητας f, όπως θα το κατέγραφε ένας παρατηρητής με ταχύτητα $v\hat{\mathbf{x}}$.

Θέμα Γ:

1. Δείξτε ότι δεν είναι δυνατόν να απορροφηθεί ένα φωτόνιο από ένα σωματίδιο, χωρίς να αλλάξει η μάζα ηρεμίας m του σωματιδίου.
2. Ένα αρχικά ακίνητο σωματίδιο μάζας m, που απορροφά ένα φωτόνιο ενέργειας E μεταβαίνει σε μια διεγερμένη ενεργειακή στάθμη (αποκτώντας έτσι μάζα m' ίση με $m + \Delta E$ όπου ΔE η ανύψωση της ενεργειακής του στάθμης). Να υπολογιστεί η m' ως συνάρτηση των m, E, καθώς και η ταχύτητά του.
3. Στη συνέχεια το σωματίδιο αυτό επανεκπέμπει πάλι ένα φωτόνιο επιστρέφοντας στην αρχική του μη διεγερμένη κατάσταση. Το φωτόνιο που εκπέμπεται κινείται στο σύστημα ηρεμίας του διεγερμένου σωματιδίου Σ' υπό γωνία θ σε σχέση με τη διεύθυνση κίνησης του αρχικού φωτονίου. Ποια η ενέργεια του εκπεμπόμενου φωτονίου στο σύστημα Σ';
4. Να βρεθεί ο λόγος της συχνότητας του φωτονίου αυτού σε σχέση με του αρχικού φωτονίου, στο σύστημα ηρεμίας του αρχικού μη διεγερμένου σωματιδίου Σ.

Θέμα Δ: Οι τετραταχύτητες δύο παρατηρητών Α, Β είναι:

$$u_A = (\sqrt{5/3}, 0, \sqrt{2/3}, 0)^\top \quad \text{και} \quad u_B = (\sqrt{5/3}, \sqrt{2/3}, 0, 0)^\top.$$

1. Να βρεθεί η σχετική ταχύτητα (το μέτρο της) των δύο παρατηρητών.
2. Οι δύο παρατηρητές Α και Β, εκκινούν ταυτόχρονα από το ίδιο σημείο, και αφού περάσει χρόνος T (ίδιος και για τους δύο) ανάβουν από έναν ίδιο μονοχρωματικό λαμπτήρα. Πότε θα δει ο καθένας από τους δύο (σύμφωνα με το δικό του ρολόι) να ανάβει ο λαμπτήρας του άλλου;
3. Συγκρίνετε τις συχνότητες του φωτός που θα βλέπει ο κάθε παρατηρητής για τον λαμπτήρα του άλλου.
4. Τη χρονική στιγμή T (σύμφωνα με το ρολόι του) ο παρατηρητής Α αποφασίζει να κινηθεί με τετραεπιτάχυνση σταθερού μέτρου $a = 1/T$ προς τον δεύτερο, ακολουθώντας την κοσμική γραμμή:

$$\mathbf{x}' = \hat{\mathbf{n}} T\{\cosh[(\tau/T) - 1] - 1\} \quad , \quad t' = T + T\sinh[(\tau/T) - 1]$$

   (για $\tau > T$) στο σύστημα Σ' που ο πρώτος παρατηρητής είναι αρχικά (προτού ξεκινήσει την επιταχυνόμενη κίνησή του) ακίνητος. τ είναι ο ιδιόχρονος του επιταχυνόμενου παρατηρητή και $\hat{\mathbf{n}}$ η κατεύθυνση προς την οποία κινούμενος μπορεί να φθάσει τον δεύτερο παρατηρητή. Ποια χρονική στιγμή του πρώτου παρατηρητή σε μονάδες T, θα συμβεί η συνάντηση;

Δίδεται η μορφή του τανυστή του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου, οι τύποι μετασχηματισμού των ηλεκτρικών και μαγνητικών πεδίων και η μορφή του γενικού μετασχηματισμού προώθησης:

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & B_z & -B_y \\ -E_y & -B_z & 0 & B_x \\ -E_z & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{array}{c} E'_\parallel = E_\parallel \\ B'_\parallel = B_\parallel \\ \mathbf{E}'_\perp = \gamma(\mathbf{E}_\perp + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \\ \mathbf{B}'_\perp = \gamma(\mathbf{B}_\perp - \mathbf{v} \times \mathbf{E}) \end{array} \quad , \quad L(\mathbf{v}) = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma v^\top \\ -\gamma v & \mathbb{I} + \frac{\gamma - 1}{v^2} v v^\top \end{pmatrix}.$$

