ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

Τμήμα Φυσικής

Εξετάσεις στη Θεωρία της Ειδικής Σχετικότητας
15 Ιουνίου 2011

Αν θέλετε, μπορείτε να επεξεργαστείτε όλα τα προβλήματα σε σύστημα μονάδων όπου η ταχύτητα του φωτός είναι $c = 1$. Όλα τα δεδομένα των προβλημάτων δίδονται σε αυτό το σύστημα μονάδων.

Θέμα Α: Στο αδρανειακό σύστημα Σ η κοσμική γραμμή ενός σωματιδίου μάζας m περιγράφεται από τις σχέσεις

$$t(\tau) = \sinh(\tau)\ ,\ x(\tau) = (\cosh(\tau) - 1)\ ,\ y(\tau) = z(\tau) = 0,$$

όπου τ παριστάνει τον ιδιόχρονο του σωματιδίου.

1. Να υπολογιστεί η τετραταχύτητα u^μ του σωματιδίου τη στιγμή $\tau = 1$.

2. Να υπολογιστεί η τετραεπιτάχυνση a^μ του σωματιδίου τη στιγμή $\tau = 1$.

3. Να υπολογιστεί το εσωτερικό γινόμενο $u^\mu a_\mu$ του σωματιδίου τη στιγμή $\tau = 1$.

4. Ένα δεύτερο, ακριβώς ίδιο με το πρώτο, σωματίδιο κινείται ακολουθώντας μια άλλη κοσμική γραμμή η οποία περιγράφεται από την ίδια παραμετρική εξίσωση με εκείνη του πρώτου, με μοναδική διαφορά ότι για το δεύτερο $x'(\tau') = (-\cosh(\tau') - 1 + 2\cosh(1))$. Να υπολογιστεί σε ποια χρονική στιγμή t του Σ θα γίνει η σύγκρουση των δύο σωματιδίων, σε ποιά θέση $\vec{x}$, και εάν μετά την εξαΰλωση των δύο συγκρουσθέντων σωματιδίων παραχθούν δύο φωτόνια ποια θα είναι η συχνότητα αυτών;

Θέμα Β: Θεωρήστε μια τριάδα γεγονότων A_1, A_2, A_3 για την οποία δίδεται ότι το A_i ($i = 2, 3$) βρίσκεται εντός του μελλοντικού κώνου φωτός με κορυφή το γεγονός A_{i-1} (αλλά **όχι** επάνω στον κώνο).

1. Δείξτε ότι το τετράνυσμα με αρχή το γεγονός A_1 και τέλος το A_3 είναι ένα χρονικό (δηλ. χρονοειδές) τετράνυσμα.

2. Ποια σχέση ανισότητας συνδέει το $\sqrt{-(A_1A_3)^2}$ με το $\sqrt{-(A_1A_2)^2} + \sqrt{-(A_2A_3)^2}$; (Ο κάθε όρος $(A_iA_j)^2$ είναι το τετράγωνο του αντίστοιχου τετρανύσματος.)

3. Πότε ισχύει η ισότητα στην παραπάνω σχέση και τι σημαίνει αυτό γεωμετρικά;

4. Αν σας δίδονται οι χωροχρονικές συντεταγμένες των A_1, A_2 σε κάποιο σύστημα Σ (π.χ. $t_1, \vec{x}_1$ για το A_1), βρείτε την ταχύτητα που θα πρέπει να έχει κάποιο σύστημα αναφοράς Σ' ως προς το Σ ώστε τα γεγονότα A_1, A_2 να συμβαίνουν με κάποια χρονική διαφορά αλλά στο ίδιο χωρικό σημείο. Είναι το Σ' μονοσήμαντα ορισμένο, δηλαδή υπάρχουν περισσότερα του ενός συστήματα αναφοράς Σ' ώστε τα A_1, A_2 να συμβαίνουν στο ίδιο χωρικό σημείο;

Θέμα Γ:

(α) Σωματίδιο Α μάζας m_A διασπάται αυθόρμητα στα σωματίδια Β και Γ μάζας m_B και μηδέν αντίστοιχα. Υπολογίστε την ενέργεια του σωματιδίου Γ στο ιδιοσύστημα του σωματιδίου Α. Υπολογίστε επίσης την ενέργεια του σωματίδιου Γ στο ιδιοσύστημα του σωματιδίου Β.

