ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

Τμήμα Φυσικής

Εξετάσεις επί Πτυχίω

στη Θεωρία της Ειδικής Σχετικότητας

1 Ιουνίου 2007

Θέμα 1: Ως προς κάποιο παρατηρητή Σ, ένα φωτόνιο κινείται στην κατεύθυνση $\hat{n} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{x} + \hat{y})$ και προσκρούει σε ένα κάτοπτρο το οποίο είναι παράλληλο στο επίπεδο $y - z$ και κινείται κατά μήκος του άξονα x με ταχύτητα $\vec{V} = V\hat{x}$. Υπολογίστε νευτώνεια και σχετικιστικά τη διεύθυνση κίνησης του φωτονίου στο σύστημα Σ μετά την ανάκλασή του στο κάτοπτρο.

Θέμα 2: Έστω ένα σωματίδιο το οποίο έχει τετραορμή

$$P^i = mc(20, 8, 6, 0) \ ,$$

σε ένα σύστημα Σ, όπου m είναι κάποια σταθερά με μονάδες μάζας. Ποια είναι η μάζα του σωματιδίου; Ένας παρατηρητής Σ' κινείται με ταχύτητα $v = 0.6\, c\, \hat{x}$. Υπολογίστε την ενέργεια του σωματιδίου που μετράει αυτός, καθώς και τη γωνία που σχηματίζει η τροχιά του σωματιδίου σε σχέση με τον άξονα x' στο Σ'.

Θέμα 3: Φωτόνιο ενέργειας E_1 στο εργαστήριο σκεδάζεται ελαστικά σε ηλεκτρόνιο, το οποίο αρχικά ηρεμεί στο εργαστήριο.

α. Υπολογίστε την ενέργεια του σκεδαζόμενου φωτονίου συναρτήσει της γωνίας σκέδασης του φωτονίου ϕ_γ. Δίδεται η μάζα του ηλεκτρονίου m.

β. Υπολογίστε, δεδομένης της γωνίας σκέδασης του φωτονίου ϕ_γ, τη γωνία ανάδρασης ϕ_e του ηλεκτρονίου μετά τη σκέδαση.

Θέμα 4: Έστω ότι σε μια περιοχή του χώρου υπάρχει ένα ομογενές ηλεκτρικό πεδίο της μορφής

$$\vec{E} = E\hat{y} \ .$$

Υπολογίστε το ηλεκτρικό και το μαγνητικό πεδίο που μετρά ένας παρατηρητής που κινείται με ταχύτητα $\vec{u} = u\hat{x}$. Τι αλλάζει στα καινούργια αυτά πεδία (που μετρά ο κινούμενος παρατηρητής) αν αλλάξει φορά η ταχύτητα του παρατηρητή $u \to -u$); Υπολογίστε την τιμή των ποσοτήτων $\vec{E} \cdot \vec{B}$ και $\vec{E}^2 - \vec{B}^2 c^2$ και δείξτε ότι είτε αυτές υπολογιστούν στο αρχικό σύστημα είτε στο σύστημα του κινούμενου παρατηρητή δεν αλλάζουν τιμή. Γνωρίζοντας ότι οι δύο αυτές ποσότητες παραμένουν αναλλοίωτες στους μετασχηματισμούς Lorentz απαντήστε αν υπάρχει (α) ένα σύστημα αναφοράς ως προς το οποίο να υπάρχει μόνο μαγνητικό και καθόλου ηλεκτρικό πεδίο, (β) ένα σύστημα αναφοράς ως προς το οποίο να υπάρχει και ηλεκτρικό και μαγνητικό πεδίο και μάλιστα συγγραμικά μεταξύ τους. (γ) Βρείτε ένα σύστημα αναφοράς διαφορετικό από το αρχικό ως προς το οποίο να υπάρχει το ίδιο ακριβώς με το αρχικό ηλεκτρικό πεδίο και μόνο.

