ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

Τμήμα Φυσικής

Εξετάσεις στη Θεωρία της Ειδικής Σχετικότητας

7 Σεπτεμβρίου 2010

Αν θέλετε μπορείτε να επεξεργαστείτε όλα τα προβλήματα σε σύστημα μονάδων όπου η ταχύτητα του φωτός είναι $c = 1$. Όλα τα δεδομένα των προβλημάτων δίδονται σε αυτό το σύστημα μονάδων.

Να λύσετε τα 4 από τα 5 θέματα.

Θέμα Α: Να υπολογίσετε τις αριθμητικές τιμές των στοιχείων που σημειώνονται με $\times$ των φυσικών μεγεθών στα ερωτήματα που ακολουθούν. Γράψτε σε ποια σχέση βασιστήκατε για να υπολογίσετε την εκάστοτε αριθμητική τιμή. [Δίδεται ότι $13^2 = 169 = 144 + 25 = 12^2 + 5^2$ και $5^2 = 25 = 16 + 9 = 4^2 + 3^2$.]

1. Η τετραταχύτητα ενός σωματιδίου είναι
$$\begin{pmatrix} 13/12 & 4/12 & \times & -3/12 \end{pmatrix}.$$
2. Η τετραεπιτάχυνση του ίδιου σωματιδίου, τη στιγμή που η τετραταχύτητά του είναι η παραπάνω, είναι
$$\begin{pmatrix} 4 & 13 & 1 & \times \end{pmatrix}.$$
3. Η τετραορμή του σωματιδίου είναι
$$\begin{pmatrix} 13 & 4 & 0 & \times \end{pmatrix}.$$
4. Η μάζα του σωματιδίου είναι $m = \times$.
5. Ένα φωτόνιο στο σύστημα κέντρου ορμής αυτού και του προηγούμενου σωματιδίου έχει τετραορμή
$$\begin{pmatrix} \times & -4 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$
6. Η συχνότητα του φωτονίου αυτού είναι $\times/h$.
7. Το φωτόνιο αυτό κινείται αποκλειστικά κατά μήκος του x-άξονα σε ένα σύστημα αναφοράς που κινείται σε σχέση με το σύστημα αναφοράς των προηγούμενων ερωτημάτων κατά τον άξονα z με ταχύτητα $V = \times$.
8. Η ενέργεια του φωτονίου σε αυτό το σύστημα είναι $E' = \times$.
9. Η μάζα του σωματιδίου σε αυτό το σύστημα είναι $m' = \times$.
10. Το ηλεκτρικό και το μαγνητικό πεδίο σε κάποιο σημείο του χώρου, κάποια χρονική στιγμή είναι $\vec{E} = (1, 0, 0)$ και $\vec{B} = (0, 0, 2)$. Σε ένα σύστημα αναφοράς που κινείται σε σχέση με το πρώτο με ταχύτητα $\vec{v} = 3/5\hat{z}$ είναι $\vec{E}' = (\times, 0, 0)$ και $\vec{B}' = (0, \times, 2)$.

Θέμα Β: Ο μέγιστος ρυθμός χτύπων της καρδιάς ενός ανθρώπου είναι 200 ανά λεπτό (στην πραγματικότητα ο ρυθμός αυτός μεταβάλλεται με την ηλικία και αντιπροσωπεύει το μέσο όρο των ανθρώπων). Πέρα από το όριο αυτό ο άνθρωπος λυποθυμάει. Ένας αστροναύτης εκτελεί έντονες ασκήσεις εντός του διαστημοπλοίου του για ερευνητικούς σκοπούς καθώς το διαστημόπλοιό του επιστρέφει στη Γη. Κάθε φορά που χτυπά η καρδιά του ένας φωτεινός παλμός στέλνεται στον επίγειο σταθμό. Φτάνοντας οι φωτεινοί παλμοί στη Γη με ρυθμό 220 το λεπτό, οι γιατροί της αποστολής συμπεραίνουν ότι ο ρυθμός της καρδιάς του αστροναύτη είναι 220 το λεπτό.

