ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

Τμήμα Φυσικής

Εξετάσεις στη Θεωρία της Ειδικής Σχετικότητας
Περίοδος Σεπτεμβρίου
27 Σεπτεμβρίου 2007

Θέμα 2: Σε ένα εργαστήριο επιχειρείται η δημιουργία σωματιδίων μεγάλης μάζας με σύγκρουση πολλών ισχυρών δεσμών λέιζερ. Συγκεκριμένα, N λέιζερ που παράγουν φωτόνια συχνότητας ν, είναι τοποθετημένα στις κορυφές ενός κανονικού N-γώνου και είναι στραμμένα με τέτοιο τρόπο ώστε όλες οι δέσμες να συγκλίνουν στο κέντρο του N-γώνου.
(α) Να βρεθεί η μάζα M του προκύπτοντος σωματιδίου, όταν παράγεται ένα μόνο σωματίδιο.
(β) ΄Εστω, ότι ένα από τα λέιζερ βγαίνει εκτός λειτουργίας. Ποιο ποσοστό της μάζας M θα έχει το παραγόμενο σωματίδιο (με την προϋπόθεση ότι παράγεται και πάλι μόνον ένα σωματίδιο), και ποια η ταχύτητά του στο εργαστήριο;
(γ) Μπορούμε από τη διεύθυνση κίνησης του σωματιδίου να καταλάβουμε ποιο λέιζερ βγήκε εκτός λειτουργίας;

Θέμα 2: (α) Μια ευθύγραμμη ράβδος με μήκος L σχηματίζει γωνία ϕ με τον άξονα x του ΣΚΦ Σ στο οποίο είναι ακίνητη. ΄Ενα δεύτερο ΣΚΦ Σ΄ κινείται με τον τυποποιημένο τρόπο με ταχύτητα v σε σχέση με το Σ. Ποιο μήκος της ράβδου θα μετρήσει ένας παρατηρητής του Σ΄ ;
(β) Σχηματίζουμε τώρα ένα τετράγωνο ΑΒΓΔ πλευράς L, η μία πλευρά του οποίου (η ΑΒ) κατέχει τη θέση που είχε η ράβδος στο προηγούμενο ερώτημα στο σύστημα Σ, ενώ ολόκληρο το τετράγωνο βρίσκεται επί του επιπέδου $x-y$. Ποια η περίμετρος του τετραγώνου που θα μετρά ο παρατηρητής του συστήματος Σ΄ ;
(γ) Θέλουμε να υπολογίσουμε τη μικρότερη περίμετρο του τετραγώνου που είναι δυνατό να μετρήσει κάποιος αδρανειακός παρατηρητής ο οποίος κινείται ως προς το τετράγωνο σε οποιαδήποτε διεύθυνση επί του επιπέδου $x-y$. Προς τούτο μελετήστε πρώτα τη μονοτονία της συνάρτησης της περιμέτρου ως προς την ταχύτητα v κρατώντας τη ϕ σταθερή και στη συνέχεια αφού βρείτε την ταχύτητα που ελαχιστοποιεί την περίμετρο ελαχιστοποιήστε στη συνέχεια την έκφραση της περιμέτρου και ως προς τη γωνία ϕ. Εξηγήστε πώς τελικά πρέπει να κινείται ο παρατηρητής για να βλέπει την περίμετρο όσο το δυνατό μικρότερη.

