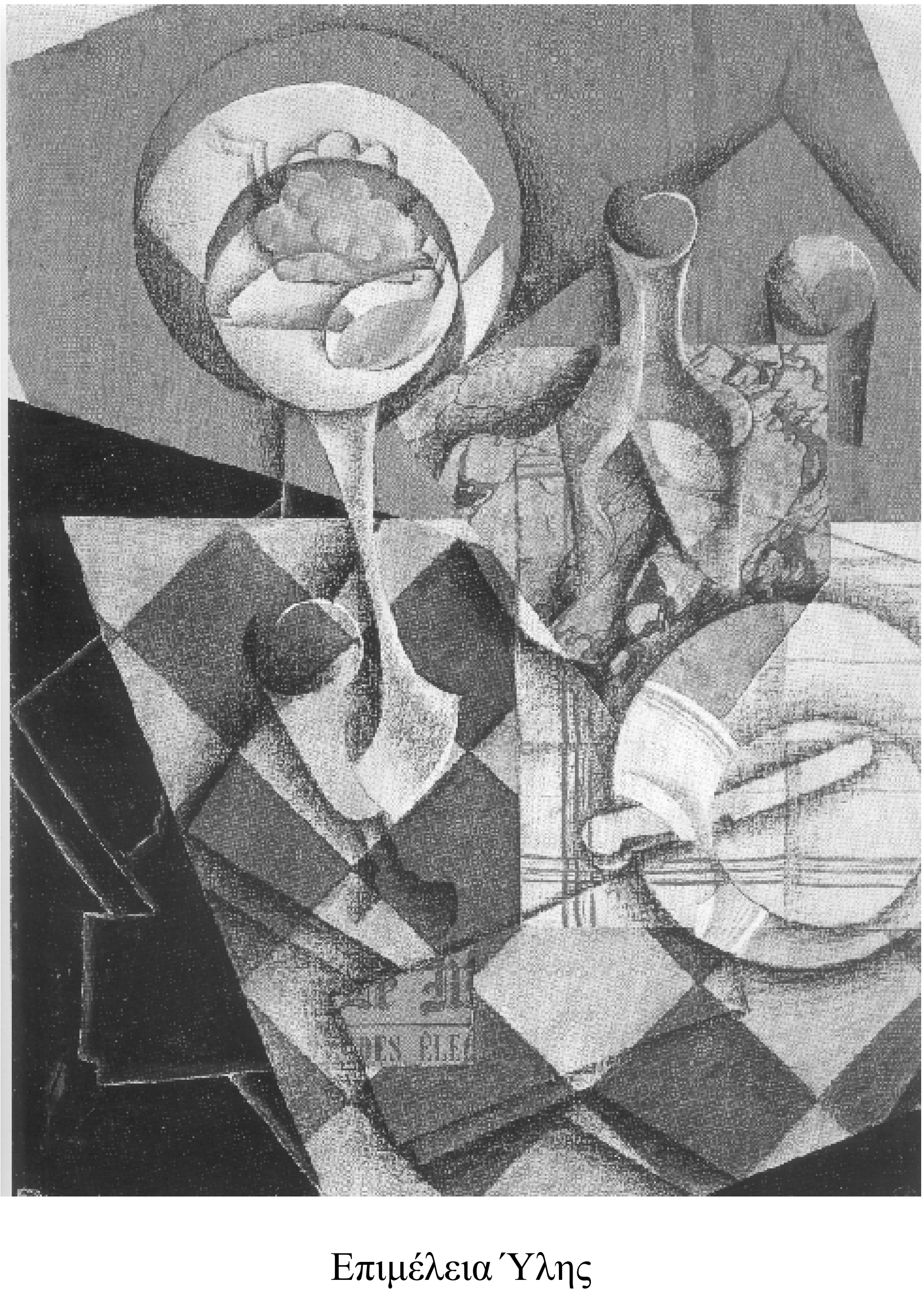
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΦΥΣΙΚΗΣ

ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ ΕΙΔΙΚΗΣ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΗΣ ΣΧΕΤΙΚΟΤΗΤΑΣ



Επιμέλεια Ύλης
Θ.Χριστοδουλάκης
Ε. Κορφιάτης

ΑΘΗΝΑ 2002

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Ευκλείδια Αιτήματα

- Ἠιτήσθω ἀπό παντός σημείου ἐπί πᾶν σημεῖον εὐθεῖαν γραμμήν ἀγαγεῖν.
- Καί πεπερασμένην εὐθεῖαν κατά τό συνεχές ἐν εὐθείας ἐκβαλεῖν.
- Καί παντί κέντρῳ καί διαστήματι κύκλον γράφεται.
- Καί πάσας τάς ὀρθάς γωνίας ἴσας ἀλλήλαις εἶναι.
- Καί ἐάν εἰς δύο εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα τά ἐντός καί ἐπί τά αὐτά μέρη γωνίας δύο ορθῶν ἐλλάσσονας ποιῇ, ἐκβαλλομένας τάς δύο εὐθείας ἐπ' ἂπειρον συμπίπτειν ἐφ' ἂ μέρη εἰσίν αἱ τῶν δύο ὀρθῶν ἐλλάσσονες.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1.
ΠΡΟΑΠΑΙΤΟΥΜΕΝΕΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΕΣ ΓΝΩΣΕΙΣ

1.1. Υπενθυμίσεις από την θεωρία πινάκων

Έστω $A=(A_{ij})$ ένας μxν πίνακας. Ο πρώτος δείκτης (i) παίρνει τιμές από 1… μ και δηλώνει την γραμμή στην οποία βρίσκεται το στοιχείο A_{ij} και ο δεύτερος (j) παίρνει τιμές από 1….ν και δηλώνει την στήλη. Έτσι A_{23} είναι το στοιχείο που βρίσκεται στην $2^η$ γραμμή και την $3^η$ στήλη.
Ο ανάστροφος A^T (transpose) ενός μxν πίνακα A είναι ένας νxμ πίνακας , ο οποίος προκύπτει από τον A αν μετατρέψουμε τις γραμμές του A σε στήλες και τις στήλες σε γραμμές.
Για παράδειγμα το στοιχείο που βρίσκεται στην $2^η$ γραμμή και $3^η$ στήλη του A^T είναι το στοιχείο του A που βρίσκεται στην $3^η$ γραμμή και $2^η$ στήλη. Επομένως έχουμε:
$$(A^T)_{ij} = A_{ji}$$

<u>Σχόλια</u>

i. Ένας νx1 πίνακας A έχει ν γραμμές και μία στήλη (**πίνακας στήλη**).
Τα στοιχεία του για λόγους απλότητας δεν τα συμβολίζουμε με A_{11} , A_{21} ,, …. , $A_{ν1}$, αλλά με A_1 , A_2 …. , $A_ν$.
Το τυχαίο στοιχείο της i γραμμής το συμβολίζουμε με A_i i=1,2.. ν.
ii. Ένας 1xν πίνακας A έχει 1 γραμμή και ν στήλες (**πίνακας γραμμή**).
Τα στοιχεία του για λόγους απλότητας δεν τα συμβολίζουμε με A_{11} , A_{12} …. , $A_{1ν}$, αλλά με A_1 , A_2…. , $A_ν$.
Το τυχαίο στοιχείο της i στήλης συμβολίζεται επίσης με A_i i=1,2.. ν.
iii. Ο ανάστροφος ενός πίνακα στήλη είναι ένας πίνακας γραμμή και αντιστρόφως

Μεταξύ των πινάκων ορίζονται διάφορες **πράξεις**,

<u>1) Άθροισμα δύο (ομοειδών υποχρεωτικά) πινάκων</u>
Έστω $A=(A_{ij})$ και $B=(A_{ij})$ δύο μxν πίνακες και $λ\in\Re$
Ονομάζουμε άθροισμα των δύο πινάκων ένα μxν πίνακα C που προκύπτει με πρόσθεση των στοιχείων του A με τα αντίστοιχα στοιχεία του B. Επομένως έχουμε
$C=A+B \Leftrightarrow C_{ij} = A_{ij} + B_{ij}$ ή εν συντομία $(A+B)_{ij}= A_{ij} + B_{ij}$

<u>2) Πολλαπλασιασμός αριθμού με πίνακα</u>
Ονομάζουμε γινόμενο του αριθμού λ με τον πίνακα A έναν μxν πίνακα που προκύπτει με πολλαπλασιασμό κάθε στοιχείου του A με λ. Δηλαδή έχουμε:
$(λA)_{ij}=λA_{ij}$.

<u>3) Πολλαπλασιασμός πινάκων</u>
Έστω A ένας μxν πίνακας και B ένας νxρ πίνακας. Ονομάζουμε γινόμενο του A με τον B έναν μxρ πίνακα C τα στοιχεία του οποίου προκύπτουν από την σχέση:
$$C_{ij} = \sum_{k=1}^{ν} A_{ik}B_{kj} \quad \text{με i=1…ν και j=1….ρ ή εν συντομία} \quad (AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{ν} A_{ik}B_{kj}$$
Έτσι για παράδειγμα αν ο A είναι ένας 2x3 πίνακας και ο B ένας 3x4 πίνακας το γινόμενο του A με τον B είναι ένας 2x4 πίνακας C .
Το στοιχείο που βρίσκεται στη $2^η$ γραμμή και $4^η$ στήλη του C έχει τιμή
$$C_{24} = \sum_{k=1}^{3} A_{2k}B_{k4} = A_{21}B_{14} + A_{22}B_{24} + A_{23}B_{34} \text{ κλπ}$$

<u>Ειδικές περιπτώσεις:</u>

Έστω Α ένας μxν πίνακας, Χ ένας 1xμ πίνακας γραμμή και Υ ένας νx1 πίνακας στήλη. Ορίζονται τότε τα γινόμενα ΧΑ (πίνακας γραμμή , ΑΥ (πίνακας στήλη) , ΥΧ (νxμ πίνακας) από τις σχέσεις

$$(XA)_i = \sum_{k=1}^{\nu} X_k A_{ki}$$

$$(AY)_i = \sum_{k=1}^{\nu} A_{ik} Y_k$$

$$(YX)_{ij} = Y_i X_j$$

Έστω τώρα $A=(A_{ij})$ ένας νxν τετραγωνικός πίνακας και $X=(X_i)$ πίνακας στήλη νx1.
Μπορούμε να ορίσουμε τα γινόμενα ΑΧ (πίνακας στήλη) , X^TA (πίνακας γραμμή) , XX^T (νxν πίνακας) , X^TX (1x1 πίνακας δηλαδή αριθμός)

$$(X^TA)_i = \sum_{k=1}^{\nu} X^T{}_k A_{ki} = \sum_{k=1}^{\nu} X_k A_{ki}$$

$$(AX)_i = \sum_{k=1}^{\nu} A_{ik} X_k$$

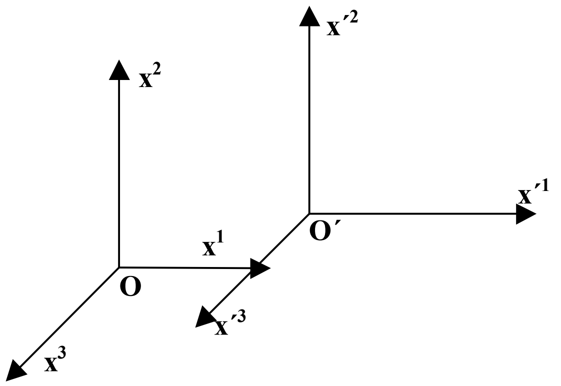
$$X^TX = \sum_{k=1}^{\nu} X_k X_k$$

$$(XX^T)_{ij} = X_i X_j$$

1.2. Μεταθέσεις – Στροφές συστήματος αναφοράς – Ορθογώνιοι πίνακες

1.2.1. Μεταθέσεις

Θεωρούμε δύο τρισορθογώνια συστήματα συντεταγμένων $Ox^1x^2x^3$ και $O'x'^1x'^2x'^3$ με παράλληλους άξονες. Έστω b^1, b^2, b^3 οι συντεταγμένες της αρχής Ο΄ ως προς Ο.
Ένα τυχαίο σημείο Μ του χώρου θα έχει συντεταγμένες (x^1, x^2, x^3) ως προς το Ο και συντεταγμένες (x'^1, x'^2, x'^3) ως προς το Ο΄.
Είναι γνωστή η σχέση που συνδέει της συντεταγμένες x΄ με τις x.



$$x'^1 = x^1 + b^1$$

$$x'^2 = x^2 + b^2$$

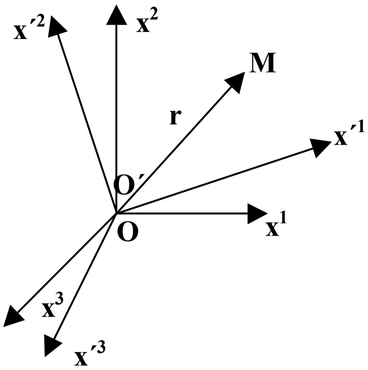
$$x'^3 = x^3 + b^3$$

Ορίζουμε τον πίνακα συντεταγμένων (πίνακας στήλη) $x = \begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{bmatrix}$

Επομένως η σχέση μετασχηματισμού συντεταγμένων γίνεται x΄=x+b με $b = \begin{bmatrix} b^1 \\ b^2 \\ b^3 \end{bmatrix}$

Σε γλώσσα συνιστωσών οι παραπάνω σχέση μπορεί να γραφεί: $x'^i = x^i + b^i$ i=1,2,3

1.2.2. Στροφές



Θεωρούμε δύο ορθοκανονικά συστήματα συντεταγμένων με κοινή αρχή O≡O΄

Ένα τυχαίο σημείο Μ του χώρου θα έχει συντεταγμένες (x^1, x^2, x^3) ως προς το Ο και συντεταγμένες (x'^1, x'^2, x'^3) ως προς το Ο΄.

Ζητάμε την σχέση που έχουν οι συντεταγμένες x με τις x΄.

Έστω $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ και $(\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3)$ τα μοναδιαία διανύσματα στους τρεις άξονες των Ο και Ο΄ αντιστοίχως.

Έστω δε $\vec{r}$ το διάνυσμα θέσης του Μ ως προς την κοινή αρχή.

Ισχύει ότι $\vec{r} = x^1\vec{e}_1 + x^2\vec{e}_2 + x^3\vec{e}_3 = \sum_{i=1}^{3} x^i\vec{e}_i = x^i\vec{e}_i$

Για την τελευταία ισότητα χρησιμοποιήσαμε την ***συνθήκη άθροισης του Einstein*** σύμφωνα με την οποία : Αν σε μια παράσταση εμφανίζεται ο ίδιος δείκτης σε άνω και κάτω θέση τότε υπονοείται άθροιση σε αυτόν το δείκτη και το σύμβολο της άθροισης παραλείπεται.

Παράδειγμα: $a^{ij}u_j = a^{i1}u_1 + a^{i2}u_2 + a^{i3}u_3$

Ομοίως για τις συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{r}$ στο άλλο σύστημα συντεταγμένων έχουμε $\vec{r} = x'^j\vec{e}'_j$.

Εξισώνοντας τα δεύτερα μέλη έχουμε:

$$x'^j\,\vec{e}'_j = x^i\,\vec{e}_i \qquad (1.2.1)$$

Επειδή τα $\vec{e}'_i$ είναι 3 γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματα, κάθε άλλο διάνυσμα θα γράφεται σαν γραμμικός συνδυασμός αυτών.

Επομένως και τα $\vec{e}_i$ γράφονται σαν γραμμικός συνδυασμός των $\vec{e}'_i$.

Υπάρχει λοιπόν πίνακας $R = (R^i{}_m)$ έτσι ώστε $\boxed{\vec{e}_i = R^j{}_i\vec{e}'_j}$ (1.2.2)

Αντικαθιστώντας στην (1.2.1) έχουμε:

$$x'^j\,\vec{e}'_j = x^i\,\vec{e}_i \Leftrightarrow x'^j\,\vec{e}'_j = x^iR^j{}_i\vec{e}'_j \Leftrightarrow (x'^j - R^j{}_ix^i)\vec{e}'_j = 0$$

Και επειδή τα $\vec{e}'_i$ γραμμικώς ανεξάρτητα $\boxed{x'^j = R^j{}_i\,x^i}$ (1.2.3)

Εκτός από τις 9 ποσότητες $R^i{}_j$ ορίζουμε τις ποσότητες R_{ij} και $R_i{}^j$ μέσω της σχέσης $R_{ij} = R_i{}^j = R^i{}_j$

(πχ $R_{12} = R_1{}^2 = R^1{}_2$).

Όπως θα φανεί παρακάτω η ανάγκη ενός τέτοιου παράδοξου ορισμού είναι απαραίτητη, για να τηρήσουμε την συνθήκη άθροισης του Einstein (και όχι μόνο)

Για τον πίνακα R μπορούμε να αποδείξουμε το επόμενο

Θεώρημα 1.2.2.1.

Ο πίνακας R όπως ορίζεται από την σχέση (1.2.2) ικανοποιεί την σχέση: $\boxed{R^TR = RR^T = I}$ (1.2.4)

Απόδειξη

Επειδή το Ο είναι ορθοκανονικό για τα 9 εσωτερικά γινόμενα $\vec{e}_i.\vec{e}_j$ (συνημίτονα κατευθύνσεως) θα ισχύει ότι : αν i=j τότε $\vec{e}_i.\vec{e}_j = 1$ και αν i≠j τότε $\vec{e}_i.\vec{e}_j = 0$

Επομένως $\vec{e}_m.\vec{e}_n = \varepsilon_{mn}$ (Η Ευκλείδια μετρική, οποία σαν πίνακας συμπίπτει με τον μοναδιαίο 3x3 πίνακα I)

Αντικαθιστώντας τα $\vec{e}$ από την (1.2.2) έχουμε ότι:

$$\vec{e}_m.\vec{e}_n = \varepsilon_{mn} \Leftrightarrow (\vec{e}'_i R^i{}_m).(\vec{e}'_j R^j{}_m) = \varepsilon_{mn} \Leftrightarrow R^i{}_mR^j{}_m(\vec{e}'_i.\vec{e}'_j) = \varepsilon_{mn} \Leftrightarrow R^i{}_mR^j{}_m\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{mn} \Leftrightarrow$$

$R^i{}_m \varepsilon_{ij} R^j{}_n = \varepsilon_{mn} \Rightarrow (R^T I R)_{mn} = I_{mn} \Rightarrow R^T R = I$

Από την τελευταία σχέση συμπεραίνουμε ότι οι R και R^T είναι ο ένας αντίστροφος του άλλου και επομένως $RR^T = I$ ■

Αναζητούμε τώρα τις αντίστροφες σχέσεις των (1.2.2) και (1.2.3) . Συγκεκριμένα έχουμε το εξής

<u>Θεώρημα 1.2.2.2.</u>

Ισχύουν οι σχέσεις:

A) $\boxed{\vec{e}'_i = R_i{}^j \vec{e}_j}$ (1.2.5)

B) $\boxed{x^j = R_i{}^j x'^i}$ (1.2.6)

<u>Απόδειξη</u>

Α)Έχουμε διαδοχικά:

$$\vec{e}_i = R^j{}_i \vec{e}'_j \Rightarrow \vec{e}_i = \sum_{j=1}^{3} R_{ji} \vec{e}'_j \Rightarrow \sum_{i=1}^{3} R_{mi} \vec{e}_i = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} R_{mi} R_{ji} \vec{e}'_j = \sum_{j=1}^{3} \vec{e}'_j \sum_{i=1}^{3} R_{mi} R_{ji} \Rightarrow$$

$$\sum_{i=1}^{3} R_{mi} \vec{e}_i = \sum_{j=1}^{3} \vec{e}'_j \sum_{i=1}^{3} R_{mi} R^T_{ij} = \sum_{j=1}^{3} \vec{e}'_j (RR^T)_{mj} = \sum_{j=1}^{3} \vec{e}'_j \delta_{mj} = \vec{e}'_j \Rightarrow \vec{e}'_j = \sum_{i=1}^{3} R_{mi} \vec{e}_i \Rightarrow$$

$$\vec{e}'_m = R_m{}^i \vec{e}_i$$

B) Για το B μπορούμε αν θέλουμε να χρησιμοποιήσουμε την ίδια μέθοδο. Για λόγους ποικιλίας εναλλακτικά μπορούμε να κάνουμε την εξής απόδειξη:

Έχουμε ότι $RR^T = I \Rightarrow R^T = R^{-1}$

Επίσης $x'^j = R^j{}_i x^i \Rightarrow x' = R\, x \Rightarrow R^{-1} x' = R^{-1} R\, x \Rightarrow x = R^T x' \Rightarrow x^i = \sum_{j=1}^{3} R^T_{ij} x'^j \Rightarrow$

$$x^i = \sum_{j=1}^{3} R_{ji} x'^j \Rightarrow x^i = R_j{}^i x'^j \quad ■$$

Για το εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων μπορούμε να αποδείξουμε το εξής

<u>Θεώρημα 1.2.2.3.</u>

Το εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων είναι αναλλοίωτο κάτω από μετασχηματισμούς ορθοκανονικών συστημάτων συντεταγμένων (στροφές) .

<u>Απόδειξη</u>

Έστω $\vec{u}$ και $\vec{\upsilon}$ δύο διανύσματα του χώρου με συντεταγμένες u^i και υ^i .

Έστω δε $u = \begin{bmatrix} u^1 \\ u^2 \\ u^3 \end{bmatrix}$ και $\upsilon = \begin{bmatrix} \upsilon^1 \\ \upsilon^2 \\ \upsilon^3 \end{bmatrix}$ οι αντίστοιχοι πίνακες συντεταγμένων.

Το εσωτερικό γινόμενο τον δύο διανυσμάτων στο πρώτο σύστημα συντεταγμένων είναι:

$\vec{u} \,.\, \vec{\upsilon} = u^1\upsilon^1 + u^2\upsilon^2 + u^3\upsilon^3 = u^T\upsilon = \upsilon^T u$

Στο δεύτερο σύστημα συντεταγμένων έχουμε: $u'^T \upsilon' = (Ru)^T (R\upsilon) = u^T R^T R \upsilon = u^T I \upsilon = u^T \upsilon$. ■

Έστω τώρα ένα διάνυσμα $\vec{u}$ του χώρου με πίνακα συντεταγμένων u. Το τετράγωνο του μέτρου του είναι το εσωτερικό γινόμενο $|\vec{u}|^2 = \vec{u}.\vec{u} = (u^1)^2 + (u^2)^2 + (u^3)^2$

Σε γλώσσα πινάκων έχουμε ότι $|\vec{u}|^2 = u^T u$

Για να γράψουμε το μέτρο του διανύσματος σε γλώσσα συντεταγμένων με συμπαγή τρόπο ορίζουμε τους εξής περίεργους (ταυτοτικούς) πίνακες και κάνουμε τις εξής συμφωνίες:

Ορίζουμε τον Ευκλείδιο μετρικό τανυστή με δύο δείκτες κάτω: $\varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = 1$

Ορίζουμε τον Ευκλείδιο μετρικό τανυστή με δύο δείκτες άνω: $\varepsilon^{11} = \varepsilon^{22} = \varepsilon^{33} = 1$

Ορίζουμε τον δέλτα του Kronecker με ένα δείκτη άνω και ένα δείκτη κάτω: $\delta^1_1 = \delta^2_2 = \delta^3_3 = 1$

Τα στοιχεία και των τριών πινάκων είναι μηδέν όταν οι δείκτες είναι άνισοι

Θεωρούμε τώρα μια ποσότητα με καθορισμένη διάταξη δεικτών.

Αν κάποιος δείκτης είναι κάτω (συναλλοίωτος δείκτης) μπορεί να ανυψωθεί με τον πίνακα ε^{ij}

Αν κάποιος δείκτης είναι πάνω (ανταλλοίωτος) δείκτης μπορεί να υποβιβαστεί με τον πίνακα ε_{ij}

Παράδειγμα 1:

Έστω ότι έχουμε το ανταλλοίωτο διάνυσμα a^i. Μπορούμε να ορίσουμε το συναλλοίωτο διάνυσμα a_i από την σχέση $a_i = \varepsilon_{ij} a^j$ (εννοείται η άθροιση στο j)

Παράδειγμα 2: Ας υποθέσουμε ότι έχουμε ένα ανταλλοίωτο τανυστή (πίνακας A^{ij}) μπορούμε να ορίσουμε τον αντίστοιχο μικτό και τον αντίστοιχο συναλλοίωτο μέσω των σχέσεων:

$A^i{}_j = A^{im}\varepsilon_{mj}$ και $A_{ij} = \varepsilon_{im}A^{mn}\varepsilon_{nj}$

Σχόλια

Προφανώς επειδή ο ε_{ij} είναι ο ταυτοτικός πίνακας οι τιμές των συντεταγμένων του ανταλλοίωτου και του συναλλοίωτου διανύσματος συμπίπτουν και επομένως ίσως να αναρωτηθεί κανείς τον λόγο ύπαρξης αυτών των περίεργων ορισμών. Η ανάγκη τους προκύπτει φυσιολογικά σε γενικευμένα συστήματα συντεταγμένων, στα οποία ένα ανταλλοίωτο διάνυσμα και το συζυγές συναλλοίωτο διάνυσμα έχουν και διαφορετικές τιμές συνιστωσών και κυρίως *διαφορετικό νόμο μετασχηματισμού.* Σε αυτό το στάδιο ας θεωρήσουμε ότι τα παραπάνω είναι αποτέλεσμα μιας ιδιοτροπίας με στόχο τη σωστή διαχείριση της θέσης των δεικτών.

