Εξετάσεις στη Θεωρία της Ειδικής Σχετικότητας

Σεπτέμβριος 2004

Να λυθούν τα τέσσερα από τα πέντε θέματα

Θέμα 1: Σχετικιστικό Υλικό Σημείο κινείται στο αδρανειακό σύστημα Σ έτσι ώστε το τετράνυσμα της θέσης x^μ να συνδέεται με την τετραεπιτάχυνση a^μ με τη σχέση : $a^\mu = k^2 x^\mu$,
(α) Δείξατε ότι το P κινείται έτσι ώστε το τετράνυσμα της θέσης να είναι διαρκώς κάθετο στην τετραταχύτητα. (β) Αποδείξτε ότι αν η κίνηση του σωματιδίου πραγματοποιείται μόνο στον x-άξονα τότε οι ακόλουθες συναρτήσεις δίνουν τη χωροχρονική θέση του σωματιδίου:

$$ct = a\cosh(k\tau) + b\sinh(k\tau)\ ,\ x = b\cosh(k\tau) + a\sinh(k\tau)$$

Ποια σχέση συνδέει τις παραμέτρους a, b ώστε ένα στοιχειώδες χωροχρονικό μήκος της τροχιάς του σωματιδίου στο χωρόχρονο να είναι $ds^2 = -c^2 d\tau^2$, δηλαδή η παράμετρος τ να παίζει το ρόλο του ιδιόχρονου κατά μήκος της κοσμικής γραμμής; (γ) Αν το P εκκινεί από την ηρεμία, από το σημείο x_0 του άξονα x, υπολογίστε την εξίσωση κίνησης του P και σχεδιάστε την σε διάγραμμα $x - t$.
Θέμα 2: Θεωρήστε ένα τυχαίο τετράνυσμα. Εκτελέστε πάνω του δύο αλλεπάλληλους τυποποιημένους μετασχηματισμούς Lorentz. Τη μια φορά πρώτα κατά τον x και μετά κατά τον y και τη δεύτερη φορά πρώτα κατά τον y και μετά κατά τον x. Θεωρήστε κοινή ταχύτητα β για όλους τους μετασχηματισμούς. Στο όριο της πολύ μικρής ταχύτητας β τα δύο τελικά τετρανύσματα (μετά τους μετασχηματισμούς) έχουν τίποτε κοινό; Οι χωρικές τους συνιστώσες διαφέρουν; Σε τι;
Θέμα 3: (α) Ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ ηρεμεί στο αδρανειακό σύστημα Σ έτσι ώστε η πλευρά ΑΒ να βρίσκεται στον άξονα x. Υπολογίστε την περίμετρο του τριγώνου σε ένα άλλο αδρανειακό σύστημα Σ' το οποίο κινείται ως προς το Σ κατά τον τυποποιημένο τρόπο με ταχύτητα u.
(β) Πώς πρέπει να κινείται (σε ποια κατεύθυνση) ένα αδρανειακό σύστημα ως προς το Σ έτσι ώστε η περίμετρος του τριγώνου να είναι η ελάχιστη δυνατή; [Υπόδειξη: Μπορείται να βρείτε εύκολα την απάντηση στο όριο που η σχετική ταχύτητα του Σ' πλησιάζει την ταχύτητα του φωτός c.]
Θέμα 4: Σωματίδιο συγκρούεται με άλλο ακίνητο σωματίδιο ίσης μάζας. Τα δύο σωματίδια εξαϋλώνονται. Μετά τη σύγκρουση παράγονται δύο φωτόνια ίσης συχνότητας ν τα οποία κινούνται στο επίπεδο $x - y$, εκατέρωθεν του άξονα x, σχηματίζοντας με αυτόν ίσες γωνίες μέτρου $\phi = 45^0$.
(α) Προσδιορίστε την ταχύτητα του κέντρου ορμής των φωτονίων (διάνυσμα).
(β) Προσδιορίστε την ταχύτητα του κέντρου ορμής των σωματιδίων (διάνυσμα).
(γ) Προσδιορίστε την ταχύτητα του σωματιδίου βλήματος.
(δ) Υπολογίστε τη συχνότητα ενός φωτονίου στο σύστημα κέντρου ορμής.
(ε) Μπορείτε να εκτιμήσετε τη συχνότητα του άλλου φωτονίου (στο ίδιο σύστημα);
Θέμα 5: Έστω ένα επίπεδο ηλεκτρομαγνητικό κύμα που στο αδρανειακό σύστημα Σ έχει τη μορφή