(β) Φωτόνιο συγκρούεται ελαστικά με σωματίδιο Α μάζας m το οποίο αρχικά ηρεμεί στο εργαστήριο. Εάν η συχνότητα του φωτονίου στο εργαστήριο πριν και μετά την κρούση είναι ν_1 και ν_2 αντίστοιχα, δείξτε ότι η γωνία σκέδασης θ του φωτονίου (δηλαδή η γωνία εκτροπής του φωτονίου από την αρχική του κατεύθυνση) στο εργαστήριο δίνεται από τη σχέση:

$$\frac{1}{\nu_2} = \frac{1}{\nu_1} + \frac{2}{m}\sin^2(\theta/2).$$

Θέμα Δ: Στο σύστημα κέντρου ορμής δύο ίδιων σωματιδίων (ίδια μάζας) το ηλεκτρικό και το μαγνητικό πεδίο είναι $\vec{E} = E\hat{x}$ και $\vec{B} = B\hat{y}$. Στα ιδιοσυστήματα των δύο σωματιδίων Σ_1, Σ_2, αντίστοιχα, τα μέτρα των ηλεκτρικών και μαγνητικών πεδίων είναι E_1, B_1, E_2, B_2.

1. Εάν τα δύο σωματίδια κινούνται κατά μήκος του x-άξονα, ποιός ο λόγος E_1/E_2 και B_1/B_2;

2. Εάν τα δύο σωματίδια κινούνται κατά μήκος του z-άξονα, ποιός ο λόγος E_1/E_2 και B_1/B_2;

3. Αν ο ένας από τους δύο παραπάνω λόγους (αυτούς του ερωτήματος 2) είναι 0 μπορεί να είναι και ο άλλος; Δικαιολογήστε την απάντησή σας με χρήση των αναλλοιώτων του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου.

4. Εξετάστε την περίπτωση $E = B$.

5. Αν τα δύο σωματίδια μάζας m προέκυψαν από αυθόρμητη διάσπαση ενός ακίνητου σωματιδίου μάζας $\frac{10}{3}m$, και στη συνέχεια κινήθηκαν επί του άξονα z ποια η σχέση των E, B εάν το ένα από τα δύο σωματίδια αισθάνεται καθαρό μαγνητικό πεδίο (μηδενικό ηλεκτρικό πεδίο);

Δίδονται οι τύποι μετασχηματισμού των πεδίων.

$$\begin{aligned} \mathbf{E'}_{\parallel} &= \mathbf{E}_{\parallel}, \qquad & \mathbf{E'}_{\perp} &= \gamma(\mathbf{E}_{\perp} + \mathbf{u}\times\mathbf{B}) \\ \mathbf{B'}_{\parallel} &= \mathbf{B}_{\parallel}, \qquad & \mathbf{B'}_{\perp} &= \gamma(\mathbf{B}_{\perp} - \mathbf{u}\times\mathbf{E}) \end{aligned}$$

Η γενική μορφή του τανυστή του ηλεκτρ/κού πεδίου είναι

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & B_z & -B_y \\ -E_y & -B_z & 0 & B_x \\ -E_z & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix}$$

Η γενική μορφή του μετασχηματισμού πρόώθησης Lorentz είναι

$$\begin{pmatrix} \gamma & -\gamma u^\top \\ -\gamma u & I + \frac{\gamma-1}{u^2}uu^\top \end{pmatrix}$$

Ισοδυνάμως η αλλαγή του χωρικού μέρους ενός τετρανύσματος είναι

$$\vec{x}\,' = \vec{x} + \frac{(\gamma-1)\vec{u}\cdot\vec{x}}{u^2}\vec{u} - \gamma\vec{u}t.$$

Να γραφούν και τα 4 θέματα. Καλή σας επιτυχία.