Λύσεις

ΘΕΜΑ Α:

1. Όταν $A^\mu B_\mu = A^\mu B^\nu \eta_{\mu\nu} = 0$. Για παράδειγμα τα $A^\mu = (1,2,3,0)^\top$ και $^\mu = (2,1,0,0)^\top$ αφού $-(1)(2)+(2)(1)+(3)(0)+(0)(0) = 0$.
2. Ναι μπορεί, π.χ. τα $A^\mu = (0,2,3,0)^\top$ και $^\mu = (0,-3,2,0)^\top$. Ο λόγος είναι ότι δύο ευκλείδεια διανύσματα μπορούν να είναι κάθετα.
3. Όχι δεν γίνεται, αφού τότε θα έπρεπε $-A^0B^0 + \vec{A}\cdot\vec{B} = 0$, αδύνατον αφού $|^0| > |\vec{A}|$ και $|B^0| > |\vec{B}|$.
4. Αν είναι ορθογώνια τότε $\phi^0\psi^0 = \vec{\phi}\cdot\vec{\psi} = |\vec{\phi}||\vec{\psi}|\cos\theta$. Αφού πρόκειται για φωτοειδή τετρανύσματα $|\phi^0| > |\vec{\phi}|$ και $|\psi^0| > |\vec{\psi}|$ συνάγουμε ότι $\theta = 0$ ή $\theta = \pi$. Δηλαδή είναι ορθογώνια αν είναι παράλληλα!
5. Έστω A^μ χρονοειδές και B^μ χωροειδές, ορθογώνια το ένα στο άλλο. Το χρονοειδές θα γίνει αμιγώς χρονοειδές σε ένα σύστημα που κινείται με ταχύτητα $\vec{v} = \vec{A}/A^0$. Εκτελώντας έναν τέτοιο μετασχηματισμό προώθησης στο B θα πάρουμε

$$B'^0 = \gamma(B^0 - \frac{\vec{A}}{A^0}\cdot\vec{B}) = \gamma\frac{B^0A^0 - \vec{A}\cdot\vec{B}}{A^0} = 0,$$

   επομένως το χωροειδές θα καταστεί αμειγώς χωροειδές, της μορφής $(0,\vec{b})^\top$.
6. Είναι προφανώς 0, αφού ήταν και θα παραμείνουν σε οποιοδήποτε σύστημα ορθογώνια.

ΘΕΜΑ Β:

1. Όλες οι συνιστώσες είναι κάθετες στην κίνηση, οπότε

$$\begin{aligned}\vec{E'}_\perp &= \gamma(A\hat{x}\sin\ldots + v\hat{z}\times A\hat{y}\sin\ldots)\\ &= A\hat{x}\gamma(1-v)\sin\omega[\gamma(t'+vz') - \gamma(z'+vt')]\\ &= A\sqrt{\frac{1-v}{1+v}}\hat{x}\sin[\omega\sqrt{\frac{1-v}{1+v}}(t'-vz')].\end{aligned}$$

   Τα ίδια ακριβώς ισχύουν και για το B. Το πλάτος των πεδίων αλλάζει (αλλά μεταξύ τους έχουν ίδια πλάτη) και το ίδιο ισχύει για τις συχνότητες. Τα πεδία είναι πάλι ορθογώνια. Πρόκειται λοιπόν και πάλι για Η/Μ κύμα.
2. Είναι προφανώς 0 και τα 2 αφού και ίδιου πλάτους είναι και ορθογώνια το ηλεκτρικό και το μαγνητικό πεδίο.
3. Το ηλεκτρικό πεδίο παραμένει ίδιο στον x-άξονα όντας παράλληλο στην ταχύτητα:

$$E'_x = E_x = A\sin\omega(\gamma(t'+vx') - z')$$

   επίσης

$$\vec{E}'_\perp = \gamma(0 + v\hat{x}\times A\hat{y}\sin\ldots) = \gamma vA\hat{z}\sin\omega(\gamma(t'+vx') - z')$$

   Αντίστοιχα για το μαγνητικό πεδίο θα έχουμε

$$B'_x = 0$$

   και

$$\vec{B}'_\perp = \gamma(A\hat{y} - v\hat{x}\times A\hat{x})\sin\ldots = \gamma A\hat{y}\sin\omega(\gamma(t'+vx') - z').$$

