ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

Τμήμα Φυσικής

Εξετάσεις στη Θεωρία της Ειδικής Σχετικότητας

Ιούνιος 2010

Αν θέλετε μπορείτε να επεξεργαστείτε όλα τα προβλήματα σε σύστημα μονάδων όπου η ταχύτητα του φωτός είναι $c = 1$.

Να λύσετε τα 4 από τα 5 θέματα.

Θέμα Α: Στο ΣΚΦ Σ ο τανυστής του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου δίνεται από τον πίνακα (σε συναλλοίωτη ή ανταλλοίωτη μορφή)

$$F_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & -E/c & 0 & 0 \\ E/c & 0 & 0 & -B \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 & 0 \end{bmatrix}_{\Sigma} \quad \text{ή} \quad F^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & E/c & 0 & 0 \\ -E/c & 0 & 0 & -B \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 & 0 \end{bmatrix}_{\Sigma} \tag{1}$$

1. Υπολογίστε τα αναλλοίωτα του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου.
2. Υπολογίστε τη σχέση μεταξύ των ποσοτήτων E, B ώστε να υπάρχει ΣΚΦ Σ' στο οποίο το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο θα έχει μόνο ηλεκτρικό πεδίο.
3. Υπολογίστε την ταχύτητα αυτή **u** με την οποία θα πρέπει να κινείται το Σ' του ερωτήματος (2) ως προς το Σ, καθώς και το ηλεκτρικό πεδίο στο Σ'.

Δίδονται οι τύποι μετασχηματισμού των πεδίων.

$$\mathbf{E}'_{\parallel} = \mathbf{E}_{\parallel}, \qquad \mathbf{E}'_{\perp} = \gamma(\mathbf{E}_{\perp} + \mathbf{u} \times \mathbf{B})$$
$$\mathbf{B}'_{\parallel} = \mathbf{B}_{\parallel}, \qquad \mathbf{B}'_{\perp} = \gamma(\mathbf{B}_{\perp} - \frac{1}{c^2}\mathbf{u} \times \mathbf{E})$$

Θέμα Β: Στο χωρόχρονο θεωρήστε το γραμμικό μετασχηματισμό:

$$x' = at + bx \ , \ t' = ct + dx \ , y' = y \ , \ z' = z$$

όπου c μια παράμετρος άσχετη με την ταχύτητα του φωτός.

1. Κατασκευάστε κατάλληλο τέτοιο μετασχηματισμό (βρείτε παραμέτρους a, b, c, d) απαιτώντας το συναλλοίωτο της κυματικής εξίσωσης $\Box\phi = 0$ (δηλαδή να έχει αυτή την ίδια μορφή και στα δύο συστήματα συντεταγμένων), όπου $\Box = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{\partial^2}{\partial t^2}$.
2. Στο ΣΚΦ $(txyz)$ δίνεται το διανυσματικό πεδίο $C^{\mu} = (e^{(t-x)}, e^{(t-x)}, x, x^2)$. Υπολογίστε την απόκλιση του πεδίου $C^{\mu}_{,\mu}$ στο ΣΚΦ $(t'x'y'z')$ όταν το δεύτερο κινείται ως προς το πρώτο κατά τον τυποποιημένο τρόπο με ταχύτητα $u = 2c/3$.

Θέμα Γ: Υπολογίστε την ενέργεια των σκεδαζόμενων ηλεκτρονίων E'_e κατά την ελαστική σκέδαση ηλεκτρονίου - πρωτονίου συναρτήσει της ενέργειας του προσπίπτοντος σωματιδίου E_e και της γωνίας σκέδασης αυτού, θεωρώντας ότι τα προσπίπτοντα ηλεκτρόνια έχουν πολύ υψηλές ενέργειες και πριν και μετά τη σκέδασή τους ($E_e, E'_e >> m$). Οι μάζες m, M του ηλεκτρονίου και του πρωτονίου αντίστοιχα θεωρούνται γνωστές και $m \ll M$.

Θέμα Δ: Σωματίδιο συγκρούεται με άλλο ακίνητο σωματίδιο ίσης μάζας, οπότε τα δύο σωματίδια εξαϋλώνονται. Μετά τη σύγκρουση παράγονται δύο φωτόνια ίσης συχνότητας ν τα οποία κινούνται στο επίπεδο $x-y$, εκατέρωθεν του άξονα x, σχηματίζοντας με αυτόν ίσες γωνίες μέτρου $\phi = 45^0$.

