



# ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

## Τμήμα Φυσικής

### Εξετάσεις στη Θεωρία της Ειδικής Σχετικότητας

5 Ιουλίου 2012

Αν θέλετε μπορείτε να επεξεργαστείτε όλα τα προβλήματα σε σύστημα μονάδων όπου η ταχύτητα του φωτός είναι  $c = 1$ . Όλα τα δεδομένα των προβλημάτων δίδονται σε αυτό το σύστημα μονάδων.

**Θέμα Α:** Απαντήστε στα παρακάτω ερωτήματα και δικαιολογήστε την απάντησή σας.

1. Μπορεί η τετραταχύτητα ενός σωματιδίου να έχει σε κάποιο σύστημα συντεταγμένες  $u^\mu = (1, 1, 1, 1)^\top$ ; ( $A^\top$  είναι ο ανάστροφος του πίνακα  $A$ .)
2. Μπορεί η τετραεπιτάχυνση ενός σωματιδίου του οποίου η τετραταχύτητα είναι  $u^\mu = (6, 0, 3, 4)^\top$  να είναι  $a^\mu = (0, 1000, 0, 0)^\top$ ;
3. Πόση είναι η μάζα ενός σωματιδίου με τετραορμή  $p^\mu = (5, 0, -3, 4)^\top$ ;
4. Μπορεί η τετραορμή ενός σωματιδίου σε ένα σύστημα να είναι  $p^\mu = (13, 0, 3, 4)^\top$  και σε ένα άλλο  $p'^\mu = (13, 5, 0, 0)^\top$ ;
5. Μπορεί το άθροισμα δύο χωροειδών τετρανυσμάτων να είναι χρονοειδές; (Αν ναι δώστε παράδειγμα, αν όχι εξηγήστε γιατί.)

**Θέμα Β:** Σωματίδιο μάζας  $m$ , αρχικά ακίνητο στο σύστημα  $\Sigma$ , διασπάται αυθόρμητα εκπέμποντας ένα φωτόνιο ενέργειας  $E = 3m/8$ .

1. Πώς θα κινείται στο σύστημα  $\Sigma$  το νέο σωματίδιο που θα δημιουργηθεί σε σχέση με το εκπεμπόμενο φωτόνιο;
2. Ποια είναι η μάζα  $m'$  του νέου σωματιδίου (μετά την αυθόρμητη διάσπαση);
3. Στο σύστημα ηρεμίας του νέου σωματιδίου πραγματοποιείται πάλι μια αυθόρμητη διάσπαση σαν την πρώτη, όπου και πάλι εκπέμπεται ένα φωτόνιο ενέργειας  $E' = 3m'/8$  ( $m'$  είναι η μάζα του σωματιδίου που προέκυψε από την πρώτη αυθόρμητη διάσπαση). Μπορεί το νέο σωματίδιο που θα προκύψει να είναι ακίνητο στο σύστημα  $\Sigma$  που ήταν ακίνητο το αρχικό σωματίδιο;
4. Ποια θα είναι η ενέργεια του δεύτερου αυτού εκπεμπόμενου φωτονίου στο σύστημα  $\Sigma$  (στο σύστημα που το αρχικό σωματίδιο ήταν ακίνητο);

**Θέμα Γ:** Ένα φορτισμένο σωματίδιο με μάζα  $m$  και φορτίο  $q$  κινείται εντός του ομογενούς μαγνητικού πεδίου  $\mathbf{B} = B\hat{z}$  με αρχική ταχύτητα  $\mathbf{v}(0) = v_0\hat{x}$ . Αρχικά το σωματίδιο βρίσκεται στο σημείο  $(0, 0, 0)$ .

1. Υπολογίστε τη μορφή της τετραδύναμης που ασκείται στο σωματίδιο  $F^\mu = dp^\mu/d\tau$  εξαιτίας του μαγνητικού πεδίου.
2. Πώς θα κινείται το σωματίδιο κατά μήκος του άξονα  $z$ ;
3. Δείξτε ότι η τροχιά του σωματιδίου είναι κυκλική στο επίπεδο  $x - y$  και βρείτε το κέντρο του κύκλου αυτού.