Θέμα Α:

1. Με απλές παραγωγίσεις και αντικατάσταση $\tau = 1$
$$u^\mu = \begin{pmatrix} \cosh(1) \\ \sinh(1) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

2. Με απλές παραγωγίσεις και αντικατάσταση $\tau = 1$
$$a^\mu = \begin{pmatrix} \sinh(1) \\ \cosh(1) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

3. $u^\mu a_\mu = -\cosh(1)\sinh(1) + \sinh(1)\cosh(1) = 0$ ως όφειλε.

4. Για να συγκρουστούν $t(\tau) = t'(\tau'), x(\tau) = x'(\tau')$. Από την πρώτη $\tau = \tau'$ και από τη δεύτερη $\tau = \tau' = 1$. Έτσι θα συγκρουστούν στο $x = \cosh(1) - 1$ την $t = \sinh(1)$. Λόγω συμμετρίας οι τετραορμές τους θα έχουν αντίθετη x-συνιστώσα και η συνολική τετραορμή θα είναι
$$p^\mu = 2m \begin{pmatrix} \cosh(1) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$
Τα δύο φωτόνια θα έχουν ίσες συχνότητες ώστε η συνολική 3-ορμή να είναι 0. Επομένως $2h\nu = 2m\cosh(1)$ δηλαδή $\nu = (m/h)\cosh(1)$.

Θέμα Β:

1. Το A_3 θα βρίσκεται εντός του κώνου φωτός του A_2 ο οποίος βρίσκεται εξ' ολοκλήρου εντός αυτού του A_1, επομένως το A_3 θα βρίσκεται εντός του κώνου φωτός του A_1. Synep;vw to $_{13}$ θα είναι χρονοειδές.

2. Έστω $t_{12} = t_2 - t_1, \vec{x}_{12} = \vec{x}_2 - \vec{x}_1, t_{23} = t_3 - t_2, \vec{x}_{23} = \vec{x}_3 - \vec{x}_2, t_{13} = t_3 - t_1, \vec{x}_{13} = \vec{x}_3 - \vec{x}_1$.
$$\begin{aligned} a &= \sqrt{-(A_1A_2)^2} = \sqrt{t_{12}^2 - \vec{x}_{12}^2} \\ b &= \sqrt{-(A_2A_3)^2} = \sqrt{t_{23}^2 - \vec{x}_{23}^2} \\ c &= \sqrt{-(A_1A_3)^2} = \sqrt{t_{13}^2 - \vec{x}_{13}^2}. \end{aligned} \tag{1}$$
Θα είναι
$$c = \sqrt{(t_{12} + t_{23})^2 - (\vec{x}_{12} + \vec{x}_{23})^2} = \sqrt{a^2 + b^2 + 2(t_{12}t_{23} - \vec{x}_{12} \cdot \vec{x}_{23})}.$$
Ο τελευταίος όρος μέσα στην παρένθεση είναι μεγαλύτερος ή ίσος με ab γιατί
$$\begin{aligned} (t_{12}t_{23} - (\vec{x}_{12} \cdot \vec{x}_{23}))^2 \geq (t_{12}^2 - \vec{x}_{12}^2)(t_{23}^2 - \vec{x}_{23}^2) \Leftrightarrow \\ -2t_{12}t_{23}(\vec{x}_{12} \cdot \vec{x}_{23}) + (\vec{x}_{12} \cdot \vec{x}_{23})^2 \geq (\vec{x}_{12}^2)(\vec{x}_{23}^2) - t12^2\vec{x}_{23}^2 - t_{23}^2\vec{x}_{12}^2 \end{aligned} \tag{2}$$
όπου η τελευταία ανισότητα γίνεται πιο καθαρή αν διαιρέσουμε και τα δύο μέλη με $(t_{12}t_{23})^2$ και κάνουμε την αντικατάσταση $\vec{x} = \vec{x}_{12}/t_{12}, \vec{y} = \vec{x}_{23}/t_{23}$. Τα δύο αυτά διανύσματα έχουν μέτρο μικρότερο

