ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

Τμήμα Φυσικής

Εξετάσεις στη Θεωρία της Ειδικής Σχετικότητας

8 Σεπτεμβρίου 2008

Να απαντήσετε στα 4 από τα ακόλουθα 5 προβλήματα.

Θέμα 1: Το γεγονός Β βρίσκεται εντός του μελλοντικού κώνου φωτός του γεγονότος Α και το γεγονός Γ βρίσκεται εντός του μελλοντικού κώνου φωτός του γεγονότος Β. (α) Το γεγονός Γ πού βρίσκεται αναφορικά με τον κώνο φωτός του γεγονότος Α; (β) Τι είδους τετράνυσμα είναι το ΑΓ ;(γ) Θα μπορούσε το γεγονός Γ να είναι η κατάληξη ενός φαινομένου το οποίο έχει ώς αίτιο το γεγονός Α; (δ) Μπορούμε σε κάποιο σύστημα αναφοράς να παρατηρήσουμε τα δύο γεγονότα, Α, Γ, να συμβαίνουν ταυτόχρονα; Εξηγήστε. (ε) Τα τρία γεγονότα έχουν διαφορετικές θέσεις και χρονικές στιγμές στο σύστημα Σ. Όμως ισχύει ότι $\Delta\vec{x}_{\rm AB}\perp\Delta\vec{x}_{\rm B\Gamma}$ και $|\Delta\vec{x}_{\rm AB}| = |\Delta\vec{x}_{\rm B\Gamma}|$ (όπου το σύμβολο $\vec{\ }$ αναφέρεται στο χωρικό μέρος του τετρανύσματος). Αν ένα σύστημα Σ_1 κινούμενο με ταχύτητα $\vec{v}_1$ παρατηρεί τα γεγονότα Α και Β να συμβαίνουν στην ίδια χωρική θέση και ένα άλλο σύστημα Σ_2 κινούμενο με ταχύτητα $\vec{v}_2$ παρατηρεί τα γεγονότα Β και Γ να συμβαίνουν στην ίδια χωρική θέση, να βρεθεί το μέτρο της ταχύτητας $|\vec{v}_3|$ ενός συστήματος Σ_3 στο οποίο τα γεγονότα Α και Γ παρατηρούνται να συμβαίνουν στην ίδια χωρική θέση (γνωστές θεωρούνται μόνο οι $|\vec{v}_1|, |\vec{v}_2|$).

Θέμα 2: Ένα ακίνητο σωματίδιο μάζας M διασπάται αυθόρμητα σε δύο γνωστά σωματίδια με μάζες m_1, m_2. (α) Ποια ποσότητα είναι μεγαλύτερη η M ή η $m_1 + m_2$; Αν υπάρχει υπόνοια ότι δημιουργείται και ένα τρίτο σωματίδιο, μηδενικής μάζας, το οποίο όμως δεν είναι ανιχνεύσιμο, εξακολουθεί να ισχύει η παραπάνω συσχέτιση των μαζών M, m_1, m_2; (β) Πώς κινούνται τα δύο σωματίδια (αν είναι μόνο δύο) μετά τη διάσπαση; Αν δημιουργείται και τρίτο σωματίδιο αλλάζουν τα πράγματα όσον αφορά στην κίνηση των δύο πρώτων; (γ) Τι κινητική ενέργεια θα περιμένατε να έχει το σωματίδιο m_1 (αν δημιουργούνταν τα 2 μόνο σωματίδια); Εκτελώντας πολλά τέτοια πειράματα αυθόρμητης διάσπασης του M παρατηρούμε το σωματίδιο 1 να εμφανίζεται με ένα εύρος κινητικών ενεργειών και όχι με μια συγκεκριμένη κινητική ενέργεια. Τι θα συμπεραίνατε σχετικά με το αν δημιουργούνται μόνο δύο σωματίδια; (δ) Δείξτε ότι στην περίπτωση που δημιουργούνται τα 3 προαναφερθέντα σωματίδια και το m_1 δημιουργείται με μηδενική κινητική ενέργεια, τότε το τρίτο σωματίδιο θα έχει ενέργεια

