ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

Τμήμα Φυσικής

Εξέταση στη Θεωρία της Ειδικής Σχετικότητας

1 Νοεμβρίου 2011

Αν θέλετε, μπορείτε να επεξεργαστείτε όλα τα προβλήματα σε σύστημα μονάδων όπου η ταχύτητα του φωτός είναι $c = 1$. Όλα τα δεδομένα των προβλημάτων δίδονται σε αυτό το σύστημα μονάδων.

Θέμα Α:

Δύο όμοιες ράβδοι (η 2 και η 3 αντίστοιχα) ίδιου φυσικού μήκους ολισθαίνουν κατά μήκος του άξονα x ενός ΣΚΦ Σ_1 με ταχύτητες v_{21}, v_{31} αντίστοιχα ($\vec{v}_{21} \neq \vec{v}_{31}$). Στο Σ_1 τα μήκη των δύο ράβδων μετρούνται $L_{21} = L_{31} = a$ αντίστοιχα. (α) Τι συμπέρασμα μπορείτε να εξάγετε για τις δύο ταχύτητες $\vec{v}_{21}, \vec{v}_{31}$. (β) Έστω $L_{23} = b$ το μήκος της ράβδου 2 όταν μετράται στο σύστημα ηρεμίας της ράβδου 3. Με δεδομένα τα a, b υπολογίστε τις ταχύτητες $\vec{v}_{21}, \vec{v}_{31}$ των ράβδων στο Σ καθώς και την ταχύτητα $\vec{v}_{23}$ της ράβδου 2 στο σύστημα ηρεμίας της ράβδου 3.

Θέμα Β: Θεωρήστε μια σειρά από γεγονότα A_i (με $i = 0, 1, 2, \ldots$) τα οποία σε κάποιο σύστημα αναφοράς Σ συμβαίνουν στις ακόλουθες χωροχρονικές θέσεις $x_i = i$, $t_i = \sqrt{(i+1)^2 - 1}$.

1. Σχεδιάστε σε ένα χωροχροινικό διάγραμμα $t - x$ τα γεγονότα A_i.

2. Ελέγξτε το χαρακτήρα (χωροειδές, χρονοειδές, φωτοειδές) των χωροχρονικών τετρανυσμάτων $A_i A_{i+1}$ (του τετρανύσματος που έχει άκρα τα γεγονότα A_i και A_{i+1}).

3. Υπάρχει σύστημα αναφοράς στο οποίο το γεγονός A_N να συμβεί πριν από το A_0;

4. Βρείτε με τι ταχύτητα πρέπει να κινείται ως προς το αρχικό σύστημα Σ, ένα σύστημα αναφοράς Σ' ώστε $x'_N < x'_0$.

5. Ένα φωτόνιο εκπέμπεται από το σημείο $x = a$ τη χρονική στιγμή $t = 0$, ως προς το αρχικό σύστημα Σ. Ποια συνθήκη πρέπει να ικανοποιεί το a ώστε κάθε χρονική στιγμή t_i το φωτόνιο να βρίσκεται πίσω από το γεγονός A_i, δηλαδή $x_{\text{φωτ}}(t_i) < x_i$.

Θέμα Γ: Δύο φωτόνια συχνότητας ν το καθένα, τα οποία κινούνται σε αντίθετες κατευθύνσεις απορροφώνται από σωματίδιο μάζας m το οποίο αρχικά ηρεμεί στο εργαστήριο. Λόγω της απορρόφησης, το σωματίδιο μεταβαίνει σε μια διεγερμένη κατάσταση και στη συνέχεια αποδιεγείρεται αυθόρμητα εκπέμποντας ένα μόνο φωτόνιο.

1. Να υπολογιστεί η μάζα του διεγερμένου σωματιδίου.

2. Να υπολογιστεί η ταχύτητα του σωματιδίου στο εργαστήριο μετά την αποδιέγερση.

3. Να υπολογιστεί η συχνότητα του εκπεμπόμενου φωτονίου κατά την αποδιέγερση του σωματιδίου.

Θέμα Δ: Στο σύστημα Σ το ηλεκτρικό και το μαγνητικό πεδίο είναι $\vec{E} = A\hat{x}$ και $\vec{B} = \frac{A}{2}\hat{y}$ με $A \neq 0$.

