ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

Τμήμα Φυσικής

Εξετάσεις στη Θεωρία της Ειδικής Σχετικότητας

7 Οκτωβρίου 2014 (περίοδος Σεπτεμβρίου 2013-14)

Αν θέλετε μπορείτε να επεξεργαστείτε όλα τα προβλήματα σε σύστημα μονάδων όπου η ταχύτητα του φωτός είναι $c = 1$. Τα δεδομένα όλων των προβλημάτων δίδονται σε αυτό το σύστημα μονάδων.

Θέμα Α:

1. Ποια είναι τα σημεία του χώρου που τη χρονική στιγμή $t = 1$ σχηματίζουν με το χωροχρονικό σημείο $t = x = y = z = 0$ τετρανύσματα τα οποία βρίσκονται εντός του κώνου φωτός που διέρχεται από το σημείο $t = x = y = z = 0$;

2. Αν αφαιρέσω δύο μελλοντικά φωτοειδή τετρανύσματα (το ένα από το άλλο) τι είδους τετράνυσμα θα προκύψει; Δείξτε το με ένα παράδειγμα.

3. Σε ένα σύστημα αναφοράς ο χώρος είναι γεμάτος μόνο με ένα ομογενές (σταθερό) ηλεκτρικό πεδίο. Σε ένα άλλο σύστημα αναφοράς εμφανίζεται και μαγνητικό πεδίο. Η κίνηση του 2ου συστήματος είναι παράλληλη με το αρχικό ηλεκτρικό πεδίο; Το ηλεκτρικό πεδίο στο 2ο σύστημα έχει μεγαλύτερη, μικρότερη, ή ίση ένταση με το αρχικό πεδίο; Τι γωνία σχηματίζει το μαγνητικό με το ηλεκτρικό πεδίο στο 2ο σύστημα;

4. Ένα φωτόνιο έχει συχνότητα ν. Αν κινηθώ ομοπαράλληλα με το φωτόνιο με ταχύτητα $v = 0.6$, τι συχνότητα φωτονίου θα μετρήσω;

5. Τι είδους τετράνυσμα είναι η τετραταχύτητα ενός σωματιδίου;

Θέμα Β: Δύο φωτόνια συχνότητας ν_1 και ν_2 ($\nu_1 > \nu_2$) κινούνται αντιπαράλληλα επί του άξονα x (το 1 προς τα θετικά x και το 2 προς τα αρνητικά x). Η σύγκρουσή τους στο σημείο $x = y = z = 0$ οδηγεί στη γέννηση ενός σωματιδίου (με παράλληλη εξαφάνιση των φωτονίων).

1. Θα κινείται το σωματίδιο; Προς τα πού;

2. Ποια η μάζα M του σωματιδίου;

3. Ξαφνικά το σωματίδιο διασπάται σε 2 σωματίδια μάζας $\lambda M/2$ το καθένα (με $\lambda < 1$), έτσι ώστε το ένα σωματίδιο να είναι ακίνητο. Ποια η τιμή του λ;

4. Αν τα 2 αυτά σωματίδια κινηθούν εκατέρωθεν του άξονα x σχηματίζοντας ίσες γωνίες με αυτόν, ποια θα είναι η μεταξύ τους γωνία;

5. Αν από τη σύγκρουση των δύο φωτονίων δημιουργηθούν δύο νέα φωτόνια κινούμενα σε ίσες γωνίες εκατέρωθεν του άξονα x τι μπορούμε να συμπεράνουμε για τις συχνότητές τους και ποια τιμή έχουν οι ίσες αυτές γωνίες;

Θέμα Γ: Ένα σωματίδιο μάζας m και φορτίου q κινείται μέσα σε ένα ομογενές ηλεκτρικό και μαγνητικό πεδίο της μορφής $\mathbf{E} = E\hat{\boldsymbol{x}}$ και $\mathbf{B} = B\hat{\boldsymbol{z}}$ (με $E < B$). Η εξίσωση κίνησης του σωματιδίου είναι

$$ma^{\mu} = qF^{\mu\nu}u_{\nu},$$

όπου a^{μ} η τετραεπιτάχυνση, u^{ν} η τετραταχύτητα του σωματιδίου και $F^{\mu\nu}$ ο τανυστής του ηλεκ/κού πεδίου.