$$E_3 = \frac{(M - m_1)^2 - m_2^2}{2(M - m_1)}$$

Θέμα 3: Δύο φωτεινές σημειακές πηγές οι οποίες εκπέμπουν φωτόνια με συχνότητες f_1, f_2 (στα αντίστοιχα ιδιοσυστήματα των πηγών) και κινούνται επί του άξονα x με σταθερές ταχύτητες $\vec{v}_1 = v_1\hat{x}$, $\vec{v}_2 = -v_2\hat{x}$ (όπως αυτές μετριούνται ως προς το σύστημα Σ). Θέλουμε να ελέγξουμε αν είναι δυνατό να υπάρχει παρατηρητής ο οποίος κινείται και αυτός επί του άξονα x και ο οποίος παρατηρεί συνεχώς τα φωτόνια που εκπέμπουν οι δύο πηγές να έχουν την ίδια συχνότητα. (α) Υπολογίστε τη συχνότητα των φωτονίων από τις δύο πηγές όπως τις μετράει ένας παρατηρητής ο οποίος είναι ακίνητος ως προς το Σ και στέκεται ανάμεσα στις δύο πηγές. (β) Ένας δεύτερος παρατηρητής κινείται επί τού άξονα x με ταχύτητα

$\vec{v} = v\hat{x}$ ως προς το Σ και βρίσκεται και αυτός ανάμεσα στις πηγές. Τι συχνότητες των φωτεινών πηγών παρατηρεί αυτός; Βρείτε την ταχύτητα v ώστε να βλέπει τις δύο συχνότητες ίδιες. (γ) Ποιός είναι ο ελάχιστος δυνατός λόγος των συχνοτήτων f_1/f_2 έτσι ώστε ο παρατηρητής που βλέπει τα φωτόνια να έχουν ίδια συχνότητα να τα βλέπει για πάντα έτσι (δηλαδή να μην καταφέρει ποτέ να προσπεράσει τη φωτεινή πηγή 1 και έτσι να βρίσκεται για πάντα ανάμεσα στις 2 πηγές);

Θέμα 4: Σώμα μάζας M κινείται με ταχύτητα $\vec{v} = v\hat{x}$ με $v > 0$. Μπροστά του (προς την κατεύθυνση της κίνησής του) βρίσκεται ένα τοίχωμα κάθετο στον άξονα x το οποίο κινείται και αυτό με ταχύτητα $\vec{U} = U\hat{x}$. (α) Ποια η ταχύτητα ανάκρουσης του σώματος (μετά την ελαστική του κρούση στο τοίχωμα) σύμφωνα με τη νευτώνεια μηχανική; (β) Ποια η ταχύτητα ανάκρουσης του σώματος (μετά την ελαστική του κρούση στο τοίχωμα) σύμφωνα με τη σχετικότητα; (γ) Ποια είναι η συνθήκη έτσι ώστε το ανακρουόμενο σωματίδιο να αλλάξει φορά κίνησης, κατά Νεύτωνα; (δ) Ποια είναι η συνθήκη έτσι ώστε το ανακρουόμενο σωματίδιο να αλλάξει φορά κίνησης, θεωρώντας σχετικιστική την κρούση; (ε) Δείξτε ότι οι απαντήσεις στα ερωτήματα (β) και (δ) συμπίπτουν με εκείνες των ερωτημάτων (α) και (γ) αντίστοιχα στο όριο των κλασικών μη σχετικιστικών ταχυτήτων.

