ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

Τμήμα Φυσικής

Εξετάσεις στη Θεωρία της Ειδικής Σχετικότητας

Περίοδος Ιουνίου

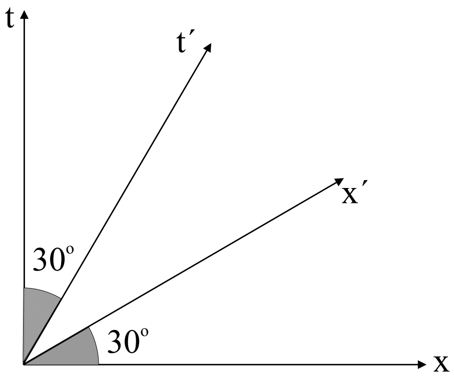
11 Ιουνίου 2009

Αν θέλετε μπορείτε να επεξεργαστείτε όλα τα προβλήματα σε σύστημα μονάδων όπου η ταχύτητα του φωτός είναι $c = 1$. Όλα τα δεδομένα των προβλημάτων δίδονται σε αυτό το σύστημα μονάδων.

Να λύσετε τα 4 από τα 5 θέματα.

Θέμα 1: Στο ακόλουθο σχήμα έχουν σχεδιαστεί τα χωροχρονικά διαγράμματα δύο αδρανειακών συστημάτων αναφοράς του Σ και του Σ' (το δεύτερο είναι αυτό με τους πλάγιους υπό γωνία άξονες).

(α) Να υπολογιστεί η ταχύτητα κίνησης του συστήματος Σ ως προς το Σ' και να γραφεί ο μετασχηματισμός Lorentz που συνδέει τα Σ και Σ'.



(β) Ένα όχημα ακολουθεί την κοσμική γραμμή που περιγράφεται από την εξίσωση: $x^2 - t^2 = 1$ σε συντεταγμένες του Σ. Υπολογίστε το τετράνυσμα της τετραταχύτητας του οχήματος σε κάθε χρονική στιγμή t.

(γ) Υπολογίστε το τετράνυσμα της τετραεπιτάχυνσης του οχήματος σε κάθε χρονική στιγμή t και δείξτε ότι αυτή έχει σταθερό μέτρο.

(δ) Βρείτε την εξίσωση της τροχιάς του οχήματος στο Σ'.

Θέμα 2:

(α) Κατασκευάστε ένα **μη** φωτοειδές ανταλλοίωτο τετράνυσμα A^μ με δύο από τις χωρικές συνιστώσες ίσες με μηδέν και βρείτε τι είδους τετράνυσμα είναι αυτό (χωροειδές ή χρονοειδές).

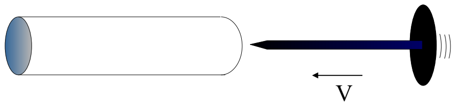
(β) Κατασκευάστε τώρα το συναλλοίωτο τετράνυσμα A_μ και υπολογίστε την ποσότητα $A^\mu A_\mu$.

(γ) Μπορείτε να βρείτε ένα μετασχηματισμό Lorentz που να καθιστά άλλη μια συνιστώσα του A^μ ίση με μηδέν; Κατασκευάστε τον πίνακα του μετασχηματισμού αυτού.

(δ) Κατασκευάστε τον τανυστή δεύτερης τάξης $C^{\mu\nu} = A^\mu A^\nu$ και υπολογίστε το $C^\mu{}_\mu$.

(ε) Ποια η μορφή του τανυστή $C^{\mu'\nu'}$ στο σύστημα αναφοράς που σχετίζεται με τον μετασχηματισμό Lorentz του ερωτήματος (γ);

Θέμα 3: Ένας κύλινδρος με μήκος L_0 έχει το ένα του άκρο (δεξιό) ανοικτό και το άλλο (αριστερό) κλεισμένο με χαρτόνι. Ένα καρφί με ιδιομήκος όσο και ο κύλινδρος κινείται με ταχύτητα V προς τον κύλινδρο όπως στο σχήμα. Το δεξί άκρο του καρφιού έχει διάμετρο μεγαλύτερη από αυτήν του κυλίνδρου έτσι ώστε να μην μπορεί να εισχωρήσει στον κύλινδρο.



