ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

Τμήμα Φυσικής

Εξετάσεις στη Θεωρία της Ειδικής Σχετικότητας

Περίοδος Ιουνίου

18 Ιουνίου 2008

Να λυθούν τα τέσσερα από τα πέντε θέματα. Σε όλα τα θέματα έχει θεωρηθεί $c = 1$.

Θέμα 1: Ίδια σωματίδια μάζας m ηρεμούν παραταγμένα κατά μήκος μιας ευθείας και σε απόσταση L το καθένα από το επόμενό του. Κάποια χρονική στιγμή το ακριανό σωματίδιο (το 0) αρχίζει να κινείται προς το διπλανό του (το 1) κατά μήκος της ευθείας με ταχύτητα v. Κατά την κρούση τα σωματίδια συσσωματώνονται και κινούνται ως ένα καινούργιο σωματίδιο προς το επόμενο σωματίδιο (το 2). Η διαδικασία αυτή συνεχίζεται διαρκώς και μετά από κάθε κρούση δημιουργείται και ένα νέο συσσωμάτωμα.

(α) Βρείτε την ταχύτητα του συσσωματώματος μετά την n-οστή κρούση σύμφωνα με τη Νευτώνεια Μηχανική.

(β) Βρείτε την ταχύτητα του συσσωματώματος μετά την n-οστή κρούση στην Ειδική Σχετικότητα. [Προσέξτε, σχετικιστικά δεν διατηρείται η συνολική μάζα ηρεμίας.]

(γ) Μετά από πόσο χρόνο για τον παρατηρητή που παρατηρεί τη σειρά των αρχικά ακίνητων σωματιδίων θα γίνει η n-οστή κρούση; [Δίδεται η ταυτότητα $1 + 2 + \ldots + (n-1) = n(n-1)/2$.]

(δ) Υπολογίστε τη μάζα ηρεμίας του συσσωματώματος που δημιουργείται μετά τη n-οστή κρούση.

(ε) Εάν ο σχετικιστικός παράγοντας γ του αρχικού βλήματος είναι $\gamma = 11$, μετά από πόσες κρούσεις η κινητική ενέργεια του συσσωματώματος θα έχει μειωθεί στο $1/10$ της αρχικής κινητικής ενέργειας του πρώτου βλήματος;

Θέμα 2: Ακίνητο σωματίδιο μάζας M διασπάται αυθόρμητα σε δύο σωματίδια με μάζες m_1 και m_2 αντίστοιχα.

(α) Ελέγξτε εάν είναι δυνατόν το άθροισμα των μαζών ηρεμίας των προϊόντων $m_1 + m_2$ να είναι μεγαλύτερο από τη μάζα M.

(β) Υπολογίστε την κινητική ενέργεια του σωματιδίου m_1.

(γ) Εάν οι μάζες των σωματιδίων είναι $m_1 = m_2 = M/k$, πόσο χρόνο χρειάζεται το σωματίδιο 2, σύμφωνα με το σωματίδιο 1, για να απομακρυνθεί σε απόσταση L από το 1;

(δ) Δικαιολογήστε το προηγούμενο αποτέλεσμά σας στις περιπτώσεις $k \to 2$ και $k \to \infty$.

Θέμα 3: Το γεγονός Β βρίσκεται εντός του μελλοντικού κώνου φωτός του γεγονότος Α.

(α) Ισχύει η παραπάνω πρόταση για κάθε παρατηρητή;

(β) Μπορεί σε κάποιο σύστημα αναφοράς να ανατραπεί η χρονική σειρά των δύο γεγονότων; Εξηγήστε.

(γ) Πώς κινείται ο αδρανειακός παρατηρητής ο οποίος μετράει τη μέγιστη δυνατή χρονική απόσταση μεταξύ των δύο γεγονότων; [Αν σας διευκολύνει θεωρήστε γνωστές τις χωροχρονικές συντεταγμένες των δύο γεγονότων σε κάποιο αρχικό αδρανειακό σύστημα (t_A, x_A, y_A, z_A) και (t_B, x_B, y_B, z_B).]