Θέμα 5: Δύο διαστημικά σκάφη Σ' και Σ τα οποία εξερευνούν μια περιοχή του Διαστήματος κινούμενα με διαφορετικές ταχύτητες επικοινωνούν και στέλνουν το ένα στο άλλο τις μετρήσεις τους για το ηλεκτρικό και το μαγνητικό πεδίο της περιοχής. Το Σ' κατέγραψε $\vec{E}' = A(1,1,0), \vec{B}' = A(0,0,1)$ και το Σ κατέγραψε $\vec{E} = A(0,1,0), \vec{B} = (0,0,0)$. [Και τα δύο είδη πεδίων έχουν εκφραστεί σε ίδιες μονάδες, θεωρώντας $c = 1$.] (α) Ελέγξτε αν τα αποτελέσματα των δύο σκαφών είναι συμβατά μεταξύ τους, υπολογίζοντας τα αναλλοίωτα του ηλ/κού πεδίου. (β) Δεδομένης της μορφής του μαγνητικού πεδίου $\vec{B}'$ καθώς και των $\vec{E}, \vec{B}$, δείξτε ότι δεν μπορεί η ταχύτητα κίνησης του Σ' ως προς το Σ να έχει συνιστώσα κατά τον $\hat{z}$ άξονα του Σ. (γ) Θεωρήστε, λοιπόν, ότι η ταχύτητα του Σ' ως προς το Σ έχει τη μορφή $\vec{v} = v(n_x\hat{x}_2 + n_y\hat{y}_2)$ (όπου η παράσταση εντός της παρένθεσης δηλώνει το μοναδιαίο διάνυσμα στην κατεύθυνση κίνησης του Σ' και n_x, n_y είναι οι συνιστώσες του μοναδιαίου αυτού διανύσματος στους αντίστοιχους άξονες). Μπορείτε να βρείτε τιμές για τις $v_x = vn_x, v_y = vn_y$ έτσι ώστε το ηλεκτρικό πεδίο του Σ' να είναι το δοσμένο, ή καταλήγετε σε αδύνατη λύση; (δ) Υποθέστε τώρα ότι το σκάφος Σ' κινούνταν σε σχέση με το Σ με ταχύτητα $\vec{v} = 1/\sqrt{2}\hat{z}$. Βρείτε το ηλεκτρικό και το μαγνητικό πεδίο που θα μέτραγε το σκάφος Σ' δεδομένων των πεδίων που μετράει το Σ. (ε) Μπορείτε να σκεφθείτε μια απλή στροφή των αξόνων του Σ' σε σχέση με αυτούς του Σ ώστε οι μετρήσεις του Σ' να είναι αυτές που δίνονται αρχικά.

Δίδονται οι τύποι μετασχηματισμού των πεδίων (σε μονάδες $c = 1$).

$$\vec{E'}_{\parallel} = \vec{E}_{\parallel}, \qquad \vec{E'}_{\perp} = \gamma(\vec{E}_{\perp} + \vec{u} \times \vec{B})$$
$$\vec{B'}_{\parallel} = \vec{B}_{\parallel}, \qquad \vec{B'}_{\perp} = \gamma(\vec{B}_{\perp} - \vec{u} \times \vec{E})$$

Καλή σας επιτυχία

Λύσεις

Θέμα 1: (α) Εντός του μελλοντικού κώνου φωτός του Α. (β) Είναι χρονοειδές. (γ) Ναι αφού είναι εντός του κώνου φωτός. (δ) ΄Οχι αφού για τα χρονοειδή δεν είναι είναι δυνατό να αποκτήσουν μηδενική χρονική συνιστώσα. (ε) Ισχύει ότι

$$\Delta\vec{x}_{\rm AB}/\Delta t_1 = \vec{v}_1 \ , \ \Delta\vec{x}_{\rm B\Gamma}/\Delta t_2 = \vec{v}_2$$

οπότε

$$\vec{v}_3 = \frac{\Delta\vec{x}_{\rm AB} + \Delta\vec{x}_{\rm B\Gamma}}{\Delta t_1 + \Delta t_2} = \frac{a(\hat{n}_1 + \hat{n}_2)}{a/|\vec{v}_1| + a/|\vec{v}_2|}$$

όπου $\vec{x}_{\rm AB} = a\hat{n}_1$, $\Delta\vec{x}_{\rm B\Gamma} = a\hat{n}_2$ με $\hat{n}_1 \perp \hat{n}_2$. Συνολικά

$$|\vec{v}_3| = \frac{\sqrt{2}}{1/|\vec{v}_1| + 1/|\vec{v}_2|} = \sqrt{2}\frac{|\vec{v}_1||\vec{v}_2|}{|\vec{v}_1| + |\vec{v}_2|}$$

