ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

Τμήμα Φυσικής

Εξετάσεις στη Θεωρία της Ειδικής Σχετικότητας

27 Σεπτεμβρίου 2006

Να γραφούν και τα 4 θέματα. Καλή σας επιτυχία.

Θέμα 1: (25 μόρια) Σε αδρανειακό σύστημα Σ η κοσμική γραμμή ενός σωματιδίου δίνεται από το τετράνυσμα $x^i(\tau) = (a\tau, 0, b\tau, 0)$ $(i = 0, 1, 2, 3)$ όπου a, b σταθερές $a \neq 0$ και τ ο ιδιόχρονος του σωματιδίου.
α. Υπολογίστε την τετραταχύτητα και την τετραεπιτάχυνση του σωματιδίου στο Σ. Μπορεί το σωματίδιο να είναι φωτόνιο; Ποια συνθήκη πρέπει να ικανοποιούν οι σταθερές a, b;
β. Περιγράψτε την τροχιά του σωματιδίου στο Σ καθώς και σε ένα άλλο αδρανειακό σύστημα Σ' το οποίο κινείται ως προς το Σ με ταχύτητα $\mathbf{v} = 0.6\, c\, \mathbf{i}$.

Θέμα 2: (25 μόρια) Σωματίδιο P μάζας m και ενέργειας E συγκρούεται ελαστικά με άλλο όμοιο σωματίδιο Q, το οποίο ηρεμεί στο εργαστήριο.
α. Υπολογίστε την ταχύτητα του κέντρου ορμής (ΚΟ) των σωματιδίων στο σύστημα του εργαστηρίου.
β. Υπολογίστε την τετραορμή των σωματιδίων στο σύστημα ΚΟ.
γ. Τι αλλάζει στην τετραορμή των σωματιδίων στο σύστημα ΚΟ μετά την κρούση;
δ. Δείξτε ότι οι συνιστώσες του χωρικού μέρους της τετραορμής μετά την κρούση στο εργαστήριο ικανοποιούν την εξίσωση μιας έλλειψης. Δείξτε ότι στο όριο των κλασικών ταχυτήτων η έλλειψη εκφυλίζεται σε κύκλο.

Θέμα 3: (25 μόρια) Αξιωματούχοι του αστρόπλοιου A έχουν υποκλέψει το ακόλουθο μήνυμα εχθρικού σκάφους που πρόκειται να τους πλήξει: Στο κοσμικό μας αστροσύστημα A' τη χρονική στιγμή 1000 θα εκτοξεύσουμε βλήμα από τη θέση μας (100,0,0). Αναμένεται ότι το βλήμα θα βρει το στόχο του τη χρονική στιγμή 1010 στη θέση (110,0,0). Αναφορικά με το σύστημα του στόχου A όταν πραγματοποιηθεί η επίθεση (εκτόξευση βλήματος) η θέση μας (του A') θα είναι (200,0,0) και η χρονική στιγμή 500, ενώ αναμένεται ο στόχος να πληγεί τη στιγμή t στη θέση $(t/2, 0, 0)$.
α. Δεδομένου ότι το αστρόπλοιο A' διαθέτει συμβατικά εκρηκτικά βλήματα (με μάζα), καθώς και βλήματα ισχυρών LASER (φωτόνια), ποιο από τα δύο τύπων βλημάτων θα χρησιμοποιήσει το εχθρικό αστρόπλοιο;
β. Πότε επίκειται να πληγεί ο στόχος στο σύστημα του στόχου A και πού ακριβώς;
γ. Υπολογίστε την ταχύτητα του εχθρικού αστρόπλοιου A' στο σύστημα του A και εξηγήστε αν το εχθρικό αεροσκάφος πλησιάζει ή απομακρύνεται από το A.
δ. Δεδομένου ότι τα συμβατικά όπλα με βλήματα του εχθρικού αστρόπλοιου εκτοξεύονται με σχετικιστικό παράγοντα γ_0, ενώ τα φωτονικά βλήματα με συχνότητα ν_0, σε ποια συχνότητα πρέπει να ρυθμίσετε την αντιαρματική σας ασπίδα και σε ποια τιμή τον αντιαρματικό σχετικιστικό σας παράγοντα, προκειμένου να αποφύγετε τις επιπτώσεις ενός εχθρικού πλήγματος ανεξαρτήτως είδους βλήματος;
Σημείωση: Όλοι οι χρόνοι δίδονται σε δευτερόλεπτα και τα μήκη σε δευτερόλεπτα φωτός.