1. Δεδομένου ότι οι γιατροί της ομάδας δεν γνωρίζουν καλή φυσική ποιο είναι το πιο πιθανό συμπέρασμα στο οποίο θα καταλήξουν;

2. Ένας γιατρός της ομάδας ο οποίος ήταν πολύ καλός στη Φυσική, αλλά δεν γνωρίζει σχετικότητα σκέφτεται ότι καθώς ο κάθε φωτεινός παλμός έρχεται από πιο κοντά, λόγω της ταχύτητας προσέγγισης του διαστημοπλοίου στη Γη, ο ρυθμός φαίνεται να μεγαλώνει. Πόση είναι η ταχύτητα του διαστημοπλοίου που εξάγει ο γιατρός αυτός για να δικαιολογήσει το περίεργο φαινόμενο;

3. Ένας φυσικός καλείται να ελέγξει την εκτίμηση του τελευταίου γιατρού. Τι ταχύτητα θα εκτιμήσει αυτός;

[Δίδονται $1/11 = 0.091$ και $(1/11) * (420 \times 220)/(220^2 - 200^2) = 0.095$.]

Θέμα Γ: Προκειμένου να μετρήσουμε το μήκος, κατά μήκος της κίνησης ενός κινούμενου αντικειμένου, δύο παρατηρητές του ίδιου συστήματος αναφοράς Σ (όχι του Σ' στο οποίο το αντικείμενο είναι ακίνητο) εκτξεύουν φωτεινές ακτίνες με το φωτοόπλο τους κατά μήκος της κίνησης του αντικειμένου. Ο παρατηρητής 1 στέλνει τις φωτεινές ακτίνες ταυτόχρονα και μετρά τη χρονική διαφορά Δt_1 των αφίξεων των δύο ακτίνων. Ο παρατηρητης 2 στέλνει τις φωτεινές ακτίνες έτσι ώστε αυτές να φτάσουν ταυτόχρονα στα δύο άκρα του αντικειμένου στο Σ και μετρά τη χρονική διαφορά Δt_2 των αφίξεων των δύο ακτίνων. Να βρεθεί το μήκος του αντικειμένου και η ταχύτητα με την οποία κινείται αυτό.

Θέμα Δ: Ένα σωματίδιο μάζας m προσκρούει σε ακίνητο σωματίδιο ίδιας μάζας και συγκρούεται με αυτό ελαστικά. (α) Να δειχθεί ότι τα σωματίδια μετά τη σύγκρουση κινούνται σε διευθύνσεις που σχηματίζουν μεταξύ τους γωνία μικρότερη από $90°$. [Υποδ.: Προκειμένου να υπολογίσετε τη γωνία υψώστε στο τετράγωνο τη συνολική τετραορμή πριν και μετά την κρούση και λύστε ως προς το $\cos\phi$ της γωνίας ϕ που σχηματίζουν μεταξύ τους οι ορμές των σωματιδίων μετά την κρούση. Στη συνέχεια εκφράστε την ενέργεια του ενός σωματιδίου μετά την κρούση ως συνάρτηση της ενέργειας του άλλου και αναπτύξτε τις διαφορές τετραγώνων στις εκφράσεις για τις ορμές.] (β) Δείξτε ότι η γωνία αυτή γίνεται ακριβώς $90°$ στην περίπτωση που τα σωματίδια κινούνται με ταχύτητες πολύ μικρότερες της ταχύτητας του φωτός.

Θέμα Ε: Τα δύο αναλλοίωτα του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου σε κάποιο σημείο του χώρου κάποια χρονική στιγμή είναι $E^2 - B^2 = -(1/2)F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} = 1$ και $\vec{E} \cdot \vec{B} = (1/8)\epsilon_{\mu\nu\kappa\lambda}F^{\mu\nu}F^{\kappa\lambda} = 0$. Σε κάποιο σύστημα αναφοράς Σ η x συνιστώσα του ηλεκτρικού πεδίου είναι $E_x = 1$ ενώ οι y και z συνιστώσες του μαγνητικού πεδίου είναι $B_y = B_z = 0$.