Δίδονται οι τύποι μετασχηματισμού των πεδίων.

$$\mathbf{E'}_\parallel = \mathbf{E}_\parallel, \qquad \mathbf{E'}_\perp = \gamma(\mathbf{E}_\perp + \mathbf{u} \times \mathbf{B})$$

$$\mathbf{B'}_\parallel = \mathbf{B}_\parallel, \qquad \mathbf{B'}_\perp = \gamma(\mathbf{B}_\perp - \frac{1}{c^2}\mathbf{u} \times \mathbf{E})$$

Να γραφούν και τα 4 θέματα. Καλή σας επιτυχία.

Θέμα 1: Η τετραορμή του φωτονίου αρχικά στο σύστημα του εργαστηρίου Σ είναι

$$P^i = E/c \begin{pmatrix} 1 \\ 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Στο σύστημα του κατόπτρου Σ′ είναι

$$P^{i\,\prime} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma V/c & 0 & 0 \\ -\gamma V/c & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} E/c \begin{pmatrix} 1 \\ 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} = E/c \begin{pmatrix} \gamma(1 - V/\sqrt{2}c) \\ \gamma(V/c - 1/\sqrt{2}) \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Μετά την ανάκλαση στο σύστημα του κατόπτρου αναστρέφεται η x συνιστώσα της τετραορμής

$$P^{i\,\prime}_{\text{μετά}} = E/c \begin{pmatrix} \gamma(1 - V/\sqrt{2}c) \\ \gamma(-V/c + 1/\sqrt{2}) \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Έτσι στο αρχικό σύστημα Σ θα είναι

$$P^{i\,\prime}_{\text{μετά}} = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma V/c & 0 & 0 \\ \gamma V/c & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} E/c \begin{pmatrix} \gamma(1 - V/\sqrt{2}c) \\ \gamma(-V/c + 1/\sqrt{2}) \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} = E/c \begin{pmatrix} \gamma^2(1 + (V/c)^2 - \sqrt{2}(V/c)) \\ \gamma^2(2(V/c) - 1/\sqrt{2}(1 + (V/c)^2) \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Επομένως η διεύθυνση κίνησης του φωτονίου μετά θα είναι

$$\hat{n}_{\text{μετά}} = \hat{x}\frac{2(V/c) - 1/\sqrt{2}(1 + (V/c)^2)}{1 + (V/c)^2 - \sqrt{2}(V/c)} + \hat{y}\frac{1 - (V/c)^2}{\sqrt{2}(1 + (V/c)^2 - \sqrt{2}(V/c))}$$

Ο νευτώνειος υπολογισμός: Το φωτόνιο κινείται στον x άξονα με $c/\sqrt{2}$. Επομένως στο σύστημα του κατόπτρου κινείται στον x άξονα με $c/\sqrt{2} - V$ και η οποία αναστρέφεται μετά την πρόσκρουση. Επομένως μετά στο αρχικό σύστημα κινείται στον x άξονα με $2V - c/\sqrt{2}$. Η ταχύτητα λοιπόν μετά θα ήταν

$$\vec{c}_{\text{μετά}} = \hat{x}(2V - c/\sqrt{2}) + \hat{y}c/\sqrt{2}$$

Θέμα 2:

$$P^{i\,2} = P^i P_i = -M^2c^2 = m^2c^2(-400 + 64 + 36) = -300m^2c^2$$

Η μάζα λοιπόν του σωματιδίου είναι $M = \sqrt{300}m$.

$$E' = \gamma(cP^0 - uP^1) = \frac{5}{4}(20mc^2 - 0.6c8mc) = \frac{76}{4}mc^2 = 19mc^2$$

$$P^{1\,\prime} = \gamma(P^1 - (u/c)P^0) = \frac{5}{4}(8mc - 0.6 \times 20mc) = -5mc$$