Θέμα 2: (α) Η M αφού $M = E_1 + E_2 \geq m_1 + m_2$. Η παραπάνω ανισότητα ισχύει και με την ύπαρξη του τρίτου άμαζου σωματιδίου αφού $M = E_1 + E_2 + {}_3 > E_1 + E_2 \geq m_1 + m_2$. (β) Σε αντίθετες κατευθύνσεις με ίδιου μέτρου ορμές. Το τρίτο σωματίδιο θα έχει ορμή οπότε παύουν οι δύο πρώτες ορμές να είναι ίσες και αντίθετες. (γ)

$$\begin{pmatrix} M \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_1 + E_2 \\ \vec{p}_1 + \vec{p}_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} M - E_1 \\ -\vec{p}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_2 \\ \vec{p}_2 \end{pmatrix}$$

και υψώνοντας τις τετραορμές αυτές στο τετράγωνο παίρνουμε

$$(M - E_1)^2 - p_1^2 = m_2^2 \Rightarrow M^2 + m_1^2 - 2ME_1 = m_2^2 \Rightarrow T_1 = E_1 - m_1 = \frac{(M - m_1)^2 - m_2^2}{2M}$$

Από το παραπάνω αποτέλεσμα βλέπουμε ότι αν παρατηρούμε ολόκληρο εύρος κινητικών ενεργειών δεν είναι δυνατόν να υπάρχουν 2 μόνο σωματίδια γιατί τότε θα είχαμε μόνο μια παρατηρούμενη ενέργεια. (δ) Θα έχουμε τότε

$$\begin{pmatrix} M \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} E_2 \\ \vec{p}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} E_3 \\ E_3\hat{n} \end{pmatrix}$$

Απομονώνοντας την τετραορμή του 2 και υψώνοντας στο τετράγωνο θα έχουμε

$$(M - m_1 - E_3)^2 - E_3^2 = m_2^2$$

και λύνοντας ως προς E_3 βρίσκουμε

$$E_3 = \frac{(M - m_1)^2 - m_2^2}{2(M - m_1)}$$

Θέμα 3: (α) Η τετραορμή των δύο φωτονίων στο ιδιοσύστημά τους είναι

$$hf_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \ , \ hf_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

όπου η πηγή 1 βρίσκεται δεξιά και εκπέμπει φωτόνια προς τα αριστερά , ενώ η 2 βρίσκεται αριστερά και εκπέμπει φωτόνια προς τα δεξιά. Επειδή η 1 κινείται με ταχύτητα $v_1\hat{x}$ ο μετασχηματισμός Lorentz που κατασκευάζει την τετραορμή των φωτονίων της στο Σ είναι αυτός που αντιστοιχεί σε ταχύτητα $-v_1\hat{x}$.

$$hf_1'\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_1 & +\gamma_1 v_1 \\ +\gamma_1 v_1 & \gamma_1 \end{pmatrix} hf_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = hf_1\gamma_1(1-v_1)\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

επομένως

$$f_1' = f_1\sqrt{\frac{1-v_1}{1+v_1}}$$

Αντίστοιχα η 2 κινείται με ταχύτητα $-v_2\hat{x}$ και ο μετασχηματισμός Lorentz που κατασκευάζει την τετραορμή των φωτονίων της στο Σ είναι αυτός που αντιστοιχεί σε ταχύτητα $+v_2\hat{x}$:

$$hf_2'\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_2 & -\gamma_2 v_2 \\ -\gamma_2 v_2 & \gamma_2 \end{pmatrix} hf_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = hf_2\gamma_2(1-v_2)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

επομένως

$$f_2' = f_2\sqrt{\frac{1-v_2}{1+v_2}}$$

(β) Εκτελώντας τώρα ένα μετασχηματισμό με ταχύτητα v βρίσκουμε

$$hf_1''\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma v \\ -\gamma v & \gamma \end{pmatrix} hf_1\sqrt{\frac{1-v_1}{1+v_1}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

και

$$hf_2''\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma v \\ -\gamma v & \gamma \end{pmatrix} hf_2\sqrt{\frac{1-v_2}{1+v_2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