1. Να υπολογιστούν όλες οι συνιστώσες του ηλεκτρικού και του μαγνητικού πεδίου.
2. Υπάρχει σύστημα αναφοράς στο οποίο να μηδενίζεται το ηλεκτρικό πεδίο;
3. Υπάρχει σύστημα αναφοράς στο οποίο το ηλεκτρικό πεδίο είναι $\vec{E} = (0, 0.5, 0)$;
4. Υπολογίστε την ταχύτητα με την οποία θα πρέπει να κινείται ένα σύστημα αναφοράς Σ' σε σχέση με το Σ ώστε το μέτρο της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου να είναι $|\vec{E}| = 5/3$.
5. Είναι το διάνυσμα της ταχύτητας αυτής μονοσήμαντα ορισμένο; Βρείτε τη γενική μορφή του διανύσματος της ταχύτητας.

Δίδονται οι τύποι μετασχηματισμού των πεδίων.

$$\mathbf{E'}_{\parallel} = \mathbf{E}_{\parallel}, \qquad \mathbf{E'}_{\perp} = \gamma(\mathbf{E}_{\perp} + \mathbf{u} \times \mathbf{B})$$
$$\mathbf{B'}_{\parallel} = \mathbf{B}_{\parallel}, \qquad \mathbf{B'}_{\perp} = \gamma(\mathbf{B}_{\perp} - \frac{1}{c^2}\mathbf{u} \times \mathbf{E})$$

Θέμα Α:

1. $\mathbf{u}\cdot\mathbf{u} = -1 \Rightarrow \times = 0$.

2. $\mathbf{a}\cdot\mathbf{u} = 0 \Rightarrow \times = 0$.

3. $\mathbf{p} = m\mathbf{u} = 0 \Rightarrow p^\mu/u^\mu =$ ίδιο για κάθε $\mu \Rightarrow \times = -3$.

4. $m = p^\mu/u^\mu \Rightarrow \times = 12$.

5. $p^i + p^i_\gamma = 0$ και $\mathbf{p}_\gamma \cdot \mathbf{p}_\gamma = 0 \Rightarrow \times = 5$.

6. $\nu = E_\gamma/h = p^0/h \Rightarrow \times = 5$.

7. $p'^\mu_\gamma = L^\mu_\nu p^\nu_\gamma \Rightarrow$
$$\begin{pmatrix} \Gamma & 0 & 0 & -\Gamma V \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\Gamma V & 0 & 0 & \Gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
οπότε $\Gamma(-V5+3) = 0 \Rightarrow \times = 3/5$.

8. $\times = E' = p^{0\prime} = \Gamma(V = 3/5)(5 - (3/5)3) = (5/4)(16/5) = 4$.

9. $\times = m' = m = 12$.

10. $E'_x = \gamma(E_x + 0) = 5/4$, $B'_y = \gamma(B_y - u_z E_x) = (5/4)(0 - (3/5)1) = -3/4$.

Θέμα Β:

1. Υπάρχουν διάφορες υποθέσεις που μπορεί να κάνει ένας γιατρός, όπως ότι ο αστροναύτης αυτός ξεπερνά τον μέσο όρο των ανθρώπων, ότι έχει άλλη ηλικία από αυτήν στην οποία ανφέρεται ο μέγιστος αριθμός σφυγμών 200, ότι είναι ιδιαίτερα εξασκημένος, ότι λόγω μακράς διαμονής στο Διάστημα έχει αλλάξει η φυσιολογία, ότι λόγω υψηλής ταχύτητας το σώμα φέρεται διαφορετικά.

