



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

Τμήμα Φυσικής

Εξετάσεις στη Θεωρία της Ειδικής Σχετικότητας

4 Σεπτεμβρίου 2015

Αν θέλετε μπορείτε να επεξεργαστείτε όλα τα προβλήματα σε σύστημα μονάδων όπου η ταχύτητα του φωτός είναι $c = 1$. Τα δεδομένα όλων των προβλημάτων δίδονται σε αυτό το σύστημα μονάδων.

ΝΑ ΛΥΣΕΤΕ ΚΑΙ ΤΑ 4 ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

Θέμα Α:

1. Αν το γεγονός \mathcal{A} έχει χωροχρονικές συντεταγμένες $(2, 0, 1, 0)^\top$, υπολογίστε τις χωροχρονικές συντεταγμένες ενός άλλου γεγονότος \mathcal{B} έτσι ώστε το τετράνυσμα με αρχή το \mathcal{A} και τέλος το \mathcal{B} να είναι (i) φωτοειδές, (ii) χρονοειδές και (iii) χωροειδές.
2. Ένα ηλεκτρομαγνητικό πεδίο με μη μηδενικό ηλεκτρικό και μαγνητικό πεδίο έχει και τα δύο αναλλοιώτά του μηδενικά. Φτιάξτε ένα τέτοιο πεδίο συμπληρώνοντας τις 3 συντεταγμένες του ηλεκτρικού πεδίου \mathbf{E} και τις 3 συντεταγμένες του μαγνητικού πεδίου \mathbf{B} . Στη συνέχεια υπολογίστε τις συνιστώσες των πεδίων σε ένα άλλο σύστημα αναφοράς που κινείται σε σχέση με το αρχικό με ταχύτητα $\mathbf{v} = 0.6\hat{y}$.
3. Ένα φωτόνιο ενέργειας E προσπίπτει σε ακίνητο άτομο μάζας M . Να βρεθεί η νέα μάζα ηρεμίας του διεγερμένου ατόμου που απορρόφησε το εν λόγω φωτόνιο.
4. Δύο σωματίδια έχουν τετραορμές ανάλογες η μία της άλλης, δηλαδή $P_1^\mu = \lambda P_2^\mu$. Τι σχέση έχουν οι τετραταχύτητες των δύο αυτών σωματιδίων καθώς επίσης και οι μάζες τους;

Θέμα Β: Ένα σωματίδιο ακολουθεί την κοσμική γραμμή $x^\mu = \frac{1}{2}(\sinh(2\phi), 0, \cosh(2\phi), 0)^\top$, όπου ϕ κάποια παράμετρος.

1. Να βρεθεί η σχέση μεταξύ του ιδιοχρόνου του σωματιδίου και της παραμέτρου ϕ αν ο χρόνος 0 για το σωματίδιο συμπίπτει με την τιμή $\phi = 0$.
2. Να υπολογιστούν η τετραταχύτητα και η τετραεπιτάχυνση του σωματιδίου ως συνάρτηση του ιδιοχρόνου.
3. Να υπολογιστεί το μέτρο της τετραταχύτητας, της τετραεπιτάχυνσης και το εσωτερικό γινόμενο Minkowski των δύο αυτών τετρανυσμάτων.
4. Σε πόσο χρόνο, σύμφωνα με το σωματίδιο, η ενέργειά του θα γίνει όσο 1000 φορές η μάζα του, αν για $\tau = 0$ είναι το σωματίδιο ακίνητο;
5. Αν σας έδινε κανείς την ακόλουθη, αντί της παραπάνω, παραμετρική μορφή για την κοσμική γραμμή: $x^\mu = \frac{1}{2}(\cosh(2\phi), 0, \sinh(2\phi), 0)^\top$ με ποιο επιχείρημα θα απορρίπτατε μια τέτοια κοσμική γραμμή για ένα σωματίδιο.

Θέμα Γ: 3 φωτόνια με συχνότητες 3ν , 4ν και 5ν συγκρούονται και παράγεται ένα ακίνητο σωματίδιο (τα φωτόνια εξαφανίζονται).

1. Ναδειχθεί ότι τα 3 φωτόνια θα κινούνται επί ενός επιπέδου και ότι τα 2 πρώτα φωτόνια θα κινούνται κάθετα το ένα στο άλλο.
2. Υπό τι γωνία κινείται το 3ο σε σχέση με το πρώτο;
3. Πόση είναι η μάζα του παραγόμενου σωματιδίου;
4. Να υπολογιστεί η ταχύτητα του κέντρου ορμής των 3 φωτονίων.

5. Το σωματίδιο ξαναδιασπάται αυθόρμητα (εξαυλώνεται) σε 3 νέα φωτόνια με συχνότητες $3\nu'$, $4\nu'$ και $5\nu'$. Ποια η σχέση μεταξύ των ν' και ν . Αν το το πρώτο νέο φωτόνιο κινείται αντιπαράλληλα με το αρχικό πρώτο φωτόνιο, είναι αναγκαστικό το δεύτερο νέο φωτόνιο να κινείται και αυτό αντιπαράλληλα με το αρχικό δεύτερο φωτόνιο; (Εξηγήστε.)