και μετά από πράξεις βρίσκουμε

$$f_1'' = f_1\gamma(1+v)\sqrt{\frac{1-v_1}{1+v_1}} = f_1\sqrt{\frac{1+v}{1-v}}\sqrt{\frac{1-v_1}{1+v_1}}$$

και

$$f_2'' = f_2\gamma(1-v)\sqrt{\frac{1-v_2}{1+v_2}} = f_2\sqrt{\frac{1-v}{1+v}}\sqrt{\frac{1-v_2}{1+v_2}}$$

Για να είναι ίδιες οι δύο παρατηρούμενες συχνότητες

$$\frac{1-v}{1+v} = \frac{f_1}{f_2}\sqrt{\frac{1-v_1}{1+v_1}\frac{1+v_2}{1-v_2}}$$

Απ' όπου λύνουμε και βρίσκουμε τη ζητούμενη v. Ότι τιμή και να έχει το δεξί μέλος υπάρχει λύση αφού το αριστερό μέλος παίρνει τιμές από 0 ($v=1$) έως $+\infty$ ($v=-1$). (γ) Για να είναι $v \le v_1$ ώστε ο παρατηρητής να βρίσκεται πάντα πίσω από την 1 πηγή

$$\frac{f_1}{f_2}\sqrt{\frac{1-v_1}{1+v_1}\frac{1+v_2}{1-v_2}} = \frac{1-v}{1+v} \ge \frac{1-v_1}{1+v_1} \Rightarrow \frac{f_1}{f_2} \ge \sqrt{\frac{1-v_1}{1+v_1}\frac{1-v_2}{1+v_2}}$$

Θέμα 4: (α) Στο σύστημα του τοίχου το σώμα κινείται με ταχύτητα $\vec{v}_{\mathrm{T}} = (v-U)\hat{x}$. Μετά την κρούση η ταχύτητα αυτή αντιστρέφεται $\vec{v}_{\mathrm{T}}' = -(v-U)\hat{x}$, οπότε στο αρχικό σύστημα η κίνηση μετά την κρούση είναι $\vec{v}' = \vec{v}'_{\mathrm{T}} + U\hat{x} = (2U - v)\hat{x}$. (β) Η τετραορμή του σώματος είναι (όλες οι κινησεις θα περιορίζονται στον άξονα x οπότε θα περιοριστούμε σε 2 συνιστώσες)

$$p^{\mu} = \begin{pmatrix} \gamma(v)M \\ \gamma(v)Mv \end{pmatrix}$$

Στο σύστημα του τοίχου αυτή είναι

$$p^{\mu}_{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} \gamma(U) & -\gamma(U)U \\ -\gamma(U)U & \gamma(U) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma(v)M \\ \gamma(v)Mv \end{pmatrix} = \gamma(U)\gamma(v)M \begin{pmatrix} 1 - Uv \\ v - U \end{pmatrix}.$$

Μετά την κρούση η τετραορμή αυτή αντιστρέφεται χωρικά, οπότε

$$p'^{\mu}_{\mathrm{T}} = \gamma(U)\gamma(v)M \begin{pmatrix} 1 - Uv \\ -v + U \end{pmatrix}.$$

Στο αρχικό σύστημα η τετραορμή μετά την κρούση είναι

$$\begin{aligned} p'^{\mu} &= \begin{pmatrix} \gamma(U) & \gamma(U)U \\ \gamma(U)U & \gamma(U) \end{pmatrix} \gamma(U)\gamma(v)M \begin{pmatrix} 1 - Uv \\ -v + U \end{pmatrix} \\ &= \gamma(U)^2\gamma(v)M \begin{pmatrix} (1 - Uv) + U(U - v) \\ U(1 - Uv) + (-v + U) \end{pmatrix} \\ &= \gamma(U)^2\gamma(v)M \begin{pmatrix} 1 - 2Uv + U^2 \\ 2U - v - U^2 v \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{1}$$