1. Υπολογίστε τη συναλλοίωτη μορφή του τανυστή του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου $F_{\mu\nu}$.
2. Βρείτε κατάλληλο πίνακα μετασχηματισμού Lorentz που μετασχηματίζει τον τανυστή ηλ/κού πεδίου $F^{\mu\nu}$ από τη μορφή

$$\begin{pmatrix} 0 & A & 0 & 0 \\ -A & 0 & 0 & -A/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A/2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ στη μορφή } \begin{pmatrix} 0 & B & 0 & 0 \\ -B & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   όπου A, B θετικές σταθερές.
3. Το συγκεκριμένο ηλ/κό πεδίο είναι ηλεκτρικού, ή μαγνητικού τύπου;
4. Υπολογίστε την τιμή B/A.

Δίδονται οι τύποι μετασχηματισμού των πεδίων:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}'_{\parallel} &= \mathbf{E}_{\parallel}, \qquad & \mathbf{E}'_{\perp} &= \gamma(\mathbf{E}_{\perp} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}) \\ \mathbf{B}'_{\parallel} &= \mathbf{B}_{\parallel}, \qquad & \mathbf{B}'_{\perp} &= \gamma(\mathbf{B}_{\perp} - \mathbf{u} \times \mathbf{E}) \end{aligned}$$

Η γενική μορφή του τανυστή του ηλεκτρ/κού πεδίου είναι

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & B_z & -B_y \\ -E_y & -B_z & 0 & B_x \\ -E_z & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix}$$

Καλή Επιτυχία

Λύσεις

Θέμα Α: Ισχύει ότι $a = L_{21} = L_0\sqrt{1-v_{21}^2}$ και $a = L_{31} = L_0\sqrt{1-v_{31}^2}$ όπου L_0 το φυσικό μήκος της ράβδου.

(α) Συμπεραίνουμε ότι $v_{21}^2 = v_{31}^2$ και αφού $\vec{v}_{21} \neq \vec{v}_{31}$, $v_{21} = -v_{31} = v$.

(β) $b = L_{23} = L_0\sqrt{1-v_{23}^2}$. Διαιρώντας κατά μέλη βρίσκουμε

$$\frac{b}{a} = \sqrt{\frac{1-v_{23}^2}{1-v^2}}.$$

Από τη σύνθεση όμως δύο ίσων αλλά αντίθετων ταχυτήτων βρίσκουμε $v_{23} = \frac{2v}{1+v^2}$ οπότε

$$x = \frac{b}{a} = \sqrt{\frac{1-(2v/(1+v^2))^2}{1-v^2}} = \sqrt{\frac{1-v^2}{(1+v^2)^2}}.$$

Λύνοντας ως προς v^2 προκύπτει ένα τριώνυμο

$$x^2(v^2)^2 + (2x^2+1)v^2 + (x^2-1) = 0$$

με λύση

$$v^2 = \frac{-(2x^2+1) \pm \sqrt{(2x^2+1)^2 - 4x^2(x^2-1)}}{2x^2} = \frac{-(2x^2+1) \pm \sqrt{(8x^2+1}}{2x^2}.$$

Από τις δύο κρατάμε μόνο την $+$ που δίνει θετικό v^2. Έχοντας βρει την τιμή της v βρήκαμε τις v_{21}, v_{31} και την v_{23} από τη σύνθεσή τους.

Θέμα Β:

(1) Παρατηρούμε ότι η ακολουθία των γεγονότων βρίσκεται επάνω σε μια υπερβολή, την $t_i^2 - (x_i+1)^2 = -1$. Τα πρώτα γεγονότα της ακολουθίας έχουν συντεταγμένες $(t_i, x_i) = (0,0), (\sqrt{3}, 1), (\sqrt{8}, 2), (\sqrt{15}, 3), \ldots$.