2. Ο πρώτος φωτεινός παλμός ξεκινά από τη θέση x_1 τη χρονική στιγμή t_1 και ο δεύτερος από τη θέση $x_2 = x_1 - V\delta t$ τη χρονική στιγμή $t_2 = t_1 + \delta t$, όπου $\delta t \geq 1/200$ min θεωρώντας ότι δεν μπορεί να ξεπεράσει τους 200 σφυγμούς το λεπτό. Έτσι ο πρώτος φωτεινός παλμός θα φτάσει τη στιγμή $t_3 = t_1 + x_1/c$ και η δεύτερη την $t_4 = t_2 + x_2/c$. Ξέρουμε ότι $t_4 - t_3 = 1/220$ min. Συνεπώς
$$\delta t - (V/c)\delta t = 1/220 \Rightarrow V/c = \frac{\delta t - 1/220}{\delta t} = 1 - \frac{1}{220\delta t} \geq 1 - \frac{200}{220} = 1/11.$$
θεωρώντας ότι δεν μπορεί να ξεπεράσει τους 200 σφυγμούς το λεπτό. Έτσι ο πρώτος φωτεινός παλμός θα φτάσει τη στιγμή $t_3 = t_1 + x_1/c$ και η δεύτερη την $t_4 = t_2 + x_2/c$. Ξέρουμε ότι $t_4 - t_3 = 1/220$ min. Συνεπώς
$$\delta t - (V/c)\delta t = 1/220 \Rightarrow V/c = \frac{\delta t - 1/220}{\delta t} = 1 - \frac{1}{220\delta t} \geq 1 - \frac{200}{220} = 1/11 = 0.091.$$

3. Ο πρώτος φωτεινός παλμός ξεκινά από τη θέση x_1 τη χρονική στιγμή t_1 και ο δεύτερος από τη θέση $x_2 = x_1$ τη χρονική στιγμή $t_2 = t_1 + \delta t$, όπου $\delta t \geq 1/200$ min όπως αυτά μετρώνται από τον αστροναύτη. Από την ομάδα στη Γη τα γεγονότα αυτά συμβαίνουν στις θέσεις $x'_1 = \gamma(x_1 - Vt_1), t'_1 = \gamma(t_1 - Vx_1/c^2), x'_2 = \gamma(x_2 - Vt_2), t'_2 = \gamma(t_2 - Vx_2/c^2)$. Οι αφίξεις των φωτεινών παλμών θα συμβούν τις στιγμές $t'_1 + x'_1/c$ και $t'_2 + x'_2/c$, επομένως
$$1/220 = t'_2 - t'_1 + (x'_2 - x'_1)/c = \gamma(\delta t) + \gamma(-V\delta t)/c \Rightarrow \gamma(1 - V/c) = \frac{1}{220\delta t} \leq \frac{10}{11} \Rightarrow V/c \geq \frac{21}{121} = 0.095.$$

Θέμα Γ: 1η περίπτωση: Εκπομπή φωτεινών σημάτων $x_1 = t_1 = x_2 = t_2 = 0$. Ανάκλαση στο πίσω άκρο $x_3 = t_3 = X$, ανάκλαση στο πρόσθιο άκρο $x_4 = t_4 = Y$. Άφιξη πρώτης ανακλώμενης δέσμης $x_5 = 0, t_5 = 2X$, άφιξη δεύτερης ανακλώμενης δέσμης $x_6 = 0, t_6 = 2Y$. Συνεπώς $\Delta t_1 = 2(Y - X)$. Όμως από μετασχηματισμό Lorentz $x'_4 = \gamma(x_4 - vt_4) + L_0 + x'(0)$ και $x'_3 = \gamma(x_3 - vt_3) + x'(0)$ (το $x'(0)$ έχει να κάνει με την αρχική θέση της ράβδου και θα απαλειφθεί παρακάτω). Έτσι $L_0 = \gamma(1 - v)(Y - X)$.

2η περίπτωση: Ανάκλαση στο πίσω άκρο $x_3 = A, t_3 = t$, ανάκλαση στο πρόσθιο άκρο $x_4 = B, t_4 = t$. Άφιξη πρώτης ανακλώμενης δέσμης $x_5 = 0, t_5 = t + A$, άφιξη δεύτερης ανακλώμενης δέσμης $x_6 = 0, t_6 = t + B$. Συνεπώς $\Delta t_2 = (B - A)$. Όμως από μετασχηματισμό Lorentz $x'_4 = \gamma(x_4 - vt_4) + L_0 + x'(0)$ και $x'_3 = \gamma(x_3 - vt_3) + x'(0)$ (το $x'(0)$ έχει να κάνει με την αρχική θέση της ράβδου και θα απαλειφθεί παρακάτω). Έτσι $L_0 = \gamma(B - A)$.