Θέμα 4: (25 μόρια) Σε αδρανειακό σύστημα Σ το ηλεκτρικό πεδίο εκατέρωθεν μιας άπειρης φορτισμένης πλάκας, η οποία ηρεμεί στο επίπεδο $y - z$, είναι της μορφής $\mathbf{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}(x/|x|, 0, 0)$. Παρατηρητές Σ_1 και Σ_2 με παράλληλους άξονες κινούνται ως προς το Σ με ταχύτητα ίδιου μέτρου. Ο μεν Σ_1 μετράει πεδία: $\mathbf{E}^{(1)} = (E, 0, 0)$, $\mathbf{B}^{(1)} = (0, 0, 0)$ ενώ ο Σ_2 πεδία: $\mathbf{E}^{(2)} = (-5E/4, 0, 0)$, $c\mathbf{B}^{(2)} = (0, -3E/4, 0)$.
α. Είναι τα αποτελέσματα των δύο παρατηρητών συμβατά μεταξύ τους; [Υπόδειξη: Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε τα *αναλλοίωτα του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου* αφού εξηγήσετε τι σημαίνει αυτό.]
β. Υπολογίστε την ταχύτητα κίνησης των δύο παρατηρητών σε σχέση με την πλάκα (μέτρο και διεύθυνση).
γ. Υπολογίστε την επιφανειακή πυκνότητα του φορτίου της πλάκας σ στο Σ.
δ. Εάν $\sigma > 0, E < 0$ σε ποια μεριά της πλάκας ($x > 0$ ή $x < 0$) κινούνται οι δύο παρατηρητές;
Δίδονται οι τύποι μετασχηματισμού:

$$\mathbf{E}'_{\parallel} = \mathbf{E}_{\parallel}, \quad \mathbf{E}'_{\perp} = \gamma(\mathbf{E}_{\perp} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}) \qquad \mathbf{B}'_{\parallel} = \mathbf{B}_{\parallel}, \quad \mathbf{B}'_{\perp} = \gamma(\mathbf{B}_{\perp} - \frac{1}{c^2}\mathbf{u} \times \mathbf{E})$$

Θέμα 1:

1. $u^i = dx^i/d\tau = (a, 0, b, 0)$, $a^i = du^i/d\tau = (0, 0, 0, 0)$

2. Αφού $u^i u_i = -c^2$, $-a^2 + b^2 = -c^2$ ($|a| > |b|$). Αν το σωματίδιο είναι φωτόνιο $a = |b|$.

3. Το σωματίδιο κινείται στον y-άξονα με ταχύτητα b/a εκτελώντας ομαλή κίνηση. Για τη δοσμένη ταχύτητα: $\vec{V} = (0.6c, 0, 0)$, $\gamma = 5/4$. Έτσι εκτελώντας έναν μετασχηματισμό Lorentz στην κατεύθυνση x θα έχουμε:
$$\begin{pmatrix} 5/4 & -3/4 & 0 & 0 \\ -3/4 & 5/4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ b \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5a/4 \\ -3a/5 \\ b \\ 0 \end{pmatrix}.$$
Επομένως η ταχύτητα του σωματιδίου στο νέο σύστημα (διαιρούμε με τη χρονική συνιστώσα) θα είναι $(-12/25, 4b/a, 0)$ και η κίνηση θα είναι και πάλι εύθύγραμμα και ομαλή.

Θέμα 2:

1. $\vec{V}_{KO} = \frac{\vec{P}_{\text{ολ}}}{E_{\text{ολ}}} = \frac{p\hat{x}}{E+m} = \hat{x}\frac{\sqrt{E^2-m^2}}{E+m} = \hat{x}\sqrt{\frac{E-m}{E+m}}$.

2. $\gamma = (1 - V_{KO}^2)^{-1/2} = \sqrt{\frac{E+m}{2m}}$. Δρώντας με ένα τυποποιημένο μετασχηματισμό Lorentz στην τετραορμή του κινούμενου σωματιδίου παίρνουμε
$$p_1^{i\,(KO)} = \sqrt{\frac{E+m}{2m}}(E - p\sqrt{\frac{E-m}{E+m}}, p - E\sqrt{\frac{E-m}{E+m}}, 0, 0) \tag{1}$$
$$= \sqrt{\frac{E+m}{2m}}(m, m\frac{p}{E+m}, 0, 0) = \sqrt{\frac{m}{2(E+m)}}(E+m, p, 0, 0), \tag{2}$$
όπου στο εξής $p = \sqrt{E^2 - m^2}$.

3. Στο σύστημα ΚΟ η συνολική ορμή είναι 0, άρα οι 2 ορμές είναι ίσες και αντίθετες και αφού τα σωματίδια είναι ίδια θα έχουν και ίδιες ενέργειες. Η τετραορμή του 2ου λοιπόν θα έναι ίδια με του 1ου αλλά με ανάποδο πρόσημο στη x συνιστώσα.

4. Μετά την κρούση στο ΚΟ οι ορμές θα μείνουν ίσες μεταξύ τους και ίσες με πριν αφού τα σωματίδια παραμένουν τα ίδια και η συνολική κινητική ενέργεια δεν αλλάζει. Επομένως οι τετραορμές των σωματιδίων θα έχουν ίδια χρονική συνιστώσα και ίδια κατά μέτρο χωρική.

