ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

Τμήμα Φυσικής

Εξετάσεις στη Θεωρία της Ειδικής Σχετικότητας

23 Μαρτίου 2015 (πτυχιακή περίοδος)

Αν θέλετε μπορείτε να επεξεργαστείτε όλα τα προβλήματα σε σύστημα μονάδων όπου η ταχύτητα του φωτός είναι $c = 1$. Τα δεδομένα όλων των προβλημάτων δίδονται σε αυτό το σύστημα μονάδων.

Θέμα Α:

1. Γράψτε από ένα συγκεκριμένο αριθμητικό παράδειγμα χρονοειδούς, χωροειδούς και φωτοειδούς τετρανύσματος.
2. Ένας παρατηρητής Σ_1 έχει τετραταχύτητα $(a, 0, 0, b)$ και ένας άλλος Σ_2 έχει τετραταχύτητα $(a, 0, 0, -b)$. Ποια η ταχύτητα του Σ_1 ως προς τον Σ_2; $(a, b > 0)$
3. Σε ένα σύστημα αναφοράς παρατηρούμε σε ένα χωροχρονικό σημείο ηλεκτρικό και μαγνητικό πεδίο $\mathbf{E} = 2\hat{\boldsymbol{x}}$ και $\mathbf{B} = \hat{\boldsymbol{x}} + \hat{\boldsymbol{y}}$. Ένας δεύτερος παρατηρητής μετράει στο ίδιο χωροχρονικό σημείο $\mathbf{E} = 2\hat{\boldsymbol{x}}$ και $\mathbf{B} = \hat{\boldsymbol{x}} - \hat{\boldsymbol{y}}$. Εξηγήστε γιατί είναι δυνατό κάτι τέτοιο. Μπορείτε να σκεφθείτε ένα απλό μετασχηματισμό Lorentz (χωρίς σχετική ταχύτητα) που να αλλάζει τα πεδία όπως παραπάνω;
4. Τι είδους τετράνυσμα είναι η τετραορμή ενός οποιουδήποτε σωματιδίου; Το άθροισμα 2 τετραορμών;

Θέμα Β: Ένα ακίνητο σωματίδιο μάζας m εξαΰλώνεται και στη θέση του εμφανίζονται τέσσερα φωτόνια που κινούνται ως εξής: (1) συχνότητας ν_1 κινούμενο προς το $\hat{\boldsymbol{x}}$, (2) συχνότητας ν_1 κινούμενο προς το $\hat{\boldsymbol{y}}$, (3) συχνότητας ν_2 κινούμενο προς το $-\hat{\boldsymbol{x}}$, (4) συχνότητας ν_2 κινούμενο προς το $-\hat{\boldsymbol{y}}$.

1. Υπολογίστε τις συχνότητες ν_1, ν_2.
2. Αν αρχικά το σωματίδιο κινούνταν στον άξονα-x θα μπορούσαμε να έχουμε τη δημιουργία (μετά την εξαΰλωση) τεσσάρων φωτονίων σαν αυτά που αναφέρονται στο προηγούμενο ερώτημα; Σε ποια διεύθυνση θα έπρεπε να κινείται το σωματίδιο για να έχουμε αυτά τα τέσσερα φωτόνια;
3. (Σχετικά με τα αποτελέσματα του 1ου ερωτήματος:) Τα τέσσερα φωτόνια αφού ανακλαστούν σε τέσσερα κάτοπτρα έτσι ώστε να κινούνται σε ανάποδες με τις αρχικές κατευθύνσεις, προσπίπτουν και τα τέσσερα ταυτόχρονα σε ένα νέο περαστικό σωματίδιο μάζας M που κινείται σε μια τυχαία κατεύθυνση $\hat{\boldsymbol{n}}$ με κινητική ενέργεια T. Τα φωτόνια καθώς και το σωματίδιο (μάζας M) καταστρέφονται και στη θέση τους δημιουργείται ένα νέο σωματίδιο μάζας μ. Να βρεθεί η μ με δεδομένα τα $m, M, T, \hat{\boldsymbol{n}}$.

Θέμα Γ: Το ηλεκτρικό και το μαγνητικό πεδιο σε ένα χωροχρονικό σημείο έχουν για κάποιον παρατηρητή την τιμή: $\mathbf{E} = E\hat{\boldsymbol{x}}$ και $\mathbf{B} = B\hat{\boldsymbol{y}}$ (με $E > B$).

1. Ένας δεύτερος παρατηρητής έχει τετραταχύτητα σε σχέση με τον αρχικό $(\gamma(v), 0, 0, v\gamma(v))$. Να σχεδιαστεί το μέτρο του ηλεκτρικού και του μαγνητικού πεδίου που μετρά ο 2ος παρατηρητής ως συνάρτηση του v.
2. Να βρεθεί ο λόγος (των μέτρων) του μαγνητικού προς το ηλεκτρικό πεδίο που μετρά ο 2ος παρατηρητής ως συνάρτηση του v.