της μονάδας (αφού τα αντίστοιχα τετρανύσματα είναι χρονοειδή). Η παραπάνω ανισότητα παίρνει τη μορφή:

$$\begin{aligned} -2\vec{x}\cdot\vec{y}+(\vec{x}\cdot\vec{y})^2 &\geq \vec{x}^2\vec{y}^2-\vec{x}^2-\vec{y}^2 \\ |\vec{x}|^2+|\vec{y}|^2-2|\vec{x}||\vec{y}| &\geq |\vec{x}||\vec{y}|(-2+2\cos\theta+|\vec{x}||\vec{y}|(1-\cos^{\theta})). \end{aligned} \tag{3}$$

Το αριστερό μέλος είναι θετικό ενώ η έκφραση εντός της παρένθεσης στο δεξί μέλος είναι καθαρά αρνητική ή 0 αφού μπορεί να γραφεί

$$-4\sin^2(\theta/2)+4|\vec{x}||\vec{y}|\sin^2(\theta/2)\cos^2(\theta/2)=-4\sin^2(\theta/2)(1-|\vec{x}||\vec{y}|\cos^2(\theta/2))\leq 0.$$

Η ανισότητα θα μπορούσε να αναδειχθεί με ένα παράδειγμα 2 χρονοειδών τετρανυσμάτων.

3. Η ισότητα συμβαίνει όταν $\theta=0$ (δεξί μέλος 0) και $|\vec{x}|=|\vec{y}|$ αριστερό μέλος 0. Δηλαδή τα $\vec{x}_{12},\vec{x}_{23}$ ομοπαράλληλα διανύσματα και $\vec{x}_{12}/t_{12}=\vec{x}_{23}/t_{23}$, δηλαδή παράλληλα τετρανύσματα.

4. Για να είναι $\vec{x}'_{12}=0$ θα πρέπει

$$\vec{x}_{12}+\frac{\gamma-1}{u^2}(\vec{u}\cdot\vec{x}_{12})\vec{u}-\gamma\vec{u}t_{12}=0$$

Πολλαπλασιάζοντας τη σχέση αυτή με $\vec{u}$ παίρνουμε

$$\gamma(\vec{u}\cdot\vec{x}_{12}-u^2t_{12})=0,$$

δηλαδή $u=(\vec{u}\cdot\vec{x}_{12})/(ut_{12})$. Μια λύση είναι $\vec{u}=\vec{x}_{12}/t_{12}$. Αυτή είναι και η μοναδική λύση αφού αν υπήρχε και συνιστώσα της ταχύτητας κάθετη στο $\vec{x}_{12}$ η αρχική εξίσωση θα έπαιρνε τη μορφή

$$0=(\vec{x}_{12}+A\vec{u}_{\parallel})+A\vec{u}_{\perp}$$

δηλαδή ταυτόχρονα $A=0$ και $|A|=|\vec{x}_{12}|/|\vec{u}_{\parallel}|$ πράγμα άτοπο.