(α) Πόσο είναι το μήκος του καρφιού στο σύστημα του κυλίνδρου; Στο σύστημα του κυλίνδρου, όταν το κεφάλι του καρφιού θα χτυπήσει στο άκρο του κυλίνδρου η μύτη του καρφιού θα έχει τρυπήσει το χαρτόνι;

(β) Πόσο είναι το μήκος του κυλίνδρου στο σύστημα του καρφιού; Στο σύστημα του καρφιού, όταν το κεφάλι του καρφιού θα χτυπήσει στο άκρο του κυλίνδρου η μύτη του καρφιού θα έχει τρυπήσει το χαρτόνι;

(γ) Δεδομένου ότι ο κύλινδρος είναι φτιαγμένος από πολύ σκληρό υλικό και έχει τεράστια μάζα ώστε να μην κινηθεί εξαιτίας του χτυπήματος, τελικά το χαρτόνι θα τρυπηθεί ή όχι;

(δ) Εξηγήστε που οφείλεται το φαινομενικά πράδοξο.

Θέμα 4: Δύο φωτόνια ίδιας συχνότητας ν, όταν συγκρούονται κινούμενα σε αντίθετες κατευθύνσεις στο εργαστήριο παράγουν δύο ίδια σωματίδια με μάζα m το καθένα.

(α) Πώς κινούνται τα σωματίδια αυτά;

(β) Ποια είναι η μέγιστη μάζα $m_{\max}$ του καθενός από αυτά και πώς κινούνται όταν έχουν τη μέγιστη δυνατή μάζα;

(γ) Όταν τα φωτόνια συγκρούονται στο εργαστήριο, όχι "μετωπικά" όπως προηγουμένως, αλλά έτσι ώστε οι κατευθύνσεις κίνησής τους να σχηματίζουν γωνία 2θ, ποια είναι η μέγιστη μάζα που μπορούν να έχουν τα δύο δημιουργούμενα σωματίδια και πώς κινούνται αυτά στο εργαστήριο τότε;

(δ) Τα δύο αντίθετα κινούμενα φωτόνια του ερωτήματος (α) τα παρατηρούμε από ένα σύστημα που κινείται στην κατεύθυνση κίνησης του ενός εκ των δύο με ταχύτητα $V = 3/5$. Στο σύστημα αυτό ποια είναι η μέγιστη μάζα των δύο ίδιων δημιουργούμενων σωματιδίων;

(ε) Συγκρίνατε την απάντησή σας με εκείνη του ερωτήματος (β) και σχολιάστε.

Θέμα 5: Σωματίδιο κινείται μέσα σε ένα αμιγώς ηλεκτρικό πεδίο της μορφής $\vec{E} = E\hat{x}$ και η ταχύτητά του αρχικά είναι $\vec{v}(0) = v_0\hat{y}$. Θυμίζουμε ότι η εξίσωση κίνησης ενός σωματιδίου μάζας m και φορτίου q μέσα σε ένα ηλεκτρομαγνητικό πεδίο είναι:

$$\frac{dp^\mu}{d\tau} = qF^{\mu\nu}u_\nu$$

όπου $F^{\mu\nu}$ είναι ο τανυστής του ηλ/κού πεδίου και u^μ η τετραταχύτητα του σωματιδίου.

(α) Γράψτε τις εξισώσεις κίνησης συνιστώσα-συνιστώσα χρησιμοποιώντας την κλασική μορφή της τετραορμής για ένα σωματίδιο με μάζα.

(β) Δείξτε ότι η κίνηση περιορίζεται στο επίπεδο $x - y$.

(γ) Η y-συνιστώσα της ταχύτητας του σωματιδίου είναι σταθερή; Τι είναι σταθερό αντί αυτής;

(δ) Επεξεργαστείτε κατάλληλα τις δύο διαφορικές εξισώσεις που διέπουν την 0- και την 1-συνιστώσα της p^μ ώστε να κατασκευάσετε μια διαφορική εξίσωση 2ης τάξης για την εξέλιξη του παράγοντα $\gamma(\tau)$ για το σωματίδιο. Λύστε την και μέσω αυτής υπολογίστε την εξέλιξη της u_y (από το ερώτημα (γ)).

(ε) Υπάρχει κάποια διαφορά όσον αφορά στην εξέλιξη της u_y από το αντίστοιχο πρόβλημα στη Νευτώνεια μηχανική;

Δίδονται η μορφή του τανυστή του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου:

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & B_z & -B_y \\ -E_y & -B_z & 0 & B_x \\ -E_z & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix}$$

Καλή επιτυχία

Λύσεις

Θέμα 1:

(α) $V = tan30^\circ = 1/sqrt3$. $\gamma(V) = \sqrt{3/2}$. ′Ετσι

$$L^\mu_\nu = \begin{pmatrix} \sqrt{3/2} & -\sqrt{1/2} & 0 & 0 \\ -\sqrt{1/2} & \sqrt{3/2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(β) $d\tau = \sqrt{dt^2 - dx^2} = dt\sqrt{1-(dx/dt)^2}$. Από την εξίσωση της τροχιάς $2xdx - 2tdt = 0 \Rightarrow dx/dt = t/x = t/\sqrt{1+t^2}$. Επομένως

$$\begin{aligned} u^0 = \frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{1-(t/\sqrt{1+t^2})^2}} &= \sqrt{1+t^2} \\ u^1 = \frac{dx}{d\tau} = \frac{(dx/dt)}{\sqrt{1+t^2}} &= t \\ u^2 = u^3 &= 0 \end{aligned} \tag{1}$$

