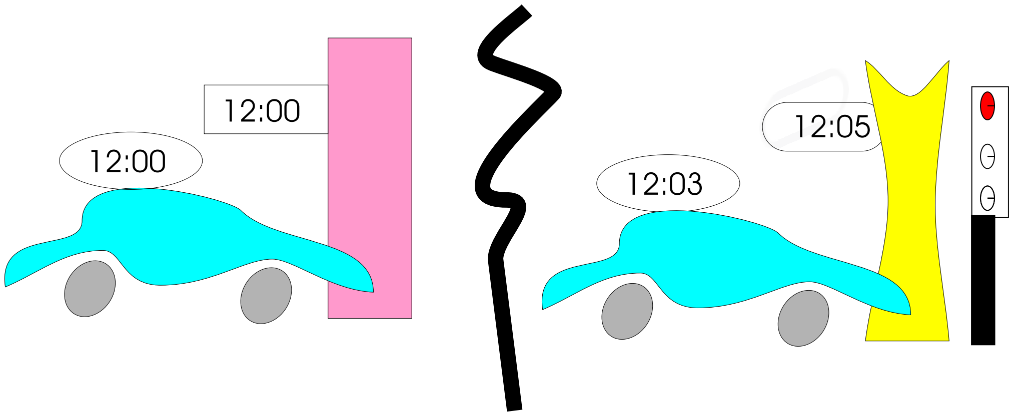
Εξετάσεις στη Θεωρία της Ειδικής Σχετικότητας
Ιούνιος 2004

Θέμα 1: (α) Γράψτε υπό μορφή πίνακα το μετασχηματισμό Lorentz που συνδέει τις χωροχρονικές συντεταγμένες δύο συστημάτων που κινούνται το ένα ως προς το άλλο με ταχύτητα u κατά μήκος του άξονα y. (β) Γράψτε όλα τα αναλλοίωτα μεγέθη που μπορείτε να κατασκευάσετε από δύο τετρανύσματα A^μ, B^μ. (γ) Ένα σύστημα ν σωματιδίων έχουν ενέργειες $E_1, E_2, \ldots, E_\nu$ και ορμές $p_1, p_2, \ldots, p_\nu$. Ποια η ταχύτητα του κέντρου ορμής τους και ποιο είναι το φυσικό νόημα αυτής της ταχύτητας; (δ) Δεδομένου του πίνακα L ενός μετασχηματισμού Lorentz και ενός τανυστή δευτέρας τάξης (όπως είναι ο τανυστής του ηλεκτ/κού πεδίου) που σε μορφή πίνακα γράφεται ως F, πώς υπολογίζει κανείς τις μετασχηματισμένες συνιστώσες του τανυστή αυτού; Αποδείξτε ότι αν ο F είναι συμμετρικός τότε και ο μετασχηματισμένος F' θα είναι συμμετρικός. (ε) Έστω ένα ομογενές ηλεκτρικό πεδίο και μαγνητικό πεδίο $\mathbf{E} = (E, 0, 0), \mathbf{B} = (0, B, 0)$. Με τι ταχύτητα πρέπει να κινούμαστε για να μπορούμε να σβήσουμε ένα από τα δύο πεδία και ποιο είναι αυτό το πεδίο;

Θέμα 2: Με βάση το παρακάτω σκίτσο με τα δύο στιγμιότυπα καθορίστε, (α) την ταχύτητα του αυτοκινήτου (θεωρήστε την σταθερή) και (β) την απόσταση μεταξύ των δύο σταθμών. (γ) Αν το φανάρι στο δεύτερο σταυροδρόμι είναι κόκκινο την ώρα που φτάνει σε αυτό το αυτοκίνητο, θα κάνει παράβαση ο οδηγός; [Η συχνότητα του πράσινου φωτός είναι $\nu_{\pi\rho\alpha\sigma} = 9 \times 10^{14} Hz$, ενώ του κόκκινου φωτός είναι $\nu_{\kappa o\kappa} = 3 \times 10^{14} Hz$]