Ο πίνακας $R_i{}^j$ προκύπτει από τον πίνακα $R^i{}_j$ με την παραπάνω διαδικασία

Υιοθετώντας τις παραπάνω συμφωνίες το εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων μπορεί να γραφεί:

$$\boxed{\vec{u}.\vec{\upsilon} = \varepsilon_{ij}u^i\upsilon^j = u^i\upsilon_i = u_i\upsilon^i} \qquad (1.2.7)$$

Το τετράγωνο του μέτρου ενός διανύσματος γράφεται ως:

$$\boxed{|\vec{u}|^2 = \vec{u}.\vec{u} = \varepsilon_{ij}u^iu^j = u^iu_i} \qquad (1.2.8)$$

Η βασική ιδιότητα του πίνακα στροφής $RR^T=I$ μπορεί να γραφεί :

$$RIR^T = I \Rightarrow (RIR^T)_{ij} = \varepsilon_{ij} \Rightarrow \sum_{m=1}^{3}\sum_{n=1}^{3} R_{im}\varepsilon^{mn}R^T_{nj} = \delta_{ij} \Rightarrow \sum_{m=1}^{3}\sum_{n=1}^{3} R_{im}\varepsilon^{mn}R_{jn} = \varepsilon_{ij} \Rightarrow$$

$$\boxed{R^i{}_m\varepsilon^{mn}R^j{}_n = \varepsilon^{ij}} \qquad (1.2.9)$$

Ομοίως η σχέση $R^TR=I$ γίνεται:

$$R^TIR = I \Rightarrow (R^TIR)_{ij} = \varepsilon_{ij} \Rightarrow \sum_{m=1}^{3}\sum_{n=1}^{3} R^T_{im}\varepsilon^{mn}R_{nj} = \varepsilon_{ij} \Rightarrow \sum_{m=1}^{3}\sum_{n=1}^{3} R_{mi}\varepsilon^{mn}R_{nj} = \varepsilon_{ij} \Rightarrow$$

$$\boxed{R^m{}_i \varepsilon_{mn} R^n{}_j = \varepsilon_{ij}} \qquad (1.2.10)$$

Θεωρούμε τώρα τον μετασχηματισμό $x' = Rx + b$ με R πίνακα στροφής,.
Ο μετασχηματισμός αυτός αντιστοιχεί προφανώς σε στροφή και μετάθεση του συστήματος συντεταγμένων και εν γένει δεν διατηρεί ούτε το εσωτερικό γινόμενο ούτε το μέτρο ενός διανύσματος. *Διατηρεί όμως την απόσταση δύο σημείων.* Η ιδιότητα αυτή φαίνεται ως εξής:

Έστω M_1 και M_2 δύο σημεία του χώρου
Τα διανύσματα θέσης των δύο σημείων ως προς τα δύο συστήματα συντεταγμένων έχουν πίνακες συντεταγμένων $x_{(1)}$, $x_{(2)}$, $x'_{(1)}$, $x'_{(2)}$ (ο δείκτης μέσα στην παρένθεση απαριθμεί σημεία και όχι συντεταγμένες).
Το διάνυσμα που συνδέει τα δύο σημεία έχει πίνακα συντεταγμένων $\Delta x = x_{(2)} - x_{(1)}$ στο ένα σύστημα συντεταγμένων και $\Delta x' = x'_{(2)} - x'_{(1)}$ στο άλλο.
Από τον μετασχηματισμό έχουμε: $x'_{(1)} = Rx_{(1)} + b$ και $x'_{(2)} = Rx_{(2)} + b$.
Αφαιρώντας κατά μέλη προκύπτει ότι $\Delta x' = R\Delta x$.
Από τα εκτεθέντα παραπάνω έχουμε ότι

$$\boxed{|\Delta\vec{x}|^2 = \varepsilon_{ij}\Delta x^i \Delta x^j = |\Delta\vec{x}'|^2} \qquad (1.2.11)$$

Αν τα σημεία είναι απειροστά κοντά τότε το τετράγωνο της απειροστής απόστασής τους γράφεται:

$$\boxed{dl^2 = \varepsilon_{ij} dx^i dx^j = dl'^2} \qquad (1.2.12)$$

1.2.3. Ορθογώνιοι πίνακες

Ένας πίνακας R 3x3 καλείται **ορθογώνιος** όταν ικανοποιεί την σχέση $\boxed{R^T R = RR^T = I}$ (1.2.13)

<u>Ιδιότητες</u>

i) Το σύνολο των ορθογωνίων πινάκων αποτελεί ομάδα με πράξη των πολλαπλασιασμό πινάκων.
ii) Επειδή το πρώτο μέλος της σχέσης (1.2.13) είναι ένας συμμετρικός 3x3 πίνακας, η σχέση αυτή επιβάλλει 6 περιορισμούς στα 9 στοιχεία του πίνακα R αφήνοντας τα υπόλοιπα 3 απροσδιόριστα. Επομένως ένας ορθογώνιος πίνακας μπορεί να περιέχει εν γένει 3 ελεύθερες παραμέτρους.
iii) Παίρνοντας ορίζουσες και των δύο μελών της (1.2.13) και λαμβάνοντας υπ’ όψιν ότι $|R|=|R^T|$ καταλήγουμε στην σχέση $|R|^2=1 \Rightarrow |R|=\pm 1$.
iv) Το υποσύνολο των ορθογωνίων πινάκων με ορίζουσα +1 περιέχει τις πραγματικές στροφές (κινήσεις) του συστήματος συντεταγμένων και αποτελεί υποομάδα του συνόλου των ορθογωνίων πινάκων, ενώ το υποσύνολο με ορίζουσα –1 περιέχει τις κατοπτρικές συμμετρίες ή συνδυασμούς στροφών και κατοπτρικών συμμετριών και δεν αποτελεί υποομάδα (δεν περιέχει το μοναδιαίο πίνακα) .
Για παράδειγμα ας θεωρήσουμε τον μετασχηματισμό x΄=y και y΄=x (αλλαγή στα ονόματα των αξόνων). Ο μετασχηματισμός αυτός περιγράφεται από τον πίνακα $R = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ ο οποίος είναι ορθογώνιος με $|R|=-1$.
Το σύστημα συντεταγμένων που ορίζει δεν μπορεί να προκύψει με κίνηση του αρχικού.

1.3. Παραμετρική μορφή καμπύλης –Επαναπαραμετροποίηση καμπύλης

1.3.1. Παραμετρική μορφή καμπύλης

Ας θεωρήσουμε μια γραμμή στο επίπεδο. Ένας συνήθης τρόπος για να περιγράψουμε την γραμμή με συντεταγμένες είναι μια συνάρτηση f(x). Η γραμμή είναι το σύνολο των σημείων M(x,y) του επιπέδου με y=f(x).
Ένας «πρωτόγονος» τρόπος για να σχεδιάσουμε την γραμμή σε ένα χιλιοστομετρικό χαρτί είναι να βάλουμε αυθαίρετες τιμές στο x να βρούμε από τον τύπο της συνάρτησης τις αντίστοιχες τιμές του y , να σημειώσουμε στο επίπεδο τα σημεία (x,y) και να χαράξουμε την γραμμή.
Αναφέρουμε ενδεικτικά μερικά μειονεκτήματα αυτού του τρόπου έκφρασης της εξίσωσης μιας γραμμής.
Αν η γραμμή έχει ευθύγραμμο τμήμα παράλληλο στον άξονα y δεν περιγράφεται με τον παραπάνω τρόπο.

Μπορεί η γραμμή να μην περιγράφεται μόνο από μια συνάρτηση, αλλά από δύο η περισσότερους κλάδους. Για παράδειγμα ο κύκλος με κέντρο την αρχή και ακτίνα R περιγράφεται από τους κλάδους
$y = \sqrt{R^2 - x^2}$ και $y = -\sqrt{R^2 - x^2}$

Στα σημεία που η γραμμή έχει εφαπτομένη παράλληλη στον άξονα y η αντίστοιχη συνάρτηση δεν είναι παραγωγίσιμη. Πχ η εφαπτομένη του παραπάνω κύκλου στο σημείο (R,0).
Ένας εναλλακτικός τρόπος να εκφράσουμε την εξίσωση μιας γραμμής είναι η λεγόμενη **παραμετρική μορφή.**
Οι δύο συντεταγμένες x και y δίνονται συναρτήσει μιας παραμέτρου λ: έχουμε δηλαδή δύο συναρτήσεις $f^1(\lambda)$ και $f^2(\lambda)$ και η γραμμή είναι το σύνολο των σημείων M(x,y) του επιπέδου με x= $f^1(\lambda)$ και y= $f^2(\lambda)$.
Προφανώς αν θέλουμε να σχεδιάσουμε την γραμμή πρέπει να βάλουμε αυθαίρετες τιμές στο λ, να βρούμε από τους τύπους των συντεταγμένων της γραμμής τις αντίστοιχες τιμές των x και y, να σημειώσουμε στο επίπεδο τα σημεία (x,y) και να χαράξουμε την γραμμή.
Αν τέλος θέλουμε να γράψουμε την εξίσωση της γραμμής στην μορφή y=f(x) θα πρέπει να κάνουμε απαλοιφή της παραμέτρου λ.

__Παραδείγματα__

1)Η γραμμή με εξισώσεις συντεταγμένων $x=\lambda^2$ και $y=7\lambda^2$ είναι η ευθεία με εξίσωση y=7x
2)Η γραμμή με εξισώσεις συντεταγμένων x=ρcosλ και y=ρsinλ είναι ο κύκλος με εξίσωση $x^2+y^2=\rho^2$.
3) Η ευθεία που είναι παράλληλη στον άξονα y και διέρχεται από το σημείο (3,0) έχει παραμετρική εξίσωση την x=3 , y=λ
4) Αν έχουμε μια καμπύλη στην μορφή y=f(x) μπορούμε να θεωρήσουμε το x σαν παράμετρο λ και να γράψουμε την εξίσωση της καμπύλης σε παραμετρική μορφή (x=λ , y=f(λ))

Αν μια γραμμή δίνεται σε παραμετρική μορφή x=x(λ) και y=y(λ) τότε το **διάνυσμα θέσης** των σημείων της καμπύλης είναι το $\vec{r}(\lambda) = x(\lambda)\vec{i} + y(\lambda)\vec{j}$

Η ταχύτητα της καμπύλης ορίζεται να είναι το διάνυσμα $\vec{\upsilon}(\lambda) = \dfrac{d\vec{r}(\lambda)}{d\lambda} = x'(\lambda)\vec{i} + y'(\lambda)\vec{j}$

Η επιτάχυνση a της καμπύλης ορίζεται να είναι το διάνυσμα $\vec{a}(\lambda) = \dfrac{d\vec{\upsilon}(\lambda)}{d\lambda} = x''(\lambda)\vec{i} + y''(\lambda)\vec{j}$

Ας θεωρήσουμε για παράδειγμα τον κύκλο με διάνυσμα θέσης $\vec{r} = R(\mathrm{Cos}\lambda\,\vec{i} + \mathrm{Sin}\lambda\,\vec{j})$

Η ταχύτητα της καμπύλης είναι το διάνυσμα $\vec{\upsilon} = R(-\mathrm{Sin}\lambda\,\vec{i} + \mathrm{Cos}\lambda\,\vec{j})$.

Με λ=0 (σημείο (R,0)) είναι $\vec{\upsilon} = R\vec{j}$ που είναι παράλληλη στον άξονα y.

1.3.2. Επαναπαραμετροποίηση Καμπύλης

Η εξίσωση μιας γραμμής σε παραμετρική μορφή δεν είναι μοναδική. Για παράδειγμα οι παραμετρικές εξισώσεις (x=λ , y=7λ) και (x=3Sinλ , y=21Sin λ) απεικονίζονται στην ίδια γραμμή (την ευθεία y=7x) Επομένως για την έκφραση μιας γραμμής σε παραμετρική μορφή υπάρχει *ελευθερία επιλογής παραμέτρου.* Για να αλλάξουμε παράμετρο θεωρούμε την παράμετρο λ σαν συνάρτηση μιας άλλης παραμέτρου μ και εκφράζουμε τα x και y συναρτήσει του μ.

<u>Παράδειγμα</u>

Θεωρούμε την γραμμή με παραμετρική εξίσωση x=λ και $y=\sqrt{\lambda}$ με λ>0. Θέτουμε $\lambda=\mu^2$ και επομένως $x=\mu^2$ και y=μ με μ>0.
Μια παράμετρος με ιδιαίτερη σημασία στην θεωρία των καμπυλών είναι το μήκος s της καμπύλης .
Η επαναπαραμετροποίηση συναρτήσει του μήκους s της καμπύλης μπορεί να γίνει ως εξής:.
Έστω η καμπύλη με εξίσωση $\vec{r}(\lambda)=x(\lambda)\vec{i}+y(\lambda)\vec{j}$
Θεωρούμε δύο σημεία της καμπύλης απειροστά κοντά: Η απόσταση των δύο σημείων είναι

$$ds=\sqrt{dx^2+dy^2}=\sqrt{x'^2(\lambda)+y'^2(\lambda)}\,d\lambda$$

Η παραπάνω σχέση είναι μια διαφορική εξίσωση από την οποία εκφράζουμε το λ συναρτήσει του s.

<u>Παράδειγμα</u>

Θεωρούμε τον κύκλο με παραμετρική εξίσωση $\vec{r}=R(\mathrm{Cos}\lambda\,\vec{i}+\mathrm{Sin}\lambda\,\vec{j})$
Προφανώς ισχύει ότι dx=-Rsinλ dλ και dy=RCosλ dλ.
Ενεργώντας όπως παραπάνω έχουμε $ds=\sqrt{dx^2+dy^2}=R\,d\lambda \Rightarrow s=\lambda R+C$
Για να «βγάλουμε το dλ εκτός ρίζας» υποθέσαμε ότι μετράμε το μήκος κατά την κατεύθυνση αύξησης του λ (δηλαδή αν dλ>0 τότε και ds>0)
Θεωρούμε σαν αρχή μετρήσεως των μηκών, το σημείο (R,0) . Επομένως με λ=0 είναι και s=0.
Έτσι έχουμε C=0.
Λύνοντας ως προς λ αντικαθιστώντας στην παραμετρική εξίσωση της καμπύλης έχουμε

$$\vec{r}=R(\mathrm{Cos}\frac{s}{R}\vec{i}+\mathrm{Sin}\frac{s}{R}\vec{j})$$

<u>Σχόλια</u>

Σ1) Αν θεωρήσουμε σαν παράμετρο της καμπύλης το μήκος της τότε η παραμετρική εξίσωσή της είναι μοναδική (με μοναδική ελευθερία την επιλογή της αρχής μετρήσεως των μηκών και την κατεύθυνση κίνησης κατά μήκος της καμπύλης)
Σ2) Αν χρησιμοποιήσουμε σαν παράμετρο το μήκος της καμπύλης τότε η ταχύτητα της καμπύλης είναι μοναδιαίο διάνυσμα. Αυτό μπορεί να φανεί ως εξής:
Έστω $\vec{r}=x(s)\vec{i}+y(s)\vec{j}$ το διάνυσμα θέσης των σημείων της καμπύλης.
Η ταχύτητα της καμπύλης είναι $\vec{\upsilon}=\dfrac{d\vec{r}(s)}{ds}=x'(s)\vec{i}+y'(s)\vec{j}$
Με μέτρο $|\vec{\upsilon}|^2=x'^2(s)+y'^2(s)=\left(\dfrac{dx}{ds}\right)^2+\left(\dfrac{dy}{ds}\right)^2=\dfrac{(dx)^2+(dy)^2}{(ds)^2}=1$

1.4. Συναρτησοειδή –Συναρτησοειδές του Dirac

1.4.1. Τα μαθηματικά

Ας θεωρήσουμε μια πραγματική συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.
Όπως γνωρίζουμε η συνάρτηση αυτή απεικονίζει σε κάθε πραγματικό αριθμό x άλλο πραγματικό αριθμό f(x).
Οι πραγματικές συναρτήσεις δεν είναι οι μόνες απεικονίσεις που χρησιμοποιούμε στα μαθηματικά και στην Φυσική. Όταν μετράμε τα βιβλία σε μια βιβλιοθήκη στην πραγματικότητα χρησιμοποιούμε μια απεικόνιση που σε κάθε βιβλίο αντιστοιχεί έναν φυσικό αριθμό. Η ένταση ενός ηλεκτρικού πεδίου είναι μια απεικόνιση που σε κάθε σημείο του χώρου (διάνυσμα θέσης) απεικονίζει ένα άλλο διάνυσμα (διάνυσμα της έντασης).
Υπάρχουν απεικονίσεις που σε κάθε συνάρτηση απεικονίζουν έναν αριθμό.
Τέτοιες απεικονίσεις ονομάζονται συναρτησοειδή.
Ας θεωρήσουμε για παράδειγμα το σύνολο όλων των συνεχών συναρτήσεων στο [0,1] το οποίο συμβολίζουμε με C[0,1].
Ορίζουμε ένα συναρτησοειδές $T:C[0,1]\to\mathbb{R}$ μέσω της σχέσης:

$$T(f)=-\int_0^1 f(x)dx$$

Μέσω της παραπάνω σχέσης αντιστοιχούμε σε κάθε συνεχή συνάρτηση έναν αριθμό.
Θεωρούμε για παράδειγμα την συνάρτηση f με $f(x)=x^2$. Τότε $T(f)=-\int_0^1 f(x)dx=-\int_0^1 x^2dx=-\frac{1}{3}$

Θεωρούμε τώρα το σύνολο $\Im$ των συναρτήσεων f που είναι παραγωγίσιμες στο [0,1] με f(1)=0.

Ορίζουμε ένα δεύτερο συναρτησοειδές $S:\Im\to\mathbb{R}$ έτσι ώστε $S(f)=\int_0^1 x f'(x)dx$

Για την συνάρτηση φ με $\varphi(x)=x^2-1\in\Im$ έχουμε

$$S(\phi)=\int_0^1 x\phi'(x)dx=\int_0^1 2x^2dx=\frac{2}{3}$$

και

$$T(\phi)=-\int_0^1 \phi(x)dx=-\int_0^1 x^2dx+\int_0^1 dx=\frac{2}{3}$$

Διαπιστώνουμε ότι T(φ)=S(φ)

Θεωρούμε τώρα μια τυχαία συνάρτηση $g\in\Im$. Θα δείξουμε ότι T(g)=S(g)

$$S(g)=\int_0^1 xg'(x)dx=\int_0^1 xdg(x)=xg(x)\big|_0^1-\int_0^1 g(x)dx=g(1)-\int_0^1 \phi(x)dx=0-\int_0^1 g(x)dx=T(g)$$

Βλέπουμε δηλαδή ότι T(g)=S(g) για κάθε $g\in\Im$. Επομένως T=S στο $\Im$

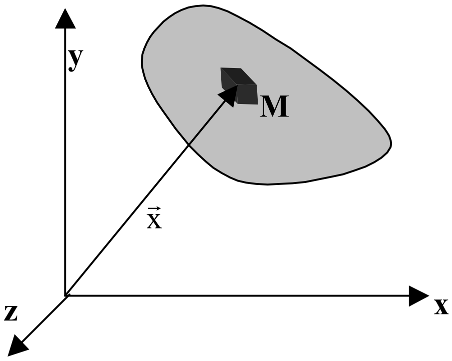
Έχουμε λοιπόν τον εξής ορισμό: Δηλαδή δύο συναρτησοειδή λέγονται ίσα αν η τιμή τους για κάθε συνάρτηση του προκαθορισμένου συνόλου συναρτήσεων είναι η ίδια.
Στο παράδειγμα που εξετάσαμε ο περιορισμός του T στο $\Im$ και το S είναι ίσα συναρτησοειδή.

1.4.2. Το φυσικό πρόβλημα

Θεωρούμε μια τυχαία κατανομή ηλεκτρικού φορτίου στο χώρο με συνολικό φορτίο Q. Σε κάθε σημείο M του χώρου με διάνυσμα θέσης $\vec{x}$ μπορούμε να ορίσουμε την πυκνότητα φορτίου $\rho(\vec{x}) = \dfrac{dq}{dV}$ (1.4.1)

όπου dq το φορτίο που περιέχεται σε ένα στοιχειώδες ορθογώνιο όγκου dV με κέντρο το σημείο M.
Από την σχέση (1.4.1) έχουμε $dq = \rho(\vec{x})dV$
Το συνολικό φορτίο Q μπορούμε να το βρούμε αθροίζοντας τα στοιχειώδη φορτία και επομένως

$$Q = \int dq = \int \rho(\vec{x})dV = \iiint \rho(\vec{x})dxdydz \qquad (1.4.2)$$



Θεωρούμε τώρα ένα ακίνητο σημειακό φορτίο q στην αρχή ενός συστήματος συντεταγμένων.
Πόση είναι η πυκνότητα φορτίου $\rho(\vec{x})$;
Για να απαντήσουμε στο ερώτημα αυτό ας βρούμε τις ιδιότητες που πρέπει να έχει
Ι1) Για $\vec{x} \neq 0$ πρέπει $\rho(\vec{x}) = 0$ (δεν υπάρχει φορτίο παρά μόνο στη θέση $\vec{x} = 0$) (1.4.3)
Ι2) $q = \int \rho(\vec{x})dV$ (1.4.4)
Θέτουμε $\rho(\vec{x}) = q\delta(\vec{x})$ και οι (1.4.3) και (1.4.4) είναι ισοδύναμες με
$\delta(\vec{x}) = 0$ για $\vec{x} \neq 0$ και $\int \delta(\vec{x})dV = 1$
Όπως εύκολα καταλαβαίνει κανείς συνάρτηση (με την συνήθη έννοια του όρου) που να ικανοποιεί τις δύο παραπάνω απαιτήσεις δεν υπάρχει.

1.4.3. Η μαθηματική επίλυση του προβλήματος

Η παράσταση $\delta(\vec{x})$ μπορεί να ορισθεί αυστηρά χρησιμοποιώντας την έννοια του συναρτησοειδούς (για την ακρίβεια είναι συναρτησοειδές)
Στην μια διάσταση μπορούμε να ορίσουμε το συναρτησοειδές $\mathfrak{M} : C[0,1] \to \mathbb{R}$ με $\mathfrak{M}(f) = f(0)$.
Την τιμή του συναρτησοειδούς $\mathfrak{M}$ για μια συνάρτηση f την συμβολίζουμε (όχι τυχαία) με $\int \delta(x)f(x)dx$.
Επομένως έχουμε εξ ορισμού: $\mathfrak{M}(f) := \int \delta(x)f(x)dx = f(0)$

<u>Σχόλια</u>

1) Ο συμβολισμός της τιμής $\mathfrak{M}(f)$ του συναρτησοειδούς $\mathfrak{M}$ για μια συνάρτηση f με ολοκλήρωμα δεν είναι τυχαίος: Το συναρτησοειδές αυτό έχει αρκετές ιδιότητες που θυμίζουν ολοκλήρωμα (θυμηθείτε το σύμβολο του Leibnitz για την παράγωγο , η οποία ενώ δεν είναι πηλίκο έχει ιδιότητες που τις επιτρέπουν να συμπεριφέρεται σαν πηλίκο)
2) Το ολοκλήρωμα στον παραπάνω συμβολισμό επεκτείνεται σε όλο το R (από - ∞ έως + ∞)
3) Κατά την απόδειξη ιδιοτήτων του συναρτησοειδούς $\mathfrak{M}$ χρησιμοποιούμε τις ιδιότητες του ολοκληρωτικού λογισμού σαν να υπήρχε πραγματικά η συνάρτηση δ(x).

Για την "συνάρτηση" δ μπορούμε να αποδείξουμε τις επόμενες ιδιότητες:

1) $\int f(x)\delta(x - x_0)\,dx = f(x_0)$ (1.4.5)

2) $\int \delta(x-x_0)dx = 1$ (1.4.6)

3) $\delta(x-y) = \delta(y-x)$ (1.4.7)

Απόδειξη

1) Θέτουμε $z = x - x_0 \Rightarrow x = x_0 + z \Rightarrow dx = dz$ και $\phi(z) = f(x_0 + z)$.

Έχουμε διαδοχικά: $\int f(x)\delta(x-x_0)\,dx = \int f(x_0+z)\delta(z)\,dz = \int \phi(z)\delta(z)\,dz = \phi(0) = f(x_0)$

2) Θεωρώντας την συνάρτηση f με f(x)=1 η ιδιότητα 1) μετατρέπεται στην 2)

3) Θεωρούμε μια τυχαία συνεχή συνάρτηση f(x). Θα δείξουμε ότι $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta(x-y)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta(y-x)dx$

Για το πρώτο μέλος από την ιδιότητα (1) έχουμε: $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta(x-y)dx = f(y)$

Για τον υπολογισμό του δεύτερου μέλους κάνουμε την αλλαγή μεταβλητής: $z = y - x \Rightarrow dz = -dx$

Επομένως: $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta(y-x)dx = -\int_{+\infty}^{-\infty} f(z+y)\delta(z)dz = \int_{-\infty}^{+\infty} f(z+y)\delta(z)dz = f(0+y) = f(y)$ ■

Ομοίως μπορούμε να ορίσουμε το συναρτησοειδές του Dirac σε δύο διαστάσεις:
Έστω $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση (παργματική συνάρτηση δυο πραγματικών μεταβλητών)
Ισχύει ότι

$$\iint f(x^1, x^2)\,\delta(x^1, x^2)dx^1dx^2 = f(0,0)$$

η σε ποιο συμπαγή μορφή θέτουμε:

$\vec{x} = (x^1, x^2)$, $f(x^1, x^2) = f(\vec{x})$, $\delta(x^1, x^2) = \delta^2(\vec{x})$ και $dx^1dx^2 = d^2x$

και η παραπάνω σχέση γίνεται:

$$\int f(\vec{x})\,\delta^2(\vec{x})d^2x = f(0) \qquad (1.4.8)$$

Για το συναρτησοειδές $\delta^2(\vec{x})$ μπορούμε να αποδείξουμε τις εξής ιδιότητες

1) $\int f(\vec{x})\,\delta^2(\vec{x}-\vec{x}_0)d^2x = f(\vec{x}_0)$ (1.4.9)

2) $\delta^2(\vec{x}) = \delta(x^1)\delta(x^2)$ (1.4.10)

3) $\delta^2(\vec{x}-\vec{x}_0) = \delta(x^1 - x_0^1)\,\delta(x^2 - x_0^2)$ (1.4.11)

4) $\delta^2(\vec{x}-\vec{y}) = \delta^2(\vec{y}-\vec{x})$ (1.4.12)

Απόδειξη

1) Θέτουμε $\vec{y} = \vec{x} - \vec{x}_0$ ($y^1 = x^1 - x_0^1$ και $y^2 = x^2 - x_0^2$)

Επομένως $d^2y = dy^1dy^2 = dx^1dx^2 = d^2x$

Το πρώτο μέλος της αποδεικτέας γίνεται:

$\int f(\vec{x})\,\delta^2(\vec{x}-\vec{x}_0)d^2x = \int f(\vec{y}+\vec{x}_0)\,\delta^2(\vec{y})d^2y = f(\vec{x}_0)$

2) Θεωρούμε μια τυχαία συνάρτηση f.

Η τιμή του συναρτησοειδούς του πρώτου μέλους για την συνάρτηση f είναι: $\int f(\vec{x})\delta^2(\vec{x})d^2x = f(0)$

Ομοίως για το συναρτησοειδές του δεύτερου μέλους έχουμε:

$\int f(\vec{x})\delta(x^1)\delta(x^2)d^2x = \iint f(x^1, x^2)\delta(x^1)\delta(x^2)dx^1dx^2 = \int \delta(x^1)\left\{\int f(x^1, x^2)\delta(x^2)dx^2\right\}dx^1$

Το ολοκλήρωμα μέσα στην παρένθεση ισούται με $f(x^1,0)$. Επομένως έχουμε:

$$\int f(\vec{x})\delta(x^1)\delta(x^2)d^2x = \iint f(x^1,x^2)\delta(x^1)\delta(x^2)dx^1dx^2 = \int \delta(x^1)f(x^1,0)\,dx^1 = f(0,0) = f(0)$$

Αφού η τιμές των δύο συναρτησοειδών σε τυχαία συνάρτηση είναι ίσες και τα συναρτησοειδή είναι ίσα.