Θέμα 3: Μια (φανταστική) αμαξοστοιχία κινείται ευθύγραμμα και ομαλά με ταχύτητα $0.6c$.
(α) Επιβάτης της αμαξοστοιχίας παρατηρεί ότι το ρολόι του δείχνει ακριβώς 12:00, την ίδια στιγμή που το ρολόι του σταθμού Α που βρίσκεται ακριβώς έξω από το παράθυρό του δείχνει την ίδια ακριβώς ώρα. Στον επόμενο σταθμό Β, απ᾿ όπου περνά η αμαξοστοιχία κινούμενη με την ίδια σταθερή ταχύτητα, το ρολόι του σταθμού δείχνει 1:00. Τι ώρα δείχνει τότε το ρολόι του επιβάτη;
Επειδή η διαφορά των ενδείξεων των ρολογιών θα δημιουργούσε πρόβλημα στους επιβάτες γιατί δεν θα μπορούσαν να προγραμματίσουν σωστά τις μετακινήσεις τους, προτάθηκε να είναι εφοδιασμένοι με δύο διαφορετικά ρολόγια. ΄Ενα ρολόι που δείχνει τον ιδιόχρονό τους και έχει σταθερό ρυθμό και ένα δεύτερο που δείχνει την ώρα των σταθμών και έχει μεταβλητό ρυθμό. Το δεύτερο αυτό ρολόι λειτουργεί ως εξής: Από κάθε σταθμό εκπέμπεται διαρκώς ένα ηλεκτρομαγνητικό σήμα συγκεκριμένης συχνότητας ν_0. Θεωρώντας ότι η κίνηση του τραίνου είναι ευθύγραμμη και επί αυτής της ευθείας βρίσκονται όλοι οι σταθμοί, το σήμα που εκπέμπεται από τους σταθμούς λαμβάνεται από το δεύτερο ρολόι του κάθε επιβάτη, **μετράται** η συχνότητα ν του λαμβανόμενου σήματος, υπολογίζεται η ταχύτητα του τραίνου v και στη συνέχεια ρυθμίζεται ο ρυθμός λ του δεύτερου ρολογιού έτσι ώστε η ένδειξη αυτού να συμπίπτει με τα ρολόγια όλων των σταθμών. Με τον τρόπο αυτό ο επιβάτης ανά πάσα στιγμή μπορεί να διαβάζει το χρόνο του καθώς και το χρόνο των σταθμών.
(β) Υπολογίστε το ρυθμό λ του δεύτερου ρολογιού συναρτήσει της λαμβανόμενης συχνότητας ν.

(γ) Εφαρμόστε τα αποτελέσματά σας στην συγκεκριμένη αμαξοστοιχία και δείξτε ότι πράγματι ο μηχανισμός που προτάθηκε είναι σωστός.
(δ) Υπάρχει καμιά διαφορά αν το δεύτερο ρολόι λαμβάνει το σήμα του σταθμού Α ή αυτό του σταθμού Β όσον αφορά στο ρυθμό λ;

Θέμα 4: Σε ένα ΣΚΦ Σ υπάρχει ένα ομογενές ηλεκτρικό πεδίο $\vec{E} = E\hat{x}$. Φορτισμένο σωματίδιο, φορτίου q και μάζας m, αρχικά ακίνητο στο Σ, αφήνεται να κινηθεί κάτω από την επίδραση του ηλεκτρικού πεδίου $\vec{E}$.
(α) Δεδομένου ότι η εξίσωση κίνησης ενός σωματιδίου φορτίου q σε ένα ηλεκτρομαγνητικό πεδίο $F^{\mu\nu}$ είναι:

$$\frac{dp^\mu}{d\tau} = qu_\nu F^{\mu\nu}.$$

όπου u^ν, p^μ και τ είναι η τετραταχύτητα, η τετραορμή και ο ιδιόχρονος του σωματιδίου, γράψτε τις 4 συνιστώσες της εξίσωσης κίνησης του σωματιδίου στο Σ.
(β) Ολοκληρώστε τη x-συνιστώσα της παραπάνω εξίσωσης για να βρείτε την $v(\tau)$ του σωματιδίου.
(γ) Στο σύστημα αναφοράς του σωματιδίου (το ιδιοσύστημά του) ποιο είναι το ηλεκτρικό και το μαγνητικό πεδίο που μετρά αυτό;
[Υπόδειξη: Δίνεται το ολοκλήρωμα

$$\int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2}\ln\left[\frac{1+x}{1-x}\right]$$

καθώς και η μορφή του τανυστή του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου σε συνιστώσες:

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_x/c & E_y/c & E_z/c \\ -E_x/c & 0 & B_z & -B_y \\ -E_y/c & -B_z & 0 & B_x \\ -E_z/c & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix}.$$

Δίδονται επίσης οι τύποι μετασχηματισμού των πεδίων:

$$\mathbf{E}'_{\|} = \mathbf{E}_{\|}, \qquad \mathbf{E}'_{\perp} = \gamma(\mathbf{E}_\perp + \mathbf{u}\times\mathbf{B})$$
$$\mathbf{B}'_{\|} = \mathbf{B}_{\|}, \qquad \mathbf{B}'_{\perp} = \gamma(\mathbf{B}_\perp - \frac{1}{c^2}\mathbf{u}\times\mathbf{E}).\ ]$$

Λύσεις

Θέμα 1:

(α) Από διατήρηση τετραορμής

$$\sum_{i=1}^{N} P^{\mu}_{(i)} = \begin{pmatrix} E \\ \vec{p} \end{pmatrix}$$

όπου $_{(i)}$ υποδηλώνει το φωτόνιο του i-οστού λέιζερ. Λόγω συμμετρίας το άθροισμα των χωρικών συνιστωσών είναι μηδέν οπότε το νέο σωματίδιο θα έχει ορμή 0 και ενέργεια $Nh\nu$. Αυτή λοιπόν θα είναι και η μάζα του νέου σωματιδίου

$$M = Nh\nu$$

(β) Τώρα, θεωρώντας ότι το N-οστό τίθεται εκτός λειτουργίας

$$\begin{pmatrix} E \\ \vec{p} \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{N-1} P^{\mu}_{(i)} = \sum_{i=1}^{N} P^{\mu}_{(i)} - P^{\mu}_{(N)} = \begin{pmatrix} M \\ \vec{0} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} h\nu \\ h\nu\hat{n}_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h\nu(N-1) \\ -h\nu\hat{n}_N \end{pmatrix}$$

Η μάζα του ωματιδίου αυτού θα είναι

$$m = \sqrt{(P^0)^2 - (P^i)^2} = h\nu\sqrt{(N-1)^2 - \hat{n}_N^2} = h\nu\sqrt{N^2 - 2N} = M\sqrt{1 - 2/N}$$

Η δε ταχύτητά του είναι

$$v^i = \frac{P^i}{P^0} = -\frac{1}{N-1}\hat{n}_N$$

σε μονάδες $c = 1$.

(γ) Αφού αυτό το σωματίδιο θα φύγει στην αντίθετη κατεύθυνση της N-οστής δέσμης λέηζερ θα κατευθυνθεί προς το χαλασμένο λέηζερ.

Θέμα 2:

(α) Η προβολή της ράβδου κάθετα στην ταχύτητα θα μείνει ίδια ενώ η παράλληλη θα υποστεί συστολή κατά γ. ΄Ετσι

$$L' = \sqrt{{L'_y}^2 + {L'_x}^2} = L\sqrt{\sin^2\phi + \frac{\cos^2\phi}{\gamma^2}} = L\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}\cos^2\phi}$$

(β) Για τοτετράγωνο θα έχουμε δύο πλευρές (τις ΑΒ και ΓΔ) που θα αλλάξουν όπως παραπάνω και τις άλλες δύο που σχηματίζουν γωνία $\pi/2 - \phi$ με τον άξονα x και θα αλλάξουν με αντίστοιχο τρόπο ($\cos \to \sin$) τα μήκη τους για τον κινούμενο παρατηρητή.

$$(\mathrm{AB\Gamma\Delta})' = 2L\left(\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}\cos^2\phi} + \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}\sin^2\phi}\right)$$

(γ) Παρατηρούμε ότι όσο η ταχύτητα v αυξάνεται η μετρούμενη περίμετρος μικραίνει. Επομένως η ελάχιστη θα είναι για $v \to c$, δηλαδή

$$(\mathrm{AB\Gamma\Delta})'_{\min(v)} = 2L\left(\sqrt{1 - \cos^2\phi} + \sqrt{1 - \sin^2\phi}\right) = 2L(\sin\phi + \cos\phi)$$

Η ποσότητα αυτή γίνεται 1 για $\phi = 0, \pi/2$ και μεγαλύτερη του 1 για οποιαδήποτε ενδιάμεση γωνία. Επομένως η μικρότερη δυνατή περίμετρος είναι $2L$. Πρέπει να κινείται κανείς παράλληλα με μια από τις πλευρές του τετραγώνου με ταχύτητα $v \to c$ για να πετύχει την ελάχιστη περίμετρο.