1. Προσδιορίστε την ταχύτητα του κέντρου ορμής των φωτονίων (διάνυσμα).
2. Προσδιορίστε την ταχύτητα του κέντρου ορμής των σωματιδίων (διάνυσμα).
3. Προσδιορίστε την ταχύτητα και την ορμή του σωματιδίου βλήματος.
4. Υπολογίστε τη συχνότητα ενός φωτονίου στο σύστημα κέντρου ορμής.
5. Μπορείτε να εκτιμήσετε τη συχνότητα του άλλου φωτονίου (στο ίδιο σύστημα);

Θέμα Ε: Δύο γεγονότα (A και B) συμβαίνουν σε ένα σύστημα αναφοράς Σ_1 με χρονική διαφορά $\Delta t_1 = t_{1A} - t_{1B} = T > 0$. Τα ίδια γεγονότα συμβαίνουν σε ένα άλλο σύστημα αναφοράς Σ_2 με χρονική διαφορά $\Delta t_2 = t_{2A} - t_{2B} = -T < 0$.

1. Το τετράνυσμα AB που συνδέει τα δύο γεγονότα τι είναι (χρονοειδές, χωροειδές, ή φωτοειδές); Δικαιολογήστε την απάντησή σας.
2. Τι μπορείτε να συμπεράνετε για τη σχέση των χωρικών απόστασεων στα δύο συστήματα;
3. Αν το Σ_2 κινείται κατά τον τυποποιημένο τρόπο με ταχύτητα V σε σχέση με το Σ_1, με τι ταχύτητα ως προς το Σ_1 κινείται το σύστημα που παρατηρεί τα δύο γεγονότα να συμβαίνουν ταυτόχρονα;

Λύσεις Στις λύσεις έχει ληφθεί παντού $c = 1$.

Θέμα A:

1. Το εν λόγω πεδίο έχει τη μορφή $\mathbf{E} = E\hat{x}$, $\mathbf{B} = B\hat{y}$. Έτσι τα αναλλοίωτα του ηλ/κού πεδίου είναι $\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2 = E^2 - B^2$ και $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B} = 0$.

2. Για να υπάρχει σύστημα στο οποίο υπάρχει μόνο ηλεκτρικό πεδίο $\mathbf{B}' = 0$ και να είναι αναλλοίωτη η πρώτη ποσότητα, θα πρέπει $\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2 = \mathbf{E}'^2 - \mathbf{B}'^2$ δηλαδή $E^2 - B^2 = E'^2 > 0$. Συνεπώς θα πρέπει $E > B$.

3. Το σύστημα Σ' θα πρέπει να κινείται με ταχύτητα κάθετη στο μαγνητικό πεδίο αφού αν δεν συνέβαινε αυτό θα επιβίωνε μια συνιστώσα του μαγνητικού πεδίου παράλληλα στην ταχύτητα και δεν θα μηδενιζόταν το μαγνητικό πεδίο. Συνεπώς θα πρέπει η ταχύτητα να έχει τη μορφή $\mathbf{u} = u_x\hat{x} + u_z\hat{z}$. Έτσι για να μηδενιστεί το μαγνητικό πεδίο θα πρέπει

$$0 = \gamma(B\hat{y} - \mathbf{u} \times \mathbf{E}) \Rightarrow u_z E = B \Rightarrow u_z = B/E < 1.$$

Επομένως η ζητούμενη ταχύτητα είναι $\mathbf{u} = (u_x, 0, B/E)$, όπου u_x τυχαία σταθερά με $u_x^2 + (B/E)^2 < 1$. Όσο για το νέο ηλεκτρικό πεδίο

$$\begin{aligned} \mathbf{E}' &= \mathbf{E}'_{\parallel} + \mathbf{E}'_{\perp} \\ &= \frac{(\mathbf{E} \cdot \mathbf{u})\mathbf{u}}{\mathbf{u}^2} + \gamma(\mathbf{E}_{\perp} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}) \\ &= \frac{(\mathbf{E} \cdot \mathbf{u})\mathbf{u}}{\mathbf{u}^2} + \gamma((\mathbf{E} - \frac{(\mathbf{E} \cdot \mathbf{u})\mathbf{u}}{\mathbf{u}^2}) + \mathbf{u} \times \mathbf{B}). \end{aligned}$$

Η γενική περίπτωση για $u_x \neq 0$ απαιτεί πράξεις για το τελικό αποτέλεσμα του $\mathbf{E}'$. Μπορεί όμως κανείς από το πρώτο αναλλοίωτο να συμπεράνει ότι $|\mathbf{E}'| = \sqrt{E^2 - B^2}$.