και

$$P^{2\,\prime} = P^2 = 6mc$$

Επομένως η γωνία είναι

$$\tan\phi' = \frac{6}{-5} = -1.2$$

Θέμα 3: Πριν

$$P_e = mc(1,0,0,0)\ ,\ P_\gamma = (E/c)(1,1,0,0)$$

και μετά

$$P'_e = (E_e/c, p_1, p_2, 0)\ ,\ P'_\gamma = (E'/c)(1,\hat{n})$$

Ισχύει ότι

$$P_e + P_\gamma = P'_e + P'_\gamma$$

οπότε (α)

$$(P_e + P_\gamma - P'_\gamma)^2 = P'^{\,2}_e = -m^2c^2$$

Δηλαδή

$$-m^2c^2 + 0 + 0 + 2P_eP_\gamma - 2P_eP'_\gamma - 2P_\gamma P'_\gamma = -m^2c^2 \tag{1}$$

$$mE - mE' - (EE'/c^2)(-1 + \hat{x}\cdot\hat{n}) = 0 \tag{2}$$

$$\cos\phi_\gamma = 1 + mc^2(1/E' - 1/E) \tag{3}$$

$$E' = \frac{1}{1/E + (1-\cos\phi_\gamma)/mc^2} \tag{4}$$

(β) Ξαναγράφοντας τη διατήρηση της τετραορμής ως

$$(P_e + P_\gamma - P'_e\,2) = P'^{\,2}_\gamma = 0$$

θα έχουμε

$$-m^2c^2 + 0 - m^2c^2 + 2P_eP_\gamma - 2P_eP'_e - 2P_\gamma P'_e = 0 \tag{5}$$

$$-m^2c^2 + mE - mE_e - EE_e/c^2 + (E/c)p_1 = 0 \tag{6}$$

Αν στην παραπάνω σχέση αντικαταστήσει κανείς

$$E_e = E + mc^2 - E'$$

με E' αυτή που βρήκαμε παραπάνω ως συνάρτηση του $\cos\phi_\gamma$ και θέσει $p_1 = p\cos\phi_e = \sqrt{(E_e/c)^2 - (mc)^2}$ $\cos\phi_e$ λύνουμε και βρίσκουμε το ζητούμενο $\cos\phi_e$.

Θέμα 4: Αντικαθιστώντας στις σχέσεις μετασχηματισμού

$$\vec{E}_\parallel = E_x\hat{x} = 0 \tag{7}$$

$$\vec{E}_\parallel = \gamma(E\hat{y} + \vec{u}\times 0) = \gamma E\hat{y} \tag{8}$$

$$\vec{B}_\parallel = B_x\hat{x} = 0 \tag{9}$$

$$\vec{B}_\parallel = \gamma(0 - \frac{1}{c^2}\vec{u}\times E\hat{y}) = -\gamma\frac{uE}{c^2}\hat{z} \tag{10}$$

Αν αλλάξει πρόσημο η u απλώς αλλάζει κατεύθυνση το μαγνητικό πεδίο.

Οι εν λόγω ποσότητες είναι για το αρχικό σύστημα

$$\vec{E}\cdot\vec{B} = 0\ ,\ \vec{E}^2 - \vec{B}^2c^2 = E^2$$

και για το κινούμενο

$$\vec{E}\cdot\vec{B} = \gamma E\hat{y}\cdot -\gamma\frac{uE}{c^2}\hat{z} = 0\ ,\ \vec{E}^2 - \vec{B}^2c^2 = \gamma^2E^2 - \gamma^2(uE)^2 = E^2$$

δηλαδή παίρνουν τις ίδιες τιμές με αυτές για το ακίνητο σύστημα. (α) και (β) αδύνατα γιατί η μια από τις δύο ποσότητες τότε δεν θα διατηρούνταν. (γ) Ένα σύστημα που κινείται παράλληλα με το ηλεκτρικό πεδίο, δηλαδή στην κατεύθυνση του $\hat{y}$ μετράει το ίδιο ακριβώς ηλεκτρικό πεδίο και καθόλου μαγνητικό πεδίο.