5.
$$\begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma & 0 & 0 \\ \beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sqrt{\frac{m}{2(E+m)}} \begin{pmatrix} E+m \\ p\cos\phi \\ p\sin\phi \\ 0 \end{pmatrix} = \ldots \frac{1}{2} \begin{pmatrix} E(1+\cos\phi) + m(1-\cos\phi) \\ p(1+\cos\phi) \\ \sqrt{\frac{2m}{E+m}} p\sin\phi \\ 0 \end{pmatrix}$$
Θεωρήσαμε ϕ τη στροφή της ορμής και στρίψαμε τους άξονες του συστήματος ώστε η στροφή να είναι στο $x - y$ επίπεδο. Αν τώρα λύσουμε ως προς $\cos\phi$ και $\sin\phi$ τις p_x, p_y συνιστώσες της τετραορμής βρίσκουμε
$$(\frac{p_x}{p} - 1)^2 + \frac{E+m}{2m}\frac{p_y^2}{p^2} = 1.$$
Αυτή είναι η εξίσωση μιας έλλειψης με μετατοπισμένο κέντρο και επομένως το διάνυσμα της ορμής μετά βρίσκεται επί μιας έλλειψης (το ίδιο και του άλλου σωματιδίου αφού η συνολική ορμή ισούται με την αρχική). Για $E \simeq m$ (κλασικά σωματίδια) οι ημιάξονες της έλλειψης γίνονται ίσοι.

Θέμα 3:

1. Το τετράνυσμα που συνδέει τα δύο γεγονότα (εκτόξευσης - πλήγματος) έχει συντεταγμένες $(10, 10, 0, 0)$ στο σύστημα του επιτιθέμενου και $(t - 500, t/2 - 200, 0, 0)$ στο σύστημα του αμυνόμενου. Επομένως αφού το τετράνυσμα αυτό είναι πάνω στην κοσμική γραμμή του βλήματος και είναι φωτοειδές το βλήμα αποτελείται από φωτόνια.

2. Θα πρέπει να είναι φωτοειδές και στο άλλο σύστημα. Επομένως $t - 500 = t/2 - 200 \Rightarrow t = 600$. Θα πληγεί λοιπόν τη στιγμή 600 στο σημείο 300 στο σύστημα A.

3. $$\begin{pmatrix} 10 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta \\ -\gamma\beta & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 100 \\ 100 \end{pmatrix}.$$

   Λύνοντας βρίσκουμε $\beta = 99/101$. Αφού μεγαλώνουν στο A οι χωρικές και χρονικές συνιστώσες και ο στόχος είναι σε μεγαλύτερη θέση από το σημείο βολής, ο εχθρός πλησιάζει.

4. Σύμφωνα με τα παραπάνω ο στόχος θα αντιλαμβάνεται 10πλάσια συχνότητα επομένως πρέπει να χρησιμοποιήσει αντιαρματικά φίλτρα συχνότητας $10\nu_0$ για τα δε συμβατικά βλήματα η ταχύτητα προσέγγισης στο στόχο θα είναι $(\beta+\beta_0)/(1+\beta\beta_0)$, όπου β_0 η αντίστοιχη ταχύτητα για τον παράγοντα γ_0 και $\beta = 99/101$ η ταχύτητα προσέγγισης του A' στο A.

Θέμα 4:

1. Πράγματι και $\vec{E}^{(1)} \cdot \vec{B}^{(1)} = \vec{E}^{(2)} \cdot \vec{B}^{(2)}$ και $\vec{E}^{(1)} \cdot \vec{E}^{(1)} - c^2\vec{B}^{(1)} \cdot \vec{B}^{(1)} = \vec{E}^{(2)} \cdot \vec{E}^{(2)} - c^2\vec{B}^{(2)} \cdot \vec{B}^{(2)}$. Τα ηλ/κά αναλλοίωτα είναι ποσότητες που παραμένουν ίδιες κάτω από μετασχηματισμούς Lorentz.

2. Ο πρώτος κινείται με $u\hat{x}$ αφού παρατηρεί ακριβώς την ίδια μορφή πεδίου με την πλάκα. Ανάλογα σε ποια μεριά της πλάκας βρίσκεται, $E = \pm\sigma/(2\epsilon_0)$. Έστω ότι ο δεύτερος κινείται με $u\hat{n}$. Τότε το πεδίο που βλέπει είναι
   $$(-5E/4, 0, 0) = (\vec{E} \cdot \hat{n})\hat{n} + \gamma(\vec{E} - (\vec{E} \cdot \hat{n})\hat{n})$$
   και
   $$(0, 0, -3E/4) = -\gamma(u/c)\hat{n} \times \vec{E}.$$
   Από την πρώτη σχέση $\hat{n} \perp \hat{x}$ αλλιώς θα υπήρχε και συνιστώσα ηλεκτρικού πεδίου διαφορετική από την E'_x, $\vec{E} = -E\hat{x}$ και $\gamma = 5/4 \Rightarrow u/c = 3/5$. Από τη δεύτερη σχέση $-3\hat{z}/4 = (5/4)(u/c)\hat{n} \times \hat{x}$. Επομένως $\hat{n} = \hat{y}$.

3. $|\sigma| = |E|\epsilon_0$. Δεν γνωρίζουμε το πρόσημο γιατί δεν ξέρουμε από ποια μεριά της πλάκας είναι ο κάθε παρατηρητής.

4. Ο πρώτος βρίσκεται στην πλευρά $x < 0$. Από την άλλη μεριά ο δεύτερος αφού $\vec{E} = -E\hat{x}$.