Θέμα Δ: Σε ένα σύστημα αναφοράς O ο χώρος χαρακτηρίζεται από ένα ομογενές μαγνητικό πεδίο $\mathbf{B} = B\hat{z}$ και μηδενικό ηλεκτρικό πεδίο.

1. Να υπολογιστεί το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο που μετράει ένας παρατηρητής O' που κινείται σε σχέση με το σύστημα O με ταχύτητα $\mathbf{v} = 0.6\hat{y}$.
2. Ελέγξτε αν τα αναλλοίωτα του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου διατηρούνται, υπολογίζοντάς τα στα δύο συστήματα O και O' .
3. Ένας δεύτερος παρατηρητής O'' κινείται ως προς τον O με ταχύτητα $\mathbf{v} = 0.6(\hat{x} \cos \phi + \hat{z} \sin \phi)$, όπου ϕ είναι μια δοσμένη σταθερή γωνία. Να υπολογιστούν στο σύστημα O'' τα ηλεκτρικά και μαγνητικά πεδία που θα μετρά ο παρατηρητής αυτός. Είναι κάθετα τα πεδία αυτά; Περιμένετε το αποτέλεσμα αυτό;

Δίδονται οι τύποι μετασχηματισμού των πεδίων.

$$\begin{aligned} \mathbf{E}'_{\parallel} &= \mathbf{E}_{\parallel}, & \mathbf{E}'_{\perp} &= \gamma(\mathbf{E}_{\perp} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}) \\ \mathbf{B}'_{\parallel} &= \mathbf{B}_{\parallel}, & \mathbf{B}'_{\perp} &= \gamma(\mathbf{B}_{\perp} - \mathbf{u} \times \mathbf{E}) \end{aligned}$$

Καλή σας επιτυχία.

Απαντήσεις

Θέμα Α:

1. (i) $(3, 0, 2, 0)$, (ii) $(4, 0, 2, 0)$, (iii) $(3, 0, 4, 0)$.
2. $\mathbf{E} = (1, 0, 0)$, $\mathbf{B} = (0, 1, 0)$. $\mathbf{E}' = (5/4, 0, 0)$, $\mathbf{B}' = (0, 1, 3/4)$.
3. $M' = M\sqrt{1 + 2E/M}$.
4. Ίδιες τετραταχύτητες και $m_1 = \lambda m_2$.

Θέμα Β:

1. $\phi = \pm\tau$. Στα παρακάτω θα υποθέσουμε ότι $\phi = \tau$.
2. $v^\mu = (\cosh(2\tau), 0, \sinh(2\tau), 0)^\top$, $v^\mu = 2(\sinh(2\tau), 0, \cosh(2\tau), 0)^\top$.
3. $v^\mu v_\mu = -1$, $a^\mu a_\mu = 4$, $v^\mu a_\mu = 0$.
4. Όταν $\cosh(2\tau) = 1000$.
5. Η αντίστοιχη τετραταχύτητα θα ήταν χωροειδές τετράνυσμα.

Θέμα Γ:

1. $\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_3 = 0$ άρα συνεπίπεδα. Τα μέτρα τους είναι $|\mathbf{p}_3| = |\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2|$ οπότε $5^2 = 3^2 + 4^2 + 2\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2/\nu^2$ δηλαδή $\mathbf{p}_1 \perp \mathbf{p}_2$.
2. $\cos^{-1}(3/5)$.
3. 12ν .
4. 0.
5. $\nu' = \nu$. Όχι, το ορθογώνιο τρίγωνο έχει την πλευρά 3 κοινή με το αρχικό αλλά οι άλλες πλευρές όχι κατ' ανάγκη. Η 4' θα βρίσκεται στο επίπεδο το κάθετο στην 3'. Μπορεί να είναι είτε ομοπαράλληλη, είτε αντιπαράλληλη, είτε υπό γωνία σε σχέση με την 4.

Θέμα Δ:

1. $\mathbf{E}' = (3A/4)(1, 0, 0)$, $\mathbf{B}' = (5A/4)(0, 0, 1)$.
2. $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B} = 0 = \mathbf{E}' \cdot \mathbf{B}'$, $\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2 = -A^2 = \mathbf{E}'^2 - \mathbf{B}'^2$.
3. $\mathbf{E}_{\parallel} = 0 = \mathbf{E}_{\perp}$, $\mathbf{B}_{\parallel} = A(sc, 0, s^2)$, $\mathbf{B}_{\perp} = A(-sc, 0, c^2)$, όπου $s = \sin \phi$, $c = \cos \phi$.
 $\mathbf{E}'_{\parallel} = 0$, $\mathbf{E}'_{\perp} = (-3Ac/4)(0, 1, 0)$, $\mathbf{B}'_{\parallel} = A(sc, 0, s^2)$, $\mathbf{B}'_{\perp} = (5A/4)(-sc, 0, c^2)$. Συνολικά $\mathbf{E}' = (3A/4)(0, -c, 0)$ και $\mathbf{B}' = (A/4)(-sc, 0, 4 + c^2)$. Προφανώς είναι ορθογώνια όπως επιβάλει το αναλλοίωτο $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B} = 0$.