Παρατηρούμε ότι τα πεδία έχουν τη μορφή που θέλαμε να αποδείξουμε με $C = \gamma A$ αφού $\sqrt{1 + v^2\gamma^2} = \gamma$. Τα μοναδιαία διανύσματα είναι $\hat{n} = (\hat{x} + v\gamma\hat{z})/\gamma$ (είναι εύκολο να δείξεθι κανείς ότι είναι μοναδιαίο) και $\hat{m} = \hat{y}$. Επίσης $\Omega = \gamma\omega$ και $a = 1/\gamma, b = -v$. Μάλιστα επειδή $a^2 + b^2 = 1$ το όρισμα του ημιτόνου είναι $\gamma\omega(t'' - r'')$, όπου $r'' = az'' + bx'' = \cos\theta z'' + \sin\theta x''$ δηλαδή η απόσταση κατά μήκος μιας διεύθυνσης που σχηματίζει γωνία θ με τον άξονα x.

4. Εκτελώντας έναν μετασχηματισμό προώθησης στον x άξονα με ταχύτητα v στην τετραορμή ενός φωτονίου $hf(1,0,0,1)^\top$ βρίσκουμε

$$hf(\gamma, 1, 0, -\gamma v)^\top = h\gamma f(1, 1/\gamma, 0, -v)^\top = hf'(1, \cos\theta, 0, \sin\theta)^\top$$

με $f'/f = \gamma = \Omega/\omega$.

Θέμα Γ:

1. Στο σύστημα ηρεμίας του σωματιδίου θα είχαμε συνολική τετραορμή πριν και μετά

$$P^\mu_{\text{ολ}} = \begin{pmatrix} m \\ \vec{0} \end{pmatrix} + E \begin{pmatrix} 1 \\ \hat{\mathbf{n}} \end{pmatrix} = m\gamma \begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{v} \end{pmatrix}$$

όπου E η ενέργεια του προσπίπτοντος φωτονίου, και $\mathbf{v}$ η ταχύτητα του σωματιδίου μετά την απορρόφηση. Υψώνοντας την τετραορμή προ και μετά στο τετράγωνο θα είχαμε

$$(m + E)^2 - E^2 = m^2$$

δηλαδή αδύνατον για $E \neq 0$.

2. Έστω ότι το αρχικό φωτόνιο κινείται στον άξονα x προσπίπτοντας στο ακίνητο σωματίδιο:

$$\begin{pmatrix} m \\ \vec{0} \end{pmatrix} + E \begin{pmatrix} 1 \\ \hat{\mathbf{x}} \end{pmatrix} = m'\gamma \begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{v} \end{pmatrix}$$

Υψώνοντας στο τετράγωνο τις τετραορμές βρίσκουμε $m'^2 = (m + E)^2 - E^2 = m^2 + 2Em$. Στο σύστημα ηρεμίας αυτού του σωματιδίου που τρέχει με ταχύτητα

$$\vec{v} = \frac{P^1}{P^0}\hat{x} = \frac{E}{m + E}\hat{x}$$

εκπέμπει ένα φωτόνιο και το σωματίδιο αποδιεγείρεται στην αρχική του στάθμη επανερχόμενο στην αρχική μάζα m.

3. Στο σύστημα ηρεμίας του διεγερμένου σωματιδίου:

$$m' \begin{pmatrix} 1 \\ \vec{0} \end{pmatrix} = m\gamma \begin{pmatrix} 1 \\ \vec{v} \end{pmatrix} + E' \begin{pmatrix} 1 \\ \hat{n}_\theta \end{pmatrix}.$$

Πάλι με ύψωση στο τετράγωνο βρίσκουμε $(m' - E')^2 - (-E'\hat{n}_\theta)^2 = m^2$, δηλαδή $m'^2 - 2E'm' = m^2$. Χρησιμοποιώντας την προηγούμενη τιμή του m' καταλήγουμε στο ότι

$$E' = Em/m' = E/\sqrt{1 + 2E/m}.$$

4. Στο αρχικό σύστημα η τετραορμή αυτή μετασχηματίζεται σε

$$\begin{pmatrix} \gamma & \gamma v & 0 & 0 \\ \gamma v & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad E' \begin{pmatrix} 1 \\ \cos\theta \\ \sin\theta \\ 0 \end{pmatrix} = E' \begin{pmatrix} \gamma(1 + v\cos\theta) \\ \gamma(v + \cos\theta) \\ \sin\theta \\ 0 \end{pmatrix}$$