$$\mathbf{E} = Ac\hat{x}\cos(\omega(t - z/c))\ ,\ \mathbf{B} = A\hat{y}\cos(\omega(t - z/c))$$

Υπολογίστε τη μορφή του πεδίου σε ένα σύστημα Σ' που κινείται σε σχέση με το Σ κατά τον τυποποιημένο τρόπο με ταχύτητα β κατά μήκος του άξονα z. Εκφράστε τις συνιστώσες του πεδίου σε συντεταγμένες του νέου συστήματος t', x', y', z'. Το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο στο νέο σύστημα περιγράφει και πάλι ένα ηλεκτρομαγνητικό κύμα; (έχει την ίδια μορφή με παραπάνω;) Ποια η συχνότητα του κύματος αυτού; Συμφωνεί το αποτέλεσμά σας με το αναμενόμενο για ένα φωτόνιο με μετατόπιση Doppler; Κλασικά η ροή ενέργειας που μεταφέρει ένα ηλ/κό κύμα είναι ανάλογη του $\mathbf{E}\times\mathbf{B}$. Υπολογίστε τη μεταβολή της ροής ενέργειας από το Σ στο Σ' και προσπαθήστε να δικαιολογήσετε την αλλαγή αυτή αναλογιζόμενοι πόσα φωτόνια και με τι ενέργεια περνούν στη μονάδα του χρόνου μια επιφάνεια $z =$ σταθ, $z' =$ σταθ στα δύο συστήματα. Δίδονται οι σχέσεις μετασχηματισμού των ηλεκτρομαγνητικών πεδίων:

$$\mathbf{E}'_{\parallel} = \mathbf{E}_{\parallel}, \qquad \mathbf{E}'_{\perp} = \gamma(\mathbf{E}_{\perp} + \mathbf{u}\times\mathbf{B})$$

$$\mathbf{B}'_{\parallel} = \mathbf{B}_{\parallel}, \qquad \mathbf{B}'_{\perp} = \gamma(\mathbf{B}_{\perp} - \frac{1}{c^2}\mathbf{u}\times\mathbf{E})$$

Λύσεις

Θέμα 1: (α) Ως γνωστό η τετραεπιτάχυνση και η τετραταχύτητα ενός σωματιδίου είναι ορθογώνιες. Αυτό μπορεί κανείς να το δείξει λαμβάνοντας το

$$0 = \frac{d(-c^2)}{d\tau} = \frac{d}{d\tau}(u^\mu u_\mu) = 2a^\mu u_\mu.$$

Στη συγκεκριμένη περίπτωση η τετραεπιτάχυνση είναι ανάλογη του τετρανύσματος της θέσης, οπότε η τετραταχύτητα και το τετράνυσμα της θέσης είναι ορθογώνια μεταξύ τους. (β) Αν παραγωγίσουμε δύο φορές τη χωροχρονική θέση που δίνεται στην άσκηση ως προς τον ιδιόχρονο τ θα έχουμε

$$a^\mu = \frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} = k^2 x^\mu$$

(γ)

$$\begin{aligned} &c^2 d\tau^2 = -ds^2 = d(ct)^2 - dx^2 = \\ &[(a\sinh(k\tau) + b\cosh(k\tau))^2 - (a\cosh(k\tau) + b\sinh(k\tau))^2]k^2 d\tau^2 = (-a^2 + b^2)k^2 d\tau^2 \end{aligned}$$

Για να είναι λοιπόν η παράμετρος τ ο ιδιόχρονος θα πρέπει $(-a^2 + b^2)k^2 = c^2$. (δ) Θέτοντας $t(\tau = 0) = 0, x(\tau = 0) = x_0$ και $dx/d\tau(\tau = 0) = 0$, βρίσκουμε $a = 0, b = x_0$. Έτσι $x = x_0\cosh(k\tau), ct = x_0\sinh(k\tau)$ δηλαδή $x^2 - (ct)^2 = x_0{}^2$. Πρόκειται για μια υπερβολή σε διάγραμμα $x - t$.