Συνοψίζοντας $\Delta t_2 = L_0/\gamma$, $\Delta t_1 = 2L_0/(\gamma(1 - v))$. Έτσι $v = 1 - 2\delta t_2/\delta t_1$ και $L_0 = \gamma \Delta t_2$.

Θέμα Δ:

1. $$(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2)^2 = (\mathbf{p}'_1 + \mathbf{p}'_2)^2 \Rightarrow \mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2 = \mathbf{p}'_1 \cdot \mathbf{p}'_2$$

   Επομένως $E_1 m = E'_1 E'_2 - p'_1 p'_2 \cos\phi$ και από διατήρηση ενέργειας $E'_2 = E_1 + m - E'_1$. Συνεπώς

   $$\begin{aligned}\cos\phi &= \frac{E'_1 E'_2 - E_1 m}{p'_1 p'_2} \\ &= \frac{E'_1(E_1 + m - E'_1) - E_1 m}{\sqrt{E'^2_1 - m^2}\sqrt{(E_1 + m - E'_1)^2 - m^2}} \\ &= \frac{(E'_1 - m)(E_1 - E'_1)}{\sqrt{E'_1 - m}\sqrt{E'_1 + m}\sqrt{E_1 - E'_1}\sqrt{E_1 + 2m - E'_1}} \\ &= \sqrt{\frac{(E'_1 - m)(E_1 - E'_1)}{(E'_1 + m)(E_1 + 2m - E'_1)}}.\end{aligned} \tag{1}$$

   Όλες οι ποσότητες είναι θετικές αφού $E_1 - E'_1 = E'_2 - m \geq 0$. Συνεπώς $\phi < 90°$.

2. Στην κλασική μηχανική $E'_1 - m \simeq E_1 - E'_1 \simeq 0$ οπότε $\phi = 90°$.

Θέμα Ε:

1. Αφού $\vec{E} \cdot \vec{B} = 0 \Rightarrow 1B_x = 0 \Rightarrow B_x = 0$. Έτσι $1 + E_y^2 + E_z^2 = E^2 = 1 + B^2 = 1 \Rightarrow E_y = E_z = 0$.

2. Όχι γιατί τότε το 1ο αναλλοίωτο θα ήταν αρνητικό.

3. Όχι γιατί τότε το 1ο αναλλοίωτο θα ήταν $\leq 1/4$.

4. Αν κινείται με $\vec{v} = V\hat{y}$, τότε $E'y = E_y = 0, E'_x = \gamma E_x = \gamma, E'_z = \gamma E_z = 0$. Επομένως αρκεί $V = 4/5$.

5. Αν κινείται με $\vec{v} = V\hat{y}$, τότε $E'y = E_y = 0, E'_x = \gamma E_x = \gamma, E'_z = \gamma E_z = 0$. Επομένως αρκεί $V = 4/5$.

6. Έστω $\vec{v} = V\hat{n} = V(\cos\phi\hat{x} + \sin\phi\hat{n}_\perp)$. Τότε

   $$\vec{E}' = (\vec{E} \cdot \hat{n})\hat{n} + \gamma[\vec{E} - (\vec{E} \cdot \hat{n})\hat{n}]$$

   αφού $\vec{B} = 0$. Συνεπώς

   $$\vec{E}' = \cos\phi\hat{n} + \gamma[\hat{x} - \cos\phi\hat{n}] = \hat{x}(\gamma\sin^2\phi + \cos^2\phi) + \hat{n}_\perp \cos\phi\sin\phi(1 - \gamma).$$

   Για να είναι το μέτρο αυτού 5/3 θα πρέπει (με λίγες πράξεις)

   $$\cos^2\phi + \gamma^2\sin^2\phi = 25/9$$

   δηλαδή για κάθε τιμή της γωνίας που θα επιλέξουμε θα βρούμε και κάποια τιμή του γ δηλαδή του V. Η περίπτωση του προηγούμενου ερωτήματος ήταν $\phi = 90°$ δηλαδή $\gamma = 5/3 \Rightarrow V = 4/5$.