Εξετάσεις στη Θεωρία της Ειδικής Σχετικότητας
Μάρτιος 2004

Θέμα 1: Σωματίδιο με μάζα ηρεμίας M, ακίνητο στο σύστημα ηρεμίας Σ, διασπάται αυθόρμητα σε τρία φωτόνια. (α) Εξηγήστε γιατί οι τροχιές των φωτονίων θα βρίσκονται σε ένα επίπεδο. (β) Υπολογίστε τις ενέργειες των τριών φωτονίων δεδομένου ότι οι τροχιές τους σχηματίζουν ίσες γωνίες. (γ) Ένας παρατηρητής Σ' κινούμενος αντίθετα με ένα από τα φωτόνια μετρά την ενέργεια του εν λόγω φωτονίου και τη βρίσκει ίση με Mc^2. Ποια η ταχύτητα V του παρατηρητή Σ' σε σχέση με τον Σ και πόση είναι η ενέργεια των άλλων δύο φωτονίων ως προς τον Σ'; (δ) Ένας άλλος παρατηρητής ο Σ'' κινείται με την ίδια ταχύτητα V ως προς τον Σ αλλά με αντίθετη κατεύθυνση απ' ότι ο Σ'. Ποια η ενέργεια του κάθε φωτονίου ως προς αυτόν; (ε) Αναμένατε να είναι τόση η διαφορά της συνολικής ενέργειας των φωτονίων για τον Σ' και τον Σ'';

Θέμα 2: Έστω παρατηρητής Σ ως προς τον οποίο ένας πύραυλος απομακρύνεται με ταχύτητα V. Ο παρατηρητής Σ προκειμένου να μετρήσει την ταχύτητα του πυραύλου στέλνει ένα φωτεινό παλμό προς τον πύραυλο. Ο φωτεινός παλμός χτυπά εν μέρει στο οπίσθιο μέρος του πυραύλου και ανακλάται και εν μέρει στο πρόσθιο μέρος του πυραύλου και ανακλάται. Τα δύο ανακλώμενα σήματα επιστρέφουν στον παρατηρητή με χρονική διαφορά ΔT. Ποιο το μήκος του πυραύλου; Αν ο παρατηρητής δεν γνώριζε την ταχύτητα του πυραύλου αλλά γνώριζε τη συχνότητα του εκπεμπόμενου φωτεινού παλμού (μονοχρωματική ακτινοβολία) τι άλλο θα χρειαζόταν να μετρήσει ώστε να συμπεράνει την ταχύτητα του πυραύλου και έτσι να εκτιμήσει το μήκος του πυραύλου;

Θέμα 3: Θεωρήστε το μετασχηματισμό συντεταγμένων $(t,x) \longrightarrow (u,v)$ μέσω των σχέσεων: $u = (t+x)/\sqrt{2}$, $v = (t-x)/\sqrt{2}$. (α) Υπολογίστε το στοιχείο μήκους $ds^2 = -dt^2 + dx^2$ στις νέες συντεταγμένες. (β) Ένα διάνυσμα στις συντεταγμένες (t,x) έχει συνιστώσες $A_t = A_x = 2\sqrt{2}$. Ποιες οι συνιστώσες του διανύσματος στις συντεταγμένες (u,v); Πόσο είναι το Ευκλείδειο μέτρο και πόσο το μέτρο Minkowski του διανύσματος A; (γ) Γράψτε την κυματική εξίσωση $(\partial^2/\partial t^2 - \partial^2/\partial x^2)\Phi(t,x) = 0$ στις συντεταγμένες (u,v). Τι συνάγετε όσον αφορά στις λύσεις της εξίσωσης;