3) Αποδεικνύεται όπως η 2)
4) Αποδεικνύεται όπως και στην μία διάσταση

Σχόλιο

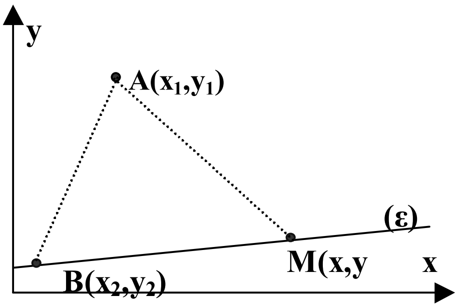
Οι παραπάνω ορισμοί μπορούν να επεκταθούν και σε περισσότερες από δύο διαστάσεις
Ενδεικτικά αναφέρουμε ορισμούς και ιδιότητες στις 3 και 4 διαστάσεις .
Στις 3 διαστάσεις ορίζεται η $\delta^3(\vec{x})$ η οποία σε τυχαία συνάρτηση 3 μεταβλητών f , δρα ως εξής:

$$\int f(\vec{x})\,\delta^3(\vec{x})d^3x = f(0)$$

Ομοίως μπορούμε να αποδείξουμε ότι $\delta^3(\vec{x}-\vec{x}_0) = \delta(x^1-x^1_0)\,\delta(x^2-x^2_0)\delta(x^3-x^3_0)$ κλπ

Άσκηση

Έστω $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Έστω δε τυχαία ευθεία (ε) του επιπέδου , σημείο $A(x_1,y_1)$ που δεν ανήκει στην ευθεία , $B(x_2,y_2)$ σημείο της ευθείας και $M(x,y)$ «κινητό» σημείο της ευθείας..



Να δειχθεί η σχέση $\int_{-\infty}^{+\infty} f(\overrightarrow{AM})\delta(x-x_2)dx = f(\overrightarrow{AB})$

Απόδειξη

Έστω y=ax+b η εξίσωση της ευθείας. Ισχύει ότι

$$f(\overrightarrow{AM}) = f(x-x_1, y-y_1) = f(x-x_1, ax+b-y_1)$$

$$f(\overrightarrow{AB}) = f(x_2-x_1, y_2-y_1) = f(x_2-x_1, ax_2+b-y_1)$$

Για το πρώτο μέλος της αποδεικτέας έχουμε:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(\overrightarrow{AM})\delta(x-x_2)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-x_1, ax+b-y_1)\delta(x-x_2)dx = f(x_2-x_1, ax_2+b-y_1) = f(\overrightarrow{AB})$$

1.4.4. Παραδείγματα από τη φυσική

1) Θεωρούμε ένα υλικό σημείο ηλεκτρικού φορτίου q ακίνητο (ως προς κάποιο σύστημα συντεταγμένων) στην θέση $\vec{x}_0$. Η πυκνότητα φορτίου στο χώρο είναι $\rho(\vec{x}) = q\,\delta^3(\vec{x}-\vec{x}_0)$
2) Θεωρούμε ένα υλικό σημείο ηλεκτρικού φορτίου q που κινείται με σταθερή ταχύτητα $\vec{\upsilon}$ και την στιγμή t=0 διέρχεται από την αρχή των αξόνων. Το διάνυσμα θέσης του $\vec{x}_q$ σε κάθε χρονική στιγμή δίνεται από την σχέση $\vec{x}_q = \vec{\upsilon}\,t$. Στην περίπτωση αυτή, η πυκνότητα φορτίου σε κάθε σημείο του χώρου εξαρτάται και από τη θέση του σημείου και από την χρονική στιγμή. Είναι δηλαδή χωροχρονική συνάρτηση $\rho(t,\vec{x})$. Η σχέση που την προσδιορίζει είναι προφανώς η εξής:
$\rho(t,\vec{x}) = q\,\delta^3(\vec{x}-\vec{x}_q) \Rightarrow \rho(t,\vec{x}) = q\,\delta^3(\vec{x}-\vec{\upsilon}\,t)$
3) Η πυκνότητα ρεύματος που αντιστοιχεί στην κίνηση του φορτίου είναι:
$\vec{J}(t,\vec{x}) = q\,\vec{\upsilon}\,\delta^3(\vec{x}-\vec{x}_q) \Rightarrow J(t,\vec{x}) = q\,\vec{\upsilon}\,\delta^3(\vec{x}-\vec{\upsilon}\,t)$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2.
ΑΔΡΑΝΕΙΑΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΑΝΑΦΟΡΑΣ
ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ ΓΑΛΙΛΑΙΟΥ

2.1. Αδρανειακά Συστήματα αναφοράς

Τα διάφορα γεγονότα συμβαίνουν στο χώρο και στο χρόνο. Για να προσδιορίσουμε την θέση ενός γεγονότος στο χώρο χρειαζόμαστε ένα (συνήθως) ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων. Για να προσδιορίσουμε την θέση του στο χρόνο χρειαζόμαστε ένα χρονόμετρο.
Με την έννοια χωροχρονικό σύστημα αναφοράς εννοούμε ένα χωρικό σύστημα συντεταγμένων εφοδιασμένο με πανομοιότυπα συγχρονισμένα χρονόμετρα.
Η χωροχρονική θέση ενός γεγονότος καθορίζεται από την τετράδα (πίνακας στήλη)

$$X=(x^{\mu})=(t,x^{i})=\begin{bmatrix} t \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} t \\ x \end{bmatrix} \qquad (2.1.1)$$

Στα επόμενα θεωρούμε ότι οι ελληνικοί δείκτες είναι χωροχρονικοί δείκτες και παίρνουν τιμές από 0 έως 3 ενώ οι λατινικοί δείκτες είναι χωρικοί και παίρνουν τιμές από 1 έως 3.
Σχετικά με τα συστήματα αναφοράς τίθεται το εξής ερώτημα:

Είναι όλα τα συστήματα αναφοράς κατάλληλα για την περιγραφή των νόμων της φυσικής;

Όπως γνωρίζουμε, η απάντηση στο παραπάνω ερώτημα είναι αρνητική
Τα συστήματα αναφοράς που είναι κατάλληλα για την περιγραφή των νόμων της Φυσικής ονομάζονται αδρανειακά συστήματα αναφοράς. Συγκεκριμένα έχουμε τον εξής ορισμό:

Αδρανειακό (ΑΣΑ) *λέγεται ένα σύστημα αναφοράς στο οποίο ισχύει ο πρώτος νόμος του Newton δηλαδή ένα σύστημα αναφοράς στο οποίο το ελεύθερο σωμάτιο εκτελεί ευθύγραμμη ομαλή κίνηση.*

Ο πρώτος νόμος του Newton είναι ο νόμος εκείνος , ο οποίος αξιώνει την ύπαρξη τέτοιων συστημάτων
Για τα αδρανειακά συστήματα αναφοράς έχουμε τις εξής ιδιότητες:
Ένα σύστημα αναφοράς το οποίο εκτελεί ευθύγραμμη ομαλή κίνηση ως προς ένα αδρανειακό σύστημα αναφοράς είναι επίσης αδρανειακό σύστημα αναφοράς
Ένα σύστημα αναφοράς το οποίο εκτελεί επιταχυνόμενη κίνηση ως προς ένα αδρανειακό σύστημα αναφοράς δεν είναι αδρανειακό σύστημα αναφοράς.

2.2. Μετασχηματισμός Γαλιλαίου

Θεωρούμε δύο ορθοκανονικά αδρανειακά συστήματα αναφοράς $Ox_1x_2x_3$ και $O'x_1'x_2'x_3'$.
Υποθέτουμε ότι η μονάδα μέτρησης του μήκους καθώς και η μονάδα μέτρησης του χρόνου είναι ίδια και στα δύο συστήματα συντεταγμένων.
Θεωρούμε ένα συγκεκριμένο χωροχρονικό σημείο και αναζητούμε την σχέση που έχουν οι συντεταγμένες του σημείου αυτού στο ένα σύστημα συντεταγμένων με τις συντεταγμένες του στο άλλο.
Για να επιλύσουμε το παραπάνω πρόβλημα θεωρούμε τις εξής ειδικές περιπτώσεις όσον αφορά την σχετική θέση και κίνηση των δύο ΑΣΑ.

2.2.1. Χρονικές μεταθέσεις

Τα δύο ΑΣΑ είναι ακίνητα το ένα σε σχέση με το άλλο και οι άξονες τους ταυτίζονται. Επομένως $x'^i = x^i$ i=1,2,3
Υποθέτουμε ότι την στιγμή που το ρολόι του O΄ δείχνει t΄=0 το ρολόι του O δείχνει t=τ. Επομένως όταν το ρολόι του O δείχνει t το ρολόι του O΄ θα δείχνει t΄=t-τ.

Ο παραπάνω μετασχηματισμός γράφεται σε μορφή πινάκων:

$$X' = X - \begin{bmatrix} \tau \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

2.2.2. Χωρικές μεταθέσεις

Τα δύο ΑΣΑ είναι ακίνητα το ένα σε σχέση με το άλλο και οι άξονες τους είναι παράλληλοι.
Υποθέτουμε επίσης ότι τα ρολόγια τους είναι συγχρονισμένα έτσι ώστε όταν τα ρολόγια του πρώτου δείχνουν μηδέν το ίδιο να δείχνουν και τα ρολόγια του του δεύτερου. Και επειδή έχουν την ίδια μονάδα μέτρησης t'=t.
Έστω ότι οι συντεταγμένες της αρχής Ο΄ ως προς το Ο είναι (b^1, b^2, b^3) .
Στην περίπτωση αυτή σύμφωνα με όσα εκτέθηκαν στην παράγραφο 1.2 έχουμε:

$$X' = X - \begin{bmatrix} 0 \\ b^1 \\ b^2 \\ b^3 \end{bmatrix}$$

Συνοψίζοντας τις δύο παραπάνω περιπτώσεις έχουμε για τις **χωροχρονικές μεταθέσεις.**

X'=X-b με $b = \begin{bmatrix} \tau \\ b^1 \\ b^2 \\ b^3 \end{bmatrix}$ και με συμβολισμό δεικτών $x'^{\mu} = x^{\mu} - b^{\mu}$ μ=0,1,2,3

2.2.3. Χωρικές στροφές

Τα δύο ΑΣΑ είναι ακίνητα το ένα σε σχέση με το άλλο , κοινή αρχή , συγχρονισμένα ρολόγια (t = t΄) και οι άξονες τους έχουν τυχαίο προσανατολισμό.
Θεωρούμε ένα σημείο Μ του χώρου με συντεταγμένες (x^1 ,x^2, x^3) ως προς το ένα ΑΣΑ και συντεταγμένες (x'^1 , x'^2 x'^3) ως προς το άλλο.
Ο χωροχρονικός μετασχηματισμός συντεταγμένων μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$x'^{\mu} = \Gamma^{\mu}{}_{\nu} x^{\nu} \quad \mu=0,1,2,3 \tag{2.2.1}$$

Για να βρούμε τις τιμές των στοιχείων του πίνακα Γ έχουμε να παρατηρήσουμε τα εξής:
Η (2.2.1) για μ=0 γίνεται:

$$x'^0 = \Gamma^0{}_{\nu} x^{\nu} = \Gamma^0{}_0 x^0 + \Gamma^0{}_1 x^1 + \Gamma^0{}_2 x^2 + \Gamma^0{}_3 x^3$$

Γνωρίζουμε όμως ότι t'=t$\Leftrightarrow x'^0 = x^0$ Επομένως $\Gamma^0{}_0 = 1$ και $\Gamma^0{}_i = 0$

Όταν το μ πάρει την τιμή ενός χωρικού δείκτη (μ=j) η (2.2.1) γίνεται:

$$x'^i = \Gamma^i{}_{\nu} x^{\nu} = \Gamma^i{}_0 x^0 + \Gamma^i{}_j x^j = \Gamma^i{}_0 t + \Gamma^i{}_j x^j$$

Όμως από τα εκτεθέντα στην §1.2.2 για τις στροφές θα έχουμε:

$$x'^i = R^i{}_j\, x^j$$

Συγκρίνοντας τις παραπάνω προκύπτει ότι: $\Gamma^i{}_0 = 0$ και $\Gamma^i{}_j = R^i{}_j$

Τελικά ο 4x4 πίνακας Γ έχει την μορφή $\Gamma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix}$ με R πίνακα στροφής..

2.2.4. Προωθήσεις Γαλιλαίου

Θεωρούμε δύο ΑΣΑ με παράλληλους άξονες και συγχρονισμένα ρολόγια. Υποθέτουμε επίσης ότι την στιγμή t=t΄=0 οι αρχές τους συμπίπτουν. Έστω $\vec{u}$ η ταχύτητα του Ο΄ ως προς Ο.

Επειδή η αρχή Ο΄ εκτελεί ευθύγραμμη ομαλή κίνηση , οι συντεταγμένες της ως προς Ο την στιγμή t θα είναι $(u^1t, u^2t, u^3t) = (u^1x^0, u^2x^0, u^3x^0)$

Επομένως στην περίπτωση αυτή οι μετασχηματισμοί Γαλιλαίου είναι:

$$\begin{aligned} x'^0 &= x^0 \\ x'^1 &= x^1 - u^1 x^0 \\ x'^2 &= x^2 - u^2 x^0 \\ x'^3 &= x^3 - u^3 x^0 \end{aligned} \quad \text{ή σε μορφή πίνακα} \begin{bmatrix} x'^0 \\ x'^1 \\ x'^2 \\ x'^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -u^1 & 1 & 0 & 0 \\ -u^2 & 0 & 1 & 0 \\ -u^3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{bmatrix} \Leftrightarrow X' = \Gamma X$$

με $\Gamma = \begin{bmatrix} 1 & O \\ -u & I \end{bmatrix}$ 4x4 πίνακα

2.2.5. Γενικός μετασχηματισμός Γαλιλαίου

Θεωρούμε τώρα την γενική περίπτωση που τα ρολόγια των δύο ΑΣΑ δεν είναι συγχρονισμένα , οι άξονες τους δεν είναι παράλληλοι και το Ο΄ κινείται ως προς το Ο με ταχύτητα $\vec{u}$. Ο γενικός μετασχηματισμός Γαλιλαίου είναι:

$X' = \Gamma X + b$ με $\Gamma = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -u & R \end{bmatrix}$ όπου b 4x1 αυθαίρετος πίνακας στήλη, u αυθαίρετος 3x1 πίνακας στήλη και R 3x3 πίνακας στροφής.

<u>Σχόλια:</u>

1) Μπορούμε να θεωρήσουμε ότι ένας μετασχηματισμός Γαλιλαίου είναι ένα διατεταγμένο ζεύγος g=(Γ,b) με τους πίνακες Γ και b ως ανωτέρω.

2) Έστω O_1, O_2, O_3 τρία ΑΣΑ. Έστω δε $g_1=(\Gamma_1 , b_1)$ και $g_2=(\Gamma_2 , b_2)$ οι μετασχηματισμοί Γαλιλαίου από το O_1 στο O_2 και από το O_2 στο O_3 αντιστοίχως.. Επομένως έχουμε:

$$\begin{aligned} X_2 &= \Gamma_1 X_1 + b_1 \\ X_3 &= \Gamma_2 X_2 + b_2 \end{aligned}$$ Αντικαθιστώντας την $2^η$ στην πρώτη έχουμε: $X_3 = \Gamma_2\Gamma_1 X_1 + \Gamma_2 b_1 + b_2$

Μπορούμε να δείξουμε ότι ο σύνθετος μετασχηματισμός είναι μετασχηματισμός Γαλιλαίου. Συγκεκριμένα έχουμε το εξής :

Θεώρημα 2.2.5.1.: Θεωρούμε το σύνολο Ç των μετασχηματισμών Γαλιλαίου. Στο σύνολο αυτό ορίζουμε μια πράξη * ως έξής:

Αν $g_1=(\Gamma_1 , b_1) \in$ Ç και $g_2=(\Gamma_2 , b_2) \in$ Ç θέτουμε $g_1*g_2=(\Gamma_2\Gamma_1 , \Gamma_2 b_1+b_2)$.

Τότε το σύνολο Ç με την παραπάνω ορισθείσα πράξη αποτελεί ομάδα.

<u>**Απόδειξη**</u>

- *Κλειστότητα*

  Αν $g_1=(\Gamma_1 , b_1) \in$ Ç και $g_2=(\Gamma_2 , b_2) \in$ Ç θα δείξουμε ότι $g=g_1*g_2 \in$ Ç .

  Θέτουμε $\Gamma=\Gamma_2\Gamma_1$ και $b=\Gamma_2 b_1+b_2$

  Έστω $\Gamma_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -u_1 & R_1 \end{bmatrix}$ και $\Gamma_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -u_2 & R_2 \end{bmatrix}$.

  Ισχύει ότι: $\Gamma_2\Gamma_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -u_2 & R_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -u_1 & R_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -(R_2u_1 + u_2) & R_2R_1 \end{bmatrix}$

  Θέτουμε $u=R_2u_1+u_2$ και $R=R_2R_1$.

Επειδή R_1 , R_2 πίνακες στροφής ισχύει ότι $R_1^T R_1 = I$ και $R_2^T R_2 = I$.
Επομένως $RR^T = (R_2R_1)^T(R_2R_1) = R_1^T R_2^T R_2 R_1 = R_1^T I R_1 = R_1^T R_1 = I$

Άρα g∈Ç.

- Η απόδειξη της *προσεταιριστικής ιδιότητας* είναι άμεση συνέπεια του ορισμού της πράξης
- Ύπαρξη *ουδετέρου στοιχείου*
  Θεωρούμε το στοιχείο e=(I,0) με I τον μοναδιαίο 4x4 πίνακα και 0 τον μηδενικό 4x1.
  Αν g=(Γ,b) ∈ Ç έχουμε:
  g*e=(Γ,b)*(I,0)=(IΓ,Ib+0)=(Γ,b)=g και e*g=(I,0)*(Γ,b)=(ΓI,Γ0+b)=(Γ,b)=g
- Ύπαρξη *αντιστρόφου*
  Έστω g=(Γ,b) ∈ Ç με $\Gamma = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -u & R \end{bmatrix}$ και R 3x3 πίνακα στροφής.
  Θέτουμε $R' = R^{-1}$, $u' = -R^{-1}u$, $\Gamma' = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -u' & R' \end{bmatrix}$ και $b' = -\Gamma' b$.
  Έχουμε ότι $\Gamma\Gamma' = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -u & R \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -u' & R' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -u & R \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ R^{-1}u & R^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} = I$ και
  $\Gamma'\Gamma = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -u' & R' \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -u & R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ R^{-1}u & R^{-1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -u & R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} = I$
  Θέτουμε g΄=(Γ΄ , b΄) και εύκολα επιβεβαιώνουμε ότι g*g΄=g΄*g=e ■
-

2.3. Νόμος μετασχηματισμού των φυσικών μεγεθών

Θεωρούμε δύο ΑΣΑ που συνδέονται με ένα μετασχηματισμό Γαλιλαίου (Γ,b) με $\Gamma = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -u & R \end{bmatrix}$.

Οι χωροχρονικές συντεταγμένες (ενός κινούμενου υλικού σημείου) στο ένα συνδέονται με τις συντεταγμένες του στο άλλο με τις σχέσεις

$$t' = t + b^0 \Rightarrow dt' = dt \Rightarrow \frac{d}{dt} = \frac{d}{dt'}$$

$$x'^i = R^i{}_j x^j - u^i t + b^i$$

<u>Μετασχηματισμός της ταχύτητας</u>
Παραγωγίζοντας τις συντεταγμένες ως προς το χρόνο βρίσκουμε τον νόμο μετασχηματισμού της ταχύτητας:

$$\boxed{\upsilon'^i = R^i{}_j \upsilon^j - u^i} \tag{2.3.1}$$

Σε διανυσματική μορφή η παραπάνω σχέση γίνεται:

$$\vec{\upsilon}' = \upsilon'^i \vec{e}'_i = R^i{}_j \upsilon^j \vec{e}'_i - u^i \vec{e}'_i = \upsilon^j \vec{e}_j - u^i R_i{}^j \vec{e}_j = \vec{\upsilon} - u^i R_i{}^j \vec{e}_j$$

<u>Μετασχηματισμός της επιτάχυνσης</u>
Παραγωγίζοντας τις συντεταγμένες της ταχύτητας βρίσκουμε τον νόμο μετασχηματισμού της επιτάχυνσης:
$\boxed{a^i = R^i{}_j a^j}$.
Σε διανυσματική μορφή έχουμε:

$$\vec{a}' = a'^i \vec{e}'_i = R^i{}_j a^j \vec{e}'_i = a^j \vec{e}_j = \vec{a} \Rightarrow \boxed{\vec{a}' = \vec{a}} \tag{2.3.2}$$

<u>Μετασχηματισμός της ορμής</u>
Επειδή $\vec{p} = m\vec{\upsilon}$ ο νόμος μετασχηματισμού της ορμής είναι παρόμοιος με την νόμο μετασχηματισμού της ταχύτητας. Επομένως

$$\boxed{p'^{i} = R^{i}{}_{j}p^{j} - mu^{i}}$$

και σε διανυσματική μορφή

$$\boxed{\vec{p}' = \vec{p} - m\vec{u}} \qquad (2.3.3)$$

2.4. Η εμβέλεια και τα όρια του Μετασχηματισμού του Γαλιλαίου

2.4.1. Η εμβέλεια

Τα αδρανειακά συστήματα αναφοράς τα ορίσαμε (για λόγους οικονομίας στις βασικές αρχές) να είναι εκείνα τα συστήματα αναφοράς στα οποία ισχύει ο νόμος της αδράνειας του Newton. Θα έφτανε όμως αυτή η ιδιότητά τους για να τα αναγάγουμε σε ιδιαίτερη κλάση;

Στην πραγματικότητα τα ΑΣΑ έχουν πολύ πιο ισχυρή ιδιότητα:

Όλοι οι νόμοι της κλασσικής μηχανικής ισχύουν οι ίδιοι ανεξαρτήτως αδρανειακού συστήματος αναφοράς.

Ας πάρουμε για παράδειγμα την αρχή διατήρηση της ορμής .

Υποθέτουμε ότι έχουμε ένα σύστημα Ν σωματιδίων με συντεταγμένες $x^{i}{}_{(\alpha)}$ με i=1,2,3 και α=1,2,3,…N (ο δείκτης μέσα στην παρένθεση χαρακτηρίζει το σωματίδιο).

Δεχόμαστε ότι η ορμή του συστήματος παραμένει σταθερή στο ένα σύστημα ($\vec{p}(t_1) = \vec{p}(t_2)$) και θα αποδείξουμε ότι παραμένει σταθερή και στο άλλο.

$$\vec{p}(t_1) = \vec{p}(t_2) \Leftrightarrow p^{i}(t_1) = p^{i}(t_1) \Leftrightarrow \sum_{\alpha=1}^{N} p^{i}_{(\alpha)}(t_1) = \sum_{\alpha=1}^{N} p^{i}_{(\alpha)}(t_2)$$

Στο άλλο σύστημα συντεταγμένων (με χρήση της (2.3.3))έχουμε:

$$p'^{i}(t_1) = \sum_{\alpha=1}^{N}(R^{i}{}_{j}p^{j}_{(\alpha)}(t_1) - m_{(\alpha)}u^{i}) = R^{i}{}_{j}\sum_{\alpha=1}^{N} p^{j}_{(\alpha)}(t_1) - u^{i}\sum_{\alpha=1}^{N} m_{(\alpha)} \Rightarrow$$

$$p'^{i}(t_1) = R^{i}{}_{j}\sum_{\alpha=1}^{N} p^{j}_{(\alpha)}(t_2) - u^{i}\sum_{\alpha=1}^{N} m_{(\alpha)} = \sum_{\alpha=1}^{N}(R^{i}{}_{j}p^{j}_{(\alpha)}(t_2) - m_{(\alpha)}u^{i}) = p'^{i}(t_2)$$

2.4.2. Τα όρια

Ας θεωρήσουμε την περίπτωση ενός κύματος το οποίο διαδίδεται με ταχύτητα υ σε ένα γραμμικό ελαστικό μέσο (πχ ένα σχοινί). Η εξίσωση που περιγράφει την διάδοση του κύματος στο σχοινί είναι η κυματική εξίσωση:

$$\frac{\partial^2 \Psi(t,x)}{\partial x^2} - \frac{1}{\upsilon^2}\frac{\partial^2 \Psi(t,x)}{\partial t^2} = 0 \qquad (2.4.1)$$

Θεωρούμε τον μετασχηματισμό συντεταγμένων που επάγεται από μια προώθηση κατά μήκος του άξονα x.

Δηλαδή $\Gamma = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -u & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ και $b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ και επομένως ο μετασχηματισμός συντεταγμένων είναι:

$$t' = t$$

$$x' = x - u\,t$$

Ποια μορφή θα πάρει η κυματική εξίσωση στο άλλο σύστημα συντεταγμένων ;

Για να απαντήσουμε στο ερώτημα αυτό θα ξεκινήσουμε από την (2.4.1) και χρησιμοποιώντας την αλλαγή μεταβλητών που ορίζει ο μετασχηματισμός θα βρούμε την μορφή που παίρνει στο άλλο ΑΣΑ

Επειδή το Ψ είναι βαθμωτό μέγεθος ισχύει ότι Ψ(t , x)=Ψ΄(t΄, x΄)

Για τους τελεστές παραγώγισης έχουμε διαδοχικά:

$$\frac{\partial}{\partial x}=\frac{\partial x'}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x'}+\frac{\partial t'}{\partial x}\frac{\partial}{\partial t'}=\frac{\partial}{\partial x'}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}=\frac{\partial x'}{\partial t}\frac{\partial}{\partial x'}+\frac{\partial t'}{\partial t}\frac{\partial}{\partial t'}=-u\frac{\partial}{\partial x'}+\frac{\partial}{\partial t'}$$

Για τις δεύτερες παραγώγους του Ψ έχουμε:

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2}=\frac{\partial^2\Psi'}{\partial x^2}\ \text{και}\ \frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2}=\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial t}\Psi'=(-u\frac{\partial}{\partial x'}+\frac{\partial}{\partial t'})(-u\frac{\partial}{\partial x'}+\frac{\partial}{\partial t'})\Psi'=u^2\frac{\partial^2\Psi'}{\partial x'^2}+\frac{\partial^2\Psi'}{\partial t'^2}-2u\frac{\partial^2\Psi'}{\partial x'\partial t'}$$

Επομένως η κυματική εξίσωση γίνεται:

$$(1-\frac{u^2}{\upsilon^2})\frac{\partial^2\Psi'}{\partial x'^2}-\frac{1}{\upsilon^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial t'^2}-2\frac{u}{\upsilon^2}\frac{\partial^2\Psi'}{\partial x'\partial t'}=0$$

Παρατηρούμε ότι η κυματική εξίσωση δεν παραμένει αναλλοίωτη (αλλάζει μορφή) κάτω από μετασχηματισμούς Γαλιλαίου.
Βρισκόμαστε λοιπόν ενώπιον του εξής γεγονότος:
Ένα παρατηρητής που κινείται με σταθερή ταχύτητα u ως προς το σχοινί πρέπει να γράψει διαφορετική εξίσωση και επομένως **διαφορετικό φυσικό νόμο**.
Για το φαινόμενο που περιγράψαμε υπάρχει αντίλογος. Επειδή το κύμα που μελετάμε είναι ένα μηχανικό κύμα που διαδίδεται σε ένα σχοινί υπάρχει προνομιακό σύστημα αναφοράς. Το σύστημα ηρεμίας του σχοινιού. Επομένως μπορούμε να υποχωρήσουμε στην απαίτηση μας, για την ισοδυναμία όλων των αδρανειακών συστημάτων όσον αφορά την περιγραφή της διάδοσης του κύματος και να δεχθούμε ότι η κυματική εξίσωση ισχύει μόνο στο σύστημα αναφοράς ως προς το οποίο το μέσο διάδοσης ηρεμεί.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3.
ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ LORENTZ

3.1. Εισαγωγή

Διαπιστώσαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο την αδυναμία των μετασχηματισμών του Γαλιλαίου να διατηρούν αναλλοίωτη την κυματική εξίσωση.
Όμως η ύπαρξη προνομιακού συστήματος αναφοράς μετριάζει την αρνητικότητα του αποτελέσματος.
Τι γίνεται όμως αν το κύμα που διαδίδεται είναι Ηλεκτρομαγνητικό;
Επειδή τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα διαδίδονται και στο κενό, δεν υπάρχει προνομιακό σύστημα αναφοράς και επομένως η απαίτηση για την ισοδυναμία όλων των αδρανειακών συστημάτων αναφοράς εμφανίζεται και πάλι.
Επιπλέον υπάρχει το πρόβλημα της ταχύτητας διάδοσης του φωτός. Ας θεωρήσουμε μια πηγή φωτός ακίνητη ως προς ένα αδρανειακό παρατηρητή. Τότε στο σύστημα αυτό το φως που εκπέμπει διαδίδεται με ταχύτητα c. Αν θεωρήσουμε ένα δεύτερο αδρανειακό παρατηρητή που απομακρύνεται με ταχύτητα υ από την πηγή τότε εφαρμόζοντας τους μετασχηματισμούς Γαλιλαίου βρίσκουμε ότι στο σύστημα αναφοράς του παρατηρητή το φως διαδίδεται με ταχύτητα c-u. Τα πειραματικά δεδομένα όμως οδηγούν στο αντίθετο συμπέρασμα:
Η ταχύτητα του φωτός είναι ίδια σε όλα τα αδρανειακά συστήματα αναφοράς.