Επομένως

$$\begin{aligned} E'' &= E'\gamma(1 + v\cos\theta) \\ &= E'\frac{m+E}{\sqrt{m^2+2Em}}(1 + \frac{E}{E+m}\cos\theta) \\ &= E\frac{1+(E/m)}{1+2(E/m)}(1 + \frac{E}{E+m}\cos\theta) \\ &= E\frac{m+E(1+\cos\theta)}{m+2E}. \end{aligned} \tag{3}$$

Δηλαδή

$$\frac{f''}{f} = \frac{E''}{E} = \frac{1+(E/m)(1+\cos\theta)}{1+2(E/m)}.$$

Θέμα Δ: Οι τετραταχύτητες δύο παρατηρητών είναι $u_A = (\sqrt{5/3}, 0, \sqrt{2/3}, 0)^\top$ και $u_B = (\sqrt{5/3}, \sqrt{2/3}, 0, 0)^\top$.

1. Η ποσότητα $u_1^\mu u_2^\nu \eta_{\mu\nu}$ είναι αναλλοίωτη, επομένως είναι σε κάθε σύστημα ίση με $-5/3$. Στο σύστημα ηρεμίας του 1 είναι $u_1^\mu = (1,0,0,0)^\top$ και $u_2^\mu = \gamma_{21}(1, \vec{v}_{21})^\top$, επομένως $-5/3 = -\gamma_{21}$ δηλαδή $v_{21} = 4/5$.
2. Ο λαμπτήρας του 1 θα ανάψει στο χωροχρονικό γεγονός $(\sqrt{5/3}T, 0, \sqrt{2/3}, 0)^\top$. Ο 2 θα λάβει το σήμα σε κάποιο σημείο της κοσμικής του γραμμής δηλαδή στο χωροχρονικό γεγονός $(\sqrt{5/3}T', \sqrt{2/3}T', 0, 0)^\top$, όπου T' είναι η στιγμή της λήψης από τον 2. Τα 2 αυτά γεγονότα συνδέονται με ένα φωτοειδές τετράνυσμα. Συνεπώς
$$(5/3)(T'-T)^2 = (2/3)(T'^2 + T^2) \to T' = T(10 \pm 8)/6.$$
Προφανώς κρατάμε τη μεγαλύτερη ρίζα $3T$ που είναι μεγαλύτερη του T. Λόγω συμμετρίας το ίδιο ισχύει και για τον άλλο.
3. Ναι γιατί οι 2 παρατηρητές βλέπουν ο καθένας τον άλλο να κινούνται με αντίθετες ταχύτητες. Επομένως τα φωτόνια θα δεχτούν τον ίδιο παράγοντα Doppler.
4. Καταρχάς μεταβαίνουμε στο σύστημα Σ' αναφοράς του 1. Αυτός κινείται με ταχύτητα
$$\vec{V} = \sqrt{2/5}\hat{y}.$$
Το αντίστοιχο Γ είναι $\sqrt{5/3}$. Κατασκευάζουμε την τετραταχύτητα του 2 στο Σ'
$$\begin{pmatrix} \sqrt{5/3} & 0 & -\sqrt{2/3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sqrt{2/3} & 0 & \sqrt{5/3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{5/3} \\ \sqrt{2/3} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/3 \\ \sqrt{2/3} \\ -\sqrt{10}/3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

έτσι η συνάντηση θα συμβεί σε κάποιο σημείο της κοσμικής γραμμής $\tau_2(5/3, \sqrt{2/3}, -\sqrt{10}/3, 0)$. Αυτό θα πρέπει να συμφωνεί με το $(t', \vec{x}')$, οπότε

$$\tau_2(5/3) = T(1 + \sinh) \tag{4}$$
$$\tau_2(\sqrt{2/3}, -\sqrt{10}/3, 0) = \hat{n}T(\cosh - 1) \tag{5}$$

και πέρνοντας το μέτρο της 2ης

$$\tau_2(4/3) = T(\cosh - 1) \tag{6}$$

Διαιρώντας κατά μέλη τις (1,3) βρίσκουμε

$$5(\cosh - 1) = 4(1 + \sinh)$$

οπότε

$$e^{(\tau/T)-1} = 9 \pm \sqrt{72}.$$

Επομένως $\tau = T(1 + \ln(9 + \sqrt{72}))$.