1. Να αποδειχθεί ότι η z συνιστώσα της τετραταχύτητας του σωματιδίου είναι σταθερή. Αυτό σημαίνει ότι και η z συνιστώσα της ταχύτητάς του είναι σταθερή;
2. Να βρεθεί η ταχύτητα του σωματιδίου έτσι ώστε η τετραεπιτάχυνσή του να είναι μηδενική, αν η z συνιστώσα της ταχύτητάς του είναι 0.
3. Στο σύστημα του σωματιδίου του προηγούμενου ερωτήματος, τι ηλεκτρικό και τι μαγνητικό πεδίο θα μετράται;
4. Να βρεθεί το εσωτερικό γινόμενο (κατά Minkowski) της τετραταχύτητας του σωματιδίου με την τετραεπιτάχυνσή του στη γενική περίπτωση κίνησης (όχι αυτή του ερωτήματος [2]).
5. Να αποδειχθεί ότι η ποσότητα $\gamma^2 - \gamma^2(v_x^2 + v_y^2)$=σταθερό ($\gamma$ είναι ο παράγοντας Lorentz κατά την κίνηση του σωματιδίου και v_x, v_y οι συνιστώσες της ταχύτητας $(dx/dt, dy/dt)$ του σωματιδίου).

Δίδονται οι τύποι μετασχηματισμού των πεδίων.

$$\begin{aligned} \mathbf{E}'_{\parallel} &= \mathbf{E}_{\parallel}, \qquad & \mathbf{E}'_{\perp} &= \gamma(\mathbf{E}_{\perp} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}) \\ \mathbf{B}'_{\parallel} &= \mathbf{B}_{\parallel}, \qquad & \mathbf{B}'_{\perp} &= \gamma(\mathbf{B}_{\perp} - \mathbf{u} \times \mathbf{E}) \end{aligned}$$

Να γραφούν και τα 3 θέματα. Καλή σας επιτυχία.

Λύσεις

Θέμα Α:

1. Τα εντός είναι φωτοειδή, οπότε θα πρέπει $-t^2 + \mathbf{x}^2 < 0$, οπότε $\mathbf{x}^2 < 1$ δηλαδή το εσωτερικό της σφαίρας ακτίνας 1.

2.
$$\begin{aligned}(P_1^\mu - P_2^\mu)^2 &= (P_1^\mu)^2 + (P_2^\mu)^2 - 2(P_1^\mu)(P_2^\mu) \\ &= 0 + 0 - 2(E_1 E_2) + 2(E_1 E_2)\hat{\mathbf{n}}_\mathbf{1} \cdot \hat{\mathbf{n}}_\mathbf{2} \\ &= 2(E_1 E_2)(-1 + \cos\theta_{12}) \leq 0.\end{aligned}$$

   Μπορεί λοιπόν να είναι η διαφορά 2 φωτοειδών χωροειδές (<0) ή φωτοειδής (=0). Η 2η περίπτωση αντιστοιχεί σε παράλληλα ως προς το χωρικό τους μέρος φωτοειδή ($\cos\theta_{12} = 1$).

3. Αν ήταν παράλληλη δεν θα άλλαζαν τα πεδία (το μαγνητικό θα παρέμενε μηδέν). Επομένως η κίνηση γίνεται υπό γωνία σε σχέση με το ηλεκτρικό. Προφανώς είναι μεγαλύτερη αφού εμφανίζεται και μαγνητικό πεδίο και $E'^2 - B'^2 = E^2$. Επίσης η γωνία μεταξύ των πεδίων θα πρέπει να είναι πάντα $\pi/2$ αφού $\mathbf{E}' \cdot \mathbf{B}' = E \cdot 0 = 0$.

4. $E' = \gamma E - \gamma v E = \gamma(1-v)E = \sqrt{(1-v)/(1+v)}E$, δηλαδή $\nu' = 0.5\nu$.

5. Χρονοειδές και μάλιστα με τετράγωνο ίσο με -1 (μοναδιαίο χρονοειδές).

Θέμα Β:

1. Θα γράψουμε μόνο τις δύο συνιστώσες αφού η κίνηση εκτελείται στον άξονα x.
$$P^\mu = \begin{pmatrix} h(\nu_1 + \nu_2) \\ h(\nu_1 - \nu_2) \end{pmatrix} \tag{1}$$
   Η 2η συνιστώσα (η 3-ορμή) είναι θετική άρα κινείται προς τα θετικά του άξονα x.

2. Υψώνοντας στο τετράγωνο την τετραορμή
$$M^2 = [h(\nu_1 + \nu_2)]^2 - [h(\nu_1 - \nu_2)]^2 = 4h^2\nu_1\nu_2 \to M = 2h\sqrt{\nu_1\nu_2}.$$

3.
$$P^\mu = \begin{pmatrix} (\lambda M/2)(1+\Gamma) \\ (\lambda M/2)\Gamma V \end{pmatrix}$$
   και υψώνοντας στο τετράγωνο βρίσκουμε
$$M^2 = (\lambda M/2)^2(1 + \Gamma^2 + 2\Gamma - \Gamma^2 V^2) = (\lambda M/2)^2 2(1+\Gamma)$$
   που σε συνδυαμό με την διατήρηση της ενέργειας
$$h(\nu_1 + \nu_2) = (\lambda M/2)(1+\Gamma)$$
   οδηγεί στην σχέση $\lambda = 2\sqrt{\nu_1\nu_2}/(\nu_1 + \nu_2)$ (με απαλοιφή του $1+\Gamma$).