Θέμα 3:

΄Εστω Γ,Γ/' τα δύο γεγονότα διέλευσης από τους δύο σταθμούς, άτονο το σύστημα των σταθμών, τονούμενο το σύστημα της αμαξοστοιχίας.

$$t_\Gamma = 0, x_\Gamma = 0, t'_\Gamma = 0, x'_\Gamma = 0$$

$$t_{\Gamma'} = 60\mathrm{min}, x_{\Gamma'} = 0.6c\,60\mathrm{min}, t'_{\Gamma'} = \gamma(t_{\Gamma'} - ux_{\Gamma'}/c^2) = \frac{5}{4}(60\mathrm{min})\,0.64 = 48\mathrm{min}, x'_{\Gamma'} = 0$$

Επομένως το ρολόι του επιβάτη θα δείχνει 12:48 αντί 1:00.
(β) Τα 48 λεπτά που πέρασαν είναι ο ιδιόχρονος που δείχνει το πρώτο ρολόι. Το δεύτερο ρολόι θα πρέπει να τρέχει με ρυθμό 60/48 του ρυθμού του πρώτου για να είναι σε συμφωνία με το ρολόι του σταθμού B. Από το φαινόμενο Doppler η συχνότητα που λαμβάνει το 2ο ρολόι είναι

$$\nu = \nu_0 \sqrt{\frac{1-(v/c)}{1+(v/c)}}$$

όπου v η ταχύτητα απομάκρυνσης του ρολογιού από το σταθμό. Αν πλησιάζει το v πρέπει να αντικατασταθεί με $-v$. Λύνοντας βρίσκουμε

$$v/c = \frac{1-\nu^2/\nu_0^2}{1+\nu^2/\nu_0^2}.$$

Το ρολόι που μετράει ιδιόχρονο καθυστερεί κατά τον παράγοντα γ σε σχέση με το χρόνο των σταθμών. Επομένως το 2ο ρολόι θα πρέπει να επιταχυνθεί κατά

$$\lambda = \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{\nu_0^2-\nu^2}{\nu_0^2-\nu^2}\right)^2}} = \frac{\nu_0^2+\nu^2}{2\nu_0\nu} = \frac{1}{2}\left(\frac{\nu_0}{\nu}+\frac{\nu}{\nu_o}\right)$$

(γ) Με εφαρμογή επί του συγκεκριμένου η συχνότητα λήψης από τον A είναι

$$\nu = \nu_0\sqrt{(1-0.6)/(1+0.6)} = \nu_0/2$$

Έτσι $\lambda = \frac{1}{2}(0.5+2) = 1.25$. Αφού τρέχει το 2ο ρολόι κατά 25% γρηγορότερα θα δείχνει αντί 48 λεπτά 60 λεπτά επομένως θα είναι σε συμφωνία με το σταθμό B.
(δ) Αν λάμβανε το σήμα του σταθμού προορισμού η συχνότητα θα διπλασιαζόταν, αλλά το λ είναι ίδιο αν αντιστρέψουμε το κλάσμα ν/ν_0. Έτσι η τεχνική αυτή λειτουργεί σωστά ανεξαρτήτως του ποιο σήμα λαμβάνει το δεύτερο ρολόι.

Θέμα 4:

(α) Δεδομένου ότι (για $c=1$)

$$p^0 = m\gamma, p^1 = m\gamma v, p^2 = p^3 = 0$$
$$v_0 = -\gamma, v_1 = \gamma v, v_2 = v_3 = 0$$
$$F^{01} = F_{10} = E, \text{όλες οι άλλες συνιστώσες } F^{\mu\nu} = 0$$

$$\frac{dp^0}{d\tau} = \frac{d(m\gamma)}{d\tau} = q\gamma u E$$

και

$$\frac{dp^1}{d\tau} = \frac{d(m\gamma v)}{d\tau} = q(-\gamma)(-E) = q\gamma E$$

ενώ οι άλλες δύο συνιστώσες είναι ταυτοτικά μηδέν.
(β) Είναι

$$d(\gamma v) = d(v/\sqrt{1-v^2}) = dv[1/\sqrt{1-v^2} + v^2/(\sqrt{1-v^2})^3] = \gamma^3 dv.$$

Επομένως

$$\gamma^3\frac{dv}{d\tau} = \frac{qE}{m}\gamma \Rightarrow \int_0^{v(\tau)} \frac{dv}{1-v^2} = \frac{qE}{m}\tau$$
$$\Rightarrow \ln\left[\frac{1+v(\tau)}{1-v(\tau)}\right] = \frac{2qE\tau}{m} \Rightarrow v(\tau) = \tanh\frac{qE\tau}{m}$$

(γ) Αφού το σωματίδιο κινείται στον x άξονα το μεν ηλεκτρικό πεδίο (μόνο παράλληλη συνιστώσα) μένει το ίδιο, το δε μαγνητικό πεδίο δεν υπάρχει αφού $\vec{v}\|\vec{E}$.