ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

Τμήμα Φυσικής

Εξετάσεις επί Πτυχίω
στη Θεωρία της Ειδικής Σχετικότητας
29 Απριλίου 2009

Να γραφούν τα 4 από τα 5 θέματα. Σε όλα τα θέματα εργαστείτε σε σύστημα μονάδων όπου $c = 1$ για απλοποίηση των πράξεών σας. Καλή σας επιτυχία.

Θέμα Α:

1. Κατασκευάστε ένα χωροειδές (space-like) τετράνυσμα όλες οι συνιστώσες του οποίου είναι μη μηδενικές.

2. Δείξτε ότι το τετράνυσμα που κατασκευάσατε είναι πράγματι χωροειδές.

3. Κατασκευάστε τώρα ένα τετράνυσμα το οποίο είναι κάθετο στο πρώτο και δύο από τις χωρικές του συνιστώσες είναι μηδενικές. Τι είδους (χωροειδές, χρονοειδές, φωτοειδές) είναι το τετράνυσμα αυτό;

4. Βρείτε ένα μετασχηματισμό Lorentz που καθιστά τη χρονική συνιστώσα του πρώτου τετρανύσματος μηδενική.

5. Δείξτε ότι το εσωτερικό γινόμενο του πρώτου (ερώτημα 1) με το δεύτερο τετράνυσμα (ερώτημα 3) παραμένει αναλλοίωτο στον μετασχηματισμό του ερωτήματος (4). Ισχύει αυτή η αναλλοιότητα σε οποιονδήποτε μετασχηματισμό Lorentz;

Θέμα Β: Μια ακτίνα μονοχρωματικού φωτός ταξιδεύει στην κατεύθυνση $\hat{n}(\theta)$ (όπου $\hat{n}(\theta)$ είναι ένα μοναδιαίο διάνυσμα το οποίο σχηματίζει γωνία θ με τον άξονα x ενός αδρανειακού συστήματος αναφοράς). Ένας παρατηρητής ο οποίος κινείται με ταχύτητα $\vec{u} = u\hat{x}$ στο παραπάνω σύστημα συλλαμβάνει τη φωτεινή αυτή ακτίνα.

1. Ποια η σχέση των συχνοτήτων ν'/ν (παρατήρησης / εκπομπής) της φωτεινής αυτής ακτίνας;

2. Ποια γωνία φαίνεται να σχηματίζει η φωτεινή ακτίνα με τον άξονα x' για τον κινούμενο παρατηρητή;

3. Μια μακρινή φωτεινή πηγή (π.χ. ένας αστέρας) προς την οποία κατευθυνόμαστε παρουσιάζεται να έχει όλες τις χαρακτηριστικές της φασματικές γραμμές εκπομπής σε διπλάσια συχνότητα από αυτήν που μετράμε στο εργαστήριο. Ποια η ταχύτητα προσέγγισής μας στην πηγή και πόσο μεγαλύτερο ή μικρότερο φαίνεται να είναι το άνοιγμα υπό το οποίο παρατηρούμε την πηγή σε σχέση με το άνοιγμα που θα μετρούσαμε αν δεν κινούμασταν ως προς την πηγή;

Θέμα Γ: Ένα σωματίδιο μάζας $M = 28m$ το οποίο βρίσκεται αρχικά σε ηρεμία διασπάται αυθόρμητα σε δύο σωματίδια με μάζες $5m$ και $9m$ αντίστοιχα.

1. Γράψτε τις τετραορμές των σωματιδίων πριν και μετά τη διάσπαση.

2. Μπορούν τα σωματίδια που θα δημιουργηθούν να κινηθούν σε κάθετες μεταξύ τους κατευθύνσεις;

3. Ποιος ο λόγος των ταχυτήτων των δύο σωματιδίων; [Υποδ: Γράψτε την τετραορμή του ενός σωματιδίου και υψώστε στο τετράγωνο. Δίδεται ότι $28^2 = 784, 728/280 = 13/5, 840/(28 \cdot 18) = 5/3$.]