3. Ποια είναι η τιμή της v που μηδενίζεται ο λόγος του ερωτήματος (2);
4. Αλλάζει η γωνία μεταξύ των πεδίων που μετρά ο 2ος παρατηρητής ως συνάρτηση του v;
5. Να κατασκευάστε τον τανυστή του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου στη μορφή F^{μ}_{ν} για τον πρώτο παρατηρητή.

Θέμα Δ: Στο σύστημα αναφοράς Σ ένα σωματίδιο κινείται πάνω στην κοσμική γραμμή που περιγράφεται από την παραμετρική μορφή:

$$t = \left(\frac{5}{4}\right)^2 \frac{\sinh(4g\tau/5)}{g}, \quad x = \frac{3}{4}\tau, \quad y = 0, \quad z = z_0 - \left(\frac{5}{4}\right)^2 \frac{\cosh(4g\tau/5) - 1}{g}$$

όπου η παράμετρος τ είναι ο ιδιόχρονος του σωματιδίου.

1. Επιβεβαιώστε ότι τ είναι πράγματι ο ιδιόχρονος του σωματιδίου, δηλαδή ότι $ds^2 = -d\tau^2$.
2. Υπολογίστε την τετραταχύτητα του σωματιδίου σε παραμετρική πάλι μορφή με παράμετρο το τ. Επιβεβαιώστε ότι το μέτρο της είναι αυτό που πρέπει και ότι $d\vec{x}/dt|_{\tau=0} = (3/5, 0, 0)$.
3. Υπολογίστε την τετραεπιτάχυνση του σωματιδίου και δείξτε ότι αυτή έχει σταθερό μέτρο g.
4. Έστω Α το γεγονός εκκίνησης του σωματιδίου (για $\tau = 0$) και Β το γεγονός που αφορά το πέρασμα του σωματιδίου από τον άξονα x (δηλαδή όταν $y = z = 0$). Γράψτε τις χωροχρονικές συντεταγμένες αυτών των δύο γεγονότων στο σύστημα Σ. [Αν θέλετε για ευκολία αντικαταστήστε την τιμή του $4g\tau/5$ όταν η κοσμική γραμμή διασχίζει τον άξονα x με μια παράμετρο ϕ_0.] Ποιες οι χωροχρονικές συντεταγμένες αυτών των δύο γεγονότων για ένα σύστημα αναφοράς Σ' που κινείται κατά τον τυποποιημένο τρόπο με ταχύτητα $(3/5)\hat{x}$ ως προς το Σ; Ποια η x-συνιστώσα του Β σε σχέση με του Α στο Σ';

Δίδονται οι τύποι μετασχηματισμού των πεδίων.

$$\mathbf{E}'_{\parallel} = \mathbf{E}_{\parallel}, \qquad \mathbf{E}'_{\perp} = \gamma(\mathbf{E}_{\perp} + \mathbf{u} \times \mathbf{B})$$
$$\mathbf{B}'_{\parallel} = \mathbf{B}_{\parallel}, \qquad \mathbf{B}'_{\perp} = \gamma(\mathbf{B}_{\perp} - \mathbf{u} \times \mathbf{E})$$

Να γραφούν και τα 4 θέματα. Καλή σας επιτυχία.

Λύσεις

Θέμα Α:

1.[(6) Για παράδειγμα

$$T^\mu = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \ , \ S^\mu = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \ , \ L^\mu = \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(T χρονοειδές, S χωροειδές, L φωτοειδές).

2.(6) Αφού $\boldsymbol{v}_1 = (b/a)\hat{\boldsymbol{z}}$ και $\boldsymbol{v}_2 = -(b/a)\hat{\boldsymbol{z}}$,

$$\boldsymbol{v}_{12} = \frac{2b/a}{1+(b/a)^2}\hat{\boldsymbol{z}} = \frac{2ba}{a^2+b^2}\hat{\boldsymbol{z}}$$

3.(7) Αφού οι ποσότητες των αναλλοιώτων $\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{B} = 2$, $\boldsymbol{E}^2 - \boldsymbol{B}^2 = 2$ παραμένουν αναλλοίωτες τα νέα αυτά πεδία θα μπορούσαν εν γένει να επιτευχθούν με κάποια αλλαγή αδρανειακού συστήματος αναφοράς. Στη συγκεκριμένη περίπτωση τα νέα αυτά πεδία θα μπορούσαν να επιτευχθούν με στροφή του άξονα y κατά π επί του επιπέδου $y - z$.

4.(6) Θα είναι χρονοειδές (ή φωτοειδές αν είναι άμαζο το σωματίδιο). Το ίδιο και για το άθροισμά τους.

Θέμα Β:

1.(6) Για να διατηρείται η ορμή στον x άξονα θα πρέπει $\nu_1 = \nu_2 = \nu$. Το ίδιο ισχύει και για τον x άξονα. Έτσι $4h\nu = m$.

2.(11) Λόγω της συμμετρίας το σωματίδιο θα έπρεπε να κινείται στη διαγώνιο των $x - y$. Τότε θα είχαμε $p_x = p_y = h(\nu_1 - \nu_2) = \gamma m u/\sqrt{2}$ και $\gamma m = 2h(\nu_1 + \nu_2)$.