Αν είχαμε θέσει για ευκολία $u_x = 0$ οι εκφράσεις θα απλοποιούνταν αφού $\mathbf{E} \cdot \mathbf{u} = 0$. Έτσι θα είχαμε τότε

$$\mathbf{E}' = \gamma(E\hat{x} + (B/E)\hat{z} \times B\hat{y}) = \gamma\frac{E^2 - B^2}{E}\hat{x} = \frac{1}{\sqrt{1 - (B/E)^2}}\frac{E^2 - B^2}{E}\hat{x} = \sqrt{E^2 - B^2}\hat{x},$$

σε συμφωνία με την προηγούμενη παρατήρηση.

Θέμα B:

1. Θα είναι

$$\partial/\partial t = (\partial t'/\partial t)\partial/\partial t' + (\partial x'/\partial t)\partial/\partial x'$$

και

$$\partial/\partial x = (\partial t'/\partial x)\partial/\partial t' + (\partial x'/\partial x)\partial/\partial x'$$

ενώ

$$\partial/\partial y = \partial/\partial y' \ , \ \partial/\partial z = \partial/\partial z'$$

Συνεπώς

$$\begin{aligned} 0 &= \Box\phi \\ &= \left(-[(\partial t'/\partial t)\partial/\partial t' + (\partial x'/\partial t)\partial/\partial x']^2 + [(\partial t'/\partial x)\partial/\partial t' + (\partial x'/\partial x)\partial/\partial x']^2 + [\partial/\partial y']^2 + [\partial/\partial z']^2\right)\phi \\ &= \left(-[c\partial/\partial t' + a\partial/\partial x']^2 + [d\partial/\partial t' + b\partial/\partial x']^2 + [\partial/\partial y']^2 + [\partial/\partial z']^2\right)\phi \\ &= \left((-c^2 + d^2)\frac{\partial^2}{\partial t'^2} + (-a^2 + b^2)\frac{\partial^2}{\partial x'^2} + 2(-ca + db)\frac{\partial^2}{\partial t'\partial x'} + \frac{\partial^2}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2}{\partial z'^2}\right)\phi. \quad (2) \end{aligned}$$

Για να είναι η τελευταία έφραση ίδια με την $\Box'\phi = 0$ θα πρέπει $db = ac$, $c^2 - d^2 = 1$, $b^2 - a^2 = 1$. Έτσι $b = \pm c = \cosh w$, $a = \pm d = \sinh w$, όπου w κάποια παράμετρος.

2. Θα μπορούσε κανείς να υπολογίσει το μετασχηματισμένο κατά Lorentz τετράνυσμα, να χρησιμοποιήσει το μετασχηματισμό Lorentz για να γράψει τα t, x ως συνάρτηση των t', x' και στο τέλος να υπολογίσει το $C^{\mu'}_{,\mu'}$ παραγωγίζοντας ως προς t', x', y', z' και αθροίζοντας όλες τις μερικές παραγώγους. Πιο απλά όμως $C^{\mu'}_{,\mu'} = C^{\mu}_{,\mu}$ αφού η ποσότητα είναι αναλλοίωτη (οι δείκτες είναι ζευγάρι και γίνεται άθροιση σε όλες τις τιμές τους). Επομένως υπολογίζουμε απλά

$$C^{\mu'}_{,\mu'} = C^{\mu}_{,\mu} = \frac{\partial C^0}{\partial t} + \frac{\partial C^1}{\partial x} + \frac{\partial C^2}{\partial y} + \frac{\partial C^3}{\partial z} = e^{(t-x)} - e^{(t-x)} = 0$$

Θέμα Γ: Από αρχή διατήρησης τετραορμής

$$\begin{pmatrix} E_e \\ \vec{p_e} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} M \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E'_e \\ \vec{p'} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} E' \\ \vec{p'} \end{pmatrix}$$

οπότε

$$\left[\begin{pmatrix} E_e \\ \vec{p_e} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} M \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} E'_e \\ \vec{p'} \end{pmatrix}\right]^2 = -M^2$$

Έχουμε λοιπόν

$$\begin{aligned} (E_e - E'_e + M)^2 - (\vec{p_e} - \vec{p'}_e)^2 = M^2 \Rightarrow \\ (E_e - E'_e)^2 + 2M(E_e - E'_e) - p_e^2 - p'^2_e + 2\vec{p_e} \cdot \vec{p'}_e = 0 \Rightarrow \\ (E_e^2 - p_e^2) + (E'^2_e - p'^2_e) - 2E_eE'_e + 2M(E_e - E'_e) + 2\vec{p_e} \cdot \vec{p'}_e = 0 \Rightarrow \\ 2m^2 - 2E_eE'_e + 2M(E_e - E'_e) + 2\vec{p_e} \cdot \vec{p'}_e = 0. \end{aligned}$$