Θέμα 4: Θέλουμε να υπολογίσουμε τη μέγιστη απόσταση στην οποία μπορεί να φθάσει μια διαστημική αποστολή σε διάστημα μια ανθρώπινης ζωής αν επιταχύνεται συνεχώς με σταθερή επιτάχυνση ίση με $1\ g$. (α) Δείξτε ότι μια παραμετρική κοσμική γραμμή της μορφής

$$x = \frac{1}{a}\cosh(a\phi)\ ,\ ct = \frac{1}{a}\sinh(a\phi)$$

αντιπροσωπεύει μια κίνηση με ταχύτητα μεταβαλλόμενη αλλά συνεχώς μικρότερη του c. (β) Γνωρίζοντας ότι το χωροχρονικό μήκος σχετίζεται με τον ιδιόχρονο μέσω της σχέσης $-dx^2 + c^2dt^2 = c^2d\tau^2$, βρείτε το φυσικό νόημα της παραμέτρου ϕ στις παραπάνω παραμετρικές εξισώσεις κίνησης. (γ) Δείξτε ότι αυτές οι εξισώσεις κίνησης αντιπροσωπεύουν τετραεπιτάχυνση σταθερού μέτρου. (δ) Προσδιορίστε την παράμετρο a ώστε η νευτώνεια επιτάχυνση (d^2x/dt^2) για $t \simeq 0$ να είναι ίση με g. (Χρησιμοποιήστε τα αναπτύγματα $\sinh\epsilon \cong \epsilon$, $\cosh\epsilon \cong 1+\epsilon^2/2$, ώστε να καταλήξετε στο γνωστό νευτώνειο νόμο για την επιταχυνόμενη κίνηση.) (ε) Υποθέτωντας ότι μια ανθρώπινη ζωή έχει διάρκεια 100 χρόνια, υπολογίστε τη συνολική διαδρομή που θα εκτελέσει η αποστολή. [Δίδονται 1 χρόνος $= 3\times 10^7\ s$, $g = 10\ m/s^2$, $c = 3\times 10^8\ m/s$, $\cosh 100 \simeq 1.3\times 10^{43}$.] (στ) Θεωρείτε ότι υπάρχει κανένα εμπόδιο κατ' αρχάς στον αποικισμό του Σύμπαντος;

Θέμα 5: Ένας αδρανειακός παρατηρητής Σ παρατηρεί ηλεκτρικό πεδίο $\vec{E} = (E,0,0)$ και μαγνητικό πεδίο $\vec{B} = (0,B,0)$. Είναι δυνατόν ένας άλλος αδρανειακός παρατηρητής να βλέπει και τα δύο πεδία με ανεστραμένη φορά αλλά όχι κατ' ανάγκη ίδιο μέτρο, δηλαδή, $\vec{E}' = (-E',0,0)$ και $\vec{B}' = (0,-B',0)$ (όπου E, B, E', B' θετικές ποσότητες); Με πόση ταχύτητα πρέπει να κινείται ο παρατηρητής ώστε ένα από τα δύο πεδία να αλλάξει φορά αλλά να έχει το ίδιο με το αρχικό μέτρο. Τι συμβαίνει με το άλλο πεδίο τότε; Δίδονται οι σχέσεις μετασχηματισμού των πεδίων

$$\mathbf{E}'_{\parallel} = \mathbf{E}_{\parallel}, \qquad \mathbf{E}'_{\perp} = \gamma(\mathbf{E}_{\perp} + \mathbf{u}\times\mathbf{B})$$
$$\mathbf{B}'_{\parallel} = \mathbf{B}_{\parallel}, \qquad \mathbf{B}'_{\perp} = \gamma(\mathbf{B}_{\perp} - \frac{1}{c^2}\mathbf{u}\times\mathbf{E})$$

Να γραφούν τα 4 από τα 5 θέματα. Καλή σας επιτυχία.