(δ) Υποθέστε ότι το γεγονός Α αφορά κάποια έκρηξη στο Διάστημα (όπου όλες οι βαρυτικές δυνάμεις θεωρούνται αμελητέες), κατά την οποία δημιουργείται πληθώρα θραυσμάτων που κινούνται προς όλες τις κατευθύνσεις και με διαφορετικές ταχύτητες. Όλα τα θραύσματα που δημιουργούνται αυτοεκρήγνυνται μετά από συγκεκριμένο χρόνο τ (ίδιο για όλα τα θραύσματα), όπως αυτός μετριέται στο σύστημα του εκάστοτε θραύσματος. Μπορεί κάθε τέτοια αυτοέκρηξη να θεωρηθεί ως κάποιο γεγονός Β εντός του μελλοντικού κώνου φωτός του Α; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

(ε) Στο σύστημα για το οποίο είναι ακίνητο το σώμα της πρώτης έκρηξης, θα αυτοεκραγούν πρώτα τα κοντινότερα ή τα μακρινότερα θραύσματα;

(στ) Παρατηρώντας τις εκλάμψεις των αυτοεκρήξεων των θραυσμάτων από τη θέση της πρώτης έκρηξης μπορείτε να προσδιορίσετε πόσο μακριά συνέβη καθεμία από αυτές;

Θέμα 4: Σε κάποιο ΣΚΦ Σ δυό φωτόνια ίδιας συχνότητας ν κινούνται κατά μήκος των κατευθύνσεων $-\hat{x}$ και $-\hat{y}$ αντίστοιχα. Ένας παρατηρητής Σ' κινείται κατά τον τυποποιημένο τρόπο ως προς το Σ κατά μήκος του κοινού άξονα x με ταχύτητα v.

(α) Υπολογίστε την ενέργεια των δύο φωτονίων στο Σ'.

(β) Υπολογίστε τη γωνία που φαίνονται να σχηματίζουν οι κατευθύνσεις των δύο φωτονίων με τους άξονες στο Σ'.

(γ) Ποια η ταχύτητα του κέντρου ορμής των δύο φωτονίων ως προς το Σ;

(δ) Ποια η ενέργεια των δύο φωτονίων στο σύστημα του κέντρου ορμής;

Δίδεται ο πίνακας του γενικού μετασχηματισμού Lorentz

$$\begin{pmatrix} \gamma & -\gamma \mathbf{v}^\top \\ -\gamma \mathbf{v} & \mathbf{I} + \frac{\gamma-1}{v^2}\mathbf{v}\mathbf{v}^\top \end{pmatrix}$$

όπου $\mathbf{v}^\top = (v_x, v_y, v_z)$.

Θέμα 5: Σε ένα ΣΚΦ Σ μετριέται το ηλεκτρικό πεδίο τη χρονική στιγμή $t = 1$ στη θέση $(x = 2, y = 3, z = 4)$ και βρίσκεται να είναι $\vec{E} = (0, \mathcal{E}, 0)$, ενώ το μαγνητικό πεδίο είναι μηδενικό. Ένα δεύτερο ΣΚΦ Σ', το οποίο κινείται κατά τον τυποποιημένο τρόπο ως προς το πρώτο κατά μήκος του κοινού άξονα x, μετράει τις ακόλουθες συντεταγμένες για το ίδιο γεγονός καταμέτρησης των ηλεκτρομαγνητικών πεδίων: $(t' = -1/4, x' = 7/4, y' = 3, z' = 4)$.

(α) Υπολογίστε την ταχύτητα κίνησης του Σ' ως προς το Σ.

(β) Υπολογίστε το ηλεκτρικό και το μαγνητικό πεδίο που μετρά ο Σ' στο εν λόγω γεγονός.

(γ) Επιβεβαιώστε ότι τα ηλεκτρομαγνητικά πεδία που μετρά ο Σ' είναι συμβατά με αυτά του Σ, στηριζόμενοι στις αναλλοίωτες ποσότητες του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου.

Δίδονται ο τανυστής του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & B_z & -B_y \\ -E_y & -B_z & 0 & B_x \\ -E_z & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix}$$

και οι εξισώσεις μετασχηματισμού των πεδίων

$$\begin{aligned} \mathbf{E}'_{||} &= \mathbf{E}_{||}, & \mathbf{E}'_{\perp} &= \gamma(\mathbf{E}_{\perp} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}) \\ \mathbf{B}'_{||} &= \mathbf{B}_{||}, & \mathbf{B}'_{\perp} &= \gamma(\mathbf{B}_{\perp} - \mathbf{u} \times \mathbf{E}). \end{aligned}$$

Καλή σας επιτυχία.

Λύσεις

Θέμα 1:

(α) Από διατήρηση ορμής

$$mv = 2mv_1 = 3mv_2 = \ldots$$

Επομένως $v_n = \frac{v}{n+1}$.