Θέμα 2: Αρκεί να εκτελέσουμε τους πολλαπλασιασμούς των πινάκων $\Lambda_y\Lambda_x A^\mu$ και $\Lambda_x\Lambda_y A^\mu$, όπου

$$\Lambda_x = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ \Lambda_y = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & -\beta\gamma & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & 0 & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ A^\mu = \begin{pmatrix} A^0 \\ A^1 \\ A^2 \\ A^3 \end{pmatrix}$$

Αν εκτελέσουμε τις πράξεις βρίσκουμε στην πρώτη περίπτωση

$$A^{(1)\mu} = \begin{pmatrix} \gamma(\gamma A^0 - \gamma\beta A^1 - \beta A^2) \\ \gamma(-\beta A^0 + A^1) \\ \gamma(-\gamma\beta A^0 + \gamma\beta^2 A^1 + A^2) \\ A^3 \end{pmatrix}$$

ενώ στη δεύτερη περίπτωση

$$A^{(2)\mu} = \begin{pmatrix} \gamma(\gamma A^0 - \gamma\beta A^2 - \beta A^1) \\ \gamma(-\gamma\beta A^0 + \gamma\beta^2 A^2 + A^1) \\ \gamma(-\beta A^0 + A^2) \\ A^3 \end{pmatrix}$$

Στο όριο που κρατά κανείς μέχρι όρους τάξης β τα δύο μετασχηματισμένα τετρανύσματα είναι πανομοιότυπα. Αν όμως κρατήσουμε μέχρι όρους τάξης β^2 τα δύο τετρανύσματα διαφέρουν

$$A^{(1)\mu} = \begin{pmatrix} (1+\beta^2)A^0 - \beta A^1 - \beta A^2 \\ -\beta A^0 + (1+\beta^2/2)A^1 \\ -\beta A^0 + \beta^2 A^1 + (1+\beta^2/2)A^2) \\ A^3 \end{pmatrix}$$

$$A^{(2)\mu} = \begin{pmatrix} (1+\beta^2)A^0 - \beta A^1 - \beta A^2 \\ -\beta A^0 + (1+\beta^2/2)A^1 + \beta^2 A^2 \\ -\beta A^0 + (1+\beta^2/2)A^2) \\ A^3 \end{pmatrix}$$

Με άλλα λόγια τα δύο νέα τετρανύσματα έχουν ίδιες χρονικές συνιστώσες. Αν μάλιστα το αρχικό τετράνυσμα είναι καθαρά χρονικό ($A^0 = 0$), τα χωρικά μέρη των τελικών τετρανυσμάτων είναι ίσα κατά μέτρο, επομένως διαφέρουν κατά μία στροφή.

Θέμα 3: (α) Το μήκος της πλευράς του τριγώνου που βρίσκεται στον άξονα x συστέλλεται κατά γ και επομένως στο Σ' θα είναι a/γ, όπου a είναι η πλευρά του ισοπλεύρου τριγώνου στο Σ. Οι άλλες δύο πλευρές στο Σ' συστέλλονται κατά γ κατά μήκος του x, αλλά παραμένουν αναλλοίωτες κατά μήκος του y. ΄Ετσι στο Σ' οι δύο αυτές πλευρές θα έχουν μήκος

$$\sqrt{\left(\frac{a}{2\gamma}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}a}{2}\right)^2} = \sqrt{4-\beta^2}\frac{a}{2}$$