Λύσεις

Θέμα 1: (α) Το άθροισμα των 3-ορμών στο σ'συστημα του Σ πρέπει να είναι όση η 3-ορμή του σωματιδίου, δηλαδή, 0. Συνεπώς $\vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3 = 0$ ή $\vec{p}_1 = -\vec{p}_2 - \vec{p}_3$. Η τροχιά λοιπόν του 1 πρέπει να είναι συνεπίπεδη με τις 2,3. (β) Από τη στιγμή που οι τρεις 3-ορμές που έχουν άθροισμα 0 σχηματίζουν μεταξύ τους ίσες γωνίες το τρίγωνο των 3-ορμών είναι ισόπλευρο και επομένως οι τρεις 3-ορμές έχουν ίσο μέτρο. Συνεπώς θα έχουν και ίσες ενέργειες. Προκειμένου το άθροισμα των τριών ενεργειών να ισούται με την ενέργεια Mc^2 του σωματιδίου θα πρέπει οι τρεις ενέργειες να είναι $E_1 = E_2 = E_3 = Mc^2/3$. (γ) Θα έχουμε

$$Mc^2 = \gamma Mc^2/3 + \gamma V Mc^2/3.$$

Δηλαδή

$$3 = \sqrt{\frac{1+V}{1-V}}.$$

Εκτελώντας τις πράξεις βρίσκουμε $V = 4c/5$ και $\gamma = 5/3$. Για τα άλλα φωτόνια μπορούμε να υπολογίσουμε την ενέργεια που μετρά ο Σ' από

$$\begin{pmatrix} \gamma & -\gamma V & 0 & 0 \\ -\gamma V & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} c/3 \begin{pmatrix} 1 \\ -1/2 \\ \sqrt{3}/2 \\ 0 \end{pmatrix} = Mc/3 \begin{pmatrix} 5/3 & +4/3 & 0 & 0 \\ +4/3 & 5/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1/2 \\ \sqrt{3}/2 \\ 0 \end{pmatrix} = Mc/3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \\ \sqrt{3}/2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Συνεπώς η ενέργεια των άλλων δύο (λόγω συμμετρίας) φωτονίων είναι $Mc^2/3$. (δ) Ο παρατηρητής Σ'' θα έχει μετασχηματισμό Lorentz

$$\begin{pmatrix} 5/3 & -4/3 & 0 & 0 \\ -4/3 & 5/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Αν δράσει λοιπόν στα τρια φωτόνια με τετραορμές στον Σ

$$P_1^\mu = Mc/3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \; , \; P_2^\mu = Mc/3 \begin{pmatrix} 1 \\ -1/2 \\ \sqrt{3}/2 \\ 0 \end{pmatrix} \; , \; P_3^\mu = Mc/3 \begin{pmatrix} 1 \\ -1/2 \\ -\sqrt{3}/2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

θα δώσει ενέργειες $Mc^2/9, 7Mc^2/9, 7Mc^2/9$ αντίστοιχα. (ε) Το άθροισμα λοιπόν των ενεργειών των τριών φωτονίων και στο Σ' και στο Σ'' είναι $5Mc^2/3$, η οποία είναι η ενέργεια του αρχικού σωματιδίου όπως μετράται από δύο παρατηρητές που κινούνται με την ίδια ταχύτητα $4c/5$, αλλά σε διαφορετικές κατευθύνσεις.

Θέμα 2: Θα θεωρήσουμε άτονο το σύστημα του παρατηρητή και τονούμενο του πυραύλου και ότι η κίνηση γίνεται κατά μήκος του άξονα x. ΄Εστω $(ct_0, x_0) = (0, 0)$ οι συντεταγμένες εκπομπής τόυ φωτεινού παλμού και $(ct_1, x_1) = (a, a)$ οι συντεταγμένες του γεγονότος κάποιας ανάκλασης, τότε οι συντεταγμένες του γεγονότος λήψης του ανακλώμενου παλμού από τον παρατηρητή Σ θα είναι $(ct_2, x_2) = (2a, 0)$. Έτσι αν $(a, a), (b, b)$ οι συντεταγμένες των δύο ανακλάσεων μπρος και πίσω αντίστοιχα $(a > b)$ στο σύστημα του πυραύλου οι συντεταγμένες αυτών των γεγονότων θα είναι αντίστοιχα $(ct'_1, 0), (ct'_2, L)$, όπου L το ιδιομήκος του πυραύλου. Το τετράνυσμα, λοιπόν, που συνδέει τα δύο αυτά γεγονότα θα έχει διαφορετικές συντεταγμένες στα δύο συστήματα που θα συνδέονται με ένα μετασχηματισμό Lorentz.