(β) Από διατήρηση τετραορμής

$$\begin{pmatrix} \gamma m + nm \\ \gamma m v \hat{n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Gamma_n M_n \\ \Gamma_n M_n V_n \hat{n} \end{pmatrix} \tag{1}$$

όπου $\gamma = 1/\sqrt{1-v^2}$, ο δείκτης $_n$ ανεφέρεται στα μετά τη n-οστή κρούση και το μοναδιαίο $\hat{n}$ δηλώνει την κατεύθυνση στην οποία γίνονται όλες οι κινήσεις. Έτσι διαιρώντας χωρικό προς χρονικό μέρος της τετραορμής βρίσκουμε

$$V_n = \frac{\gamma v}{\gamma + n}$$

(γ) Ο χρόνος που μεσολαβεί μεταξύ της $j-1$ και της j κρούσης θα είναι

$$\Delta t_j = L/v_{j-1} = \frac{L}{v}(1 + \frac{j-1}{\gamma})$$

ενώ ο πρώτος χρόνος μέχρι την πρώτη κρούση είναι $\Delta t_1 = L/v$. Επομένως ο συνολικός χρόνος για να συμβούν n κρούσεις είναι

$$t_n = \Delta t_1 + \Delta t_2 + \ldots + \Delta t_n = \frac{L}{v}[1 + (1+1/\gamma) + (1+2/\gamma) + \ldots + (1+(n-1)/\gamma)] = \frac{L}{v}[n + \frac{n(n-1)}{2\gamma}]$$

(δ) Υψώνοντας τη συνολική τετραορμή μετά από n κρούσεις στο τετράγωνο έχουμε

$$M_n^2 = m^2[(n+\gamma)^2 - \gamma^2 v^2] = m^2[n^2 + 1 + 2\gamma n]$$

(ε) Η αρχική κινητική ενέργεια είναι $T_0 = m(\gamma - 1) = 10m$. Μετά από n κρούσεις θα είναι $T_n = M_n(\Gamma_n - 1) = m(\gamma + n) - m\sqrt{n^2 + 1 + 2\gamma n} = m(11 + n - \sqrt{n^2 + 1 + 22n})$. Για να είναι η τελευταία το 1/10 της πρώτης θα πρέπει

$$11 + n - \sqrt{n^2 + 1 + 22n} = \frac{10}{10} = 1 \Rightarrow \ldots \Rightarrow n = \frac{99}{2}$$

Επομένως μετά από 50 κρούσεις θα έχει πέσει η ενέργεια κάτω από το 1/10 της αρχικής.

Θέμα 2:

(α) Όχι δεν είναι δυνατό διότι $M = E_1 + E_2 \geq m_1 + m_2$.

(β) Από αρχή διατήρησης τετραορμής

$$\begin{pmatrix} M - E_1 \\ \vec{0} - \vec{p}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_2 \\ \vec{p}_2 \end{pmatrix} \tag{2}$$

και υψώνοντας στο τετράγωνο $(M - E_1)^2 - \vec{p}_1^2 = m_2^2$, οπότε $m_2^2 = M^2 + (E_1^2 - \vec{p}_1^2) - 2ME_1 = M^2 + m_1^2 - 2ME_1$. Λύνοντας βρίσκουμε

$$T_1 = E_1 - m_1 = \frac{M^2 + m_1^2 - m_2^2}{2M} - m_1 = \frac{(M - m_1)^2 - m_2^2}{2M}.$$

(γ) Πρέπει να μεταβούμε στο σύστημα ηρεμίας του m_1. Επομένως πρέπει να εκτελέσουμε ένα μετασχηματισμό Lorentz με την ταχύτητα του 1. Από τα παραπάνω

$$E_1 = \frac{M^2}{2M} = \frac{M}{2} \Rightarrow \gamma_1 = \frac{M/2}{M/k} = \frac{k}{2} \Rightarrow v_1 = \sqrt{1 - \frac{4}{k^2}}.$$

Λόγω ισότητας των δύο προϊόντων $E_1 = E_2$ και $\vec{p}_1 = -\vec{p}_2$. Οπότε η τετραορμή του 2 στο αρχικό σύστημα είναι

$$p_2^\mu = \begin{pmatrix} M/2 \\ \sqrt{M^2/4 - M^2/k^2}(-\hat{x}) \end{pmatrix}$$