4. Αν παρακολουθήσετε την τροχιά αυτή από ένα σύστημα που κινείται σε σχέση με το αρχικό με ταχύτητα  $\mathbf{V} = V\hat{y}$  τι μορφή θα έχει η τροχιά; Περιγράψτε την.
5. Στο νέο αυτό σύστημα υπολογίστε το ηλεκτρικό και το μαγνητικό πεδίο. Συνδυάστε τα αποτελέσματα των 2 τελευταίων ερωτημάτων για να εξηγήσετε πώς θα κινείται ένα σωματίδιο σε ένα συνδυασμένο ηλεκτρικό και μαγνητικό πεδίο (ορθογώνια μεταξύ τους) αν αρχικά το σωματίδιο κινείται κάθετα και στα δύο πεδία.

**Θέμα Δ:** Ένα φωτόνιο εκπέμπεται από το σημείο  $A$  το οποίο στο αδρανειακό σύστημα  $\Sigma$  έχει καρτεσιανές συντεταγμένες  $(R \cos \theta, R \sin \theta, 0)$  (δηλαδή βρίσκεται σε απόσταση  $R$  από την αρχή των αξόνων  $O$  και η  $OA$  σχηματίζει γωνία  $\theta$  με τον άξονα  $x$ ). Το φωτόνιο κινείται προς την αρχή των αξόνων  $O$  του  $\Sigma$  και έχει συχνότητα  $\nu$  στο  $\Sigma$ .

1. Ένας παρατηρητής κινείται ως προς το  $\Sigma$  με τον τυποποιημένο τρόπο (κατά μήκος του άξονα  $x$ ) με ταχύτητα  $u$  και μόλις φτάνει στο  $O$  συλλαμβάνει το φωτόνιο που τυχαίνει εκείνη τη στιγμή να καταφθάνει και αυτό στο  $O$ . Να βρεθεί η συχνότητα του φωτονίου όπως την αντιλαμβάνεται ο κινούμενος παρατηρητής. Πώς αλλάζει αυτή με τη γωνία  $\theta$ ;
2. Να βρεθεί η γωνία που φαίνεται στον κινούμενο παρατηρητή να σχηματίζει η διεύθυνση κίνησης του φωτονίου. Πόση πρέπει να είναι η γωνία  $\theta$  για να φαίνεται ότι το φωτόνιο κινείται στον άξονα  $y'$  του παρατηρητή;
3. Η Γη δέχεται από όλες τις κατευθύνσεις φωτόνια ίδιας συχνότητας  $\nu_0$ , τη λεγόμενη μικροκυματική ακτινοβολία υποβάθρου, η οποία όμως εξαιτίας της κίνησης της Γης στο Διάστημα δεν φαίνεται ακριβώς μονοχρωματική (διαφέρει ανάλογα με την κατεύθυνσή της). Δεδομένου ότι η ταχύτητα της Γης λόγω της κίνησής της γύρω από τον Ήλιο είναι  $u = 10^{-4}$  (σε μονάδες όπου  $c = 1$ ), ποιο αναμένετε να είναι το σχετικό εύρος των παρατηρούμενων συχνοτήτων  $\Delta\nu/\nu_0$ , όπου  $\nu_0$  η κοινή συχνότητα όλων των φωτονίων και  $\Delta\nu = \nu_{\max} - \nu_{\min}$  το εύρος των παρατηρούμενων συχνοτήτων στη Γη;
4. Δεδομένου ότι η μικροκυματική ακτινοβολία είναι ισοτροπική στο Σύμπαν (ίδια [ροή ακτινοβολίας=πλήθος φωτονίων ανά στερεά γωνία και δευτερόλεπτο] σε κάθε κατεύθυνση) ελέγξτε σε ποια κατεύθυνση η ροή της ακτινοβολίας φαίνεται να είναι πιο μεγάλη: στην κατεύθυνση την κίνησης της Γης, ή κάθετα σε αυτή; [Υπ: Η απειροστή στερεά γωνία είναι  $d\Omega = 2\pi \sin \theta d\theta$ . Επίσης για μικρές γωνίες ισχύει ότι  $\tan \theta \simeq \sin \theta \simeq \theta$ .]

Δίδονται οι τύποι μετασχηματισμού των ηλεκτρομαγνητικών πεδίων.

$$\begin{aligned} \mathbf{E}'_{\parallel} &= \mathbf{E}_{\parallel}, & \mathbf{E}'_{\perp} &= \gamma(\mathbf{E}_{\perp} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}) \\ \mathbf{B}'_{\parallel} &= \mathbf{B}_{\parallel}, & \mathbf{B}'_{\perp} &= \gamma(\mathbf{B}_{\perp} - \mathbf{u} \times \mathbf{E}) \end{aligned}$$

Να γραφούν και τα 4 θέματα. Καλή σας επιτυχία.