$$\begin{pmatrix} c(t'_2 - t'_1) \\ L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma V \\ -\gamma V & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a - b \\ a - b \end{pmatrix}$$

΄Ετσι θα έχουμε από τη δεύτερη σχέση του παραπάνω γραμμικού συστήματος

$$L = \gamma(a - b)(1 - V) = (a - b)\sqrt{\frac{1-V}{1+V}}$$

Παράλληλα όπως είπαμε ο χρόνος άφιξης των δύο ανακλώμενων παλμών είναι $\Delta T = 2(a-b)$. Συνεπώς, $L = \sqrt{\frac{1-V}{1+V}}\frac{\Delta T}{2}$.

Αν δεν γνωρίζαμε την ταχύτητα του πυραύλου θα μπορούσαμε να την υπολογίσουμε από τη διαφορά συχνότητας εκπεμπόμενου και λαμβανόμενου φωτεινού παλμού. Αν

$$h\nu/c\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

η τετραοπρμή ενός φωτονίου όταν εκπέμπεται στο σύστημα του πυραύλου είναι

$$\begin{pmatrix} \gamma & -\gamma V \\ -\gamma V & \gamma \end{pmatrix} h\nu/c\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \gamma(1-V)h\nu/c\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Στο σύστημα αυτό μετά την ανάκλαση το φωτόνιο αλλάζει μόνο κατεύθυνση ορμής και γίνεται

$$\gamma(1-V)h\nu/c\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

οπότε στο αρχικό σύστημα το ανακλώμενο φωτόνιο έχει τετραοτρμή

$$\begin{pmatrix} \gamma & \gamma V \\ \gamma V & \gamma \end{pmatrix} \gamma(1-V)h\nu/c\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \gamma^2(1-V)^2 h\nu/c\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

δηλαδή θα έχει συχνότητα $\hat{\nu} = \nu(1-V)/(1+V)$. Επομένως το όργανο του παρατηρητή πρέπει να έχει ένα φασματογράφο ο οποίος να μετρά τη συσχνότητα του ανακλώμενου παλμού, και να υπολογίζει το μήκος του πυραύλου σύμφωνα με τη σχέση $L = (\Delta T/2)\sqrt{\hat{\nu}/\nu}$.

Θέμα 3: (α) Αντιστρέφοντας το μετασχηματισμό θα έχουμε

$$t = \frac{u+v}{\sqrt{2}}\,,\; x = \frac{u-v}{\sqrt{2}}\,.$$

΄Ετσι

$$dt^2 = \frac{(du+dv)^2}{2}\,,\; dx^2 = \frac{(du-dv)^2}{2}$$

και

$$ds^2 = -\frac{(du+dv)^2}{2} + \frac{(du-dv)^2}{2} = -2du\,dv.$$

(β) Οι συντεταγμένες ενός διανύσματος στο καινούριο σύστημα θα είναι

$$A_u = \frac{\partial x}{\partial u}A_x + \frac{\partial t}{\partial u}A_t\,, A_v = \frac{\partial x}{\partial v}A_x + \frac{\partial t}{\partial v}A_t\,.$$

Δηλαδή θα είναι $A_u = 4, A_v = 0$. Το διάνυσμα A έχει ευκλείδειο μέτρο 4 αλλά μέτρο Minkowski 0. (γ) Επειδή

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial v}{\partial t}\frac{\partial}{\partial v} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial v}\right)\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial}{\partial v} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\partial}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial v}\right),$$

θα έχουμε

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\Phi = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial v}\right)^2 - \left(\frac{\partial}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial v}\right)^2\right]\Phi = 2\frac{\partial}{\partial u}\frac{\partial}{\partial v}\Phi = 0.$$

Επομένως οι κυματικές λύσεις θα είναι συναρτήσεις της μορφής $\Phi = \Phi_1(u) + \Phi_2(v)$.