Χρειαζόμαστε λοιπόν μια νέα Φυσική. Οι αρχές που πρέπει να υπακούει η Φυσική αυτή πρέπει να είναι οι παρακάτω.

A1) Υπάρχουν χωροχρονικά συστήματα αναφοράς στα οποία το ελεύθερο σωμάτιο κινείται με σταθερή ταχύτητα (Ύπαρξη ΑΣΑ)
A2) Αν ένα σύστημα αναφοράς κινείται με σταθερή ταχύτητα ως προς αδρανειακό σύστημα αναφοράς είναι επίσης αδρανειακό σύστημα αναφοράς
A3) Οι νόμοι της Φυσικής ίδιοι σε όλα τα ΑΣΑ
A4) Η ταχύτητα του φωτός είναι ίδια σε όλα τα ΑΣΑ
A5) Για ταχύτητες πολύ μικρότερες της ταχύτητας του φωτός θα πρέπει η Φυσική να δίνει προσεγγιστικά την Φυσική του Newton.

Τι παρεμβάσεις πρέπει να κάνουμε στην θεωρία μας ώστε να ικανοποιεί τις παραπάνω αρχές; Η πρώτη προφανής παρέμβαση είναι η αλλαγή στον μετασχηματισμό συντεταγμένων. Μια δεύτερη που δεν είναι ακόμη προφανής είναι η αλλαγή των ορισμών των φυσικών μεγεθών, η εισαγωγή νέων μεγεθών ή ακόμη και η τροποποίηση των φυσικών νόμων ώστε τα νέα φυσικά μεγέθη και οι νέοι φυσικοί νόμοι να είναι σύμφωνοι με τις παραπάνω αρχές.

3.2. Προώθηση Lorentz

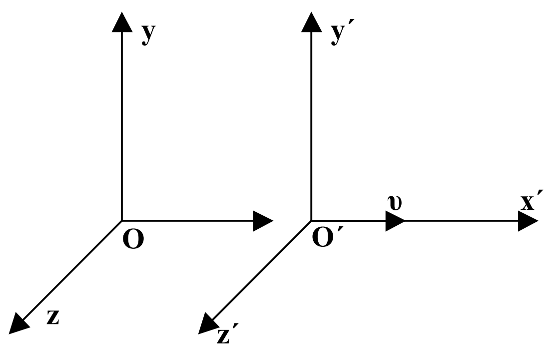
3.2.1. Προώθηση κατά μήκος ενός άξονα

Θεωρούμε δύο ΑΣΑ Oxyz και O΄x΄y΄z΄ με παράλληλους άξονες .Θεωρούμε επίσης ότι το O΄ κινείται ως προς το O με σταθερή ταχύτητα υ κατά την κατεύθυνση του άξονα x. Για λόγους απλότητας θεωρούμε τέλος ότι την στιγμή t=0 το O΄ συμπίπτει με το O και είναι t΄=0.
Αναζητούμε γραμμικό μετασχηματισμό συντεταγμένων της μορφής:

$$t' = b\,t + a\,x \qquad (3.2.1)$$

$$x' = g\,t + f\,x \qquad (3.2.2)$$

$$y' = y \quad z' = z \qquad (3.2.3)$$



Τα a,b,d,f είναι εν γένει συναρτήσεις του υ. Επομένως για δοθέν υ είναι σταθερές.

Ζητάμε να προσδιορίσουμε τις τιμές των a,b,d,f ώστε ο μετασχηματισμός να είναι σύμφωνος με τις αρχές τις ειδικής σχετικότητας.

Απαίτηση 1: Το σημείο Ο΄ κινείται ως προς το Ο με ταχύτητα υ
Πρέπει με x΄=0 να ισχύει ότι x=υt. Επομένως η (3.2.2) γίνεται:

$$0=g\,t+f\,\upsilon\,t \Rightarrow g = -\,f\,\upsilon \qquad (3.2.3)$$

Απαίτηση 2: Το σημείο Ο κινείται ως προς το Ο΄ με ταχύτητα -υ
Πρέπει με x=0 να ισχύει ότι x΄=-υt΄. Επομένως οι (3.2.1) και (3.2.2) γίνονται:

$$t' = b\,t$$

$$-\upsilon t' = g\,t \Rightarrow -\upsilon\, b\, t = g\, t \Rightarrow g = -b\,\upsilon \qquad (3.2.1.4)$$

Από τις (3.2.3) και (3.2.4) έχουμε ότι : f=b
Επομένως ο μετασχηματισμός γίνεται:

$$t' = b\,t + a\,x \qquad (3.2.5)$$

$$x' = b(-\upsilon\, t + x) \qquad (3.2.6)$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

Απαίτηση 3: Η ταχύτητα διάδοσης του φωτός είναι ίδια σε όλα τα ΑΣΑ
Θεωρούμε ότι την στιγμή t=0 που οι αρχές των δύο συστημάτων συμπίπτουν το Ο εκπέμπει ένα φωτεινό σήμα. Μετά από χρόνο t το σήμα έχει διαδοθεί σε απόσταση x=ct. Για να είναι η ταχύτητα διάδοσης του φωτός ίδια στα δύο ΑΣΑ θα πρέπει και x΄=ct΄.
Αντικαθιστώντας τις παραπάνω στις (3.2.5) και (3.2.6) έχουμε:

$$t' = b\,t + a\,c\,t \qquad (3.2.7)$$

$$c\,t' = -b\,\upsilon\, t + b\,c\,t \qquad (3.2.8)$$

Αντικαθιστώντας την (3.2.7) στην (3.2.8) έχουμε τελικά : $a = -\frac{b\,\upsilon}{c^2}$

Με τα παραπάνω ο μετασχηματισμός παίρνει την μορφή:

$$t' = b(t - \frac{\upsilon}{c^2}x) \qquad (3.2.9)$$

$$x' = b(-\upsilon\, t + x) \qquad (3.2.10)$$

Απαίτηση 4: Η κυματική εξίσωση παραμένει αναλλοίωτη
Αυτό σημαίνει ότι η παράσταση $\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2}$ με την αλλαγή των μεταβλητών που περιγράφουν οι (3.2.9) και (3.2.10) μετατρέπεται στην $\frac{\partial^2\Psi'}{\partial x'^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Psi'}{\partial t'^2}$.

Για τους τελεστές παραγώγισης έχουμε:

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial x'}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x'} + \frac{\partial t'}{\partial x}\frac{\partial}{\partial t'} = b(\frac{\partial}{\partial x'} - \frac{\upsilon}{c^2}\frac{\partial}{\partial t'})$$

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial x'}{\partial t}\frac{\partial}{\partial x'} + \frac{\partial t'}{\partial t}\frac{\partial}{\partial t'} = b(-\upsilon\frac{\partial}{\partial x'} + \frac{\partial}{\partial t'})$$

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}\Psi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial t}\Psi =$$

$$b^2\left(\frac{\partial}{\partial x'}-\frac{\upsilon}{c^2}\frac{\partial}{\partial t'}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x'}-\frac{\upsilon}{c^2}\frac{\partial}{\partial t'}\right)\Psi-\frac{1}{c^2}b^2\left(-\upsilon\frac{\partial}{\partial x'}+\frac{\partial}{\partial t'}\right)\left(-\upsilon\frac{\partial}{\partial x'}+\frac{\partial}{\partial t'}\right)\Psi=$$

$$b^2\left(1-\frac{\upsilon^2}{c^2}\right)\frac{\partial^2\Psi}{\partial x'^2}-b^2\left(1-\frac{\upsilon^2}{c^2}\right)\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial t'^2}$$

Επομένως για να παραμείνει αναλλοίωτη η κυματική εξίσωση θα πρέπει

$$b^2\left(1-\frac{\upsilon^2}{c^2}\right)=1\Rightarrow b^2=\frac{1}{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}\Rightarrow b=\pm\frac{1}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}$$ και $|\upsilon|<c$

Μια επιπλέον υπόθεση που θα πρέπει να επιβάλλουμε είναι η εξής:
Όταν το $\upsilon=0$ τότε τα δύο ΑΣΑ ταυτίζονται και επομένως ο μετασχηματισμός θα είναι $x'=x$ και $t'=t$.
Αυτό σημαίνει ότι για $\upsilon=0$ πρέπει $b=1$. Επομένως πρέπει να διαλέξουμε την λύση για το b με το +.

Άρα τελικά $b=\dfrac{1}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}$

Θέτουμε $\gamma=b\Rightarrow \gamma=\dfrac{1}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}$ (3.2.11)

και ο τελικός μετασχηματισμός Lorentz είναι:

$$t'=\gamma\left(t-\frac{\upsilon}{c^2}x\right) \quad (3.2.12)$$

$$x'=\gamma(-\upsilon t+x) \quad (3.2.13)$$

$y'=y$ και $z'=z$

<u>Σχόλια</u>

Σ1) Το εννοιολογικό περιεχόμενο της (3.2.13) είναι οικείο και από τους μετασχηματισμούς Γαλιλαίου. Η απάντηση στο ερώτημα "που έγινε ένα γεγονός κατά τον παρατηρητή Ο΄;" εξαρτάται τόσο από το που έγινε το γεγονός κατά τον Ο όσο και από το πότε έγινε κατά τον Ο. Το μόνο "περίεργο είναι ο παράγοντας γ στο δεύτερο μέλος της (3.2.13)

Σ2) Με την (3.2.12) τα πράγματα είναι τελείως διαφορετικά. Βρισκόμαστε σε μια τελείως νέα κατάσταση: Η απάντηση στο ερώτημα "πότε έγινε ένα γεγονός κατά τον Ο΄ ;" εξαρτάται τόσο από το πότε έγινε κατά τον Ο όσο και από το πού έγινε. Η έννοια του απόλυτου χρόνου του Νεύτωνα είναι πια παρελθόν.

Σ3) Οι σχέσεις (3.2.9) και (3.2.10) μπορούν να γραφούν σε μορφή πινάκων ως εξής:

Θέτουμε $X=\begin{bmatrix}t\\x\\y\\z\end{bmatrix}$ $X'=\begin{bmatrix}t'\\x'\\y'\\z'\end{bmatrix}$ και $X'=\Lambda X$ με $\Lambda(\upsilon)=\begin{bmatrix}\gamma & -\gamma\frac{\upsilon}{c^2} & 0 & 0\\ -\gamma\upsilon & \gamma & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$

Σ4) Αν θεωρήσουμε τις (3.2.9) και (3.2.10) σαν ένα σύστημα με αγνώστους τα t και x βρίσκουμε ότι

$$t=\gamma\left(t'+\frac{\upsilon}{c^2}x'\right) \quad \text{και} \quad x=\gamma(\upsilon t'+x') \quad (3.2.14)$$

Το παραπάνω συμπέρασμα ήταν αναμενόμενο αφού το Ο κινείται με ταχύτητα –υ ως προς το Ο΄.

Σ5) Χρησιμοποιώντας το προηγούμενο σχόλιο ή υπολογίζοντας απ' ευθείας τον αντίστροφο του Λ οδηγούμαστε στο συμπέρασμα ότι $\boxed{\Lambda^{-1}(\upsilon)=\Lambda(-\upsilon)}$

Εφαρμογή 1 (Διαστολή του χρόνου)
Θεωρούμε ένα τραίνο που κινείται με σταθερή ταχύτητα υ=0,6c ως προς αδρανειακό σύστημα αναφοράς Ο . Ένας επιβάτης του τραίνου ακίνητος ως προς το τραίνο κοιτάζει το ρολόι του –κλείνει τα μάτια του και τα ανοίγει πάλι. Διαπιστώνει ότι ο χρόνος που πέρασε είναι 2sec. Να βρεθεί η χρονική διάρκεια κατά την οποία είχε τα μάτια του κλειστά όπως την μετρά ο Ο.

Λύση

Θεωρούμε ένα σύστημα συντεταγμένων προσαρμοσμένο στο τραίνο με αρχή τον επιβάτη.
Θεωρούμε επίσης τα εξής δύο γεγονότα.
Γεγονός 1: Ο επιβάτης κλείνει τα μάτια του.
Οι συντεταγμένες του γεγονότος ως προς Ο΄ είναι t'_1 , $x_1'=0$ ενώ ως προς το Ο είναι t_1 , x_1
Χρησιμοποιώντας τον αντίστροφο μετασχηματισμό έχουμε ότι:

$$t_1=\gamma(t_1'+\frac{\upsilon}{c^2}x_1')\Rightarrow t_1=\gamma t_1'$$

Γεγονός 2: Ο επιβάτης ανοίγει τα μάτια του.
Οι συντεταγμένες του γεγονότος ως προς Ο΄ είναι t'_2 , $x_2'=0$ ενώ ως προς το Ο είναι t_2 , x_2

$$t_2=\gamma(t_2'+\frac{\upsilon}{c^2}x_2')\Rightarrow t_2=\gamma t_2'$$

Από την εκφώνηση έχουμε ότι $\Delta t'=2sec$
Αφαιρώντας κατά μέλη έχουμε ότι $\Delta t=t_2-t_1=\gamma(t_2'-t_1')=\gamma\Delta t'$

Επιπλέον $\gamma=\dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{\upsilon^2}{c^2}}}=\dfrac{1}{\sqrt{1-0,6^2}}=\dfrac{1}{0,8}=1.25$

Επομένως $\Delta t=2.5$ sec

Εφαρμογή 2 (Συστολή του μήκους)

Ο επιβάτης του προηγούμενου προβλήματος τεντώνει το χέρι του κατά την διεύθυνση κίνησης του τραίνου και χρησιμοποιώντας την μετροταινία που βρίσκεται στο χαρτοφύλακά του βρίσκει ότι το χέρι του έχει μήκος 70cm. Να βρεθεί το μήκος του χεριού του επιβάτη όπως το μετρά ο Ο.

Λύση

Οι συντεταγμένες των άκρων του χεριού του επιβάτη στο Ο΄ είναι $x'_1=0$ και $x'_2=0{,}7$m.
Για να βρει ο Ο το μήκος του χεριού του επιβάτη πρέπει να μετρήσει ταυτόχρονα (στο σύστημά του) τις συντεταγμένες των άκρων του χεριού του επιβάτη.
Πρέπει επομένως $t_1=t_2\Leftrightarrow\Delta t=0$
Για να μπορέσουμε να επιβάλουμε την παραπάνω συνθήκη , θα πρέπει παρ' όλο που ζητάμε το Δx να χρησιμοποιήσουμε τον «ορθό» μετασχηματισμό:

$x_1'=\gamma(-\upsilon t_1+x_1)$ και $x_2'=\gamma(-\upsilon t_2+x_2)$

Αφαιρώντας κατά μέλη έχουμε

$\Delta x'=\gamma(-\upsilon\Delta t+\Delta x)$

και επειδή $\Delta t=0$ έχουμε: $\Delta x'=\gamma\,\Delta x\Rightarrow\Delta x=\dfrac{\Delta x'}{\gamma}=\dfrac{0.7}{1.25}=56cm$

Εφαρμογή 3:

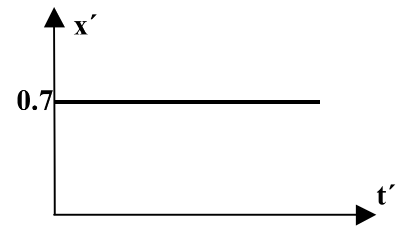
Θεωρούμε τον μύθο της εφαρμογής 1. Να σχεδιαστεί η κοσμική γραμμή που διαγράφει η άκρη του χεριού του επιβάτη στο Ο και στο Ο΄.

Λύση

Η κοσμική γραμμή είναι εξ ορισμού το σύνολο των σημείων του χωροχρόνου από τα οποία «διέρχεται» η άκρη του χεριού του επιβάτη

α) Στο Ο΄

Επειδή η άκρη Α του χεριού του επιβάτη έχει σταθερή χωρική συντεταγμένη x΄=0.7 , τα χωροχρονικά σημεία από τα οποία διέρχεται είναι όλα τα σημεία (t΄,x΄) με x΄=0.7 .
Επομένως θα διαγράφει μια γραμμή παράλληλη στον άξονα t΄ που διέρχεται από το σημείο 0.7 του άξονα x΄.



β) Στο Ο.

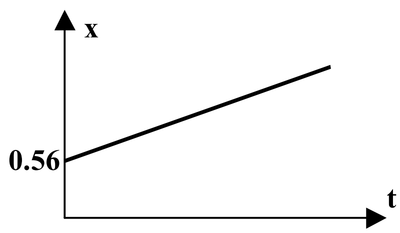
α τρόπος: Θεωρούμε τον μετασχηματισμό $t=\gamma(t'+\frac{\upsilon}{c^2}x')$ και $x=\gamma(\upsilon t'+x')$.

Αντικαθιστούμε x΄=0.7 και κάνουμε απαλοιφή του t΄ για να βρούμε την σχέση t και x. Με λίγη άλγεβρα καταλήγουμε στην σχέση:

$$x=\frac{x'}{\gamma}+\upsilon t\Rightarrow x=0,56+0.6ct$$

β τρόπος : Θεωρούμε τον μετασχηματισμό $x'=\gamma(-\upsilon t+x)$. Λύνουμε ως προς x και έχουμε:

$$x=\frac{x'}{\gamma}+\upsilon t\Rightarrow x=0,56+0.6ct$$



Εφαρμογή 4

Υποθέτουμε ότι ο γνωστός μας πια επιβάτης μετρά με την μετροταινία του το μήκος του τραίνου και το βρίσκει L. Την στιγμή t΄=0 ευρισκόμενος στο πίσω μέρος του τραίνου με έναν δείκτη Laser εκτοξεύει ένα φωτεινό σήμα προς τα εμπρός. Να βρείτε στο σύστημα Ο και Ο΄:
α)Την χρονική στιγμή που η ακτίνα φτάνει στο μπροστινό μέρος του τραίνου
β) Την κοσμική γραμμή που γράφει η ακτίνα.

Λύση

α)
Α τρόπος

Επειδή το μήκος του τραίνου στο σύστημα Ο΄ είναι L θα ισχύει ότι $L=ct'\Rightarrow t'=\frac{L}{c}$.

Επομένως για το γεγονός: «Άφιξη του φωτεινού σήματος στο μπροστινό μέρος του τραίνου» έχουμε $\begin{bmatrix}t'\\x'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{L}{c}\\L\end{bmatrix}$. Αντικαθιστούμε στον μετασχηματισμό (3.2.14) και έχουμε:

$$t=\frac{\gamma L(c+\upsilon)}{c^2}\ \text{και}\ x=\frac{\gamma L(c+\upsilon)}{c}$$

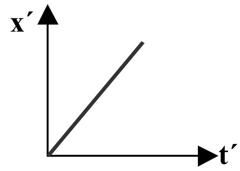
Β τρόπος
Το φωτεινό σήμα εκπέμπεται στην θέση x΄=0 την στιγμή t΄=0. Επομένως στο σύστημα Ο εκπέμπεται την στιγμή t=0 στη θέση x=0. Η εξίσωση κίνησης του φωτεινού σήματος στο σύστημα Ο είναι $x_1=ct$.
Το μπροστινό μέρος του τραίνου (x΄=L) κινείται ως προς το Ο. Για να βρούμε την εξίσωση κίνησης του στο Ο αντικαθιστούμε στην σχέση
$x'=\gamma(-\upsilon t+x)$ όπου x΄=L και λύνουμε ως προς x.

Επομένως η εξίσωση κίνησης του μπροστινού μέρους του τραίνου είναι $x_2=\frac{L}{\gamma}+\upsilon t$

Το φωτεινό σήμα συναντά το μπροστινό μέρος του τραίνου όταν $x_1=x_2 \Rightarrow c\,t=\frac{L}{\gamma}+\upsilon t \Rightarrow t=\frac{L}{\gamma(c-\upsilon)}$

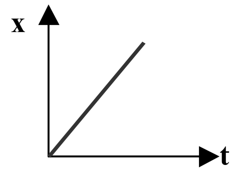
Ενδιαφέρον από πλευράς πράξεων παρουσιάζει η απόδειξη της ισοδυναμίας των δύο αποτελεσμάτων.
Έχουμε διαδοχικά:

$$t=\frac{L}{\gamma(c-\upsilon)}=\frac{\gamma L}{\gamma^2(c-\upsilon)}=\frac{\gamma L}{\frac{1}{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}(c-\upsilon)}=\frac{\gamma L(c+\upsilon)}{c^2}$$



β) Στο σύστημα του τραίνου η εξίσωση κίνησης της φωτεινής ακτίνας είναι x΄=ct΄
Επομένως η κοσμική γραμμή είναι τα σημεία του επιπέδου (t΄,x΄) με x΄=ct΄ (ευθεία)

Επειδή στο σύστημα Ο είναι x=ct η κοσμική γραμμή και στο (t,x) είναι η ίδια



Εφαρμογή 5

Θεωρούμε τώρα ότι ο επιβάτης εκτοξεύει μια μικρή σφαίρα η οποία κινείται κατά μήκος του τραίνου με σταθερή ταχύτητα u ως προς το τραίνο . Να βρεθεί η ταχύτητα της ως προς το Ο.

Λύση

Για την κίνηση της σφαίρας ως προς το Ο΄ ισχύει ότι x΄=u t΄.
Αντικαθιστούμε στις (3.2.14) και έχουμε:
$t=\gamma t'(1+\frac{\upsilon u}{c^2})$ και $x=\gamma t'(\upsilon+u)$. Απαλείφοντας τον χρόνο t΄ έχουμε : $x=\frac{u+\upsilon}{1+\frac{u\upsilon}{c^2}}t$

Επομένως η ταχύτητα της σφαίρας ως προς το Ο είναι $\frac{u+\upsilon}{1+\frac{u\upsilon}{c^2}}$

Σχόλιο

Από τον τρόπο με τον οποίο βρήκαμε την σχετική ταχύτητα της σφαίρας ως προς το Ο θα μπορούσε να βγει το συμπέρασμα ότι η σχέση που καταλήξαμε ισχύει μόνο αν η κίνηση της σφαίρας είναι ομαλή. Αυτό όμως δεν είναι αλήθεια όπως φαίνεται από τα παρακάτω.
Έστω u η στιγμιαία ταχύτητα της σφαίρας ως προς το τραίνο.
Είναι $u=\frac{dx'}{dt'} \Rightarrow dx'=u\,dt'$
Διαφορίζοντας τις (3.2.14) έχουμε :
$dt=\gamma(dt'+\frac{\upsilon}{c^2}d\,x')=\gamma dt'(1+\frac{\upsilon u}{c^2})$ και $dx=\gamma(\upsilon\,dt'+dx')=\gamma dt'(\upsilon+u)$

και επομένως $\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{u+\upsilon}{1+\dfrac{u\upsilon}{c^2}}$

3.2.2. Χωροχρονικές συντεταγμένες – Γενική προώθηση Lorentz

Στην μέχρι τώρα μελέτη μας θεωρούσαμε σαν χωροχρονικές συντεταγμένες τον χρόνο t και τις τρεις χωρικές συντεταγμένες x^1, x^2, x^3. Για λόγους διαστάσεων και ομοιομορφίας στις σχέσεις ορίζουμε την χρονική συντεταγμένη x^0=ct. Έτσι όλες οι συντεταγμένες μας έχουν διαστάσεις μήκους. Θέτουμε επίσης

$$\beta = \frac{\upsilon}{c} \qquad (3.2.15)$$

Με αυτούς τους ορισμούς οι σχέσεις (3.2.9) , (3.2.10) και (3.2.11) γίνονται

$$x'^0 = \gamma(x^0 - \beta x) \text{ και } x' = \gamma(-\beta x^0 + x) \qquad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

Η σε μορφή πίνακα θέτοντας:

$$X = \begin{bmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{bmatrix} \quad X' = \begin{bmatrix} x'^0 \\ x'^1 \\ x'^2 \\ x'^3 \end{bmatrix} \text{ και } \boxed{\Lambda_{(x)}(\beta) = \begin{bmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}} \text{ με } \gamma(\beta) = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \beta = \frac{\upsilon}{c}, |\beta|<1 \qquad (3.2.16)$$

Ο μετασχηματισμός συντεταγμένων σε μορφή πίνακα γράφεται:

$$\boxed{X' = \Lambda X} \qquad (3.2.17)$$

και σε συνιστώσες

$$\boxed{x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu\, x^\nu} \qquad (3.2.18)$$

με μ=0,1,2,3 και υπονοείται άθροιση στον δείκτη ν από 0 έως 3

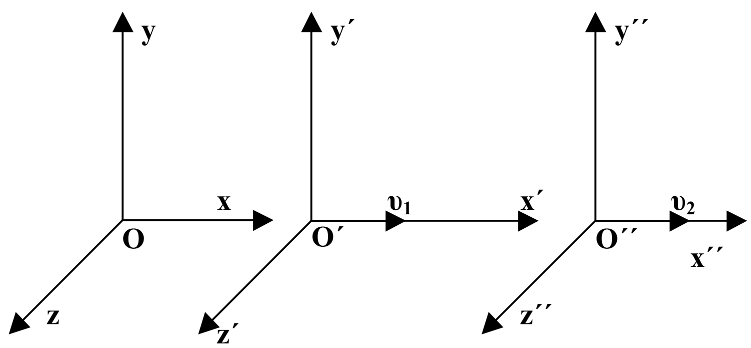
Ιδιότητες του Λ

1) Λ(0)=I όπου I ο μοναδιαίος 4x4 πίνακας. Η σχέση αυτή σε συνιστώσες μπορεί να γραφεί $\Lambda(0)^\mu{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu$ όπου δ το δέλτα του Kronecker (δηλ $\delta^0{}_0 = \delta^1{}_1 = \delta^2{}_2 = \delta^3{}_3 = 1$ και 0 όταν μ≠ν)

2) Λ(β).Λ(-β)=I

Η σχέση αυτή σημαίνει ότι $\Lambda^{-1}(\beta) = \Lambda(-\beta)$ όπου $\Lambda^{-1}(\beta)$ ο αντίστροφος πίνακας του Λ(β).