Αν κάποιος θεώρησε την απάντηση του προηγούμενου ερωτήματος $\nu_1 = \nu_2 = \nu$ δοσμένη τότε δεν μπορεί να υπάρχει κινούμενο σωματίδιο.

(Δεν ζητείται:) Αν θέλουμε μπορούμε να υπολογίσουμε και τη σχέση που πρέπει να ικανοποιούν τα ν_1, ν_2 ώστε να πάρουμε τις παραπάνω σχέσεις. Αν το κάνουμε βρίσκουμε ότι δεν θα μπορούσαν τα ν_1, ν_2 να βρίσκονται σε οποιοαδήποτε αναλογία.

3.(8) Τα 4 ίδια φωτόνια χτυπούν το κινούμνο σωματίδιο ως ένα ακίνητο σωματίδιο με μάζα όση το αρχικό m. Έτσι

$$\begin{pmatrix} T + M + m \\ p\hat{\boldsymbol{n}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma\mu \\ \gamma\mu v\hat{\boldsymbol{n}} \end{pmatrix}$$

και υψώνοντας στο τετράγωνο

$$(T + M + m)^2 - p^2 = M^2 + m^2 + 2m(T + M) = \mu^2$$

δηλαδή

$$\mu = \sqrt{(M+m)^2 + 2mT}$$

Θέμα Γ:

1.(5)

$$\boldsymbol{E}' = \gamma E(1 - v(B/E))\hat{\boldsymbol{x}} \quad (1)$$
$$\boldsymbol{B}' = \gamma B(1 - v(E/B))\hat{\boldsymbol{y}} \quad (2)$$
$$(3)$$

Έτσι θέτοντας $v_0 = B/E < 1$

$$E'/E = \gamma(1 - vv_0)\ ,\ B'/B = \gamma(1 - v/v_0)$$

Το ένα είναι θετικό πάντα και τείνει στο $+\infty$ (αρχικά είναι ελαφρώς φίνουσα και παρουσιάζει ελάχιστο [δηλ $\sqrt{1 - v_0^2}$] στο $v = v_0$), ενώ το άλλο είναι συνεχώς φθίνουσα και τείνει στο $-\infty$ περνώντας από το 0 για $v = v_0$.

2,3.(5,5)

$$'/' = (\frac{v_0 - v}{1 - vv_0}$$

Είναι γνησίως φθίνουσα ξεκινώντας από το v_0 (για $v = 0$) και τείνοντας στο -1 (για $v \to 1$). Για $v = v_0$ μηδενίζεται ο λόγος τους.

4.(5) Το εσωτερικό τους γινόμενο , ως αναλλοίωτο, μένει πάντα 0.

5.(5)

$$F^{\mu}_{\ \nu} = F^{\mu\kappa}\eta_{\kappa\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E & 0 & 0 \\ E & 0 & 0 & -B \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Θέμα Δ:

1.(7)

$$ds^2 = -dt^2 + dx^2 + dz^2 = -(5/4)^4 \frac{\cosh^2\phi}{g^2}(4g/5)^2 d\tau^2 + (3/4)^2 d\tau^2 + (5/4)^4 \frac{\sinh^2\phi}{g^2}(4g/5)^2 d\tau^2 = -d\tau^2$$

όπου $\phi = 4g\tau/5$.

2.(6)

$$u^{\mu} = (5/4)\begin{pmatrix} \cosh\phi \\ 3/5 \\ 0 \\ -\sinh\phi \end{pmatrix}$$

που για $\tau = t = 0$ δίνει

$$u^{\mu} = \begin{pmatrix} 5/4 \\ 3/4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

που αντιστοιχεί σε ταχύτητα $\boldsymbol{v} = u^1/u^0\hat{\boldsymbol{x}} = (3/5)\hat{\boldsymbol{x}}$.

3.(5)

$$u^{\mu} = g\begin{pmatrix} \sinh\phi \\ 0 \\ 0 \\ -\cosh\phi \end{pmatrix}$$

με μέτρο $a^{\mu}a_{\mu} = -g^2$.

4.(7) Γεγονός A: $(0, 0, 0, z_0)$.
Γεγονός B: $((5/4)^2 \sinh \phi_0/g, 3\tau_0/4, 0, 0)$,
όπου $\phi_0 = 4g\tau_0/5$ είναι εκείνη η γωνία για την οποία $z = z_0$ δηλαδή $(4/5)^2 z_0 g = \cosh \phi_0 - 1$. Εκτελώντας μετασχηματισμούς Lorentz σε αυτά τα χωροχρονικά σημεία βρίσκουμε για το σύστημα Σ' συντεταγμένες: Γεγονός A: $(0, 0, 0, z_0)$.
Γεγονός B: $((5/4)^3 \sinh \phi_0/g - (3/4)^2\tau_0, -(3/4)(5/4)^2 \sinh \phi_0/g + (5/4)(3/4)\tau_0, 0, 0)$.
H x_B είναι εύκολο να δείξουμε ότι είναι αρνητική αφού

$$-\frac{5}{4g}\sinh \phi_0 + \tau_0 = \frac{\phi_0 - \sinh \phi_0}{4g/5},$$

($\sinh x > x$ για όλα τα θετικά x).