Θέμα 3: Μια ομάδα πειραματικών φυσικών σχεδιάζει ένα νέο πείραμα κατά το οποίο δύο συγκεκριμένα σωματίδια πρόκειται να συγκρουστούν με στόχο να δημιουργήσουν ένα τρίτο σωματίδιο με μάζα ηρεμίας M πολύ μεγαλύτερη από τις μάζες m_1, m_2 των δύο αρχικών σωματιδίων. Η μία προεινόμενη σκέψη είναι το ένα από τα δύο σωματίδια (το υπ' αριθμόν 1) να επιταχυνθεί και να πέσει πάνω στο ακίνητο σωματίδιο 2. Η άλλη λύση είναι και τα δύο σωματίδια να επιταχυνθούν με ανάποδες φορές έτσι ώστε να συγκρουστούν ενώ κινούνται το ένα προς το άλλο με ίσες και αντίθετες ορμές (η σύγκρουση θα συμβεί στο σύστημα κέντρου ορμής). (α) Να συγκρίνετε τις συνολικές κινητικές ενέργειες που θα πρέπει να προσφέρουμε στη μία και την άλλη λύση ώστε να καταφέρουμε να δημιουργήσουμε το νέο σωματίδιο. (β) Να βρείτε το μετασχηματισμό Lorentz που μετασχηματίζει την ενέργεια και την ορμή του συστήματος από την πρώτη στη δεύτερη λύση. (γ) Δείξτε ότι ο παραπάνω μετασχηματισμός, μεταξύ όλων των αντίστοιχων μετασχηματισμών στην ίδια διεύθυνση αλλά με διαφορετικές ταχύτητες, οδηγεί στη μικρότερη δυνατή ενέργεια του συστήματος, και επομένως στη μικρότερη προσφερόμενη συνολική κινητική ενέργεια των σωματιδίων. (δ) Αν δεν ακολουθήσουμε αυτή τη βέλτιστη λύση τι γίνεται με την υπόλοιπη ενέργεια που προσφέρουμε στα σωματίδια;

Θέμα 4: Ένα φωτόνιο ενέργειας E_0 κινείται κατά μήκος της θετικής φοράς του άξονα x. Το φωτόνιο βρισκόταν αρχικά στο κέντρο ενός κλειστού κουτιού το οποίο έχει μήκος L (κατά μήκος του x άξονα) και οι πλευρές του οποίου είναι απόλυτα ανακλώντα παράλληλα κάτοπτρα. Η μάζα του κουτιού είναι M. Κάθε φορά που το φωτόνιο ανακλάται στο δεξί κάτοπτρο και στη συνέχεια κινείται προς τα αριστερά έχει ορμή αρνητική, ενώ αφού ανακλαστεί στο αριστερό κάτοπτρο έχει ορμή θετική. (α) Από διατήρηση της τετραορμής υπολογίστε την ορμή του φωτονίου και την ορμή και την ενέργεια του κουτιού σε κάθε μια από τις δύο περιπτώσεις (όταν το φωτόνιο κινείται προς τα δεξιά ή προς τα αριστερά). (β) Ποια η ταχύτητα του κουτιού στις δύο περιπτώσεις; Σχεδιάστε την κίνηση του κουτιού ως συνάρτηση του χρόνου $x(t)$. (γ) Ποια η μέση ταχύτητα του κουτιού;