(2) $A_iA_{i+1} = (i+1-i, \sqrt{(i+2)^2-1} - \sqrt{(i+1)^2-1}) = (1, \sqrt{(i+2)^2-1} - \sqrt{(i+1)^2-1})$. Για να ελέγξουμε το είδος του τετρανύσματος συγκρίνουμε το χωρικ;ο και του χρονικό διάστημα.

$$\begin{aligned} \Delta x &= 1 \\ \Delta t &= \sqrt{(i+2)^2-1} - \sqrt{(i+1)^2-1}. \end{aligned}$$

Από τα πρώτα τετρανύσματα παρατηρούμε ότι $\sqrt{3} > 1, \sqrt{8} - \sqrt{3} > 1, \ldots$, οπότε θέλουμε να ελέγξουμε αν γενικά $\sqrt{(i+2)^2-1} - \sqrt{(i+1)^2-1} > 1$. Πράγματι

$$\begin{aligned} \sqrt{(i+2)^2-1} &> \sqrt{(i+1)^2-1} + 1 \Leftarrow \\ i^2+4i+3 &> i^2+2i+1+2\sqrt{i^2+2i} \Leftarrow \\ 2i+2 &> 2\sqrt{i^2+2i} \Leftarrow \\ (i+1)^2 &> i^2+2i. \end{aligned}$$

Επομένως είναι χρονοειδές.

(3) Θέλουμε $t'_N < 0$ δηλαδή $\gamma(t_N - vx_N) < 0$.

$$\sqrt{(N+1)^2 - 1} < vN.$$

Αδύνατο όπως το περιμέναμε αφού το $A_0 A_N$ πρέπει να είναι χρονοειδές ως άθροισμα από χρονοειδή.

(4) Τώρα θέλουμε

$$N < v\sqrt{(N+1)^2 - 1}$$

που ισχύει εφόσον $v > N/\sqrt{(N+1)^2-1} = N/\sqrt{N^2+2N} = \sqrt{N^2/(N^2+2N)}$.

(5) Το φωτόνιο θα βρίσκεται στην θέση $x_{\varphi\omega\tau} = a + t_i < x_i = i$.

$$a < i - \sqrt{i^2+2i} = i(1 - \sqrt{1+2/i}) < i(1-(1+1/i)) < -1.$$

Θέμα Γ:

(1) $m' = m + 2h\nu$ από διατήρηση ενέργειας. (Το νέο σωματίδιο μένει ακίνητο λόγω διατήρησης 3-ορμής.)

(2,3)

$$m' = E' + h\nu', \vec{p}' = -h\nu'\hat{n}$$

όπου $E' = \sqrt{p'^2 + m^2}$ η ενέργεια του σωματιδίου μετά την αποδιέγερση και $\nu', \hat{n}$ η συχνότητα και η κατεύθυνση κίνησης του φωτονίου μετά την αποδιέγερση. Με αναδιευθέτηση των όρων έχουμε

$$\begin{aligned} (m + 2h\nu - h\nu')^2 &= (h\nu')^2 + m^2 \Rightarrow \\ 4(h\nu)(h\nu + m) &= 2h\nu'(m + 2h\nu) \Rightarrow \\ \nu' &= 2\nu\frac{m + h\nu}{m + 2h\nu}. \end{aligned} \tag{1}$$

Για να βρούμε την ταχύτητα του σωματιδίου

$$v = \frac{p'}{E'} = \sqrt{\frac{p'^2}{p'^2 + m^2}} = \sqrt{\frac{(h\nu')^2}{(h\nu')^2 + m^2}}.$$

Θέμα Δ:

(1)

$$F_{\mu\nu} = F^{\kappa\lambda}\eta_{\mu\kappa}\eta_{\lambda\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -A & 0 & 0 \\ A & 0 & 0 & -A/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(2) Δοκιμάζουμε με ένα μετασχηματισμό προώθησης στον z άξονα. Από τις σχέσεις μετασχηματισμού θα έχουμε $\vec{E}' = \gamma(A\hat{x} - v(A/2)\hat{x})$, $\vec{B}' = \gamma((A/2)\hat{y} - vA\hat{y})$. Για να είναι το 2ο μηδέν $v = 1/2$, οπότε τότε $\vec{E}' = \frac{2}{\sqrt{3}}\frac{3}{4}A\hat{x} = \frac{\sqrt{3}}{2}A\hat{x}$. Δηλαδή $B = \frac{\sqrt{3}}{2}A$.

(3) Αφού μπορεί να σβήσει το μαγνητικό πεδίο είναι ηλεκτρικού τύπου.

(4) $B/A = \sqrt{3}/2$.