(γ) Με άλλη μία παραγώγιση

$$\begin{aligned} a^0 = \frac{du^0}{d\tau} = \frac{d\sqrt{1+t^2}}{dt/\sqrt{1+t^2}} &= t \\ a^1 = \frac{du^1}{d\tau} = \frac{dt}{dt/\sqrt{1+t^2}} &= \sqrt{1+t^2} \\ a^2 = a^3 &= 0. \end{aligned} \tag{2}$$

Πράγματι $a^\mu a_\mu = -t^2 + (\sqrt{1+t^2})^2 = 1$.

(δ)

$$1 = (\gamma(V)(x' + Vt'))^2 - (\gamma(V)(t' + Vx'))^2 = x'^2 - t'^2$$

Θέμα 2:

(α)

$$A^\mu = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Πρόκειται για χωροειδές τετράνυσμα αφού $A^\mu A_\mu = -1^2 + 2^2 = 3 > 0$.

(β)

$$A_\mu = \eta_{\mu\nu} A^\nu = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$A^\mu A_\mu = 1 \times (-1) + 2 \times 2 = 3$.

(γ) Αρκεί η ταχύτητα να είναι 1/2 ($\gamma = 2/\sqrt{3}$). Έτσι

$$L^{\mu'}_{\ \nu} = \begin{pmatrix} \sqrt{4/3} & -\sqrt{1/3} & 0 & 0 \\ -\sqrt{1/3} & \sqrt{4/3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Είναι

$$A^{\mu'} = L^{\mu'}_{\ \nu} A^{\nu} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{3} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(δ)

$$C^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} A^0A^0 & A^0A^1 & ... & ... \\ A^1A^0 & ... & ... & ... \\ ... & ... & ... & ... \\ ... & ... & ... & ... \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Είναι $C^{\mu}_{\nu} = C^{\mu\kappa}\eta_{\kappa\nu}$ οπότε

$$C^{\mu}_{\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Οπότε $C^{\mu}_{\mu} = -1 + 4 + 0 + 0 = 3$. Το ίχνος είναι αναλλοίωτο σε μετασχηματισμούς Lorentz όπως φαίνεται στο ακόλουθο ερώτημα.

(ε) Ο ένας τρόπος υπολογισμού είναι να εκτελέσουμε το γινόμενο πινάκων $LCL^{\top}$, όμως θα μπορούσαμε να υπολογίσουμε απλώς το γινόμενο του μετασχηματισμένου $A^{\mu'}$ με τον εαυτό του:

$$C^{\mu'\nu'} = A^{\mu'}A^{\nu'} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Θέμα 3:

(α) Στο σύστημα του κυλίνδρου το καρφί είναι συσταλμένο κατά γ

$$L^{(\text{κυ})}_{\text{κα}} = L_0/\gamma$$

Έτσι τη χρονική στιγμή (στο σύστημα του κυλίνδρου) που το κεφάλι του καρφιού θα "κολλήσει" στο άκρο του κυλίνδρου η μύτη του θα απέχει κατά $L_0(1 - 1/\gamma)$ από το χαρτόνι.

(β) Στο σύστημα του καρφιού ο κύλινδρος είναι συσταλμένος κατά γ (ίδιο με προηγουμένως αφού η σχετική ταχύτητα είναι ίδια κατά μέτρο)

$$L^{(\text{κα})}_{\text{κυ}} = L_0/\gamma$$

Έτσι τη χρονική στιγμή (στο σύστημα του κυλίνδρου) που το κεφάλι του καρφιού θα "κολλήσει" στο άκρο του κυλίνδρου η μύτη του θα έχει ήδη τρυπήσει το χαρτόνι και θα εξέχει από τον κύλινδρο.

(γ) Δεν είναι δυνατό να έχουμε διαφορετικά αποτελέσματα σε δύο διαφορετικά συστήματα. Το χαρτόνι σίγουρα θα τρυπηθεί αφού τρυπιέται σε ένα σύστημα και δεν υπάρχει κανένας φυσικός λόγος για να αποφευχθεί αυτό.

