

**ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΣΤΗ ΘΕΩΡΙΑ ΤΗΣ ΕΙΔΙΚΗΣ ΣΧΕΤΙΚΟΤΗΤΑΣ**  
**Ιούνιος 2003**

1. Στο ΣΚΦ  $\Sigma$  δύο φωτεινά σήματα εκπέμπονται από την αρχή  $x = 0$  τη χρονική στιγμή  $t = 0$  προς αντίθετες διευθύνσεις κατά μήκος του άξονα  $x$ . Την ίδια χρονική στιγμή ( $t = 0$ ) στο  $\Sigma$  επίπεδα κάτοπτρα κάθετα στον άξονα  $x$  που ηρεμούν στις θέσεις  $x = \pm d$  αρχίζουν να κινούνται προς τη θετική κατεύθυνση του άξονα  $x$  παραμένοντας διαρκώς κάθετα στον άξονα  $x$  και με κοινή ταχύτητα. Εάν τα φωτεινά σήματα μετά την ανάκλασή τους στα κάτοπτρα συναντώνται στη θέση  $x_0$  τη χρονική στιγμή  $t_0$  υπολογίστε την ταχύτητα των κατόπτρων στο  $\Sigma$ .

2. Στο ΣΚΦ  $\Sigma$  θεωρούμε τις συντεταγμένες  $x', y', z'$  οι οποίες σχετίζονται με τις Ευκλείδειες Καρτεσιανές συντεταγμένες  $x, y, z$  με τις σχέσεις:

$$x' = \frac{1}{15}(5x - 14y + 2z), \quad y' = -\frac{1}{3}(2x + y + 2z) \quad z' = \frac{1}{15}(10x + 2y - 11z)$$

- α. Υπολογίστε την Ιακωβιανή του μετασχηματισμού
- β. Δείξτε ότι ο μετασχηματισμός  $(x, y, z) \rightarrow (x', y', z')$  είναι ένας Ευκλείδειος ορθογώνιος μετασχηματισμός.
- γ. Γράψτε τη μετρική Lorentz στις συντεταγμένες  $x', y', z'$ .
- δ. Το τετράνυσμα  $A^i$  στο  $\Sigma$  έχει ανάλυση  $A_i = (-2, 1, 1, 0)_\Sigma$ . Δείξτε ότι το  $A^i$  είναι ένα χωρικό τετράνυσμα και υπολογίστε την ταχύτητα του  $A^i$  στο  $\Sigma$ . Εάν το  $A^i$  είναι η τετραορμή ενός σωματιδίου υπολογίστε την ενέργεια του σωματιδίου στο  $\Sigma$ .
- ε. Θεωρείστε ένα άλλο ΣΚΦ  $\Sigma'$  το οποίο συνδέεται με το  $\Sigma$  με τον τυποποιημένο τρόπο με ταχύτητα  $u = c/n$  όπου  $n$  είναι ένας φυσικός αριθμός κατά μήκος του κοινού άξονα  $y, y'$ . Υπολογίστε τις συνιστώσες του τετρανύσματος  $A^i$  στο  $\Sigma'$ .

3. α. Δείξτε ότι ένας αντισυμμετρικός τανυστής 2ης τάξης παραμένει αντισυμμετρικός κάτω από τη δράση ενός μετασχηματισμού Lorentz. [Υπόδειξη: Θεωρείστε το μετασχηματισμό τυπικά ως πολλαπλασιασμό πινάκων].

β. Ξεκινώντας από την έκφραση του τανυστή του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου  $F_{ij}$  σε ένα ΣΚΦ  $\Sigma$  υπολογίστε τον τανυστή  $F^{ij}$  στο  $\Sigma$  και κατόπιν την ποσότητα  $F^{ij}F_{ij}$ . Εξηγήστε γιατί η ποσότητα αυτή είναι αναλλοίωτη κάτω από μετασχηματισμούς Lorentz.

γ. Σε ένα ΣΚΦ  $\Sigma$  υπάρχει μόνο ηλεκτρικό πεδίο  $\mathbf{E}$ . Υπάρχει άλλο ΣΚΦ  $\Sigma'$  στο οποίο υφίσταται μόνο μαγνητικό πεδίο και εάν ναι ποια είναι η ταχύτητα

του  $\Sigma'$  ως προς το  $\Sigma$ ;

δ. Έστω το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο το οποίο στο ΣΚΦ  $\Sigma$  έχει  $\mathbf{E} \perp \mathbf{B}$  και  $|\mathbf{E}| = |\mathbf{B}|c$ . Υπολογίστε πόσο θα στρίψει το επίπεδο που ορίζουν τα  $\mathbf{E}, \mathbf{B}$  σε ένα ΣΚΦ το οποίο κινείται ως προς το  $\Sigma$  παράλληλα ως προς ένα από τα πεδία με ταχύτητα  $u$ .

Δίδονται οι σχέσεις:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}'_{\parallel} &= \mathbf{E}_{\parallel} \\ \mathbf{E}'_{\perp} &= \gamma(\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}) \\ \mathbf{B}'_{\parallel} &= \mathbf{B}_{\parallel} \\ \mathbf{B}'_{\perp} &= \gamma(\mathbf{B} - \frac{1}{c}\mathbf{u} \times \mathbf{E}) \end{aligned}$$

και

$$F_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & E_x/c & E_y/c & E_z/c \\ & 0 & B_z & -B_y \\ & & 0 & B_x \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

4. Σωματίδιο μάζας  $m$  κινείται κατά μήκος του άξονα  $x$  ΣΚΦ  $\Sigma$  κάτω από την επίδραση του δυναμικού  $V(x) = \frac{2mc^2A}{(A-x)^2}$  όπου  $A = \text{σταθερά}$ .

α. Υπολογίστε την τετραδύναμη στο σωματίδιο καθώς και την τετραεπιτάχυνση του σωματιδίου. Γράψτε την εξίσωση κίνησης του σωματιδίου σε μορφή τετρανυσμάτων.

β. Εάν το σωματίδιο εκκινεί από την ηρεμία από την αρχή του  $\Sigma$  τη χρονική στιγμή  $t = 0$  του  $\Sigma$  υπολογίστε την τροχιά του σωματιδίου στη μορφή  $t = t(x)$ .

Υπόδειξη:  $\int \frac{x dx}{\sqrt{ax+b}} = \frac{2(ax-2b)}{3a^2} \sqrt{ax+b}$ .

5. Σωματίδιο συγκρούεται με άλλο ακίνητο σωματίδιο ίσης μάζας. οπότε τα δύο σωματίδια εξαϋλώνονται. Μετά τη σύγκρουση παράγονται δύο φωτόνια ίσης συχνότητας  $\nu$  τα οποία κινούνται στο επίπεδο  $x-y$ , εκατέρωθεν του άξονα  $x$ , σχηματίζοντα με αυτόν ίσες γωνίες μέτρου  $\phi = 45^\circ$ .

- (α) Προσδιορίστε την ταχύτητα του κέντρου ορμής των φωτονίων (διάνυσμα)
  - (β) Προσδιορίστε την ταχύτητα του κέντρου ορμής των σωματιδίων (διάνυσμα)
  - (γ) Προσδιορίστε την ταχύτητα και την ορμή του σωματιδίου βλήματος
  - (δ) Υπολογίστε τη συχνότητα ενός φωτονίου στο σύστημα κέντρου ορμής (ε)
- Μπορείτε να εκτιμήσετε τη συχνότητα του άλλου φωτονίου (στο ίδιο σύστημα);