όπου $\hat{x}$ είναι η κατεύθυνση κίνησης του 1, την οποία έχουμε θεωρήσει ότι συμπίπτει με τον x-άξονα, ώστε ο μετασχηματισμός Lorentz να έχει απλούστερη μορφή. Έτσι εκτελώντας τον μετασχηματισμό έχουμε

$$p_2^\mu|_{(S_1)} = \begin{pmatrix} k/2 & -(k/2)\sqrt{1-4/k^2} \\ -(k/2)\sqrt{1-4/k^2} & k/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M/2 \\ -\sqrt{M^2/4 - M^2/k^2} \end{pmatrix} = \frac{Mk}{4} \begin{pmatrix} 1 + \sqrt{1-4/k^2}^2 \\ -2\sqrt{1-4/k^2} \end{pmatrix} \qquad (3)$$

Επομένως η ταχύτητα του 2 σε αυτό το σύστημα είναι $-2\sqrt{1-4/k^2}/(2-4/k^2)$ και ο χρόνος απομάκρυνσης σε απόσταση L είναι $t = L/|v| = L(1-2/k^2)/\sqrt{1-4/k^2}$.

(δ) Για $k \to 2$, $t \to \infty$ ενώ για $k \to \infty$ $t \to L$. Τα αποτελέσματα αυτά είναι αναμενόμενα αφού αν $m_1 = m_2 = M/2$ τα προϊόντα δημιουργούνται ακίνητα οπότε δεν απομακρύνονται μεταξύ τους, ενώ αν $m_1 = m_2 \cong 0$ πρόκειται για σωμάτια που κινούνται περίπου με την ταχύτητα του φωτός, οπότε για το καθένα το άλλο φαίνεται περίπου ως φωτόνιο και άρα χρειάζεται τόσο χρόνο να καλύψει μια απόσταση όσο η απόσταση αυτή.

Θέμα 3:

(α) Τα δύο γεγονότα συνδέονται χρονοειδώς και αυτό δεν αλλάζει με το σύστημα αναφοράς.

(β) Όχι. Αν υπήρχε, θα υπήρχε κάποια ταχύτητα όπου η χρονική διαφορά θα γινόταν μηδενική αλλά για χρονοειδή τετρανύσματα $\Delta t^2 - \Delta\vec{x}^2 > 0$ οπότε άτοπο.

(γ) $\Delta t^2 - \Delta\vec{x}^2 = \Delta t'^2 - \Delta\vec{x}'^2$. ΠΡΟΣΟΧΗ ΕΔΩ ΥΠΑΡΧΕΙ ΛΑΘΟΣ ΣΤΗΝ ΕΚΦΩΝΗΣΗ. ΘΑ ΕΠΡΕΠΕ ΝΑ ΖΗΤΕΙΤΑΙ Ο ΕΛΑΧΙΣΤΟΣ ΧΡΟΝΟΣ. Για να είναι $\Delta t' = \min$ θα πρέπει $\Delta\vec{x}' = 0$ δηλαδή στο συγκεκριμένο σύστημα θα πρέπει τα γεγονότα να συμβούν στην ίδια θέση, επομένως το ζητούμενο σύστημα είναι το ιδιοσύστημα του σωματιδίου στη ζωή του οποίου συμβαίνουν τα δύο γεγονότα. Επομένως ο εν λόγω παρατηρητής κινείται στο αρχικό σύστημα με ταχύτητα $\vec{v} = \Delta\vec{x}/\Delta t$.

Αν το ερώτημα ήταν για ποιο σύστημα ή χρονική απόσταση μεταξύ των δύο γεγονότων είναι μεγαλύτερη η απάντηση είναι ότι δεδομένου του αναλλοιώτου χωροχρονικού μήκους

$$\Delta t^2 - \Delta\vec{x}^2 = \Delta t'^2 - \Delta\vec{x}'^2$$

το $\Delta t'$ μπορεί να γίνει οσοδήποτε μεγάλο και επειδή

$$\Delta t' = \gamma(\Delta t - \vec{v} \cdot \Delta\vec{x})$$

το $\Delta t'$ τείνει στο άπειρο όταν το γ τείνει στο άπειρο δηλαδή για ταχύτητα κίνησης που προσεγγίζει την ταχύτητα του φωτός (ανεξαρτήτως μάλιστα της διεύθυνσης).

(δ) Ναι μπορεί να θεωρηθεί αφού η δημιουργία και η αυτοέκρηξη του κάθε θραύσματος αποτελούν διαδοχικά γεγονότα στη ζωή του θραύσματος.