Θέμα 5: Σε μια περιοχή του χώρου υπάρχει ομογενές ηλεκτρικό και μαγνητικό πεδίο που σχηματίζουν γωνία ϕ (με $\phi \neq 0, \pi/2, \pi$). Θέλουμε να βρούμε ένα μετασχηματισμό προώθησης Lorentz τέτοιον ώστε τα νέα ηλεκτρικά και μαγνητικά πεδία να έχουν το μικρότερο δυνατόν μέγεθος. Το ερώτημα είναι αν πράγματι και τα δύο πεδία ελαχιστοποιούνται ταυτόχρονα. (α) Από το αναλλοίωτο του ηλεκ/κού πεδίου $\mathbf{E}^2 - c^2\mathbf{B}^2$, σχεδιάστε την ένταση $E = |\mathbf{E}|$ ως συνάρτηση της έντασης $B = |\mathbf{B}|$. (β) Από το αναλλοίωτο του ηλεκ/κού πεδίου $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}$ επιχειρηματολογήστε γιατί όταν το ηλεκτρικό και το μαγνητικό πεδίο γίνουν παράλληλα το ένα στο άλλο τα μεγέθη αυτών θα είναι τα ελάχιστα δυνατά. (γ) Βρείτε την ταχύτητα του μετασχηματισμού προώθησης την κάθετη στο επίπεδο των $\mathbf{E}, \mathbf{B}$ η οποία καθιστά τα μεγέθη των δύο πεδίων ελάχιστα. [Υπόδειξη: Όταν τα δύο πεδία θα γίνουν παράλληλα το εξωτερικό τους γινόμενο θα πρέπει να μηδενιστεί. Δίδονται οι διανυσματικές ταυτότητες για $\mathbf{u} \perp \mathbf{E}$ και $\mathbf{u} \perp \mathbf{B}$: $(\mathbf{u} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} = -B^2\mathbf{u}$ και $(\mathbf{u} \times \mathbf{B}) \times (\mathbf{u} \times \mathbf{E}) = u^2(\mathbf{B} \times \mathbf{E})$.]

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}'_{\parallel} &= \mathbf{E}_{\parallel}, \qquad & \mathbf{E}'_{\perp} &= \gamma(\mathbf{E}_{\perp} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}) \\
\mathbf{B}'_{\parallel} &= \mathbf{B}_{\parallel}, \qquad & \mathbf{B}'_{\perp} &= \gamma(\mathbf{B}_{\perp} - \frac{1}{c^2}\mathbf{u} \times \mathbf{E})
\end{aligned}$$

Να γραφούν τα 4 από τα 5 θέματα. Καλή σας επιτυχία.

Λύσεις

Θέμα 1: (α)

$$L = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & -\beta\gamma & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & 0 & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(β) $A^\mu A_\mu$, $B^\mu B_\mu$, $A^\mu B_\mu$. Τα μέτρα των δύο τετρανυσμάτων και το μεταξύ τους εσωτερικό γινόμενο.
(γ)

$$u_{KO} = \frac{c^2 \sum p_i}{\sum E_i}$$

Είναι η ταχύτητα του συστήματος αναφοράς στο οποίο το σύστημα των σωματιδίων έχει συνολική ορμή μηδέν.
(δ)$F' = L\ F\ L^T$. Ένας πίνακας είναι συμμετρικός αν $F^T = F$. Έτσι $F'^T = (L\ F\ L^T)^T = (L^T)^T\ F^T\ L^T = L\ F\ L^T = F$, και επομένως είναι συμμετρικός.
(ε) Από τις σχέσεις μετασχηματισμού των συντεταγμένων βλέπει κανείς πως η ταχύτητα της προώθησης πρέπει να είναι στον άξονα z ώστε η μεταβολή του εκάστοτε διανύσματος εξαιτίας της ύπαρξης του άλλου να είναι παράλληλη με το πρώτο διάνυσμα και επομένως να μπορεί να σβήσει κάποιο από τα πεδία. Έτσι $\mathbf{E}' = (\gamma(E - uB), 0, 0)$, και $' = (0, \gamma(B - uE/c^2), 0)$. Έτσι για να σβήσει το ηλεκτρικό πεδίο θα πρέπει η ταχύτητα να είναι $\mathbf{u} = E/B\hat{z}$, ενώ για να σβήσει το μαγνητικό πεδίο θα πρέπει η ταχύτητα να είναι $\mathbf{u} = c^2/E\hat{z}$. Η ποσότητα όμως E/Bc μπορεί να είναι είτε μεγαλύτερη είτε μικρότερη της μονάδας. Έτσι στην πρώτη περίπτωση μπορεί να σβήσει το μαγνητικό πεδίο, ενώ στη δεύτερη μόνο το ηλεκτρικό.
Θέμα 2: (α,β) Στο σύστημα του αυτοκινήτου μεσολαβούν 3 λεπτά μεταξύ των δύο γεγονότων (στιγμιοτύπων), ενώ στο σύστημα της Γης 5 λεπτά. Από την αναλλοιότητα λοιπόν του χωροχρονικού μήκους θα έχουμε $c^2\Delta t'^2 - \Delta x'^2 = c^2\Delta t^2 - \Delta x^2$, όπου ο τόνος αντιπροσωπεύει το σύστημα του αυτοκινήτου. Θα είναι λοιπόν $c^2(5\ min)^2 - x^2 = c^2(3\ min)^2 - 0^2$. Συνεπώς $x = c \times 4\ min = 3 \times 10^8 \times 240\ m = 7.2 \times 10^10\ m$. Το μήκος αυτό διαγράφεται σε 5 λεπτά επομένως $u = 7.2 \times 10^10/300\ m/s = 2.4 \times 10^8\ m/s = 0.8c$.
(γ) Ο οδηγός του αυτοκινήτου βλέπει το φως του φαναριού μετατοπισμένο κατά Doppler. Έτσι αν η τετραορμή των φωτονίων του φαναριού είναι