(δ) Στο σύστημα του κυλίνδρου θα τρυπηθεί για τον ακόλουθο λόγο. Μόλις το κεφάλι κολλήσει η μύτη θα συνεχίσει να κινείται αφού δεν έχει προλάβει να πάρει το μύνημα ότι κόλλησε το κεφάλι. Έτσι το καρφί θα αρχίσει να τεντώνεται (δεν υπάρχουν στερεά σώματα στη σχετικότητα). Μέχρι να έρθει η πληροφορία για το ότι σταμάτησε το κεφάλι η μύτη θα έχει τρυπήσει το χαρτόνι και σε αυτό το σύστημα.

Θέμα 4:

(α) Η συνολική τετραορμή των δύο φωτονίων είναι

$$P^\mu = h\nu \begin{pmatrix} 2 \\ \vec{0} \end{pmatrix}$$

Επομένως για να είναι η ολική 3-ορμή των δύο ίδιων σωματίων 0, θα πρέπει τα δύο σωματίδια να κινούνται με ίσες και αντίθετες ταχύτητες.

(β)

$$P^\mu = \begin{pmatrix} 2m\gamma \\ \vec{0} \end{pmatrix}$$

συνεπώς $h\nu = m\gamma$. Για να είναι $m = m_{\max}$ θα πρέπει $\gamma = \gamma_{\min} = 1$, οπότε $m_{\max} = h\nu$.

(γ) Τώρα

$$P^\mu = h\nu \begin{pmatrix} 2 \\ 2\cos\theta \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

όπου θεωρήσαμε ως x-άξονα αυτόν της διχοτόμου μεταξύ των δύο κατευθύνσεων των φωτονίων. Η τετραορμή των δύο ίδιων σωματιδίων μετά είναι τώρα

$$P^\mu = \begin{pmatrix} E_1 + E_2 \\ \vec{p}_1 + \vec{p}_2 \end{pmatrix}$$

και $P^m u P_\mu = 4h^2\nu^2(-1+\cos^2\theta) = -(2h\nu\sin\theta)^2$. Η ίδια υπολογιζόμενη μέσω των σωματιδίων στο σύστημα ΚΟ είναι $P^\mu P_\mu = (E_1^{(CM)} + E_2^{(CM)})^2 \geq (2m)^2$. Έτσι η μεγαλύτερη μάζα αυτών είναι (από την ισότητα της ανισοϊσότητας) $m_{\max} = h\nu\sin\theta$.

(δ,ε) Τα αποτελέσματα δεν αλλάζουν αλλάζοντας σύστημα αναφοράς. Τα μέτρα των τετραορμών είναι αναλλοίωτα σε μετασχηματισμούς Lorentz.

Θέμα 5:

(α)

$$\begin{aligned} \frac{d(m\gamma)}{d\tau} &= qF^{0i}u_i = qE\gamma u_x \\ \frac{d(m\gamma u_x)}{d\tau} &= qF^{1\mu}u_\mu = q(-E)(-\gamma) = qE\gamma \\ \frac{d(m\gamma u_y)}{d\tau} &= qF^{2\mu}u_\mu = 0 \\ \frac{d(m\gamma u_z)}{d\tau} &= qF^{3\mu}u_\mu = 0 \end{aligned}$$

(β) Από την τελευταία $\gamma u_z =$ σταθερό $= 0$ από τις αρχικές συνθήκες. Οπότε zόôταθερό (σταθερό $x - y$ επίπεδο).

(γ) Από την προτελευταία $\gamma u_y =$ σταθερό $= v_0/\sqrt{1-v_0^2}$ από τις αρχικές συνθήκες.

(δ) Από τις δύο πρώτες, αν παραγωγίσουμε άλλη μια φορά την πρώτη

$$\frac{d}{d\tau}\frac{d(m\gamma)}{d\tau} = qE\frac{d(\gamma u_x)}{d\tau} = \frac{(qE)^2}{m}\gamma$$

δηλαδή

$$\frac{d^2\gamma}{d\tau^2} = \left(\frac{qE}{m}\right)^2\gamma$$

με λύση $\gamma(\tau) = a\cosh(\frac{qE\tau}{m}) + b\sinh(\frac{qE\tau}{m})$. Δεδομένου ότι $\gamma(0) = \gamma_0 = (1-v_0^2)^{-1/2}$ και $d\gamma/d\tau|_{\tau=0} = 0$ (βλέπε την πρώτη εξίσωση $(u_x(0) = 0)$ $\gamma = \gamma_0\cosh(\frac{qE\tau}{m})$. Από τη σχέση αυτή και τη σταθερότητα του γu_y έχουμε $u_y = v_0/\cosh(\frac{qE\tau}{m})$.

(ε) Στο νευτώνειο αντίστοιχο πρόβλημα η y συνιστώσα της ταχύτητας δεν μεταβάλλεται, ενώ εδώ μηδενίζεται με την πάροδο του χρόνου παραμονής στο ηλεκτρικό πεδίο.