Η ταχύτητα λοιπόν του σώματος είναι

$$\vec{v}' = \frac{2U - v - U^2 v}{1 - 2Uv + U^2}\hat{x}$$

(γ) Σύμφωνα με το (α) ερώτημα για να είναι $v' < 0$ πρέπει $2U - v < 0$ επομένως η $v > 2U$. (δ) Ισχύει ότι $1 - 2Uv + U^2 > 1 - 2U + U^2 = (1 - U)^2 > 0$, οπότε μας ενδιαφέρει μόνο το πρόσημο του αριθμητή που δίδει την ταχύτητα. Θα είναι $v' < 0$ αν $v > \frac{2U}{1+U^2}$. (ε) Στο όριο $U, v << 1$ τα σχετικιστικά αποτελέσματα αν παραλείψουμε τους τετραγωνικούς και ανωτερους όρους των ταχυτήτων οδηγούμαστε ακριβώς στα νευτώνεια αποτελέσματα.
Θέμα 5: (α) Τα αναλοίωτα είναι τα βαθμωτά $\vec{E} \cdot \vec{B}$ και $\vec{E}^2 - \vec{B}^2$ που εύκολα διαπιστώνουμε ότι και για τα δύο σκάφη είναι 0 και A^2 αντίστοιχα. (β) ῎Εστω $v_z \neq 0$. Τότε

$$\begin{aligned} A(0,0,1) &= \vec{B}' \\ &= \vec{B}'_{\|} + \vec{B}'_{\perp} \\ &= \vec{B}_{\|} + \gamma(\vec{B}_{\perp} - \vec{v} \times \vec{E}) \\ &= \vec{0} + \gamma(\vec{0} - \vec{v} \times A(0,1,0)) \\ &= -\gamma A v(-n_z, 0, n_x) \end{aligned} \tag{2}$$

Επομένως πρέπει $n_z = 0$ και $\gamma v n_x = -1$. (γ)

$$\begin{aligned} A(1,1,0) &= \vec{E}' \\ &= \vec{E}'_{\|} + \vec{E}'_{\perp} \\ &= \vec{E}_{\|} + \gamma(\vec{E}_{\perp} + \vec{v} \times \vec{B}) \\ &= A(0,1,0) \cdot (n_x, ny, 0)\hat{n} + \gamma(A(0,1,0) - A(0,1,0) \cdot (n_x, ny, 0)\hat{n}) \\ &= \hat{n} A n_y (1 - \gamma) + \gamma A(0,1,0) \end{aligned} \tag{3}$$

Επομένως πρέπει $n_x n_y(1-\gamma)=1$ και $n_y^2=1$. Αυτές όμως είναι ασύμβατες αφού η τελευταία δίνει $n_y=1 \Rightarrow n_x=n_z=0$ που οδηγεί σε άτοπο την πρώτη σχέση. Επομένως το συγκεκριμένο πρόβλημα δεν έχει λύση. (δ) Στην περίπτωση αυτή βρίσκουμε ($\vec{v}=1/\sqrt{2}\hat{z}, \gamma=\sqrt{2}$)

$$\vec{B}'=A(1,0,0)\ ,\ \vec{E}'=\sqrt{2}A(0,1,0)$$

(ε) Βλέπουμε ότι τα νέα αυτά πεδία αν και δεν είναι τα αρχικά δοσμένα έχουν το ίδιο μέτρο με αυτά. ΄Ετσι αν στρέψουμε πρώτα το σύστημα των αξόνων κατά 90° γύρω από τον άξονα $\hat{y}$ το μαγνητικό πεδίο θα γίνει $A(0,0,1)$ αφού ο z άξονας θα καταλάβει τη θέση του x, ενώ το ηλεκτρικό πεδίο δεν θα μεταβληθεί αφού είναι στον y άξονα. Τέλος με μια στροφή γύρω από τον νέο z κατά 45° θα μοιράσει το ηλεκτρικό πεδίο εξίσου στους άξονες x, y και το πεδίο θα πάρει τη μορφή $A(1,1,0)$. Τα πεδία αυτά που βρήκαμε είναι τα δοσμένα και επομένως συμπεραίνουμε ότι τα δύο οχήματα απλώς δεν είχαν τους άξονές τους παράλληλα όταν έκαναν τις μετρήσεις και το όχημα Σ' κινείται κατά τον άξονα $\hat{z}$ με ταχύτητα $1/\sqrt{2}$ ως προς το Σ.