3) $\Lambda(\beta_1).\Lambda(\beta_2) = \Lambda\left(\dfrac{\beta_1+\beta_2}{1+\beta_1\beta_2}\right)$



Η απόδειξη της παραπάνω σχέσης είναι θέμα στοιχειώδους άλγεβρας και αφήνεται στον αναγνώστη.
Ποιο είναι όμως το περιεχόμενο της σχέσης αυτής ;
Θεωρούμε τρία ΑΣΑ O,O´,O´´.
Έστω υ_1 η ταχύτητα του O´ ως προς O και υ_2 η ταχύτητα του O´´ ως προς το O´.
Τότε η ταχύτητα του O´´ ως προς το O

είναι $\upsilon = \dfrac{\upsilon_1 + \upsilon_2}{1 + \dfrac{\upsilon_1 \upsilon_2}{c^2}}$

Στο σημείο αυτό θα πρέπει να τονίσουμε ότι η παραπάνω σχέση ισχύει μόνο όταν οι δύο προωθήσεις είναι κατά την **ίδια διεύθυνση** (πχ και οι δύο κατά την διεύθυνση x)

Αν έχουμε μία προώθηση κατά την διεύθυνση y τότε οι σχέσεις μετασχηματισμού θα είναι προφανώς :
$x'^0 = \gamma(x^0 - \beta y)$, x΄=x $y' = \gamma(-\beta x^0 + y)$, z΄=z. Ο πίνακας
για μια προώθηση κατά τον άξονα y είναι

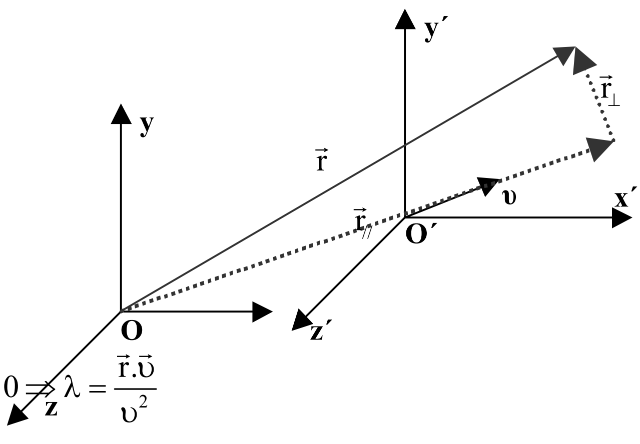
$$\Lambda_{(y)}(\beta) = \begin{bmatrix} \gamma & 0 & -\gamma\beta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & 0 & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (3.2.19)$$

για μια προώθηση κατά τον άξονα z είναι

$$\Lambda_{(z)}(\beta) = \begin{bmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\gamma\beta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\gamma\beta & 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix} \qquad (3.2.20)$$

Η γενικευμένη προώθηση μπορεί να βρεθεί ως εξής:

Θεωρούμε ότι το O΄ κινείται ως προς το O με ταχύτητα $\vec{\upsilon}$ τυχαίας διεύθυνσης όπως στο σχήμα. Αναλύουμε τα διανύσματα θέσης ενός τυχαίου σημείου σε δύο συνιστώσες. Μια κατά την διεύθυνση της ταχύτητας υ και μια κάθετη σε αυτή. Για να εκφράσουμε τις συνιστώσες συναρτήσει των $\vec{r}$ και $\vec{\upsilon}$ έχουμε να παρατηρήσουμε τα εξής:



$\vec{r} = \vec{r}_{//} + \vec{r}_\perp \Rightarrow \vec{r}_\perp = \vec{r} - \vec{r}_{//}$

Επειδή $\vec{r}_{//} \,//\, \vec{\upsilon} \Rightarrow \vec{r}_{//} = \lambda \vec{\upsilon}$

$\vec{r}_\perp \perp \vec{\upsilon} \Rightarrow \vec{r}_\perp . \upsilon = 0 \Rightarrow (\vec{r} - \vec{r}_{//}).\vec{\upsilon} = 0 \Rightarrow (\vec{r} - \lambda\vec{\upsilon}).\vec{\upsilon} = 0 \Rightarrow \lambda = \dfrac{\vec{r}.\vec{\upsilon}}{\upsilon^2}$

Επομένως: $\vec{r}_{//} = \dfrac{\vec{r}.\vec{\upsilon}}{\upsilon^2}\vec{\upsilon}$ και $\vec{r}_\perp = \vec{r} - \dfrac{\vec{r}.\vec{\upsilon}}{\upsilon^2}\vec{\upsilon}$

Ο μετασχηματισμός Lorentz δεν επηρεάζει την κάθετη στην ταχύτητα συνιστώσα και μεταβάλει κατά τα γνωστά την παράλληλη σε αυτήν.

Επομένως έχουμε:

$\vec{r}'_\perp = \vec{r}_\perp$

$\vec{r}'_{//} = \gamma(-\vec{\upsilon}\, t + \vec{r}_{//})$

$t' = \gamma(t - \dfrac{\vec{\upsilon}\vec{r}_{//}}{c^2})$

Η τελευταία σχέση γίνεται $x'^0 = \gamma x^0 - \gamma \sum_{i=1}^{3} \frac{\upsilon^i}{c} x^i$

Πρέπει όμως $x'^0 = \Lambda^0{}_\nu x^\nu = \Lambda^0{}_0 x^0 + \sum_{i=1}^{3} \Lambda^0{}_i x^i$

Επομένως $\Lambda^0{}_0 = \gamma$ και $\Lambda^0{}_i = -\gamma \frac{\upsilon^i}{c}$

Για να βρούμε τις χωρικές συντεταγμένες στο O΄ πρέπει να βρούμε το εσωτερικό γινόμενο του $\vec{r}'$ με τα $\vec{e}_i$. Επομένως έχουμε:

$$x'^i = \vec{r}.e_i = \vec{r}'_{//}.e_i + \vec{r}'_{\perp}.e_i = \gamma(\vec{r}_{//} - \vec{\upsilon}t).\vec{e}_i + \vec{r}_{\perp}.\vec{e}_i = \gamma(\vec{r}_{//} - \vec{\upsilon}t).\vec{e}_i + (\vec{r} - \vec{r}_{//}).\vec{e}_i \Rightarrow$$

$$x'^i = \vec{r}.\vec{e}_i + (\gamma-1)\vec{r}_{//}.\vec{e}_i - \gamma\vec{\upsilon}.\vec{e}_i t = \vec{r}.\vec{e}_i + \lambda(\gamma-1)\vec{\upsilon}.\vec{e}_i - \gamma\vec{\upsilon}.\vec{e}_i t = x^i + \lambda(\gamma-1)\upsilon^i - \gamma\upsilon^i t \Rightarrow$$

$$x'^i = x^i + \frac{\vec{r}.\vec{\upsilon}}{\upsilon^2}(\gamma-1)\upsilon^i - \gamma\upsilon^i t = -\gamma\frac{\upsilon^i}{c}x^0 + \sum_{j=1}^{3}\delta^i{}_j x^j + \frac{\gamma-1}{\upsilon^2}\upsilon^i \sum_{j=1}^{3} x^j \upsilon^j \Rightarrow$$

$$x'^i = -\gamma\frac{\upsilon^i}{c}x^0 + \sum_{j=1}^{3}(\delta^i{}_j + \frac{\gamma-1}{\upsilon^2}\upsilon^i\upsilon^j)x^j$$

Πρέπει όμως $x'^i = \Lambda^i{}_\nu x^\nu = \Lambda^i{}_0 x^0 + \sum_{j=1}^{3}\Lambda^i{}_j x^j$

Επομένως $\Lambda^i{}_0 = -\frac{\upsilon^i}{c}$ και $\Lambda^i{}_j = \delta^i{}_j + \frac{\gamma-1}{\upsilon^2}\upsilon^i\upsilon^j$

Συνοψίζοντας έχουμε για την γενική προώθηση Lorentz

$\Lambda^0{}_0 = \gamma \qquad \Lambda^0{}_i = -\gamma\beta^i$

$\Lambda^i{}_0 = -\gamma\beta^i \qquad \Lambda^i{}_j = \delta^i{}_j + \frac{(\gamma-1)}{|\beta|^2}\beta^i\beta^j$ και σε μορφή πίνακα

$$\boxed{\Lambda(\beta) = \begin{bmatrix} \gamma & -\gamma\beta^T \\ -\gamma\beta & I + \frac{\gamma-1}{|\vec{\beta}|^2}\beta\beta^T \end{bmatrix}} \qquad (3.2.21)$$

με β τον 3x1 πίνακα στήλη $\beta = \begin{bmatrix} \beta^1 \\ \beta^2 \\ \beta^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\upsilon^1}{c} \\ \frac{\upsilon^2}{c} \\ \frac{\upsilon^3}{c} \end{bmatrix}$, $|\vec{\beta}|^2 = \beta^T\beta = (\beta^1)^2 + (\beta^1)^2 + (\beta^2)^2 + (\beta^3)^2$,

$\gamma(\beta) = \frac{1}{\sqrt{1-|\vec{\beta}|^2}}$ και $|\vec{\beta}| < 1$

<u>Σχόλια</u>

1) Μια χρήσιμη εξάσκηση στις πράξεις μεταξύ πινάκων είναι η απόδειξη της σχέσης $\Lambda(\beta)\Lambda(-\beta) = I \Leftrightarrow \Lambda^{-1}(\beta) = \Lambda(-\beta)$ η οποία αφήνεται στον αναγνώστη.

2) Στα παραπάνω βρήκαμε την γενική προώθηση Lorentz η οποία έχει τρεις παραμέτρους β^1,β^2,β^3. Εξακολουθούν να παραμένουν σαν επιτρεπτοί μετασχηματισμοί οι 3 χωρικές στροφές οι 3 χωρικές μεταθέσεις και 1 χρονική μετάθεση. Επομένως ο γενικός μετασχηματισμός Lorentz μπορεί να γραφεί στην μορφή
$X' = \tilde{R}\Lambda X + b$ όπου $\tilde{R} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R \end{bmatrix}$, R 3x3 πίνακας στροφής και Λ προώθηση Lorentz

3.3. Χωροχρονική απόσταση και ο χώρος Minkowski

Θεωρούμε δύο χωροχρονικά σημεία 1 και 2 με πίνακες συντεταγμένων $X_{(1)}$ και $X_{(2)}$ (επομένως με συντεταγμένες $x^{\mu}{}_{(1)}$ και $x^{\mu}{}_{(2)}$) στο Ο και αντίστοιχες στο Ο΄.

Θέτουμε $\Delta S^2 = -(\Delta x^0)^2 + (\Delta x^1)^2 + (\Delta x^2)^2 + (\Delta x^3)^2 = -(\Delta x^0)^2 + (\Delta \vec{x})^2$

Μπορούμε να αποδείξουμε το εξής

Θεώρημα 3.3.1.

$$\Delta S^2 = \Delta S'^2 \tag{3.3.1}$$

Απόδειξη

α) Αν περιοριστούμε σε χωροχρονικές μεταθέσεις (X' =X +b) τότε ΔΧ΄=ΔΧ και η σχέση γίνεται τετριμμένη.

β) Θεωρούμε την περίπτωση χωρικών στροφών
Στην περίπτωση αυτή (t΄=t) $\Delta x'^0 = \Delta x^0$ και από την βασική ιδιότητα των στροφών έχουμε ότι:

$\Delta \vec{x}'^2 = \Delta \vec{x}^2 \Rightarrow (\Delta x'^1)^2 + (\Delta x'^2)^2 + (\Delta x'^3)^2 = (\Delta x^1)^2 + (\Delta x^2)^2 + (\Delta x^3)^2$ επομένως η (3.3.1) είναι προφανής

γ) Θεωρούμε τώρα την περίπτωση προώθησης Lorentz κατά την διεύθυνση x.
Όπως γνωρίζουμε ο μετασχηματισμός συντεταγμένων είναι:

$$\Delta x^0 = \gamma(\Delta x'^0 + \beta \Delta x'^1)$$
$$\Delta x^1 = \gamma(\Delta x'^1 + \beta \Delta x'^0)$$
$$\Delta x^2 = \Delta x'^2$$
$$\Delta x^3 = \Delta x'^3$$

Αντικαθιστώντας στο πρώτο μέλος της (3.3.1) προκύπτει (με στοιχειώδεις πράξεις) το δεύτερο

δ) Θεωρούμε την γενική προώθηση Lorentz
Αναλύουμε και πάλι το χωρικό διάνυσμα θέσης σε δύο συνιστώσες: μια παράλληλη στην ταχύτητα υ και μια κάθετη σε αυτήν. Ο μετασχηματισμός Lorentz είναι κατά τα γνωστά ο:

$$\Delta \vec{r}_{\perp} = \vec{r}'_{\perp}$$
$$\Delta \vec{r}_{//} = \gamma(\vec{\beta}\Delta x'^0 + \Delta \vec{r}'_{//})$$
$$\Delta x^0 = \gamma(\Delta x'^0 + \vec{\beta}\Delta \vec{r}'_{//})$$

Από το **γ)** θα έχουμε ότι: $-(\Delta x^0)^2 + (\Delta \vec{r}_{//})^2 = -(\Delta x'^0)^2 + (\Delta \vec{r}'_{//})^2$

Αντικαθιστώντας στο πρώτο μέλος της (3.3.1) έχουμε:

$$-(\Delta x^0)^2 + (\Delta x^1)^2 + (\Delta x^2)^2 + (\Delta x^3)^2 = -(\Delta x^0)^2 + (\Delta \vec{r})^2 = -(\Delta x^0)^2 + (\Delta \vec{r}_{//} + \Delta \vec{r}_{\perp})^2 =$$

$$-(\Delta x^0)^2 + (\Delta \vec{r}_{//})^2 + (\Delta \vec{r}_{\perp})^2 = -(\Delta x'^0)^2 + (\Delta \vec{r}'_{//})^2 + (\Delta \vec{r}'_{\perp})^2 =$$

$$-(\Delta x'^0)^2 + (\Delta x'^1)^2 + (\Delta x'^2)^2 + (\Delta x'^3)^2$$

ε) Θεωρούμε τον γενικό μετασχηματισμό Lorentz

$X' = \tilde{R}\Lambda X + b$ όπου $\tilde{R} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R \end{bmatrix}$, R 3x3 πίνακας στροφής και Λ προώθηση Lorentz

Τον μετασχηματισμό αυτό μπορούμε να τον δούμε σαν διαδοχή των εξής μετασχηματισμών:

$X \to X'' = \Lambda X$ $\quad X'' \to X''' = \tilde{R}X''$ $\quad X''' \to X' = X''' + b$

Από τα εκτεθέντα παραπάνω έχουμε:

$\Delta S^2 = \Delta S''^2 = \Delta S'''^2 = \Delta S'^2$ ■

Το γεγονός ότι οι μετασχηματισμοί Lorentz αφήνουν αμετάβλητη την ποσότητα ΔS^2 αναδεικνύει την ποσότητα αυτή σε κυρίαρχο μέγεθος στην ειδική σχετικότητα.

Συγκεκριμένα η ποσότητα ΔS^2 ορίζει την **χωροχρονική απόσταση** δύο γεγονότων.

Για να μπορέσουμε να γράψουμε την χωροχρονική απόσταση με μορφή πινάκων πρέπει να ορίσουμε τους αντίστοιχους των πινάκων ε_{ij} και ε^{ij} που ορίσαμε για την χωρική απόσταση δύο σημείων:

Ορίζουμε λοιπόν τον συναλλοίωτο μετρικό τανυστή $\eta_{\mu\nu}$ ως εξής:

$\eta_{00} = -1$, $\eta_{11} = \eta_{22} = \eta_{33} = 1$ και μηδέν σε κάθε άλλη περίπτωση. Επομένως σε μορφή πίνακα

$$\eta = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \tag{3.3.2}$$

Ομοίως ορίζεται και ο ανταλλοίωτος μετρικός τανυστής $\eta^{\mu\nu}$ ο οποίος είναι ο αντίστροφος του $\eta_{\mu\nu}$.

Σε μορφή πινάκων έχουμε την σχέση η.η=I και σε συντεταγμένες $\eta^{\mu\rho}\eta_{\rho\nu} = \delta^{\mu}{}_{\nu}$ όπου δ ο ταυτοτικός 4x4 πίνακας ($\delta_0^0 = \delta_1^1 = \delta_2^2 = \delta_3^3 = 1$ κλπ)

Ο ανταλλοίωτος μετρικός $\eta^{\mu\nu}$ μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την ανύψωση ενός δείκτη (μετατροπή ενός συναλλοίωτου δείκτη σε ανταλλοίωτο):

Πχ Αν A_μ συναλλοίωτο διάνυσμα τότε το αντίστοιχο ανταλλοίωτο ορίζεται από την σχέση:

$$\boxed{A^{\mu} = \eta^{\mu\nu}A_{\nu}} \tag{3.3.3}$$

Ομοίως ο συναλλοίωτος μετρικός τανυστής μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τον υποβιβασμό ενός δείκτη:

$$\boxed{A_{\mu} = \eta_{\mu\nu}A^{\nu}} \tag{3.3.4}$$

Σχόλια

1) Προς το παρόν ένα ανταλλοίωτο και ένα συναλλοίωτο διάνυσμα ξεχωρίζουν μόνο από την θέση των δεικτών τους. Δηλαδή ένα συναλλοίωτο διάνυσμα έχει τον δείκτη κάτω και ένα ανταλλοίωτο έχει τον δείκτη πάνω.
2) Οι τιμές των συντεταγμένων ενός συναλλοίωτου και του αντίστοιχου ανταλλοίωτου διανύσματος δεν είναι ίδιες:

   Θεωρούμε ένα συναλλοίωτο διάνυσμα A_μ με πίνακα συντεταγμένων $\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{bmatrix}$.

   Είναι στοιχειώδες (με χρήση της (3.3.3)) να δείξουμε ότι ο πίνακας συντεταγμένων του αντίστοιχου ανταλλοίωτου διανύσματος είναι ο $\begin{bmatrix} -\alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{bmatrix}$

3) Αν υποβιβάσουμε ένα δείκτη και στην συνέχεια τον ανυψώσουμε το τελικό διάνυσμα είναι ίδιο με το αρχικό.
Πράγματι ας θεωρήσουμε ένα ανταλλοίωτο διάνυσμα A^{μ}. Θέτουμε A_{μ} το αντίστοιχο συναλλοίωτο $(A_{\mu} = \eta_{\mu\rho}A^{\rho})$.
Ας συμβολίσουμε προς το παρόν με B^{μ} το ανταλλοίωτο διάνυσμα που προκύπτει από το A_{μ}. Έτσι έχουμε $B^{\mu} = \eta^{\mu\nu}A_{\nu} = \eta^{\mu\nu}\eta_{\nu\rho}A^{\rho} = \delta^{\mu}_{\rho}A^{\rho} = A^{\mu}$
4) Με χρήση των παραπάνω η παράσταση ΔS^2 μπορεί να γραφτεί ως
$$\boxed{\Delta S^2 = \eta_{\mu\nu}(\Delta x)^{\mu}(\Delta x)^{\nu}} \tag{3.3.5}$$
ή σε μορφή πινάκων
$$\boxed{\Delta S^2 = (\Delta X)^T \eta (\Delta X)} \tag{3.3.6}$$

Δείξαμε παραπάνω ότι ο γενικός μετασχηματισμός Lorentz $X' = LX + b$ με $L = \tilde{R}\Lambda$ όπου Λ προώθηση Lorentz και $\tilde{R}$ χωρική στροφή αφήνει αναλλοίωτη την χωροχρονική απόσταση. Τι σημαίνει αυτό για τον πίνακα L:
Η απάντηση στο ερώτημα αυτό είναι το εξής

Θεώρημα 3.3.2.
Ο πίνακας L του γενικού μετασχηματισμού Lorentz $X' = LX + b$ ικανοποιεί την σχέση
$$\boxed{L^T \eta L = \eta} \tag{3.3.5}$$

Απόδειξη

Α τρόπος
Είναι $\Delta X' = L\Delta X \Rightarrow (\Delta X')^T = (\Delta X)^T L^T$
Ο μετασχηματισμός Lorentz αφήνει την ποσότητα ΔS^2 αμετάβλητη. Επομένως έχουμε:
$$\Delta S'^2 = \Delta S^2 \Rightarrow (\Delta X')^T \eta (\Delta X') = (\Delta X)^T \eta (\Delta X) \Rightarrow (\Delta X)^T L^T \eta L (\Delta X) = (\Delta X)^T \eta (\Delta X)$$
και επειδή το ΔX είναι αυθαίρετο πρέπει $L^T \eta L = \eta$ ■
Β τρόπος
Αν κάποιος δεν πείθεται από το επιχείρημα με το οποίο «απλοποιήθηκε» το ΔX και θέλει να κάνει απ' ευθείας υπολογισμό θα πρέπει να κάνει το εξής:
Υποθέτουμε κατ αρχάς ότι $L = \tilde{R} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R \end{bmatrix}$ R χωρική στροφή με $R^TR=I$
Έχουμε διαδοχικά $L^T \eta L = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R \end{bmatrix} =$
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & R^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R^T R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} = \eta$$

Έστω τώρα $L=\Lambda$ προώθηση Lorentz
$$\Lambda = \begin{bmatrix} \gamma & -\gamma\beta^T \\ -\gamma\beta & I + \lambda\beta\beta^T \end{bmatrix} \text{ με } \lambda = \frac{\gamma - 1}{|\vec{\beta}|^2}$$

Επομένως $\Lambda^T=\Lambda$ και

$$\Lambda^T\eta = \begin{bmatrix} \gamma & -\gamma\beta^T \\ -\gamma\beta & I+\lambda\beta\beta^T \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\gamma & -\gamma\beta^T \\ \gamma\beta & I+\lambda\beta\beta^T \end{bmatrix}$$

Υπολογίζουμε το γινόμενο

$$\Lambda^T\eta\Lambda == \begin{bmatrix} -\gamma & -\gamma\beta^T \\ \gamma\beta & I+\lambda\beta\beta^T \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \gamma & -\gamma\beta^T \\ -\gamma\beta & I+\lambda\beta\beta^T \end{bmatrix}$$

Το στοιχείο πρώτης γραμμής και «πρώτης στήλης» θα είναι:

$$-\gamma^2 + \gamma^2\beta^T\beta = -\gamma^2(1-|\vec{\beta}|^2) = -1$$

Το στοιχείο πρώτης γραμμής και «δεύτερης στήλης» θα είναι:

$$\gamma^2\beta^T - \gamma\beta^T - \lambda\gamma\beta^T\beta\beta^T = \gamma^2\beta^T - \gamma\beta^T - \frac{\gamma-1}{|\vec{\beta}|^2}\gamma|\vec{\beta}|^2\,\beta^T = (\gamma^2-\gamma-\gamma^2+\gamma)\beta^T = 0$$

Το στοιχείο «δεύτερης γραμμής» και πρώτης στήλης θα είναι:

$$\gamma^2\beta - \gamma\beta - \lambda\gamma\beta\beta^T\beta = \gamma^2\beta - \gamma\beta - \frac{\gamma-1}{|\vec{\beta}|^2}\gamma\beta|\vec{\beta}|^2 = (\gamma^2-\gamma-\gamma^2+\gamma)\beta = 0$$

Το στοιχείο «δεύτερης γραμμής» και «δεύτερης στήλης» θα είναι:

$$-\gamma^2\beta\beta^T + I + \lambda\beta\beta^T + \lambda^2\beta\beta^T\beta\beta^T = -\gamma^2\beta\beta^T + I + \lambda\beta\beta^T + \lambda^2\beta|\vec{\beta}|^2\,\beta^T$$

Ο συντελεστής του $\beta\beta^T$ είναι:

$$-\gamma^2 + 2\lambda + \lambda^2|\vec{\beta}|^2 = -\gamma^2 + 2\frac{\gamma-1}{|\vec{\beta}|^2} + \frac{(\gamma-1)^2}{|\vec{\beta}|^2} = -\gamma^2 + \frac{\gamma^2-1}{|\vec{\beta}|^2} = -\gamma^2+\gamma^2 = 0$$

Άρα το στοιχείο «δεύτερης γραμμής» και «δεύτερης στήλης» θα είναι I

Επομένως $\Lambda^T\eta\Lambda = \eta$

Στην γενική περίπτωση που $L = \tilde{R}\Lambda$ θα έχουμε

$$L^T\eta L = (\tilde{R}\Lambda)^T\eta(\tilde{R}\Lambda) = \Lambda^T\tilde{R}^T\eta\tilde{R}\Lambda = \Lambda^T(\tilde{R}^T\eta\tilde{R})\Lambda = \Lambda^T\eta\Lambda = \eta \;\blacksquare$$

Αποδείξαμε μέχρι τώρα ότι ο γενικός γραμμικός μετασχηματισμός Lorentz X΄=LX+b διατηρεί την χωροχρονική απόσταση και επομένως ικανοποιεί την σχέση $L^T\eta L = \eta$.

Ισχύει και το αντίστροφο του θεωρήματος. **Αν δηλαδή ένας μετασχηματισμός διατηρεί την χωροχρονική απόσταση τότε είναι μετασχηματισμός Lorentz.** Συγκεκριμένα έχουμε το εξής

Θεώρημα 3.3.3.

Έστω 4x4 πίνακας L για τον οποίο ισχύει η σχέση $L^T\eta L = \eta$. Τότε υπάρχει 3x1 πίνακας στήλη β και 3x3 ορθογώνιος πίνακας R έτσι ώστε $L = \tilde{R}\Lambda(\beta)$ όπου Λ(β) η προώθηση Lorentz που ορίζει το β.