(ε) Αφού $\tau^2 = \Delta t^2 - \Delta \vec{x}^2$ όσο μικρότερο είναι το $|\Delta \vec{x}|$ τόσο μικρότερο είναι και το Δt, επομένως τα κοντινότερα θα εκραγούν πρώτα.

(στ) Η καταγραφή της εκάστοτε έκλαμψης θα συμβεί $= \Delta t + |\Delta \vec{x}|$ αφού χρειάζεται χρόνο $|\Delta \vec{x}|$ για να φτάσει το φως στην θέση της αρχικής έκρηξης. Επομένως για να βρει κανείς πόσο μακριά $r = |\Delta \vec{x}|$ έγινε κάποια έκρηξη πρέπει να λύσει την εξίσωση $T = r + \sqrt{\tau^2 + r^2}$ δηλαδή

$$r = \frac{T^2 - \tau^2}{2T}$$

και πάλι ισχύει ότι όσο πιο αργά φτάσει η λάμψη τόσο πιο μακριά συνέβη (η παραπάνω συνάρτηση είναι αύξουσα συνάρτηση του T.

Θέμα 4:

(α) Εκτελώντας ένα τυποποιημένο μετασχηματισμό Lorentz στις δύο τετραορμές έχουμε

$$\begin{pmatrix} \gamma & -\gamma v & 0 & 0 \\ -\gamma v & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} h\nu \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = h\nu\gamma(1-v) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

και

$$\begin{pmatrix} \gamma & -\gamma v & 0 & 0 \\ -\gamma v & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} h\nu \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = h\nu \begin{pmatrix} \gamma \\ -\gamma v \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Επομένως οι δύο ενέργειες θα είναι $E_{-x} = \gamma(1-v)h\nu$ και $E_{-y} = \gamma h\nu$.

(β) Από τα χωρικά μέρη των τετραορμών στο Σ' μπορούμε να κατανοήσουμε ποιες είναι οι διευθύνσεις κίνησης. Το πρώτο στην κατεύθυνση του άξονα $-x'$ και το δεύτερο σε γωνία με τον άξονα x' $\tan\phi = 1/(\gamma v)$ κινούμενο προς την αρχή των αξόνων.

(γ) $v_{KO} = (\vec{p}_1 + \vec{p}_2)/(E_1 + E_2) = -(\hat{x} + \hat{y})/2$.

(δ) Το γ που αντιστοιχεί σε αυτή την ταχύτητα είναι $\sqrt{2}$ οπότε η τετραορμή του πρώτου φωτονίου στο σύστημα ΚΟ θα είναι

$$\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{2} & \frac{\sqrt{2}+1}{2} & \frac{\sqrt{2}-1}{2} & 0 \\ 1/\sqrt{2} & \frac{\sqrt{2}-1}{2} & \frac{\sqrt{2}+1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} h\nu \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = h\nu \begin{pmatrix} \sqrt{2} - 1/\sqrt{2} \\ -1/2 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

επομένως η ενέργεια του πρώτου φωτονίου θα είναι $h\nu/\sqrt{2}$ και εφόσον είμαστε στο σύστημα του κέντρου μάζας η ίδια θα είναι και του δεύτερου.

Θέμα 5:

(α) Σύμφωνα με τα δεδομένα το Σ' κινείται ως προς το Σ με τον τυποποιημένο τρόπο με ταχύτητα τέτοια ώστε

$$\begin{aligned} -1/4 &= \gamma(1-2v) \\ 7/4 &= \gamma(2-v) \end{aligned} \tag{4}$$

απ' όπου βρίσκουμε $v = 3/5$ και $\gamma = 5/4$.

(β) Σύμφωνα με τον κανόνα μετασχηματισμού των πεδίων

$$E'_x = E_x = 0, E'_y = (5/4)(E_y + (3/5)(\hat{x} \times \vec{0})_y = 5\mathcal{E}/4, E'_z = (5/4)(E_z + (3/5)(\hat{x} \times \vec{0})_z = 0,$$
$$B'_x = B_x = 0, B'_y = (5/4)(B_y - (3/5)(\hat{x} \times \vec{E})_y = 0, B'_z = (5/4)(B_z - (3/5)(\hat{x} \times \vec{E})_z = -3\mathcal{E}/4.$$

(γ) Πράγματι $\vec{E}^2 - \vec{B}^2 = \mathcal{E}^2 = \vec{E}'^2 - \vec{B}'^2$ και $\vec{E} \cdot \vec{B} = 0 = \vec{E}' \cdot \vec{B}'$.