Θέμα 4: (α) Παραγωγίζοντας θα έχουμε

$$dx = \sinh(a\phi)\,d\phi,\; c\,dt = \cosh(a\phi)\,d\phi.$$

Συνεπώς η ταχύτητα θα είναι
$$\frac{dx}{dt} = c\tanh(a\phi) < c.$$
(β) $c^2 d\tau^2 = \Big(\cosh^2(a\phi) - \sinh^(a\phi)\Big)\; d\phi^2 = d\phi^2$. Δηλαδή η παράμετρος $d\phi$ δεν είναι τίποτε άλλο παρά c φορές ο ιδιόχρονος κατά μήκος της κοσμικής γραμμής. (γ) Αφού $d\phi = c\, d\tau$,
$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} = (c\cosh(a\phi), c\sinh(a\phi), 0, 0)\; a^\mu = \frac{du^\mu}{d\tau} = ac\,(c\sinh(a\phi), c\cosh(a\phi), 0, 0)\,.$$
Η τετραεπιτάχυνση αυτή έχει μέτρο $ac^2(-\sinh^2(a\phi) + \cosh^2(a\phi)) = ac^2$. (δ) Αναπτύσσοντας σύμφωνα με την υπόδειξη τα $\sinh, \cosh$ θα έχουμε
$$x \cong \frac{1}{a}(1 + \frac{a^2\phi^2}{2})\;,\; ct \cong \phi$$
. Συνδυάζοντας τις δύο σχέσεις έχουμε
$$x \cong \frac{1}{a}(1 + \frac{a^2c^2t^2}{2}) = \frac{1}{a} + \frac{1}{2}ac^2t^2.$$
Θεωρήσαμε ότι το όρισμα $a\phi$ είναι πολύ μικρό στην αρχή της κίνησης $t \simeq 0$ αφού για $u \simeq 0 \Rightarrow \phi \simeq 0$. Αν θέλουμε λοιπόν η σταθερού μέτρου επιτάχυνση να είναι ίση με 1 g θα πρέπει $ac^2 = 10$ m/s^2. (ε) Αν θέλουμε το συνολικό ταξίδι να διαρκέσει 100 χρόνια για τους επιβάτες αυτό σημαίνει ότι $\tau_{\text{ολ}} = 100$ yrs $= 3 \times 10^9$ s ή με άλλα λόγια $\phi_{\text{ολ}} = c\tau_{\text{ολ}} = 9 \times 10^{17}$ m. Εκτελώντας τις πράξεις έχουμε ότι το συνολικό μήκος που θα καλύψει η διαστημική αποστολή είναι
$$x = 9 \times 10^{15} \cosh\left(\frac{9 \times 10^{18}\ \text{m}}{9 \times 10^{16}\ \text{m}}\right)\ \text{m} = 11.7 \times 10^{58}\ \text{m}.$$
(στ) Σίγουρα αυτή είναι μια τρομερά μεγάλη απόσταση, πολύ μεγαλύτερη από τις διαστάσεις του Σύμπαντος και επομένως δεν υπάρχει κανένα σχετικιστικό πρόβλημα κατάκτησης του Σύμπαντος. Υπάρχει όμως πρόβλημα οικονομικής φύσης αφού τα καύσιμα που χρειάζονται ώστε να επιτυγχάνεται τέτοια επιτάχυνση για τόσο χρόνο είναι ασύληπτα μεγάλη.