Απόδειξη

Αν πολλαπλασιάσουμε την δοθείσα σχέση από αριστερά με η έχουμε:

$$L^T\eta L = \eta \Rightarrow \eta L^T\eta L = \eta\eta \Rightarrow (\eta L^T\eta)L = I$$

Επομένως οι πίνακες L και $\eta L^T\eta$ είναι ο ένας ο αντίστροφος του άλλου άρα και το αντίστροφο γινόμενο ισούται με I (AB=I⇔BA=I). Επομένως

$$L(\eta L^T\eta) = I \Rightarrow L(\eta L^T\eta)\eta = \eta \Rightarrow L\eta L^T = \eta$$

Ο πίνακας L είναι ένας 4x4 πίνακας

Έστω ότι το στοιχείο 0 γραμμής και 0 στήλης είναι $L^0{}_0=\alpha$

Τα υπόλοιπα 3 στοιχεία της μηδενικής στήλης ορίζουν ένα 3x1 πίνακα στήλη v ($L^i{}_0=v^i$).
Τα υπόλοιπα 3 στοιχεία της μηδενικής γραμμής ορίζουν ένα 1x3 πίνακα γραμμή. Θέτω u τον ανάστροφό του 3x1 πίνακα στήλη
Το απομένον τμήμα του L είναι ένας 3x3 πίνακας Δ.
Επομένως ο L έχει την μορφή $L=\begin{bmatrix}\alpha & u^T\\ v & \Delta\end{bmatrix}$
Επειδή ο πίνακας L ικανοποιεί την σχέση $L^T\eta L=\eta$ έχουμε

$$\begin{bmatrix}\alpha & u^T\\ v & \Delta\end{bmatrix}^T\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & I\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha & u^T\\ v & \Delta\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & I\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}\alpha & v^T\\ u & \Delta^T\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & I\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha & u^T\\ v & \Delta\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & I\end{bmatrix}\Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix}-\alpha^2+v^Tv & -\alpha u^T+v^T\Delta\\ -\alpha u+\Delta^Tv & -uu^T+\Delta^T\Delta\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & I\end{bmatrix}\Rightarrow$$

$$-\alpha^2+v^Tv=-1 \qquad (1)$$
$$\Delta^Tv=\alpha u \qquad (2)$$
$$\Delta^T\Delta-uu^T=I \qquad (3)$$

Από την σχέση $L\eta L^T=\eta$ με παρόμοιο τρόπο προκύπτει ότι

$$-\alpha^2+u^Tu=-1 \qquad (4)$$
$$\Delta u=\alpha v \qquad (5)$$
$$\Delta\Delta^T-vv^T=I \qquad (6)$$

Από την (1) έχουμε ότι $\alpha^2=1+v^Tv\Rightarrow\alpha^2\geq 1$
Υποθέτουμε ότι α>0. (Η περίπτωση α<0 θα εξεταστεί στο τέλος)
Θέτουμε $\beta=-\dfrac{u}{\alpha}$ και $\tilde{R}=L\Lambda(\text{-}\beta)$
Θα δείξουμε ότι $\tilde{R}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & R\end{bmatrix}$ με $R^TR=I$
Για το μέτρο του διανύσματος β έχουμε ότι:

$$|\vec{\beta}|^2=\beta^T\beta=\frac{u^Tu}{\alpha^2}\xrightarrow{(4)}|\vec{\beta}|^2=\frac{\alpha^2-1}{\alpha^2}\Rightarrow\alpha^2=\frac{1}{1-|\vec{\beta}|^2}\Rightarrow\alpha=\gamma(\beta):=\gamma$$

Υπολογίζουμε την ποσότητα $\lambda\beta\beta^T$ που εμφανίζεται στην προώθηση Lorentz

$$\lambda\beta\beta^T=\frac{\gamma-1}{|\vec{\beta}|^2}\beta\beta^T=\frac{\gamma-1}{\frac{\gamma^2-1}{\gamma^2}}\frac{uu^T}{\alpha^2}=\frac{uu^T}{\alpha+1}$$

Για τον πίνακα $\tilde{R}$ έχουμε:

$$\tilde{R}=L\Lambda(-\beta)=\begin{bmatrix}\alpha & u^T\\ v & \Delta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\gamma & \gamma\beta^T\\ \gamma\beta & I+\lambda\beta\beta^T\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\alpha & u^T\\ v & \Delta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha & -u^T\\ -u & I+\dfrac{1}{\alpha+1}uu^T\end{bmatrix}\Rightarrow$$

$$\tilde{R}=\begin{bmatrix}\alpha^2-u^Tu & -\alpha u^T+u^T+\dfrac{1}{\alpha+1}u^Tuu^T\\ \alpha v-\Delta u & -vu^T+\Delta+\dfrac{1}{\alpha+1}\Delta uu^T\end{bmatrix}$$

Από την (4) έχουμε ότι: $\alpha^2-u^Tu=1$

Από την (5) έχουμε ότι: $\alpha v - \Delta u = 0$

Επίσης έχουμε: $-\alpha u^T + u^T + \frac{1}{\alpha+1} u^T u u^T = -\alpha u^T + u^T + \frac{\alpha^2 - 1}{\alpha+1} u^T = (-\alpha + 1 + \alpha - 1) u^T = 0$

Θέτουμε $R = -vu^T + \Delta + \frac{\alpha}{\alpha+1} \Delta v u^T$

Με χρήση της (5) $\Delta u = \alpha v$ έχουμε ότι: $R = \Delta - \frac{1}{\alpha+1} v u^T$

Επομένως $R^T = \Delta^T - \frac{1}{\alpha+1} u v^T$

Υπολογίζουμε το γινόμενο RR^T

$$RR^T = (\Delta - \frac{1}{\alpha+1} vu^T)(\Delta^T - \frac{1}{\alpha+1} uv^T) = \Delta\Delta^T - \frac{\Delta u v^T}{\alpha+1} - \frac{v u^T \Delta^T}{\alpha+1} + \frac{v u^T u v^T}{(\alpha+1)^2}$$

Όμως

$(6) \Rightarrow \Delta\Delta^T = I + vv^T$

$(5) \Rightarrow \Delta u = \alpha v \Rightarrow u^T \Delta^T = \alpha v^T$

$(4) \Rightarrow u^T u = \alpha^2 - 1$

Επομένως έχουμε:

$$RR^T = I + vv^T - \frac{\alpha v v^T}{\alpha+1} - \frac{v \alpha v^T}{\alpha+1} + \frac{v(\alpha^2 - 1) v^T}{(\alpha+1)^2} = I + vv^T \left[1 - \frac{2\alpha}{\alpha+1} + \frac{(\alpha^2 - 1)}{(\alpha+1)^2} \right] = I$$

Επομένως ο R 3x3 ορθογώνιος πίνακας.

Επειδή $\tilde{R} = L\Lambda(-\beta) \Rightarrow \tilde{R}\Lambda(\beta) = L\Lambda(-\beta)\Lambda(\beta) \Rightarrow \tilde{R}\Lambda(\beta) = LI \Rightarrow L = \tilde{R}\Lambda(\beta)$

Απομένει να εξετάσουμε την περίπτωση κατά την οποία α<0.

Θεωρούμε τον πίνακα $L_1 = -L$. Εύκολα φαίνεται ότι και ο πίνακας L_1 ικανοποιεί την σχέση $L_1^T \eta L_1 = \eta$.

Επειδή α<0 το 00 στοιχείο του L_1 θα είναι το –α>0 . Επομένως κάνοντας χρήση όσων αποδείξαμε υπάρχει Λ προώθηση Lorentz και ορθογώνιος πίνακας R_1 ώστε

$$L_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R_1 \end{bmatrix} \Lambda \Rightarrow L = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -R_1 \end{bmatrix}$$

Θέτουμε $R=-R_1$ και εύκολα βλέπουμε ότι R ορθογώνιος πίνακας. ■

Σχόλια

Αποδείξαμε ότι ο τυχαίος πίνακας που ικανοποιεί την σχέση $L^T \eta L = \eta$ γράφεται σαν γινόμενο μιας χωρικής στροφής και μιας προώθησης Lorentz. Ακολουθώντας τα ίδια βήματα μπορούμε να αποδείξουμε ότι γράφεται το γινόμενο μιας (διαφορετικής) προώθησης Lorentz και μιας (διαφορετικής) χωρικής στροφής: L=Λ.R

Αξίζει να σημειώσουμε ότι το γινόμενο δυο προωθήσεων Lorentz δεν είναι προώθηση Lorentz αλλά ένας γενικός πίνακας Lorentz.

3.4. Ομάδα Lorentz

Όπως είδαμε παραπάνω ένας μετασχηματισμός Lorentz είναι ένα ζεύγος g=(L,b) όπου L 4x4 πίνακας με την ιδιότητα $L^T \eta L = \eta$ και b τυχαίος 4x1 πίνακας. Η «δράση» ενός μετασχηματισμού Lorentz στα στοιχεία του χωροχρόνου ορίζεται από την σχέση X΄=LX+b.

Θεωρούμε δυο διαδοχικούς μετασχηματισμούς $X'=L_1X + b_1$ και $X''=L_2X'+b_2$. Αντικαθιστώντας το X΄ στο X΄΄ έχουμε ότι:$X''=L_2L_1X+L_2b_1+b_2$.
Μπορούμε να αποδείξουμε ότι ο σύνθετος μετασχηματισμός είναι μετασχηματισμός Lorentz δηλαδή έχουμε το εξής:

Θεώρημα 3.4.1.

Θεωρούμε το σύνολο £ των μετασχηματισμών Lorentz.
Στο σύνολο αυτό ορίζουμε μια πράξη * ως έξής:
Αν $g_1=(L_1 , b_1) \in$ £ και $g_2=(L_2 , b_2) \in$ £ θέτουμε $g_1*g_2=(L_2L_1 , L_2b_1+b_2)$.
Τότε το σύνολο £ με την παραπάνω ορισθείσα πράξη αποτελεί ομάδα.

Απόδειξη

- Κλειστότητα
  Αν $g_1=(L_1 , b_1) \in$ £ και $g_2=(L_2 , b_2) \in$ £ θα δείξουμε ότι $g=g_1*g_2 \in$ £ .
  Θέτουμε $L=L_2L_1$ και $b=L_2b_1+b_2$
  Επειδή $g_1 , g_2 \in$ £ έχουμε ότι: $L_1^T\eta L_1 = \eta$ και $L_2^T\eta L_2 = \eta$. Επομένως
  $L^T\eta L = (L_2L_1)^T\eta(L_2L_1) = L_1^T(L_2^T\eta L_2)L_1 = L_1^T\eta L_1 = \eta$
  Άρα g∈£
- Η απόδειξη της προσεταιριστικής ιδιότητας είναι άμεση συνέπεια του ορισμού της πράξης.
- Ύπαρξη ουδετέρου στοιχείου
  Θεωρούμε το στοιχείο e=(I,0) με I τον μοναδιαίο 4x4 πίνακα και 0 τον μηδενικό 4x1.
  Αν g=(L,b) ∈ £ έχουμε:
  g*e=(L,b)*(I,0)=(IL,Ib+0)=(L,b)=g και e*g=(I,0)*(L,b)=(LI,L0+b)=(L,b)=g
- Ύπαρξη αντιστρόφου
  Έστω g=(L,b) ∈ £
  Θέτουμε $L'=L^{-1}$, και $b'=-L' b$
  Έχουμε ότι :
  $L^T\eta L = \eta \Rightarrow L\eta L^T = \eta \Rightarrow (L\eta L^T)^{-1} = \eta^{-1} \Rightarrow (L^T)^{-1}\eta^{-1}L^{-1} = \eta^{-1} \Rightarrow (L^{-1})^T\eta L^{-1} = \eta \Rightarrow L'^T\eta L' = \eta$
  Θέτουμε g΄=(L΄ , b΄) και εύκολα επιβεβαιώνουμε ότι g*g΄=g΄*g=e ■

Σχόλιο

Στην πορεία της απόδειξης βρήκαμε σαν ενδιάμεση σχέση ότι
$(L^0{}_0)^2 = 1 + v^Tv \Rightarrow (L^0{}_0)^2 \geq 1 \Rightarrow L^0{}_0 \geq 1$ η $L^0{}_0 \leq -1$
Επίσης παίρνοντας ορίζουσες και των δύο μελών της βασικής σχέσης έχουμε ότι:
$L^T\eta L = \eta \Rightarrow |L|^2 = 1 \Rightarrow |L| = \pm 1$
Επομένως το σύνολο των μετασχηματισμών Lorentz χωρίζεται σε τέσσερα υποσύνολα : $(L^0{}_0 \geq 1, |L| = 1)$, $(L^0{}_0 \geq 1, |L| = -1)$, $(L^0{}_0 \leq -1, |L| = 1)$, $(L^0{}_0 \leq -1, |L| = -1)$. Από αυτά μόνο το πρώτο περιέχει τον μοναδιαίο πίνακα και ονομάζεται ορθόχρονη κανονική ομάδα Lorentz (proper Lorentz group).
Συγκεκριμένα έχουμε το εξής:

Θεώρημα 3.4.2.

Θεωρούμε το υποσύνολο $£_N$ της ομάδας Lorentz που αποτελείται από στοιχεία g=(L,b) με |L|=1 και $L^0{}_0 \geq 1$. Το σύνολο αυτό αποτελεί υποομάδα της ομάδας Lorentz

Απόδειξη

- Κλειστότητα

  Έστω $g_1=(L_1,b_1)$ και $g_2=(L_2,b_2) \in £_N$. Θα δείξουμε ότι το $g=g_1*g_2==(L_2L_1 , L_2b_1+b_2) \in £_N$

  Επειδή τα g_1 και g_2 στοιχεία της ομάδας Lorentz θα έχουμε κατά τα γνωστά ότι

  $$L_1 = \begin{bmatrix} \alpha_1 & u_1^T \\ v_1 & \Delta_1 \end{bmatrix} \text{ και } L_2 = \begin{bmatrix} \alpha_2 & u_2^T \\ v_2 & \Delta_2 \end{bmatrix} \text{ με } |\vec{u}_1|^2 = \alpha_1^2 - 1 \text{ και } |\vec{v}_2|^2 = \alpha_2^2 - 1$$

  Επιπλέον επειδή $g_1, g_2 \in £_N$ θα είναι $\alpha_1 \geq 1$, $\alpha_2 \geq 1$, $|L_1|=1$, $|L_2|=1$

  Για το γινόμενο $L=L_1L_2$ έχουμε:

  $$L = L_1L_2 = \begin{bmatrix} \alpha_1 & u_1^T \\ v_1 & \Delta_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_2 & u_2^T \\ v_2 & \Delta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & .... \\ ... & .... \end{bmatrix}$$

  Με $\alpha = \alpha_1\alpha_2 + u_1^T v_2$

  Από την ανισότητα του Shwartz έχουμε ότι:

  $$|u_2^T v_1| = |\vec{u}_2.\vec{v}_1| \leq |\vec{u}_2||\vec{v}_1| = \sqrt{\alpha_2^2 - 1}\sqrt{\alpha_1^2 - 1} \leq |\alpha_2||\alpha_1| = \alpha_1\alpha_2 \Rightarrow |u_2^T v_1| \leq \alpha_1\alpha_2 \Rightarrow$$

  $$-\alpha_1\alpha_2 \leq u_2^T v_1 \Rightarrow u_2^T v_1 + \alpha_1\alpha_2 \geq 0 \Rightarrow \alpha \geq 0$$

- Ουδέτερο στοιχείο

  Επειδή $I^0{}_0=1$ και $|I|=1$ έχουμε ότι $e \in £_N$

- Αντίστροφο στοιχείο

  Έστω $g=(L,b) \in £_N$ Θα δείξουμε ότι το αντίστροφο στοιχείο $g'=(L^{-1}, -L^{-1}b) \in £_N$

  Κατά τα γνωστά

  $$L = \begin{bmatrix} \alpha_1 & u_1^T \\ v_1 & \Delta_1 \end{bmatrix} \text{ και } L^{-1} = \begin{bmatrix} \alpha_2 & u_2^T \\ v_2 & \Delta_2 \end{bmatrix} \text{ με } |\vec{u}_1|^2 = \alpha_1^2 - 1 \text{ και } |\vec{v}_2|^2 = \alpha_2^2 - 1$$

  Επειδή $g \in £_N$ $\alpha_1 \geq 0$. Επειδή δε $g' \in £$ αρκεί να δείξουμε ότι $\alpha_2 \geq 0$.

  Επειδή L και L^{-1} αντίστροφοι πίνακες έχουμε ότι:

  $$LL^{-1} = I \Rightarrow \begin{bmatrix} \alpha_1 & u_1^T \\ v_1 & \Delta_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_2 & u_2^T \\ v_2 & \Delta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \Rightarrow \alpha_1\alpha_2 + u_2^T v_1 = 1$$

  Από την ανισότητα του Shwartz έχουμε ότι:

  $$|u_2^T v_1| = |\vec{u}_2.\vec{v}_1| \leq |\vec{u}_2||\vec{v}_1| = \sqrt{\alpha_2^2 - 1}\sqrt{\alpha_1^2 - 1} \leq |\alpha_2||\alpha_1| = \alpha_1|\alpha_2| \Rightarrow$$

  $$u_2^T v_1 \leq \alpha_1|\alpha_2| \Rightarrow u_2^T v_1 + \alpha_1\alpha_2 \leq \alpha_1|\alpha_2| + \alpha_1\alpha_2 \Rightarrow 1 \leq \alpha_1(|\alpha_2| + \alpha_2)$$

  Αν $\alpha_2<0$ τότε $|\alpha_2|=-\alpha_2$ και η τελευταία σχέση γίνεται $1 \leq 0$ που είναι άτοπο. Επομένως $\alpha_2 \geq 0$ ■

3.5. Σύνοψη και τυπολόγιο

- Στον χωροχρόνο ορίζεται χωροχρονική απόσταση δύο χωροχρονικών σημείων μέσω της ποσότητας
  $\Delta S^2 = -(\Delta x^0)^2 + (\Delta x^1)^2 + (\Delta x^2)^2 + (\Delta x^3)^2 = -(\Delta x^0)^2 + (\Delta \vec{x})^2$
  Η παράσταση αυτή μπορεί να γραφτεί συναρτήσει των συντεταγμένων των σημείων ως
  $\Delta S^2 = \eta_{\mu\nu} (\Delta x)^\mu (\Delta x)^\nu$
  και σε συμβολισμό πινάκων συντεταγμένων
  $\Delta S^2 = (\Delta X)^T \eta (\Delta X)$
- Ο συναλλοίωτος και ο ανταλλοίωτος μετρικός τανυστής είναι αντίστοιχα

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \text{ και } \eta^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

  Οι δύο πίνακες είναι ο ένας αντίστροφος του άλλου και επομένως ικανοποιούν τη σχέση $\eta^{\mu\rho}\eta_{\rho\nu} = \delta^\mu{}_\nu$
- Μετασχηματισμός Lorentz κάθε γραμμικός μετασχηματισμός $X' = LX + b \Leftrightarrow X'^\mu = L^\mu{}_\nu X^\nu + b^\mu$
  που αφήνει την ποσότητα ΔS^2 αμετάβλητη.
  Η απαίτηση αυτή σε συμβολισμό πινάκων γράφεται ως
  $L^T \eta L = \eta \Leftrightarrow L \eta L^T = \eta$
  και σε συμβολισμό συντεταγμένων $L^\mu{}_\rho \eta^{\rho\sigma} L^\nu{}_\sigma = \eta^{\mu\nu} \Leftrightarrow L^\mu{}_\rho \eta_{\mu\nu} L^\nu{}_\sigma = \eta_{\rho\sigma}$
- Ειδική περίπτωση μετασχηματισμού Lorentz αποτελούν οι προωθήσεις.
  Ο αντίστοιχος πίνακας είναι :

$$\Lambda(\beta) = \begin{bmatrix} \gamma & -\gamma\beta^T \\ -\gamma\beta & I + \dfrac{\gamma-1}{|\vec{\beta}|^2}\beta\beta^T \end{bmatrix} \text{με } \gamma = \gamma(\beta) = \frac{1}{\sqrt{1-|\vec{\beta}|^2}}, \qquad \vec{\beta} = \frac{\vec{\upsilon}}{c}, \qquad |\vec{\beta}| < 1$$

  με στοιχεία

$$\Lambda^0{}_0 = \gamma \qquad \Lambda^0{}_i = -\gamma\beta^i$$

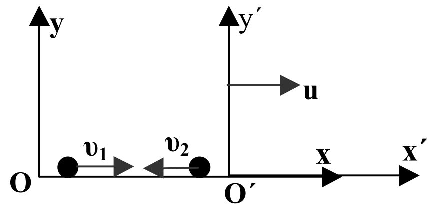
$$\Lambda^i{}_0 = -\gamma\beta^i \quad \Lambda^i{}_j = \delta^i{}_j + \frac{(\gamma-1)}{|\vec{\beta}|^2}\beta^i\beta^j$$

- Αν θεωρήσουμε δύο διαδοχικές προωθήσεις με ταχύτητες υ_1 και υ_2 **κατά την ίδια διεύθυνση** τότε η σύνθετη προώθηση αντιστοιχεί σε ταχύτητα

$$\upsilon = \frac{\upsilon_1 + \upsilon_2}{1 + \dfrac{\upsilon_1\upsilon_2}{c^2}}$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4.
ΤΑ ΜΕΓΕΘΗ ΤΗΣ ΕΙΔΙΚΗΣ ΣΧΕΤΙΚΟΤΗΤΑΣ

4.1.Εισαγωγή



Θεωρούμε την μετωπική ελαστική κρούση δύο σφαιρών μαζών m_1=m και m_2=3m που κινούνται αρχικά με ταχύτητες $\upsilon_{1A}=\upsilon_0=0.6c$ και $\upsilon_{2A}=-\upsilon_0$ αντιστοίχως ως προς ένα ΑΑΣ Ο. Μελετώντας το πρόβλημα με τις έννοιες και τις αρχές της κλασσικής μηχανικής (διατήρηση της ορμής και της ενέργειας) μπορούμε να υπολογίσουμε τις ταχύτητες των σφαιρών μετά την κρούση: $\upsilon_{1T}=-2\upsilon_0$ και $\upsilon_{2T}=0$.
Ας προσπαθήσουμε να επιβεβαιώσουμε την αρχή διατήρησης της ορμής σε ένα άλλο ΑΑΣ Ο΄ που κινείται κατά την διεύθυνση του άξονα x ,με ταχύτητα u=0.6c ως προς το πρώτο χρησιμοποιώντας τους μετασχηματισμούς Lorentz.
Γνωρίζουμε ότι η ταχύτητα υ ενός σωματιδίου που κινείται κατά την διεύθυνση x στο Ο με την ταχύτητα του υ΄ στο Ο΄ συνδέονται με την σχέση:

$$\upsilon' = \frac{\upsilon - u}{1 - \frac{\upsilon u}{c^2}}$$

Μπορούμε επομένως να υπολογίσουμε τις ορμές των σωματιδίων πριν και μετά την κρούση στο σύστημα Ο΄ και να εξετάσουμε αν είναι ίσες. Έχουμε λοιπόν ότι

$$p'_A = m\upsilon'_{1A} + 3m\upsilon'_{2A} = m\frac{\upsilon_{1A} - u}{1 - \frac{\upsilon_{1A}u}{c^2}} + 3m\frac{\upsilon_{2A} - u}{1 - \frac{\upsilon_{2A}u}{c^2}} = m\frac{\upsilon_0 - u}{1 - \frac{\upsilon_0 u}{c^2}} + 3m\frac{-\upsilon_0 - u}{1 + \frac{\upsilon_0 u}{c^2}} = -3.6mc$$

$$p'_T = m\upsilon'_{1T} + 3m\upsilon'_{2T} = m\frac{\upsilon_{1T} - u}{1 - \frac{\upsilon_{1T}u}{c^2}} + 3m\frac{\upsilon_{2T} - u}{1 - \frac{\upsilon_{2T}u}{c^2}} = m\frac{-2\upsilon_0 - u}{1 + \frac{2\upsilon_0 u}{c^2}} + 3m\frac{0 - u}{1} = -5.8mc$$

Αναδεικνύεται λοιπόν το εξής πρόβλημα: Αν διατηρήσουμε τον κλασσικό ορισμό της ορμής και προσπαθήσουμε να τον συνδυάσουμε με τους μετασχηματισμούς Lorentz , τότε παραβιάζεται η αρχή διατήρησης της ορμής. Όμως η αρχή διατήρησης της ορμής είναι μια αρχή την οποία δεν αποχωρίζεται εύκολα ένας φυσικός. Η μόνη λογική λύση στο πρόβλημα που εμφανίστηκε είναι η **αλλαγή του ορισμού της έννοιας ορμή**.
Στο κεφάλαιο αυτό θα επαναορίσουμε τις γνωστές έννοιες (ορμή , ενέργεια, κλπ) έτσι ώστε και οι νόμοι διατήρησης να ισχύουν και οι ορισμοί αυτοί να είναι συμβατοί με τους μετασχηματισμούς Lorentz.

4.2.Χωροχρονική απόσταση και ιδιόχρονος

Θεωρούμε δύο χωροχρονικά σημεία P και Q . Έχουμε ορίσει την ποσότητα

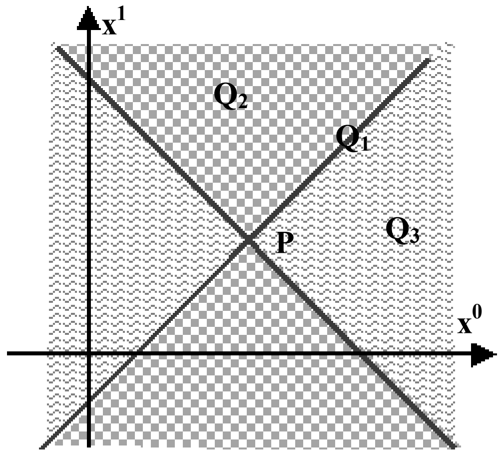
$$\Delta S^2 = -(\Delta x^0)^2 + (\Delta\vec{x})^2 = -c^2(\Delta t)^2 + (\Delta\vec{x})^2 = \eta_{\mu\nu}\Delta x^\mu \Delta x^\nu$$

Ας σημειώσουμε ότι η ποσότητα αυτή μπορεί να πάρει και θετικές και αρνητικές τιμές
Για παράδειγμα αν το σημείο P είναι το (0,0,0,0) και το σημείο Q είναι το (α,0,0,0) τότε εύκολα φαίνεται ότι $\Delta S^2=-\alpha^2$. Αν το δεύτερο είναι το (0,α,0,0) τότε $\Delta S^2=\alpha^2$ και αν το δεύτερο είναι το (α,α,0,0) τότε $\Delta S^2=0$.
Χαρακτηρίζουμε το διάνυσμα της χωροχρονικής μετατόπισης PQ αναλόγως του προσήμου της παράστασης ΔS^2 για τα σημεία αυτά ως:

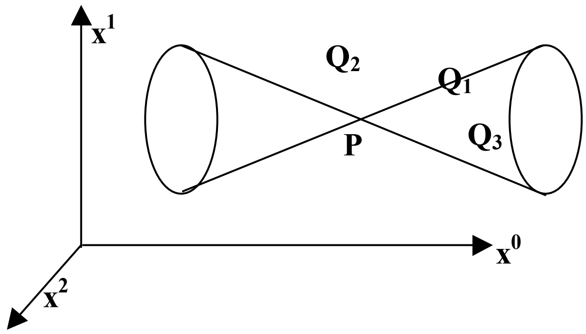
Χωροειδές	$\Delta S^2 > 0$
Χρονοειδές	$\Delta S^2 < 0$
Φωτοειδές	$\Delta S^2 = 0$

Σχόλια

1) Αν θεωρήσουμε δύο ΑΑΣ τότε όπως γνωρίζουμε ισχύει ότι $\Delta S^2 = \Delta S'^2$. Επομένως οι παραπάνω χαρακτηρισμοί είναι ανεξάρτητοι συστήματος συντεταγμένων.
2) Αν θεωρήσουμε την διάδοση ενός φωτεινού σήματος τότε ισχύει ότι:
$$\left|\frac{\Delta\vec{x}}{\Delta t}\right| = c \Rightarrow \Delta\vec{x}^2 = c^2\Delta t^2 \Rightarrow \Delta S^2 = 0$$
3) Αν θεωρήσουμε την κίνηση ενός υλικού σημείου τότε ισχύει ότι:
$$\left|\frac{\Delta\vec{x}}{\Delta t}\right| < c \Rightarrow \Delta\vec{x}^2 < c^2\Delta t^2 \Rightarrow \Delta S^2 < 0$$
4) Οι ορισμοί που δώσαμε δικαιολογούνται από το εξής: Αν θεωρήσουμε ένα χωροχρονικό διάνυσμα παράλληλο στον άξονα των χρόνων τότε εύκολα φαίνεται ότι $\Delta S^2<0$. Αντιθέτως αν θεωρήσουμε ένα χωροχρονικό διάνυσμα παράλληλο στον άξονα x τότε $\Delta S^2>0$.
5) Ας περιοριστούμε προς το παρόν σε δυο χωροχρονικές διαστάσεις (x^0, x). Θεωρούμε ένα τυχαίο σημείο P του χωροχρόνου. Χαράσσουμε τις ευθείες που διέρχονται από το P και είναι παράλληλες προς τις διχοτόμους των γωνιών των αξόνων. Αν θεωρήσουμε ένα σημείο Q_1 στις ευθείες αυτές τότε εύκολα μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι το PQ_1 είναι Φωτοειδές. Αν θεωρήσουμε ένα οποιοδήποτε σημείο Q_2 στην περιοχή των δυο γωνιών που περιέχουν την παράλληλη στον άξονα των θέσεων τότε το PQ_2 είναι χωροειδές και για ένα σημείο Q_3 στην περιοχή των δυο γωνιών που περιέχουν την παράλληλη στον άξονα των χρόνων το PQ_3 είναι χρονοειδές.