(β) ΄Οταν η ταχύτητα προσεγγίζει την ταχύτητα του φωτός ($\gamma \to \infty$) κάθε ευθύγραμμο τμήμα θα έχει στο Σ' μήκος όσο η προβολή του κάθετα στη διεύθυνση της ταχύτητας, αφού η προβολή του κατά μήκος της διεύθυνσης της ταχύτητας θα συσταλλέι σε μηδενικό μήκος. Συνεπώς το ισόπλευρο τρίγωνο σε ένα Σ' σύστημα που κινείται με ταχύτητα $\vec{v}$ θα πάρει τη μορφή ενός ευθύγραμμου τμήματος με μήκος όσο η προβολή του τριγώνου κάθετα στην $\vec{v}$. Η πιο μικρή προβολή του τριγώνου είναι το ύψος του που έχει μήκος $\sqrt{3}a/2$, επομένως τη μικρότερη περιφέρεια θα έχει το τρίγωνο όταν η ταχύτητα είναι παράλληλη με τον άξονα x (κάθετη στο ύψος), ή κάθετη σε καθένα από τα άλλα δύο ύψη. Αυτό ισχύει και όταν η ταχύτητα είναι πολύ διαφορετική από την ταχύτητα του φωτός. Η μικρότερη περιφέρεια στο Σ' θα δίνεται λοιπόν από το ερώτημα (α).

Θέμα 4: Βλ. άσκηση 5 στα θέματα 6/2003

Θέμα 5: Αφού η κίνηση του συστήματος γίνεται κατά τον άξονα z οι παράλληλες συνιστώσες των πεδίων είναι και θα παραμείνουν μηδενικές. ΄Οσο για τις κάθετες θα έχουμε

$$\mathbf{E'}_\perp = \gamma\left[Ac\hat{x}\cos(\omega(t-z/c)) + u\hat{z}\times A\hat{y}\cos(\omega(t-z/c))\right] = \gamma A(c-u)\hat{x}\cos(\omega(t-z/c))$$
$$\mathbf{B'}_\perp = \gamma\left[A\hat{y}\cos(\omega(t-z/c)) - (u/c^2)\hat{z}\times Ac\hat{x}\cos(\omega(t-z/c))\right] = \gamma A\frac{c-u}{c}\hat{y}\cos(\omega(t-z/c))$$

Προκειμένου τώρα να εκφράσουμε και τις χωροχρονικές συντεταγμένες στο νέο σύστημα θα πρέπει να αντικαταστήσουμε το t με $\gamma(t'+\beta z'/c)$ και z με $\gamma(z'+\beta ct')$. ΄Ετσι το όρισμα των συνημιτόνων μετατρέπεται σε $\omega\gamma(1-\beta)(t'-z'/c)$. Με αυτή την αντικατάσταση οι εκφράσεις για το ηλεκτρομαγνητικό κύμα μετατρέπονται πάλι σε κυματικές εκφράσεις στο νέο σύστημα με πλάτη του ηλεκτρικού και του μαγνητικού πεδίου αλλαγμένα κατά $\gamma(1-\beta)$ και συχνότητα αλλαγμένη επίσης κατά $\gamma(1-\beta)$. Γνωρίζουμε εξάλλου ότι ένα φωτόνιο με συχνότητα ν παθαίνει μετατόπιση Doppler και στο νεό σύστημα έχει συχνότητα $\nu' = \nu\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}$ που είναι ακριβώς όση αλλαγή υπολογίσαμεπαραπάνω για το Η/Μ κύμα. Η δε ροή ενέργειας είναι ανάλογη του γινομένου των πλατών των δύο πεδίων. Επομένως στο νέο σύστημα θα είναι $\gamma^2(1-\beta)^2 = \frac{1-\beta}{1+\beta}$ φορές όση στο αρχικό σύστημα. Παράλληλα αν θεωρήσουμε το ΄Η/Μ κύμα ως φωτόνια, αυτά στο νέο σύστημα θα έχουν ενέργεια $h\nu' = h\nu\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}$ και θα προσπίπτουν σε μια επιφάνεια με ρυθμό $\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}$ φορές τον αρχικό ρυθμό αφού η συχνότητα του κύματος σχετίζεται με την αρχική συχνότητα με αυτόν τον παράγοντα. Επομένως, το αποτέλεσμά μας βρίσκεται σε συμφωνία με τη φωτονική θεώρηση.