Αν αντικαταστήσουμε τώρα $\vec{p_e} \cdot \vec{p'}_e \cong E_eE'_e \cos\theta$

$$E'_e = \frac{m^2 + ME_e}{M + E_e(1 - \cos\theta)} \cong \frac{ME_e}{M + E_e(1 - \cos\theta)}.$$

Θέμα Δ:

1. Η τετραορμή των 2 φωτονίων είναι

$$h\nu \begin{pmatrix} 1 \\ 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} + h\nu \begin{pmatrix} 1 \\ 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} = h\nu \begin{pmatrix} 2 \\ \sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

επομένως η ταχύτητα του κέντρου ορμής είναι $\vec{v} = \vec{p}/E = \hat{x}(1/\sqrt{2})$.

2. Αυτή δεν αλλάζει πριν και μετά την αντίδραση. Άρα είναι η ίδια και για τα σωματίδια.

3. Η τετραορμή πριν είναι

$$\begin{pmatrix} \gamma m \\ \gamma m\vec{v} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m \\ 0 \end{pmatrix} = m \begin{pmatrix} \gamma + 1 \\ \gamma\vec{v} \end{pmatrix}.$$

Για να αντιστοιχεί η ταχύτητα του ΚΟ σε αυτή που βρήκαμε θα πρέπει $\gamma\vec{v}/(\gamma+1) = \hat{x}/\sqrt{2}$ επομένως

$$\sqrt{2}v = (\gamma + 1)/\gamma \Rightarrow (\sqrt{2}v - 1)^2 = 1 - v^2 \Rightarrow 3v^2 - 2\sqrt{2}v = 0.$$

Η λύση $v = 0$ δεν είναι αποδεκτή αφού είναι σε αντίφαση με την αρχική εξίσωση οπότε $v = 2\sqrt{2}/3$ (στην κατεύθυνση x λόγω διατήρησης της ορμής. Προφανώς η 3-ορμή είναι $\vec{p} = m\gamma\vec{v} = 2\sqrt{2}m\hat{x}$. Έδω πρέπει να αντικαταστήσουμε $m(\gamma + 1) = 2h\nu \Rightarrow m = 2h\nu/(\gamma + 1) = h\nu/2$.

4. Αρκεί ένας μετασχηματισμός Lorentz στην τετραορμή του ενός φωτονίου

$$\begin{pmatrix} \gamma & -\gamma v & 0 & 0 \\ -\gamma v & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} h\nu \begin{pmatrix} 1 \\ 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} = h\nu \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -1 & 0 & 0 \\ -1 & \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} = (h\nu)/\sqrt{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

   Συνεπώς η συχνότητα θα γίνει $\nu' = \nu/\sqrt{2}$.

5. Η συχνότητα του άλλου θα είναι η ίδια αφού στο ΚΟ η συνολική 3-ορμή είναι 0.

Θέμα Ε:

1. Γνωρίζουμε ότι μόνο στα χωροειδή τετρανύσματα μπορούν να αλλάξουν πρόσημο η χρονική συνιστώσα τους. Εξάλλου έστω ο μετασχηματισμός Lorentz που αλλάζει την $+T$ σε $-T$ (με άξονα x αυτόν του μετασχηματισμού πρώθησης):

$$-T = \gamma(T - V\Delta x_1) \Rightarrow T/\Delta x_1 = V\gamma/(1+\gamma) = V/(1+1/\gamma) < V < 1.$$

   Επομένως $\Delta x_1 > T$. Άρα πρόκειται για χωροειδές τετράνυσμα.

2. Από διατήρηση του χωροχρονικού μήκους $-(T)^2 + \Delta\vec{x}_1^2 = -(-T)^2 + \Delta\vec{x}_2^2$ δηλαδή $|\Delta\vec{x}_1| = |\Delta\vec{x}_2|$.

3. Αφού με τη V πετυχαίνουμε αναστροφή της χρονικής συνιστώσας, μηδενισμό αυτή θα πετυχαίνουμε με V' τέτοια ώστε $0 = T - V'\Delta x_1 \Rightarrow V' = T/\Delta x_1 = V\gamma/(\gamma+1)$.