$$\frac{h\nu}{c}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

όπου το αυτοκίνητο θεωρήσαμε ότι κινείται κατά τη θετική φορά του άξονα x, μετά το μετασχηματισμό Lorentz στο σύστημα του αυτοκινήτου θα είναι

$$\begin{pmatrix} 5/3 & -4/3 & 0 & 0 \\ -4/3 & 5/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{h\nu}{c}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{h\nu}{c}\left(\frac{5}{3} + \frac{4}{3}\right)\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

αφού $\gamma = 5/3$ και $\beta\gamma = 4/3$ για την ταχύτητα που βρήκαμε παραπάνω. Η συχνότητα λοιπόν που βλέπει ο οδηγός είναι $\nu' = 3\nu$, δηλαδή το κόκκινο το βλέπει πράσινο. Επομένως πολύ πιθανό να κάνει παράβαση αν δεν σκεφθεί όλα αυτά. Στο δικαστήριο βέβαια μπορεί να επικαλεστεί την αθωότητά του εξαιτίας του φαινομένου Doppler.
Θέμα 3: Θεωρούμε $c = 1$. (α) Διατήρηση ενέργειας στην 1η λύση: $T_1 + m_1 + m_2 = E$, Διατήρηση ορμής στην 1η λύση: $p_1 = P$. Από διαφορά τετραγώνων

$$(T_1 + m_1 + m_2)^2 - p_1^2 = M^2 \Rightarrow m_1^2 + m_2^2 + 2(T_1 + m_1)m_2 = M^2 \Rightarrow \qquad (1)$$

$$T^{(1)} = T_1 = \frac{M^2 - m_1^2 - m_2^2}{2m_2} - m_1 = \frac{M^2 - (m_1 + m_2)^2}{2m_2} = (M - m_1 - m_2)\frac{M + m_1 + m_2}{2m_2} \qquad (2)$$

Διατήρηση ενέργειας στην 2η λύση: $T_1 + m_1 + m_2 + T_2 = M$, Διατήρηση ορμής στην 2η λύση: $p_1 + p_2 = 0$. Έτσι $T^{(2)} = T_1 + T_2 = M - m_1 - m_2$, η οποία είναι μικρότερη από την προηγούμενη $T^{(1)}$ αφού $M > m_1 + m_2$.
(β) Ο μετασχηματισμός Lorentz είναι αυτός που μας πηγαίνει στο σύστημα κέντρου ορμής, δηλαδή έχει ταχύτητα P/E. Η ταχύτητα αυτή έχει $\gamma = E/M$ και $\beta\gamma = P/M$. Πράγματι

$$\begin{pmatrix} E/M & -P/M \\ -P/M & E/M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E \\ P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M \\ 0 \end{pmatrix} \tag{3}$$

(γ) Έστω ο μετασχηματισμός με ταχύτητα $\beta \neq P/E$.