4. Πόσα m (αντί των $28m$) θα έπρεπε να είναι η μάζα του αρχικού σωματιδίου ώστε τα δύο σωματίδια που θα δημιουργηθούν να είναι ακίνητα;

5. Στην περίπτωση που το πρώτο σωματίδιο είχε τη μάζα που βρήκατε στο προηγούμενο ερώτημα τι θα συνέβαινε μετά τη διάσπαση αν το πρώτο σωματίδιο κινούνταν αρχικά με ταχύτητα V ;

Θέμα Δ: Ένα σωματίδιο με μάζα ηρεμίας m, κινείται με ταχύτητα v κατά μήκος κάποιου άξονα. Κατά μήκος του άξονα αυτού είναι παραταγμένα πλήθος ίδιων (μάζας m) ακίνητων σωματιδίων τα οποία βρίσκονται σε ίση απόσταση το καθένα από το επόμενό του. Σε κάθε κρούση που συμβαίνει δημιουργείται ένα συσσωμάτωμα.

1. Βρείτε την ταχύτητα του συσσωματώματος μετά την n-οστή κρούση σύμφωνα με τη νευτώνεια μηχανική.

2. Βρείτε την ταχύτητα του συσσωματώματος μετά την n-οστή κρούση σχετικιστικά. [Προσέξτε, σχετικιστικά δεν διατηρείται η συνολική μάζα ηρεμίας.]

3. Υπολογίστε τη μάζα ηρεμίας του συσσωματώματος που δημιουργείται μετά τη n-οστή κρούση.

4. Αν ο σχετικιστικός παράγοντας γ του αρχικού βλήματος είναι $\gamma = 11$, μετά από πόσες κρούσεις η κνητική ενέργεια του συσσωματώματος θα έχει μειωθεί στο $1/10$ της αρχικής κινητικής ενέργειας του πρώτου βλήματος ;

Θέμα Ε: Το ηλεκτρικό $\vec{E}$ και το μαγνητικό πεδίο $\vec{B}$ σε κάποιο σημείο του χώρου είναι κάθετα το ένα στο άλλο.

1. Διαλέξτε ένα καρτεσιανό σύστημα αξόνων $x-y-z$ και κατασκευάστε τον τανυστή του ηλ/κού πεδίου που αναφέρεται στο σημείο αυτό.

2. Ένας παρατηρητής κινείται με ταχύτητα 0.6 ($c = 1$) με κατεύθυνση κάθετη στα δύο πεδία. Ποια μορφή έχει τώρα ο τανυστής του ηλ/κού πεδίου για τον παρατηρητή αυτό για το ίδιο πάλι σημείο του ηλ/κού πεδίου ; [Για $v = 0.6 = 3/5$, $\gamma = 5/4$.]

3. Είναι τα δύο πεδία κάθετα μεταξύ τους και για το σύστημα του παρατηρητή αυτού ;

4. Αν το ένα από τα δύο πεδία είναι μεγαλύτερο στο αρχικό σύστημα αναφοράς (π.χ. $|\vec{E}| > |\vec{B}|$), ισχύει το ίδιο και για το σύστημα του παρατηρητή ; Θα μπορούσατε να δικαιολογήσετε την απάντησή σας χωρίς να έχετε εκτελέσει τις πράξεις των προηγούμενων ερωτημάτων για τον μετασχηματισμό των πεδίων ;

Δίδεται ο τανυστής του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & B_z & -B_y \\ -E_y & -B_z & 0 & B_x \\ -E_z & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix}$$

Λύσεις

Θέμα Α:

1. $A^\mu = (1, 2, 1, 1)$.
2. $A^\mu A_\mu = -1^2 + 2^2 + 1^2 + 1^2 = 5 > 0$
3. $B^\mu = (2, 1, 0, 0)$, που είναι χρονοειδές. Πράγματι $A^\mu B_\mu = -1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 = 0$. Γενικότερα το ορθογώνιο σε ένα χωροειδές A θα μπορούσε να είναι οτιδήποτε.
4. Αν εκτελέσουμε έναν τυποποιημένο μετασχηματισμό Lorentz θα είναι
$$A^{0'} = \gamma(v)(A^0 - vA^1) = \gamma(v)(1 - 2v) \tag{1}$$
συνεπώς για $v = 1/2$ μηδενίζεται η χρονική συνιστώσα του A.
5. Στο νέο σύστημα είναι
$$A^{\mu'} = (0, \gamma(1/2)(2 - 1/2), 1, 1)\ ,\ B^{\mu'} = (\gamma(1/2)(2 - 1/2), \gamma(1/2)(1 - (1/2)2), 0, 0). \tag{2}$$
Δηλαδή $A^{\mu'} B_{\mu'} = -0 \cdot (3/2)\gamma(1/2) + \gamma(1/2)(3/2) \cdot 0 + 0 + 0 = 0$. Με άλλα λόγια παραμένει αναλλοίωτο, ως όφειλε όντας βαθμωτό μέγεθος κάτω από οποιοδήποτε μετασχηματισμό Lorentz.

Θέμα Β: Η τετραορμή του φωτονίου είναι στο ακίνητο σύστημα (της φωτεινής πηγής)
$$P^\mu = h\nu \begin{pmatrix} 1 \\ \hat{n} \end{pmatrix} \tag{3}$$

1. $$P^{\mu'} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma V & 0 & 0 \\ -\gamma V & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} h\nu \begin{pmatrix} 1 \\ \hat{n} \end{pmatrix} = h\nu \begin{pmatrix} \gamma(1 - V\cos\theta) \\ \gamma(\cos\theta - V) \\ \sin\theta \hat{m}_{yz} \end{pmatrix} \tag{4}$$
Επομένως η νέα συχνότητα είναι $\nu' = \nu\gamma(1 - V\cos\theta)$.
2. $\tan\theta' = \sin\theta/[\gamma(\cos\theta - V)] = \tan\theta/[\gamma(1 - V/\cos\theta)]$.
3. Από το πρώτο ερώτημα $2 = \gamma(1 + V) = \sqrt{(1 + V)/(1 - V)}$, δηλαδή $V = 3/5$. Με αυτή την ταχύτητα $\gamma = 5/4$, οπότε $\tan\theta' = \tan\theta/[(5/4)(1 - 3/5/\cos\theta)]$, που για μικρές γωνίες (μακρινή πηγή) γίνεται $\theta' = \theta/((5/4)(2/5)) = 2\theta$. Φαίνεται ποιπόν η πηγή διπλάσια σε μέγεθος !

Θέμα Γ:

1. $$P^\mu_M = 28m \begin{pmatrix} 1 \\ \vec{0} \end{pmatrix}\ ,\ P^\mu_{5m} = 5m \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_1\vec{v}_1 \end{pmatrix}\ ,\ P^\mu_{9m} = 9m \begin{pmatrix} \gamma_2 \\ \gamma_2\vec{v}_2 \end{pmatrix} \tag{5}$$
2. Προκειμένου να διατηρείται η τετρορμή οι ταχύτητες $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ πρέπει να είναι αντίρροπες.
3. $$\begin{aligned} (P_M - P_{9m})^2 &= (P_{5m})^2 \Rightarrow \\ (P_M)^2 + (P_{9m})^2 - 2(P^\mu_M)(P_{9m\ \mu}) &= (P_{5m})^2 \Rightarrow \\ -28^2m^2 - 9^2m^2 + 2 \cdot 28m \cdot 9m\gamma_2 &= -5^2m^2 \Rightarrow \\ \gamma_2 = \frac{28^2 + 9^2 - 5^2}{2 \cdot 9 \cdot 28} &= 5/3 \Rightarrow v_2 = 4/5. \end{aligned} \tag{6}$$
'Ομοια $\gamma_1 = 13/5, v_1 = 12/13$.