6) Αν επεκτείνουμε τα παραπάνω στον πλήρη χωροχρόνο οι φωτοειδείς ευθείες αντιστοιχούν σε κωνική επιφάνεια (κώνος φωτός) με κορυφή το P , το σύνολο των σημείων Q_3 για τα οποία το PQ_3 είναι χρονοειδές είναι το εσωτερικό του κώνου και το σύνολο των σημείων Q_2 για τα οποία το PQ_2 είναι χωροειδές είναι το εξωτερικό του κώνου.



Ας θεωρήσουμε τώρα την κίνηση ενός σωματιδίου. Το σημείο αυτό διαγράφει μια γραμμή στον χωροχρόνο. Για δύο γειτονικά σημεία στην γραμμή αυτή ισχύει $dS^2<0$ και επομένως το εφαπτόμενο διάνυσμα στην καμπύλη που διαγράφει είναι χρονοειδές.

Η ποσότητα $d\tau = \frac{\sqrt{-dS^2}}{c}$ είναι καλώς ορισμένη ,έχει μονάδες χρόνου , είναι ανεξάρτητη από ΑΑΣ και ονομάζεται (απειροστός) ιδιόχρονος του σωματιδίου.

Ο παραπάνω ορισμός δικαιολογείται από τα εξής :

Ας υποθέσουμε ότι το σωματίδιο είναι ακίνητο ($d\vec{x} = \vec{0}$) τότε $dS^2 = -(dx^0)^2 = -c^2dt^2 \Rightarrow d\tau = dt$.

Αν δε το σωματίδιο εκτελεί ευθύγραμμη ομαλή κίνηση τότε στο σύστημα ηρεμίας του είναι dτ=dt. Επομένως ο ιδιόχρονος ισούται με την χρονική διάρκεια σε ένα ΑΑΣ ως προς το οποίο το σωματίδιο ηρεμεί. Σε κάθε περίπτωση κίνησης, ομαλής η όχι ,η ποσότητα dτ είναι μια καλώς ορισμένη μαθηματική ποσότητα και μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την επαναπαραμετροποίηση της καμπύλης που διαγράφει το σωματίδιο στον χωροχρόνο.

Παράδειγμα

Θεωρούμε ένα σωματίδιο που κινείται με σταθερή επιτάχυνση κατά την διεύθυνση του άξονα x με εξίσωση κίνησης $x=t^2$. Η καμπύλη που διαγράφει στο επίπεδο (t,x) είναι η καμπύλη με εξίσωση $x=t^2$. Θεωρούμε σαν παράμετρο λ τον χρόνο και έχουμε την καμπύλη σε παραμετρική μορφή $(t=\lambda ,x=\lambda^2)$.
Υπολογίζουμε το διαφορικό του ιδιόχρονου

$$d\tau = \frac{\sqrt{-dS^2}}{c} = \frac{\sqrt{c^2dt^2 - dx^2}}{c} = \frac{\sqrt{c^2 - 4\lambda^2}}{c}d\lambda$$

Ολοκληρώνοντας μπορούμε να εκφράσουμε το λ συναρτήσει του τ και επομένως και τα t και x συναρτήσει του τ.

4.3. Τετραταχύτητα

Θεωρούμε ένα σωματίδιο το οποίο διαγράφει στον χωροχρόνο μια γραμμή με παραμετρική μορφή $x^\mu = x^\mu(\tau)$. Ονομάζουμε τετραταχύτητα του σωματιδίου ως προς ένα ΑΣΑ την παράγωγο της χωροχρονικής θέσης ως προς τον ιδιόχρονο τ. Δηλαδή έχουμε

$$u^\mu = \frac{dx^\mu(\tau)}{d\tau} \quad \mu=0,1,2,3 \tag{4.3.1}$$

Συμβολίζουμε με U την τετραταχύτητα (πίνακας στήλη) και με u^μ τις συνιστώσες της
Οι ιδιότητες της τετραταχύτητας περιγράφονται από το επόμενο

Θεώρημα 4.3.1.

Η τετραταχύτητα έχει τις εξής ιδιότητες

1) Ισχύει ότι : $u^\mu u_\mu = -c^2$ (4.3.2)
2) Σχέση ταχύτητας και τετραταχύτητας:
   Θεωρούμε ένα υλικό σημείο το οποίο ως προς κάποιο ΑΑΣ την χρονική στιγμή t βρίσκεται στην θέση $\vec{x}$ έχοντας ταχύτητα (συνήθη χωρική ταχύτητα $\vec{\upsilon} = \frac{d\vec{x}}{dt}$).
   Ισχύει ότι:
   $$U = \gamma \begin{bmatrix} c \\ \vec{\upsilon} \end{bmatrix} \tag{4.3.3}$$
   με $\gamma = \gamma(\upsilon) = \dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{\upsilon^2}{c^2}}}$
3) Αν $\vec{u}$ είναι το χωρικό μέρος του διανύσματος της τετραταχύτητας τότε $\dfrac{\vec{\upsilon}}{c} = \dfrac{\vec{u}}{u^0}$ (4.3.4)
4) Το συναλλοίωτο τετράνυσμα της τετραταχύτητας είναι
   $$U_{\sigma\upsilon\nu} = \gamma \begin{bmatrix} -c \\ \vec{\upsilon} \end{bmatrix} \tag{4.3.5}$$
5) Νόμος μετασχηματισμού της τετραταχύτητας.
   Θεωρούμε ένα μετασχηματισμό Lorentz $x'^\mu = L^\mu{}_\nu x^\nu + b^\nu$.
   Για τις τετραταχύτητες u και u΄ ισχύει ότι:
   $$U' = LU \Leftrightarrow u'^\mu = L^\mu{}_\nu u^\nu \tag{4.3.6}$$
6) Νόμος μετασχηματισμού του συναλλοίωτου διανύσματος της τετραταχύτητας.
   Για τα συναλλοίωτα διανύσματα u_μ και u'_μ ισχύει ότι

$$u'_\mu = L_\mu{}^\kappa u_\kappa \tag{4.3.7}$$

όπου $L_\mu{}^\tau = \eta_{\mu\rho} L^\rho{}_\sigma \eta^{\sigma\tau}$ (4.3.8)

7) Μετασχηματισμός τετρανύσματος και μετασχηματισμός συντεταγμένων
Ισχύουν οι σχέσεις:

α) $u'^\mu = \dfrac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} u^\nu$ (4.3.9)

β) $u'_\mu = \dfrac{\partial x^\kappa}{\partial x'^\mu} u_\kappa$ (4.3.10)

<u>Απόδειξη</u>

1) $u^\mu u_\mu = \eta_{\mu\nu} u^\mu u^\nu = \eta_{\mu\nu} \dfrac{dx^\mu}{d\tau}\dfrac{dx^\nu}{d\tau} = \dfrac{dS^2}{d\tau^2} = -c^2$

2) $dS^2 = -(dx^0)^2 + d\vec{x}^2 = -c^2 dt^2 + d\vec{x}^2 = -dt^2\left[c^2 - \left(\dfrac{d\vec{x}}{dt}\right)^2\right] \Rightarrow$

$-c^2 d\tau^2 = -dt^2(c^2 - \upsilon^2) \Rightarrow d\tau^2 = \dfrac{dt^2}{\gamma^2} \Rightarrow \dfrac{dt}{d\tau} = \gamma$

Επίσης $u^i = \dfrac{dx^i}{d\tau} = \dfrac{dx^i}{dt}\dfrac{dt}{d\tau} = \gamma\upsilon^i$

3) Από την προηγούμενη σχέση έχουμε: $\dfrac{\vec{u}}{u^0} = \dfrac{\gamma\vec{\upsilon}}{\gamma c} = \dfrac{\vec{\upsilon}}{c}$

4) Το αντίστοιχο συναλλοίωτο τετράνυσμα είναι $u_\mu = \eta_{\mu\nu} u^\nu$. Επομένως σαν πίνακας στήλη είναι το γινόμενο του η με το ανταλλοίωτο διάνυσμα της τετραταχύτητας.

$$U_{\sigma\upsilon\nu} = \begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u^0 \\ u^1 \\ u^2 \\ u^3 \end{bmatrix} = \gamma \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c \\ \upsilon^1 \\ \upsilon^2 \\ \upsilon^3 \end{bmatrix} = \gamma \begin{bmatrix} -c \\ \upsilon^1 \\ \upsilon^2 \\ \upsilon^3 \end{bmatrix} = \gamma \begin{bmatrix} -c \\ \vec{\upsilon} \end{bmatrix}$$

5) Θεωρούμε ένα μετασχηματισμό Lorentz :

$x'^\mu = L^\mu{}_\nu x^\nu + b^\mu \Rightarrow dx'^\mu = L^\mu{}_\nu dx^\nu \Rightarrow \dfrac{dx'^\mu}{d\tau} = L^\mu{}_\nu \dfrac{dx^\nu}{d\tau} \Rightarrow u'^\mu = L^\mu{}_\nu u^\nu$

6) $u'_\mu = \eta_{\mu\nu} u'^\nu = \eta_{\mu\nu} L^\nu{}_\sigma u^\sigma = \eta_{\mu\rho} L^\rho{}_\sigma \eta^{\sigma\kappa} u_\kappa$

Θέτουμε $L_\mu{}^\tau = \eta_{\mu\rho} L^\rho{}_\sigma \eta^{\sigma\tau}$ και έχουμε ότι $u'_\mu = L_\mu{}^\kappa u_\kappa$

Παρατηρούμε ότι το ανταταλλοίωτο και το συναλλοίωτο διάνυσμα εκτός από διαφορετικές τιμές έχουν και **διαφορετικό νόμο μετασχηματισμού**.

7) α) Πρέπει να παραγωγίσουμε τα x΄ συναρτήσει των x .

Υπενθυμίζουμε $\dfrac{\partial x^\nu}{\partial x^\rho} = \delta^\nu_\rho$.

Επομένως έχουμε: $\dfrac{\partial x'^\mu}{\partial x^\rho} = \dfrac{\partial (L^\mu{}_\nu x^\nu)}{\partial x^\rho} = L^\mu{}_\nu \dfrac{\partial x^\nu}{\partial x^\rho} = L^\mu{}_\nu \delta^\nu_\rho = L^\mu{}_\rho$

Αντικαθιστώντας στον νόμο μετασχηματισμού του ανταλλοίωτου διανύσματος της ταχύτητας έχουμε

$: u'^{\mu} = L^{\mu}{}_{\nu} u^{\nu} = \dfrac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} u^{\nu}$

β) Για να αποδείξουμε την δεύτερη σχέση θα πρέπει πρώτα να αντιστρέψουμε τον μετασχηματισμό (να εκφράσουμε τα x συναρτήσει των x΄).

Ο μετασχηματισμός συντεταγμένων είναι: $x'^{\mu} = L^{\mu}{}_{\nu} x^{\nu} + b^{\mu}$

Πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη με $\eta_{\mu\kappa} L^{\kappa}{}_{\rho}$ έχουμε

$$x'^{\mu} \eta_{\mu\kappa} L^{\kappa}{}_{\rho} = L^{\mu}{}_{\nu} \eta_{\mu\kappa} L^{\kappa}{}_{\rho} x^{\nu} + b^{\mu} \eta_{\mu\kappa} L^{\kappa}{}_{\rho} \tag{1}$$

Όμως από την βασική ιδιότητα του L έχουμε ότι : $L^{\mu}{}_{\nu} \eta_{\mu\kappa} L^{\kappa}{}_{\rho} = \eta_{\nu\rho}$

Επομένως η (1) γίνεται: $x'^{\mu} \eta_{\mu\kappa} L^{\kappa}{}_{\rho} = \eta_{\nu\rho} x^{\nu} + b^{\nu} \eta_{\mu\kappa} L^{\kappa}{}_{\rho}$ (2)

«Πολλαπλασιάζουμε» και τα δύο μέλη της παραπάνω με $\eta^{\rho\sigma}$:

$$x'^{\mu} \eta_{\mu\kappa} L^{\kappa}{}_{\rho} \eta^{\rho\sigma} = \eta_{\nu\rho} \eta^{\rho\sigma} x^{\nu} + b^{\mu} \eta_{\mu\kappa} L^{\kappa}{}_{\rho} \eta^{\rho\sigma} \Rightarrow x'^{\mu} L_{\mu}{}^{\sigma} = \delta^{\sigma}_{\nu} x^{\nu} + L_{\mu}{}^{\sigma} b^{\mu} \Rightarrow$$

$$x'^{\mu} L_{\mu}{}^{\sigma} = x^{\sigma} + L_{\mu}{}^{\sigma} b^{\mu} \Rightarrow x^{\sigma} = x'^{\mu} L_{\mu}{}^{\sigma} - L_{\mu}{}^{\sigma} b^{\mu}$$

Παραγωγίζοντας τα x ως προς τα x΄ έχουμε: $\dfrac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\mu}} = L_{\mu}{}^{\sigma}$

Αντικαθιστώντας στο νόμο μετασχηματισμού για το συναλλοίωτο διάνυσμα της τετραταχύτητας έχουμε:

$u'_{\mu} = L_{\mu}{}^{\kappa} u_{\kappa} \Rightarrow u'_{\mu} = \dfrac{\partial x^{\kappa}}{\partial x'^{\mu}} u_{\kappa}$ ■

Με την βοήθεια της τετραταχύτητας μπορούμε να βρούμε σχετικά εύκολα το νόμο μετασχηματισμού της ταχύτητας, όπως φαίνεται από το παρακάτω

Θεώρημα 4.3.2. **Νόμος μετασχηματισμού της ταχύτητας.**

Θεωρούμε δύο ΑΑΣ O και O΄. Έστω ότι το O΄ κινείται με ταχύτητα $\vec{v}$ ως προς το O. Έστω δε ένα σωματίδιο, το οποίο έχει ταχύτητα $\vec{\upsilon}$ ως προς το O και ταχύτητα $\vec{\upsilon}'$ ως προς το O΄. Οι ταχύτητες $\vec{\upsilon}$ και $\vec{\upsilon}'$ συνδέονται με την σχέση:

$$\vec{\upsilon}' = \frac{1}{\gamma\left(1 - \dfrac{\vec{v}\vec{\upsilon}}{c^2}\right)} \left[\vec{\upsilon} - \gamma\vec{v} + \frac{(\gamma-1)(\vec{v}\vec{\upsilon})}{\vec{v}^2}\vec{v}\right] \tag{4.3.11}$$

<u>Απόδειξη</u>

Η τετραταχύτητα του σωματιδίου στα O και O΄ είναι $U = \begin{bmatrix} u^0 \\ \vec{u} \end{bmatrix}$ και $U' = \begin{bmatrix} u'^0 \\ \vec{u}' \end{bmatrix}$

Ο μετασχηματισμός Lorentz που συνδέει το O με το O΄ είναι ο $\Lambda = \begin{bmatrix} \gamma & -\gamma\beta^T \\ -\gamma\beta & I + \lambda\beta\beta^T \end{bmatrix}$

με $\vec{\beta} = \dfrac{\vec{v}}{c}$, $\lambda = \dfrac{\gamma - 1}{\beta^2}$ και $\gamma = \gamma(\vec{\beta})$

Ο νόμος μετασχηματισμού της τετραταχύτητας είναι : U΄=ΛU⇒

$$\begin{bmatrix} u'^0 \\ \vec{u}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & -\gamma\beta^T \\ -\gamma\beta & I + \lambda\beta\beta^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u^0 \\ \vec{u} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma u^0 - \gamma\beta^T \vec{u} \\ -\gamma\beta u^0 + \vec{u} + \lambda\beta\beta^T\vec{u} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma u^0 - \gamma(\vec{\beta}\vec{u}) \\ -\gamma\vec{\beta}u^0 + \vec{u} + \lambda\vec{\beta}(\vec{\beta}\vec{u}) \end{bmatrix} \tag{1}$$

Όμως $\vec{\upsilon} = c\dfrac{\vec{u}}{u^0} \Rightarrow \vec{u} = u^0 \vec{\upsilon} c^{-1}$ και $\vec{\upsilon}' = c\dfrac{\vec{u}'}{u'^0}$.

Αντικαθιστώντας τις συνιστώσες του U΄ από την (1) έχουμε:

$$\vec{\upsilon}' = c\frac{\vec{u}'}{u'^0} = c\frac{-\gamma\vec{\beta}u^0 + \vec{u} + \lambda\vec{\beta}(\vec{\beta}\vec{u})}{\gamma u^0 - \gamma(\vec{\beta}\vec{u})} = c\frac{-\gamma\vec{\beta}u^0 + \vec{\upsilon}u^0c^{-1} + \lambda\vec{\beta}(\vec{\beta}\vec{\upsilon})u^0c^{-1}}{\gamma u^0 - \gamma(\vec{\beta}\vec{\upsilon})u^0c^{-1}} \Rightarrow \vec{\upsilon}' = \frac{-\gamma\vec{v} + \vec{\upsilon} + \lambda\vec{v}(\vec{v}\vec{\upsilon})c^{-2}}{\gamma - \gamma(\vec{v}\vec{\upsilon})c^{-2}} \Rightarrow$$

$$\vec{\upsilon}' = \frac{1}{\gamma(1 - \frac{\vec{v}\vec{\upsilon}}{c^2})}[\vec{\upsilon} - \gamma\vec{v} + \frac{(\gamma-1)(\vec{v}\vec{\upsilon})}{\vec{v}^2}\vec{v}] \text{ με } \gamma=\gamma(v)$$

Σχόλιο

Ας συμβολίσουμε με $\vec{\upsilon}_{A(O)}$ την ταχύτητα ενός σωματιδίου ως προς Ο.

Με τον παραπάνω συμβολισμό είναι $\vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}_{A(O)}$, $\vec{\upsilon}' = \vec{\upsilon}_{A(O')}$ και $\vec{v} = \vec{\upsilon}_{O'(O)}$

Η σχέση (4.3.12) γίνεται:

$$\boxed{\vec{\upsilon}_{A(O')} = \frac{\vec{\upsilon}_{A(O)} + \gamma\vec{\upsilon}_{O(O')} + \frac{(\gamma-1)(\vec{\upsilon}_{A(O)}\vec{\upsilon}_{O(O')})}{\vec{\upsilon}^2_{O(O')}}\vec{\upsilon}_{O(O')}}{\gamma(1 + \frac{\vec{\upsilon}_{A(O)}\vec{\upsilon}_{O(O')}}{c^2})}} \quad \text{με } \gamma = \gamma(\upsilon_{O(O')}) \qquad (4.3.12)$$

Ειδικές περιπτώσεις

1)Αν η κίνηση του Ο΄ γίνεται μόνο κατά τον x άξονα τότε: $\vec{\upsilon}_{A(O)}\vec{\upsilon}_{O(O')} = \upsilon^1_{A(O)}\upsilon_{O(O')}$ και οι συνιστώσες της ταχύτητας εύκολα φαίνεται ότι είναι:

$$\upsilon^1_{A(O')} = \frac{\upsilon^1_{A(O)} + \gamma\upsilon_{O(O')} + \frac{(\gamma-1)(\upsilon^1_{A(O)}\upsilon_{O(O')})}{(\upsilon_{O(O')})^2}\upsilon_{O(O')}}{\gamma(1 + \frac{\upsilon^1_{A(O)}\upsilon_{O(O')}}{c^2})}$$

$$\upsilon^1_{A(O')} = \frac{\upsilon^1_{A(O)} + \gamma\upsilon_{O(O')} + (\gamma-1)\upsilon^1_{A(O)}}{\gamma(1 + \frac{\upsilon^1_{A(O)}\upsilon_{O(O')}}{c^2})} = \frac{\upsilon^1_{A(O)} + \upsilon_{O(O')}}{1 + \frac{\upsilon^1_{A(O)}\upsilon_{O(O')}}{c^2}} \Rightarrow$$

$$\boxed{\upsilon^1_{A(O')} = \frac{\upsilon^1_{A(O)} + \upsilon_{O(O')}}{1 + \frac{\upsilon^1_{A(O)}\upsilon_{O(O')}}{c^2}}}$$

$$\boxed{\upsilon^2_{A(O')} = \frac{\upsilon^2_{A(O)}}{1 + \frac{\upsilon^1_{A(O)}\upsilon_{O(O')}}{c^2}}} \quad \text{και} \quad \boxed{\upsilon^3_{A(O')} = \frac{\upsilon^3_{A(O)}}{1 + \frac{\upsilon^1_{A(O)}\upsilon_{O(O')}}{c^2}}}$$

2) Αν η διεύθυνση κίνησης του Ο΄ ως προς Ο συμπίπτει με την διεύθυνση κίνησης του Α ως προς Ο τότε $\vec{\upsilon}_{A(O)} = \upsilon_{A(O)}\vec{e}$, $\vec{\upsilon}_{A(O')} = \upsilon_{A(O')}\vec{e}$, $\vec{\upsilon}_{O(O')} = \upsilon_{O(O')}\vec{e}$ ($\vec{e}$ το μοναδιαίο διάνυσμα στην κοινή διεύθυνση κίνησης). Στην περίπτωση αυτή ο γενικός νόμος μετασχηματισμού της ταχύτητας γίνεται:

$$\upsilon_{A(O')} = \frac{\upsilon_{A(O)} + \gamma\upsilon_{O(O')} + \frac{(\gamma-1)(\upsilon_{A(O)}\upsilon_{O(O')})}{\upsilon^2_{O(O')}}\upsilon_{O(O')}}{\gamma(1 + \frac{\upsilon_{A(O)}\upsilon_{O(O')}}{c^2})} = \frac{\upsilon_{A(O)} + \gamma\upsilon_{O(O')} + (\gamma-1)\upsilon_{A(O)}}{\gamma(1 + \frac{\upsilon_{A(O)}\upsilon_{O(O')}}{c^2})} \Rightarrow$$

$$\boxed{\upsilon_{A(O')} == \frac{\upsilon_{A(O)} + \upsilon_{O(O')}}{1 + \frac{\upsilon_{A(O)}\upsilon_{O(O')}}{c^2}}}$$

Παρατήρηση

Επειδή ο νόμος μετασχηματισμού της ταχύτητας είναι δύσκολος στην απομνημόνευση, είναι προτιμότερο αντί να τον απομνημονεύσουμε μάθουμε την διαδικασία εξαγωγής του:

Έστω ότι ξέρουμε την ταχύτητα $\vec{v}_{\Sigma(O)}$ ενός υλικού σημείου Σ ως προς Ο, την ταχύτητα $\vec{\upsilon}_{O'(O)}$ του Ο΄ ως προς Ο και ζητάμε την ταχύτητα $\vec{v}'_{\Sigma(O')}$ του Σ ως προς Ο΄ .

i)Υπολογίζουμε την τετραταχύτητα $u_{\Sigma(O)} = \begin{bmatrix} \gamma_v c \\ \gamma_v \vec{v} \end{bmatrix}$ του Σ ως προς Ο

ii)Από τον νόμο μετασχηματισμού της τετραταχύτητας μπορούμε να βρούμε την τετραταχύτητα $u'_{\Sigma(O')}$ του Σ ως προς Ο΄. $\boxed{u'_{\Sigma(O')} = \Lambda(\vec{\upsilon}_{O'(O)})u_{\Sigma(O)}}$

iii) Η ταχύτητα του Σ ως προς Ο΄ είναι : $\vec{v}'_{\Sigma(O')} = \dfrac{\vec{u}'}{u'^0}$

Παράδειγμα

Θεωρούμε ένα υλικό σημείο που κινείται με ταχύτητα v στο επίπεδο yz ενός ΑΣΑ Ο . Ένα δεύτερο ΑΣΑ Ο΄ κινείται με ταχύτητα υ ως προς το πρώτο κατά την διεύθυνση του άξονα y. Να βρεθεί η ταχύτητα του Σ ως προς Ο΄

Λύση

Η τετραταχύτητα του Σ ως προς Ο είναι $u_{\Sigma(O)} = \gamma_v \begin{bmatrix} c \\ 0 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$

Ο πίνακας μετασχηματισμού από το Ο στο Ο΄ είναι: $\Lambda(\upsilon) = \begin{bmatrix} \gamma_\upsilon & 0 & -\beta\gamma_\upsilon & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\beta\gamma_\upsilon & 0 & \gamma_\upsilon & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Επομένως η τετραταχύτητα του Σ ως προς Ο΄ θα είναι:

$$u'_{\Sigma(O')} = \gamma_v \begin{bmatrix} \gamma_\upsilon & 0 & -\beta\gamma_\upsilon & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\beta\gamma_\upsilon & 0 & \gamma_\upsilon & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c \\ 0 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \gamma_v \begin{bmatrix} \gamma_\upsilon(c - \beta v_2) \\ 0 \\ \gamma_\upsilon(-c\beta + v_2) \\ v_3 \end{bmatrix}$$

Επομένως η ταχύτητα του Σ ως προς Ο΄ είναι:

4.4. Τετραεπιτάχυνση

Ως τετραεπιτάχυνση ορίζουμε την παράγωγο της τετραταχύτητας ως προς τον ιδιόχρονο

$$\alpha^\mu = \frac{du^\mu}{d\tau} = \frac{d^2u^\mu}{d\tau^2} \tag{4.4.1}$$

<u>Ιδιότητες</u>

1) Η τετραταχύτητα είναι κάθετη στην τετραεπιτάχυνση (a.u=0) (4.4.2)
2) Σχέση τετραεπιτάχυνσης και επιτάχυνσης

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\gamma^4}{c}\vec{\upsilon}.\vec{a} \\ \gamma^2\vec{a} + \frac{\gamma^4}{c^2}(\vec{\upsilon}.\vec{a})\vec{\upsilon} \end{bmatrix} \tag{4.4.3}$$