$$\begin{pmatrix} T + m_1 + m_2 \\ p_1 + p_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma \\ -\beta\gamma & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T^{(1)} + m_1 + m_2 \\ p_1 \end{pmatrix} \tag{4}$$

Έτσι η γενική κινητική ενέργεια που θα προσφέρουμε θα είναι $T + m_1 + m_2 = \gamma(T^{(1)} + m_1 + m_2 - \beta p_1) = \gamma(T^{(1)} + m_1 + m_2 - \beta P)$. Αν παραγωγίσουμε τη σχέση αυτή ως προς β και θέσουμε ίσο με μηδέν θα βρούμε την ταχύτητα εκείνη που καθιστά τη συνολική κινητική ενέργεια ελάχιστη. Ισχύει ότι $d\gamma/d\beta = \beta\gamma^3$. Έτσι

$$0 = \beta\gamma^3(T^{(1)} + m_1 + m_2 - \beta P) - \gamma P \Rightarrow 0 = \beta\gamma^2(T^{(1)} + m_1 + m_2) - P(1 + \beta^2\gamma^2) = \gamma^2(\beta(T^{(1)} + m_1 + m_2) - P)$$

απ' όπου συμπεραίνουμε ότι η επιθυμητή ταχύτητα είναι $\beta = P/(T^{(1)} + m_1 + m_2) = P/E$, την οποία χρησιμοποιήσαμε στο (β) για να καταλήξουμε στην ενέργεια της λύσης 2.
(δ) Αν δεν ακολουθήσουμε αυτή τη λύση απλώς προσφέρουμε ενέργεια που χρησιμοποιείται άσκοπα για να κινηθεί το M.
Θέμα 4: (α) Διατήρηση ενέργειας: $E_0 + M = \epsilon_\rightarrow + E_\rightarrow = \epsilon_\leftarrow + E_\leftarrow$. Διατήρηση ορμής: $E_0 = \epsilon_\rightarrow + P_\rightarrow = -\epsilon_\leftarrow + P_\leftarrow$. (Τα βέλη σχετίζονται με την κατεύθυνση κίνησης του φωτονίου.) Λύνοντας τα αριστερά σκέλη των εξισώσεων και αφαιρώντας τα τετράγωνα βρίσκουμε

$$(E_0 + M - \epsilon_\rightarrow)^2 - (E_0 - \epsilon_\rightarrow)^2 = M^2 \Rightarrow E_0 - \epsilon_\rightarrow = 0 \Rightarrow \epsilon_\rightarrow = E_0$$

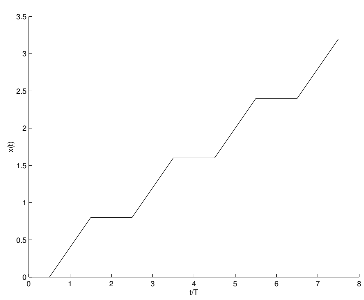
Αντίστοιχα από τα δεξιά μέλη των εξισώσεων

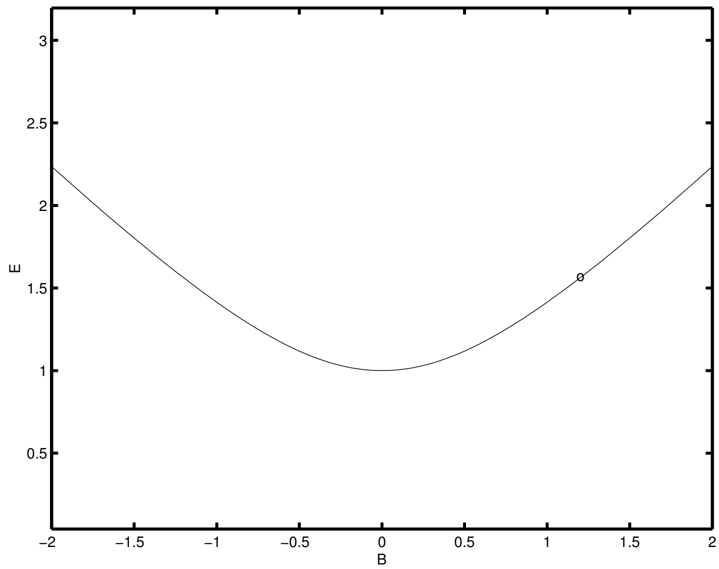
$$(E_0 + M - \epsilon_\leftarrow)^2 - (E_0 + \epsilon_\leftarrow)^2 = M^2 \Rightarrow -4E_0\epsilon_\leftarrow + 2M(E_0 - \epsilon_\leftarrow) = 0 \Rightarrow \epsilon_\leftarrow = \frac{ME_0}{2E_0 + M}$$