Θέμα 5: Αν η κίνηση γινόταν κατά μήκος οποιουδήποτε από τα δύο πεδία το πεδίο αυτό που θα ήταν παράλληλο στην κίνηση δεν θα άλλαζε. Αυτό θα συνέβαινε και αν η κίνηση γινόταν σε κάποια κατεύθυνση η οποία δεν θα ήταν κάθετη και στα δύο πεδία. Τότε θα υπήρχε τουλάχιστον ενός πεδίου η συνιστώσα κατά μήκος της κίνησης και αυτή η συνιστώσα, οντας παράλληλη στην ταχύτητα δεν θα άλλαζε, πόσω μάλλον να ανέστρεφε φορά. Επομένως η μόνη λύση είναι η κίνηση να είναι κατά μήκος του z (κάθετα και στο $\vec{E}$ και στο $\vec{B}$). Τότε θα είχαμε
$$E'_z = E_z = 0 \vec{E}'_\perp = \gamma(E\hat{x} + uB\hat{z}\times\hat{y}) = \gamma(E - uB)\hat{x} B'_z = B_z = 0 \vec{B}'_\perp = \gamma(B\hat{x} - (uE/c^2)\hat{z}\times\hat{x}) = \gamma(B - uE/c^2)\hat{y}.$$
Αν θέλουμε και $E - uB < 0$ και $B - uE/c^2 < 0$ θα πρέπει και $u/c > E/Bc$ και $u/c > Bc/E$. Αυτό όμως είναι αδύνατο αφού ένας αριθμός (E/Bc) και ο αντίστροφός του (Bc/E) δεν μπορούν και οι δύο να είναι μικρότεροι της μονάδας. Ακόμη και στην ακραία περίπτωση που ο αριθμός αυτός είναι μονάδα ο ζητούμενος παρατηρητής πρέπει να κινείται με ταχύτητα μεγαλύτερη του φωτός, πράγμα αδύνατο. Συνεπώς δεν μπορούμε να αναποδογυρίσουμε τα πρόσημα και των δύο πεδίων. Θα μπορούσαμε όμως να αναστρέψουμε τη φορά του ενός μόνο πεδίου. (i) Αν $E/Bc < 1$ τότε αν κινηθούμε με ταχύτητα $u/c > E/Bc$ θα αντιστραφεί η φορά του ηλεκτρικού πεδίου, ενώ (ii) Αν $E/Bc > 1$ τότε αν κινηθούμε με ταχύτητα $u/c > Bc/E$ θα αντιστραφεί η φορά του μαγνητικού πεδίου. Στην πρώτη περίπτωση αν θέλουμε να κρατήσουμε το μέτρο του ηλεκτρικού πεδίου ίδιο θα πρέπει
$$E = \gamma(uB - E) \Rightarrow \frac{\gamma u/c}{\gamma + 1} = \frac{E}{Bc}$$

Στη δεύτερη περίπτωση αν θέλουμε να κρατήσουμε το μέτρο του μαγνητικού πεδίου ίδιο θα πρέπει

$$B = \gamma(uE/c^2 - B) \Rightarrow \frac{\gamma u/c}{\gamma + 1} = \frac{Bc}{E}$$

Η ταχύτητα λοιπόν πρέπει να είναι τέτοια ώστε να επαληθεύεται η παραπάνω σχέση μεταξύ γ και u. Όταν το ένα πεδίο αλλάζει φορά κρατώντας σταθερό μέτρο, το άλλο πεδίο γίνεται στην (i) περίπτωση

$$B' = \gamma(B - uE/c^2) = \gamma B \left(1 - \frac{u}{c}\frac{E}{Bc}\right) = \ldots = B.$$

Στην περίπτωση (ii)

$$E' = \gamma(E - uB) = \gamma E \left(1 - \frac{u}{c}\frac{Bc}{E}\right) = \ldots = E.$$

Το σύμπερασμα λοιπόν είναι ότι όταν καταφέρουμε να αναστρέψουμε το ένα πεδίο (αυτό που μπορούμε) το άλλο επανέρχεται στο αρχικό του μέγεθος. Αν είχαμε χρησιμοποιήσει τα αναλλοίωτα του Η/Μ πεδίου $\vec{E} \cdot \vec{B}$ και $B^2c^2 - E^2$ δεν θα μπορούσαμε να εξάγουμε συμπέρασμα περί της δυνατότητας αναστροφής και των δύο πεδίων αλλά θα καταλήγαμε στο συμπέρασμα που καταλήξαμε περί της αναστροφής του ενός μόνο πεδίου.