Θέμα Β:

(α)

$$\begin{aligned} p^\mu_A=p^\mu_B+p^\mu_\Gamma &\Rightarrow (p^\mu_A-p^\mu_\Gamma)^2=(p^\mu_B)^2\Rightarrow \\ &-m_A^2-2p^\mu_Ap_{\mu\Gamma}-0=-m_B^2, \end{aligned} \tag{4}$$

όμως το εσωτερικό γινόμενο $p^\mu_Ap_{\mu\Gamma}$ υπολογισμένο στο σύστημα του Α είναι $-m_AE^{(A)}_\Gamma$. Λύνοντας βρίσκουμε $E^{(A)}_\Gamma=\frac{m_A^2-m_B^2}{2m_A}$. Όμοια

$$(p^\mu_A)^2=(p^\mu_B+p^\mu_\Gamma)^2\Rightarrow -m_A^2=-m_B^2-0+2p^\mu_Bp_{\mu\Gamma}. \tag{5}$$

Το τελευταίο εσωτερικό γινόμενο στο σύστημα του Β είναι $-m_BE^{(B)}_\Gamma$ οπότε $E^{(B)}_\Gamma=\frac{m_A^2-m_B^2}{2m}$.

(β) Από διατήρηση τετραορμής

$$\begin{pmatrix} h\nu_1 \\ h\nu_1\hat{x}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} m \\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} h\nu_2 \\ h\nu_2\hat{n}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} E' \\ \vec{p}'\end{pmatrix}$$

όπου υποθέσαμε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι αρχικά το φωτόνιο κινείται στον x άξονα. Λύνοντας την παραπάνω ισότητα ως προς την τελευταία τετραορμή και υψώνοντας στο τετράγωνο παίρνουμε

$$\begin{aligned} -m^2-2h(\nu_1-\nu_2)m+2h^2\nu_1\nu_2(1-\hat{x}\cdot\hat{n}) &= -m^2\Rightarrow \\ \frac{1}{h\nu_2}-\frac{1}{h\nu_1}=\frac{1-\cos\theta}{m} &= \frac{2}{m}\sin^2(\theta/2) \end{aligned} \tag{6}$$

Θέμα Δ:

1. $\vec{E}_{1,2} = E\hat{x} \pm \gamma u B\hat{z}$, $B_{1,2} = \gamma B\hat{y}$. Επομένως

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{\sqrt{E^2 + (\gamma u B)^2}}{\sqrt{E^2 + (-\gamma u B)^2}} = 1 \ , \ \frac{B_1}{B_2} = \frac{\gamma B}{\gamma B} = 1$$

2. $\vec{E}_{1,2} = \gamma(E\hat{x} \mp uB\hat{x}$, $B_{1,2} = \gamma(B\hat{y} \mp uE\hat{y})$. Επομένως

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{\gamma(E - uB)}{\gamma(E + uB)} = \frac{E - uB}{E + uB} \ , \ \frac{B_1}{B_2} = \frac{\gamma(B - uE)}{\gamma(B + uE)} = \frac{B - uE}{B + uE}$$

3. Αν ας πούμε $E_1/E_2 = 0$ αυτό σημαίνει ότι $u = E/B$ και επομένως $E < B$. Αυτομάτως ο 2ος λόγος δεν μπορεί να μηδενίζεται αφού $E < B$ και $u < 1$. Η διατήρηση του αναλλοιώτου $B_1^2 - E_1^2 = B_2^2 - E_2^2 = B^2 - E_2$ είναι θετική αν σε κάποιο σύστημα μηδενίζεται το ηλεκτρικό πεδίο. Αν μηδενιζόταν και το μαγνητικό πεδίο θα ήταν αρνητική.

4. Στην περίπτωση $E = B$

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{1 - u}{1 + u} \ , \ \frac{B_1}{B_2} = \frac{1 - u}{1 + u}$$

δηλαδή οι 2 λόγοι συμπίπτουν.

5. Έχουμε ότι $10m/3 = 2\gamma m$ αφού θα κινηθούν με ίσες και αντίθετες ταχύτητες. Από εδώ βρίσκουμε $\gamma = 5/3$ δηλαδή $u = 4/5$. Επομένως το σωματίδιο που κινείται κατά μήκος του θετικού z μετράει $E_1 = 0 = \gamma(E - 4B/5)$ οπότε $E = 4B/5$.