Λύνοντας ως προς $E_\rightarrow, P_\rightarrow$ και $E_\leftarrow, P_\leftarrow$, βρίσκουμε

$$E_\rightarrow = M \ , \ P_\rightarrow = 0 \tag{5}$$
$$E_\leftarrow = \frac{2E_0^2 + 2E_0M + M^2}{2E_0 + M} \ , \ P_\leftarrow = 2E_0\frac{E_0 + M}{2E_0 + M} \tag{6}$$

(β) Όταν το φωτόνιο κινείται προς τα δεξιά το κουτί μένει ακίνητο ($\beta_\rightarrow = P_\rightarrow/E_\rightarrow = 0$), ενώ όταν το φωτόνιο κινείται προς τα αριστερά το κουτί κινείται με $\beta_\leftarrow = P_\leftarrow/E_\leftarrow = \frac{2E_0^2 + 2E_0M}{2E_0^2 + 2E_0M + M^2}$. Συνεπώς για χρόνο $= L/c$ το κουτί κινείται με $\beta_\rightarrow$ και για το επόμενο T με $\beta_\leftarrow$. Οι χρόνοι είναι ίδιοι γιατί και στο σύστημα του κουτιού το φως κινείται με c. Το διάγραμμα $x(t)$ έχει τη μορφή σκάλας τραβηγμένη οριζόντια.





(γ) Η μέση ταχύτητα είναι λοιπόν $< \beta >= \beta_{\leftarrow}/2$.

Θέμα 5: ($c = 1$) (α) Ας υποθέσουμε για ευκολία ότι $E > B$ (το πεδίο είναι ηλεκτρικού τύπου). Η σχέση $E^2 - B^2 =$ θετικό παριστά μια υπερβολή στο χώρο $B - E$ (βλ. παραπάνω διάγραμμα).

Η αρχική τιμή των E, B σημειώνεται στο διάγραμμα με μια βούλα. (β) Το αναλλοίωτο $\mathbf{E}\cdot\mathbf{B} = EB\cos\phi$, σημαίνει ότι αν αλλάξουν οι εντάσεις των πεδίων κινούμενες στην υπερβολή προς τα αριστερά και κάτω, δηλαδή μειούμενες, η μεταξύ τους γωνία πρέπει να μικρύνει. Την ελάχιστη τιμή τους θα πάρουν τα πεδία όταν γίνουν παράλληλα ($\cos\phi = 1 = \max$). (γ) Ζητάμε την κάθετη ταχύτητα που καθιστά τα πεδία παράλληλα. $\mathbf{E}' \times \mathbf{B}' = 0 \Rightarrow (\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}) \times (\mathbf{B} - \mathbf{u} \times \mathbf{E}) = 0$ αφού τα πεδία είναι κάθετα στην ταχύτητα). Χρησιμοποιώντας τις ταυτότητες

$$0 = (1 + u^2)\mathbf{E} \times \mathbf{B} - \mathbf{u}(E^2 + B^2) \Rightarrow \frac{u}{1 + u^2} = \frac{EB\sin\phi}{E^2 + B^2} = \frac{1}{2\lambda}$$

Συνεπώς $u = \lambda - \sqrt{\lambda^2 - 1}$. Η άλλη ρίζα όπως αποδεικνύεται είναι μεγαλύτερη της μονάδας και επομένως απορρίπτεται.