4. Προφανώς αν $M = (9+5)m = 14m$ δεν θα περίσσευε ενέργεια για να γίνει κινητική και τα σωματίδια θα ήταν ακίνητα.

5. Αν κινούνταν η $M = 14m$ με κάποια ταχύτητα και τα σωματίδια θα δημιουργούνταν με την ταχύτητα αυτή.

Θέμα Δ:

1. Από διατήρηση ορμής
$$mv = 2mv_1 = 3mv_2 = \dots$$
Επομένως $v_n = \frac{v}{n+1}$.

2. Από διατήρηση τετραορμής
$$\begin{pmatrix} \gamma m + nm \\ \gamma mv\hat{n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Gamma_n M_n \\ \Gamma_n M_n V_n \hat{n} \end{pmatrix} \tag{7}$$
όπου $\gamma = 1/\sqrt{1-v^2}$, ο δείκτης $_n$ ανεφέρεται στα μετά τη n-οστή κρούση και το μοναδιαίο $\hat{n}$ δηλώνει την κατεύθυνση στην οποία γίνονται όλες οι κινήσεις. Έτσι διαιρώντας χωρικό προς χρονικό μέρος της τετραορμής βρίσκουμε
$$V_n = \frac{\gamma v}{\gamma + n}$$

3. Υψώνοντας τη συνολική τετραορμή μετά από n κρούσεις στο τετράγωνο έχουμε
$$M_n^2 = m^2[(n+\gamma)^2 - \gamma^2 v^2] = m^2[n^2 + 1 + 2\gamma n]$$

4. Η αρχική κινητική ενέργεια είναι $T_0 = m(\gamma - 1) = 10m$. Μετά από n κρούσεις θα είναι $T_n = M_n(\Gamma_n - 1) = m(\gamma + n) - m\sqrt{n^2 + 1 + 2\gamma n} = m(11 + n - \sqrt{n^2 + 1 + 22n})$. Για να είναι η τελευταία το 1/10 της πρώτης θα πρέπει
$$11 + n - \sqrt{n^2 + 1 + 22n} = \frac{10}{10} = 1 \Rightarrow \dots \Rightarrow n = \frac{99}{2}$$
Επομένως μετά από 50 κρούσεις θα έχει πέσει η ενέργεια κάτω από το 1/10 της αρχικής.

Θέμα Ε:

1. Αν επιλέξουμε τον άξονα y κατά μήκος του $\vec{E}$ και τον z κατά μήκος του $\vec{B}$, τότε
$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & B & 0 \\ -E & -B & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Ο μετασχηματισμός Lorentz για τον παρατηρητή αυτό είναι
$$L^{\mu}_{\nu} = \begin{pmatrix} 5/4 & \mp 3/4 & 0 & 0 \\ \mp 3/4 & 5/4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
Τα δύο πρόσημα εξαρτώνται αν η κίνηση γίνεται κατά μήκος του x, ή ανάποδα του $-x$. Εκτελώντας τον μετασχηματισμό
$$F'^{\kappa\lambda} = L^{\kappa}_{\mu} F^{\mu\nu} L^{\lambda}_{\nu} =$$
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & (5E \pm 3B)/4 & 0 \\ 0 & 0 & (5B \mp 3E)/4 & 0 \\ -(5E \pm 3B)/4 & -(5B \mp 3E)/4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{8}$$

3. Και πάλι τα δύο πεδία είναι στους άξονες y', z' αντίστοιχα, επομένως διατηρείται η ορθογωνιότητά τους.

4. $E' = (5E \pm 3B)/4 > (5B \mp 3E)/4 = B'$. Η ανισότητα διατηρείται όπως το περιμένει κανείς από το ένα από τα δύο αναλλοίωτα του ηλ/κου πεδίου: $E^2 - B^2$.