4. Λόγω ίσων γωνιών πρέπει και οι ταχύτητες των 2 σωματιδίων να είναι ίδιες (αλλιώς δεν θα ήταν 0 η 3-ορμή στον y). Έτσι

$$P^\mu = \begin{pmatrix} (\lambda M/2)2\gamma' \\ (\lambda M/2)2\gamma' v' \cos\theta \end{pmatrix}$$

και υψώνοντας στο τετράγωνο $M^2 = (\lambda M/2)^2(\gamma'^2 - \gamma'^2 v'^2 \cos^2\theta)$ και αντικαθιστώντας το $\gamma'^2 v'^2$ με $\gamma'^2 - 1$ βρίσκουμε

$$\cos^2\theta = \left(\gamma'^2 - \frac{4}{\lambda^2}\right)\frac{1}{\gamma'^2 - 1}$$

με $\gamma' = h(\nu_1+\nu_2)/(\lambda M) = (\nu_1+\nu_2)^2/(4\nu_1\nu_2)$ (από διατήρηση της ενέργειας). Εκτελώντας όλες τις απαραίτητες αντικαταστάσεις βρίσκουμε

$$\cos\theta = \frac{(\nu_1+\nu_2)}{\sqrt{(\nu_1+\nu_2)^2 + 4\nu_1\nu_2}}$$

5. Όμοια με προηγουμένως τα 2 φωτόνια θα έχουν την ίδια ενέργεια.

$$P^\mu = \begin{pmatrix} 2h\nu' \\ 2h\nu'\cos\theta' \end{pmatrix}$$

και διαιρώντας χωρικό με χρονικό μέρος βρίσκουμε

$$\cos\theta' = \frac{\nu_1 - \nu_2}{\nu_1 + \nu_2}.$$

Όσο για την κοινή ν' θα είναι $\nu' = (\nu_1+\nu_2)/2$.

Θέμα Γ:

1. Θα είναι

$$\begin{aligned} m\begin{pmatrix} du^0/d\tau \\ du^1/d\tau \\ du^2/d\tau \\ du^3/d\tau \end{pmatrix} &= q\begin{pmatrix} 0 & E & 0 & 0 \\ -E & 0 & B & 0 \\ 0 & -B & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -u^0 \\ u^1 \\ u^2 \\ u^3 \end{pmatrix} \\ &= q\begin{pmatrix} E\gamma u_x \\ E\gamma + B\gamma u_y \\ -B\gamma u_x \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{2}$$

Η z συνιστώσα της τετραεπιτάχυνσης είναι 0.

2. Αν $u_x = u_z = 0$ και $u_y = -E/B$ η τετραεπιτάχυνση είναι 0 και το σωματίδιο κινείται συνεχώς με αυτή τη σταθερή ταχύτητα.

3. Εκτελώντας ένα μετασχηματισμό με την ταχύτητα αυτή $(0, -E/B, 0)$ βρίσκουμε

$$\begin{aligned} E'_y = B'y = 0, \\ \mathbf{E'}_\perp = \gamma[E\hat{\boldsymbol{x}} + (-E/B)\hat{\boldsymbol{y}} \times B\hat{\boldsymbol{z}}] = 0, \\ \mathbf{B'}_\perp = \gamma[B\hat{\boldsymbol{z}} - (-E/B)\hat{\boldsymbol{y}} \times E\hat{\boldsymbol{x}}] = \gamma(B - E^2/B)\hat{\boldsymbol{z}}. \end{aligned}$$

Το σωματίδιο είναι ακίνητο σε ένα καθαρά μαγνητικό πεδίο. (Αν υπολογίσουμε και το γ η ένταση του πεδίου είναι $\sqrt{B^2 - E^2}$.

4. Πάντα (όχι μόνο στην περίπτωση αυτή) ισχύει ότι $a^\mu u_\mu = 0$ (έχουν εσωτερικό γινόμενο 0).

5. Είναι

$$\gamma^2 - \gamma^2(u_x^2 + u_y^2) = \gamma^2(1 - u^2 + u_z^2) = 1 + (\gamma u_z)^2. \tag{3}$$

   Ο τελευταίος όμως όρος είναι η διατηρούμενη z συνιστώσα της τετραταχύτητας. Επομένως διατηρείται όλη η παράσταση.