3) Ο νόμος μετασχηματισμού της τετραεπιτάχυνσης
   α) $\alpha'^\mu = L^\mu{}_\nu \alpha^\nu$ (4.4.4)
   β) $\alpha'_\mu = L_\mu{}^\nu \alpha_\nu$ (4.4.5)

<u>Απόδειξη</u>

1) Γνωρίζουμε ότι: $u^\mu u_\mu = -c^2 \Rightarrow \eta_{\mu\nu}u^\mu u^\nu = -c^2$

   Παραγωγίζοντας ως προς τον ιδιόχρονο έχουμε:

$$\eta_{\mu\nu}\frac{du^\mu}{d\tau}u^\nu + \eta_{\mu\nu}u^\mu\frac{du^\nu}{d\tau} = 0 \Rightarrow \eta_{\mu\nu}\alpha^\mu u^\nu + \eta_{\mu\nu}u^\mu\alpha^\nu = 0 \Rightarrow 2\eta_{\mu\nu}\alpha^\mu u^\nu = 0 \Rightarrow \alpha^\mu u_\mu = 0$$

2) Η σχέση της τετραεπιτάχυνσης με την επιτάχυνση μπορεί να βρεθεί ως εξής:
   Θα χρειαστούμε κατ' αρχήν την παράγωγο του γ ως προς τον χρόνο.

$$\gamma = \left(1 - \frac{\vec{\upsilon}^2}{c^2}\right)^{-1/2} \Rightarrow \frac{d\gamma}{dt} = -\frac{1}{2}\left(1 - \frac{\vec{\upsilon}^2}{c^2}\right)^{-1/2}\frac{-2\vec{\upsilon}}{c^2}\frac{d\vec{\upsilon}}{dt} \Rightarrow \frac{d\gamma}{dt} = \frac{\gamma^3}{c^2}\vec{\upsilon}.\vec{a}$$

   Η μηδενική συνιστώσα της τετραεπιτάχυνσης είναι:

$$\alpha^0 = \frac{du^0}{d\tau} = \frac{du^0}{dt}\frac{dt}{d\tau} = c\frac{d\gamma}{dt}\gamma = \frac{\gamma^4}{c}\vec{\upsilon}.\vec{a}$$

   Για το «χωρικό» της μέρος $\vec{\alpha} = \frac{d\vec{u}}{d\tau} = \frac{dt}{d\tau}\frac{d\vec{u}}{dt} = \gamma\frac{d(\gamma\vec{\upsilon})}{dt} = \gamma^2\frac{d\vec{\upsilon}}{dt} + \gamma\vec{\upsilon}\frac{d\gamma}{dt} = \gamma^2\vec{a} + \frac{\gamma^4}{c^2}\vec{\upsilon}(\vec{\upsilon}.\vec{a})$

   Η σε γλώσσα συνιστωσών $\alpha^i = \gamma^2 a^i + \frac{\gamma^4}{c^2}\upsilon^i\upsilon_j a^j$

   και σε μορφή πίνακα $A = \begin{bmatrix} \frac{\gamma^4}{c}\vec{\upsilon}.\vec{a} \\ \gamma^2\vec{a} + \frac{\gamma^4}{c^2}(\vec{\upsilon}.\vec{a})\vec{\upsilon} \end{bmatrix}$

3) Ο νόμος μετασχηματισμού της τετραεπιτάχυνσης είναι ίδιος με τον νόμο της τετραταχύτητας (επειδή $L^\mu{}_\nu$ σταθερά).

$$u'^{\mu} = L^{\mu}{}_{\nu} u^{\nu} \Rightarrow \frac{du'^{\mu}}{d\tau} = L^{\mu}{}_{\nu} \frac{du^{\mu}}{d\tau} \Rightarrow \alpha'^{\mu} = L^{\mu}{}_{\nu} \alpha^{\nu}$$

$$\alpha'_{\mu} = \eta_{\mu\nu} \alpha'^{\nu} = \eta_{\mu\nu} \frac{du'^{\nu}}{d\tau} = \frac{d(\eta_{\mu\nu} u'^{\mu})}{d\tau} = \frac{du'_{\mu}}{d\tau} = L_{\mu}{}^{\nu} \frac{du_{\nu}}{d\tau} = L_{\mu}{}^{\nu} \alpha_{\nu} \Rightarrow \alpha'_{\mu} = L_{\mu}{}^{\nu} \alpha_{\nu}$$

4.5. Τετραορμή

Η τετραορμή είναι εξ' ορισμού το γινόμενο της μάζας επί την τετραταχύτητα:

$$\boxed{p^{\mu} = mu^{\mu} = m \frac{dx^{\mu}}{d\tau}} \tag{4.5.1}$$

Με μορφή πίνακα η τετραορμή γράφεται

$$\boxed{P = \begin{bmatrix} m\gamma c \\ m\gamma\vec{\upsilon} \end{bmatrix}} \tag{4.5.2}$$

και $$P_{\sigma\upsilon\nu} = \begin{bmatrix} -m\gamma c \\ m\gamma\vec{\upsilon} \end{bmatrix} \tag{4.5.3}$$

Το χωρικό μέρος της τετραορμής είναι η σχετικιστική ορμή του σωματιδίου και το χρονικό της μέρος είναι η ενέργεια του.

Οι σχετικιστικοί ορισμοί της ορμής και της ενέργειας είναι οι παρακάτω:

Η **σχετικιστική ορμή** είναι εξ ορισμού

$$\vec{p} = m\gamma\vec{\upsilon} \tag{4.5.4}$$

Η σχετικιστική ενέργεια του σωματιδίου ορίζεται να είναι

$$E = p^0 c = m\gamma c^2 \tag{4.5.5}$$

Ιδιότητες

1) Αν θεωρήσουμε το σωματίδιο ακίνητο τότε η ορμή του είναι μηδέν και η ενέργειά του είναι $E=mc^2$. Ονομάζουμε την ποσότητα $E=mc^2$ **ενέργεια ηρεμίας του σωματιδίου.**
2) Οι παραπάνω ορισμοί στο όριο των μικρών ταχυτήτων συμφωνούν με τις έννοιες της κλασσικής μηχανικής.
   Πράγματι ας θεωρήσουμε τη περίπτωση όπου $\upsilon << c$.
   Αναπτύσσοντας κατά Taylor το γ και κρατώντας όρους μέχρι δευτέρας τάξης ως προς υ/c έχουμε:
   $$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}} \cong 1 + \frac{\upsilon^2}{2c^2}$$
   Αντικαθιστώντας στον ορισμό της ορμής και ενέργειας και κρατώντας όρους το πολύ δευτέρας τάξης έχουμε ότι $\vec{p} \cong m\vec{\upsilon}$ και $E \cong mc^2 + \frac{1}{2} m\upsilon^2$.
   Στην παραπάνω σχέση αναγνωρίζουμε στον όρο mc^2 την ενέργεια ηρεμίας του σωματιδίου και στον δεύτερο την κλασσική κινητική του ενέργεια . Δηλαδή η συνολική ενέργεια που έχει ένα σωματίδιο που κινείται με ταχύτητα υ είναι το άθροισμα της ενέργειας ηρεμίας και της κινητικής του ενέργειας.
3) Ο σχετικιστικός ορισμός της κινητικής ενέργειας ενός σωματιδίου είναι αποτέλεσμα αυτής της λογικής. Ορίζουμε ως **σχετικιστική κινητική ενέργεια** ενός σωματιδίου μάζας m που κινείται με ταχύτητα υ την ποσότητα $K = m\gamma c^2 - mc^2$
4) Γνωρίζουμε ότι το τετράγωνο της τετραταχύτητας ισούται με $-c^2$.
   Επομένως για το τετράγωνο της τετραορμής έχουμε :

$$p^\mu p_\mu = m^2 u^\mu u_\mu = -m^2c^2 \Rightarrow \eta_{\mu\nu} p^\mu p^\nu = -m^2c^2 \Rightarrow \eta_{00} p^0 p^0 + \eta_{ij} p^i p^j = -m^2c^2 \Rightarrow$$

$$-\frac{E^2}{c^2} + \vec{p}^2 = -m^2c^2 \Rightarrow \boxed{E^2 = \vec{p}^2c^2 + m^2c^4} \qquad (4.5.6)$$

5) Ας θεωρήσουμε ένα φωτόνιο (m=0, E=hf) τότε η παραπάνω σχέση ενέργειας ορμής γίνεται:
$E = pc \Rightarrow p = \dfrac{E}{c}$.

Επομένως η τετραορμή του φωτονίου είναι: $P = \begin{bmatrix} \dfrac{E}{c} \\ \vec{p} \end{bmatrix}$ με $|\vec{p}| = \dfrac{E}{c}$ (4.5.7)

6) Το τετράγωνο της τετραορμής ενός φωτονίου είναι μηδέν
Πράγματι έχουμε $p^\mu p_\mu = -(p^0)^2 + |\vec{p}|^2 = -\dfrac{E^2}{c^2} + \dfrac{E^2}{c^2} = 0$

7) Είναι προφανές από τον ορισμό της ότι η τετραορμή μετασχηματίζεται όπως η τετραταχύτητα :
$p'^\mu = L^\mu{}_\nu p^\nu$

8) Ας θεωρήσουμε ένα σύνολο από N σωματίδια .
Υποθέτουμε ότι η ενέργεια και η ορμή του συστήματος είναι σταθερή σε ένα ΑΑΣ . Θα δείξουμε ότι η ενέργεια και η ορμή είναι σταθερές σε κάθε άλλο ΑΑΣ.

<u>Απόδειξη</u>
Αφού διατηρείται η ενέργεια και η ορμή του συστήματος η τετραορμή του συστήματος παραμένει σταθερή. Επομένως για το σύστημα έχουμε $p^\mu = \sigma\tau\alpha\theta \Rightarrow \Delta p^\mu = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{N} \Delta p^\mu_{(i)} = 0$ (Ο δείκτης i απαριθμεί σωματίδια και όχι συντεταγμένες) .
Σε ένα άλλο ΑΑΣ θα έχουμε:

$$p'^\mu_{(i)} = L^\mu{}_\nu p^\nu_{(i)} \Rightarrow \Delta p'^\mu_{(i)} = L^\mu{}_\nu \Delta p^\nu_{(i)} \Rightarrow \Delta p'^\mu = \sum_{i=1}^{N} \Delta p'^\mu_{(i)} = \sum_{i=1}^{N} L^\mu{}_\nu \Delta p^\nu_{(i)} = L^\mu{}_\nu \sum_{i=1}^{N} \Delta p^\nu_{(i)} = 0$$

Επομένως η μεταβολή της τετραορμής του συστήματος και στο άλλο ΑΑΣ θα είναι μηδέν και επομένως η τετραορμή σταθερή . Άρα και η ενέργεια και η ορμή διατηρούνται.

9) Σύστημα Κέντρου ορμής.
Υποθέτουμε ότι έχουμε ένα σύνολο από σωματίδια συνολικής ενέργειας E και συνολικής ορμής $\vec{p}$ ως προς κάποιο αδρανειακό σύστημα αναφοράς . Υπάρχει πάντα αδρανειακό σύστημα αναφοράς ως προς το οποίο η χωρική ορμή του συστήματος να είναι μηδεν.

<u>Απόδειξη</u>

Η τετραορμή του συστήματος είναι: $P = \begin{bmatrix} \dfrac{E}{c} \\ \vec{p} \end{bmatrix}$.

Αναζητούμε προώθηση Lorentz $\Lambda = \begin{bmatrix} \gamma & -\gamma\beta^T \\ -\gamma\beta & I + \dfrac{\gamma-1}{\beta^2}\beta\beta^T \end{bmatrix}$ ώστε η τετραορμή του συστήματος να γίνει:

$P' = \begin{bmatrix} \dfrac{E'}{c} \\ 0 \end{bmatrix}$.

Α Τρόπος

$$P' = \Lambda P \Rightarrow \begin{bmatrix} \frac{E'}{c} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & -\gamma\beta^T \\ -\gamma\beta & I + \frac{\gamma-1}{\beta^2}\beta\beta^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{E}{c} \\ p \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \frac{E'}{c} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\gamma E - \gamma c\vec{\beta}\vec{p}}{c} \\ \frac{-\gamma E\vec{\beta}}{c} + \vec{p} + \frac{\gamma-1}{\beta^2}\vec{\beta}(\vec{\beta}\vec{p}) \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\frac{-\gamma E\vec{\beta}}{c} + \vec{p} + \frac{\gamma-1}{\beta^2}\vec{\beta}(\vec{\beta}\vec{p}) = 0 \qquad (1)$$

Πολλαπλασιάζοντας την (1) με $\vec{\beta}$ έχουμε:.

$$\frac{-\gamma E\beta^2}{c} + \vec{\beta}\vec{p} + \frac{\gamma-1}{\beta^2}\beta^2(\vec{\beta}\vec{p}) = 0 \Rightarrow \frac{-\gamma E\beta^2}{c} + \gamma\vec{\beta}\vec{p} = 0 \Rightarrow \vec{\beta}\vec{p} = \frac{E\beta^2}{c} \qquad (2)$$

Αντικαθιστώντας την (2) στην (1) έχουμε:

$$\frac{-\gamma E\vec{\beta}}{c} + \vec{p} + \frac{\gamma-1}{\beta^2}\vec{\beta}\frac{E\beta^2}{c} = 0 \Rightarrow \boxed{\vec{\beta} = \frac{c\vec{p}}{E}}$$

Β Τρόπος

Επειδή το τετράγωνο της τετραορμής είναι αναλλοίωτο μέγεθος έχουμε:

$$P'.P' = P.P \Rightarrow -\frac{E'^2}{c^2} = -\frac{E^2}{c^2} + p^2 \Rightarrow E' = \sqrt{E^2 - p^2c^2}$$

Από τον νόμο μετασχηματισμού της τετραορμής έχουμε:

$$P = \Lambda^{-1}P' \Rightarrow \begin{bmatrix} \frac{E}{c} \\ p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & \gamma\beta^T \\ \gamma\beta & I + \frac{\gamma-1}{\beta^2}\beta\beta^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{E'}{c} \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \frac{E}{c} \\ \vec{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\gamma E'}{c} \\ \frac{\gamma E'}{c}\vec{\beta} \end{bmatrix} \Rightarrow \vec{p} = \frac{E}{c}\vec{\beta} \Rightarrow \vec{\beta} = \frac{c\vec{p}}{E}$$

4.6. Σύνοψη και Τυπολόγιο

- Σε αντιστοιχία με την κλασσική μηχανική , στην σχετικότητα ορίζονται οι έννοιες τετραταχύτητα , τετραεπιτάχυνση , τετραορμή.
  Η ουσιαστική διαφορά με τους αντίστοιχους ορισμούς της κλασσικής μηχανικής είναι ότι οι παραγωγίσεις δεν είναι ως προς τον χρόνο (ο οποίος εξαρτάται από το σύστημα αναφοράς), αλλά ως προς τον ιδιόχρονο του σωματιδίου ο οποίος είναι ανεξάρτητος του συστήματος αναφοράς.
- Ο ιδιόχρονος ορίζεται μέσω της σχέσης :
  $$d\tau = \sqrt{-dS^2} = \sqrt{-\eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu}$$
- Η τετραταχύτητα είναι η πρώτη παράγωγος της (χωροχρονικής) θέσης ως προς τον ιδιόχρονο:
  $$u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}$$
- Η τετραεπιτάχυνση είναι η πρώτη παράγωγος της τετραταχύτητας ως προς τον ιδιόχρονο:
  $$a^\mu = \frac{du^\mu}{d\tau} = \frac{d^2x^\mu}{d\tau^2}$$
- Η τετραορμή είναι το γινόμενο της μάζας επί την τετραταχύτητα
  $$p^\mu = mu^\mu = m\frac{dx^\mu}{d\tau}$$
- Ο νόμος μετασχηματισμού (αλλαγή συστήματος συντεταγμένων) των παραπάνω μεγεθών είναι κοινός (νόμος μετασχηματισμού ανταλλοίωτου διανύσματος):
  Αν $x'^\mu = L^\mu{}_\nu x^\nu$ τότε
  $$u'^\mu = L^\mu{}_\nu u^\nu$$
  $$a'^\mu = L^\mu{}_\nu a^\nu$$
  $$p'^\mu = L^\mu{}_\nu p^\nu$$
- Η σχέση ταχύτητας και τετραταχύτητας ενός υλικού σημείου είναι:
  $$u = \begin{bmatrix} \gamma c \\ \gamma \vec{v} \end{bmatrix}$$
- Η σχέση τετραορμής και ταχύτητας είναι:
  $$p = \begin{bmatrix} \gamma mc \\ \gamma m\vec{v} \end{bmatrix}$$
- Η «χρονική» συνιστώσα της τετραορμής αποτελεί την σχετικιστική ενέργεια Ε του σωματιδίου
  $$E = c\,p^0 = m\gamma c^2$$
- Η «χωρική» συνιστώσα της τετραορμής αποτελεί την σχετικιστική ορμή του σωματιδίου.
  $$\vec{p} = m\gamma\vec{v}$$
- Η σχέση ενέργειας ορμής είναι
  $$E^2 = p^2c^2 + m^2c^4$$
- Ειδικά για το φωτόνιο η σχέση ενέργειας ορμής γράφεται:
  $$E = |\vec{p}|\,c$$
- Για ένα σύστημα σωματιδίων συνολικής ενέργειας Ε και συνολικής ορμής $\vec{p}$ υπάρχει ΑΣΑ ως προς το οποίο η χωρική συνιστώσα της ορμής να είναι μηδέν (σύστημα κέντρου ορμής) .
  Η ταχύτητα του συστήματος αυτού ως προς το δοθέν υπολογίζεται από την σχέση:
  $$\vec{v}_{cp} = \frac{c^2\vec{p}}{E}$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5.
ΤΑΝΥΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

5.1. Εισαγωγή

Ο συναλλοίωτος μετρικός τανυστής είναι ο πίνακας

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{5.1.1}$$

Ο ανταλλοίωτος μετρικός τανυστής είναι ο πίνακας

$$\eta^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{5.1.2}$$

Οι δύο παραπάνω πίνακες είναι ο ένας αντίστροφος του άλλου δηλ.

$$\eta^{\mu\rho}\eta_{\rho\nu} = \delta^{\mu}_{\nu} \tag{5.1.3}$$

Θεωρούμε ένα μετασχηματισμό Lorentz $x'^{\mu} = L^{\mu}{}_{\nu}x^{\nu}$

Ο πίνακας L ικανοποιεί τις σχέσεις

$$L^{\alpha}{}_{\mu}L^{\beta}{}_{\nu}\eta_{\alpha\beta} = \eta_{\mu\nu} \quad \text{και} \quad L^{\alpha}{}_{\mu}L^{\beta}{}_{\nu}\eta^{\mu\nu} = \eta^{\alpha\beta} \tag{5.1.4}$$

Ορίζουμε τον πίνακα $L_{\alpha}{}^{\beta}$ μέσω της εξίσωσης

$$L_{\alpha}{}^{\beta} = \eta_{\alpha\mu}\eta^{\beta\nu}L^{\mu}{}_{\nu} \tag{5.1.5}$$

Οι ιδιότητες του πίνακα $L_{\alpha}{}^{\beta}$ συνοψίζονται στην επόμενη

<u>Πρόταση</u>

α) Ο $L_{\alpha}{}^{\beta}$ είναι (κατά κάποιο τρόπο) ο αντίστροφος του $L^{\alpha}{}_{\beta}$ δηλ έχουμε:

$$L^{\alpha}{}_{\mu}L_{\alpha}{}^{\nu} = \delta^{\nu}_{\mu} \quad \text{και} \quad L^{\mu}{}_{\alpha}L_{\nu}{}^{\alpha} = \delta^{\nu}_{\mu} \tag{5.1.6}$$

β) Ο πίνακας $L_{\alpha}{}^{\beta}$ είναι επίσης πίνακας Lorentz δηλαδή ικανοποιεί τις ίδιες σχέσεις με τον $L^{\alpha}{}_{\beta}$

$$L_{\mu}{}^{\alpha}L_{\nu}{}^{\beta}\eta_{\alpha\beta} = \eta_{\mu\nu} \qquad \text{και} \qquad L_{\mu}{}^{\alpha}L_{\nu}{}^{\beta}\eta^{\mu\nu} = \eta^{\alpha\beta} \tag{5.1.7}$$

γ) Ο αντίστροφος του μετασχηματισμού $x'^{\mu} = L^{\mu}{}_{\nu}x^{\nu}$ είναι ο $x^{\mu} = L_{\nu}{}^{\mu}x'^{\nu}$

<u>Απόδειξη</u>

α) $L^{\alpha}{}_{\mu}L_{\alpha}{}^{\nu} = L^{\alpha}{}_{\mu}\eta_{\alpha\rho}\eta^{\nu\sigma}L^{\rho}{}_{\sigma} = L^{\alpha}{}_{\mu}L^{\rho}{}_{\sigma}\eta_{\alpha\rho}\eta^{\nu\sigma} = \eta_{\mu\sigma}\eta^{\nu\sigma} = \delta^{\nu}_{\mu}$.

β) $L_{\mu}{}^{\alpha}L_{\nu}{}^{\beta}\eta_{\alpha\beta} = \eta_{\mu\rho}\eta^{\alpha\sigma}L^{\rho}{}_{\sigma}\eta_{\nu\pi}\eta^{\beta\xi}L^{\pi}{}_{\xi}\eta_{\alpha\beta} = \eta^{\alpha\sigma}\eta_{\alpha\beta}L^{\rho}{}_{\sigma}L^{\pi}{}_{\xi}\eta^{\beta\xi}\eta_{\mu\rho}\eta_{\nu\pi} = \delta^{\sigma}_{\beta}L^{\rho}{}_{\sigma}L^{\pi}{}_{\xi}\eta^{\beta\xi}\eta_{\mu\rho}\eta_{\nu\pi} =$

$L^{\rho}{}_{\beta}L^{\pi}{}_{\xi}\eta^{\beta\xi}\eta_{\mu\rho}\eta_{\nu\pi} = \eta^{\rho\pi}\eta_{\mu\rho}\eta_{\nu\pi} = \delta^{\pi}_{\mu}\eta_{\nu\pi} = \eta_{\mu\nu}$

γ) $x'^{\mu} = L^{\mu}{}_{\nu}x^{\nu} \Rightarrow L_{\mu}{}^{\alpha}x'^{\mu} = L_{\mu}{}^{\alpha}L^{\mu}{}_{\nu}x^{\nu} \Rightarrow L_{\mu}{}^{\alpha}x'^{\mu} = \delta^{\alpha}_{\nu}x^{\nu} \Rightarrow L_{\mu}{}^{\alpha}x'^{\mu} = x^{\alpha}$

5.2. Τανυστές - Τανυστικά Πεδία

Τα διάφορα φυσικά μεγέθη – πεδία τα κατατάσσουμε στις εξής κατηγορίες:

Α) Αναλλοίωτα (βαθμωτά) μεγέθη (scalars) - Αναλλοίωτα (βαθμωτά) Πεδία

Ένα αριθμητικό μέγεθος Ψ λέμε ότι είναι **αναλλοίωτο** ως προς τους μετασχηματισμούς Lorentz αν παραμένει αμετάβλητο κάτω από οποιοδήποτε μετασχηματισμό Lorentz.
Δηλαδή αν Ψ και Ψ΄ οι τιμές του μεγέθους σε δύο ΑΣΑ Ο και Ο΄ τότε

$$\Psi'=\Psi \qquad (5.2.1\alpha)$$

Παραδείγματα αναλλοίωτων μεγεθών είναι η μάζα, το φορτίο κ.α

<u>Σχόλιο:</u>

Τα αναλλοίωτα μεγέθη δεν είναι κατ' ανάγκη σταθερά. Απλώς η τιμή τους σε όλα τα αδρανειακά συστήματα συντεταγμένων (η οποία μπορεί να μεταβάλλεται από σημείο σε σημείο) είναι η ίδια
Ένα παράδειγμα αναλλοίωτου μεγέθους που δεν είναι κατ ανάγκη σταθερό είναι το εσωτερικό γινόμενο των τετραταχυτήτων δύο σωματιδίων.
Θεωρούμε δύο σωματίδια με τετραταχύτητες u^μ και v^μ. Ορίζουμε το εσωτερικό τους γινόμενο μέσω της σχέσης:

$$u.v=\eta_{\alpha\beta}u^\alpha v^\beta$$

Έστω ο μετασχηματισμός Lorentz $x'^\mu = L^\mu{}_\nu x^\nu$

Στο νέο σύστημα συντεταγμένων έχουμε

$$u'.v'=\eta_{\alpha\beta}u'^\alpha v'^\beta=\eta_{\alpha\beta}L^\alpha{}_\mu u^\mu L^\beta{}_\nu v^\nu = L^\alpha{}_\mu L^\beta{}_\nu \eta_{\alpha\beta}u^\mu v^\nu=\eta_{\mu\nu}u^\mu v^\nu = u.v$$

Μια συνάρτηση $\Psi(X)=\Psi(ct,\vec{x})$ είναι ένα **αναλλοίωτο πεδίο** αν για κάθε χωροχρονικό σημείο αποτελεί αναλλοίωτο μέγεθος. Δηλαδή

$$\Psi'(X')=\Psi(X) \Leftrightarrow \Psi'(ct',\vec{x}')=\Psi(ct,\vec{x}) \qquad (5.2.1\beta)$$

<u>Παράδειγμα 1</u>

Θεωρούμε την συνάρτηση $\Psi(X)=\eta_{\mu\nu}x^\mu x^\nu = -(x^0)^2+(x^1)^2+(x^2)^2+(x^3)^2$

Έστω ο μετασχηματισμός Lorentz $x'^\mu = L^\mu{}_\nu x^\nu$

Είναι $\Psi'(X')=\eta_{\mu\nu}x'^\mu x'^\nu=\eta_{\mu\nu}L^\mu{}_\alpha x^\alpha L^\nu{}_\beta x^\beta = L^\mu{}_\alpha L^\nu{}_\beta \eta_{\mu\nu}x^\alpha x^\beta=\eta_{\alpha\beta}x^\alpha x^\beta=\Psi(X)$

Β) Ανταλλοίωτα διανύσματα – ανταλλοίωτα διανυσματικά πεδία

Μια τετράδα αριθμών Ψ^μ αποτελεί ένα **ανταλλοίωτο διάνυσμα** αν κάτω από μετασχηματισμό Lorentz μετασχηματίζεται όπως η τετραταχύτητα δηλ

$$\Psi'^\mu = L^\mu{}_\alpha \Psi^\alpha \qquad (5.2.2\alpha)$$

Παραδείγματα ανταλλοίωτων μεγεθών είναι η τετραταχύτητα, η τετραεπιτάχυνση, η τετραορμή κ.α

Μια τετράδα συναρτήσεων $\Psi^\mu(X)$ αποτελεί ένα **ανταλλοίωτο διάνυσματικό πεδίο** αν ορίζει ένα ανταλλοίωτο διάνυσμα. σε κάθε σημείο του χωροχρόνου.
Επομένως κάτω από μετασχηματισμό Lorentz σε κάθε σημείο του χωροχρόνου έχουμε:

$$\Psi'^\mu(X')=L^\mu{}_\alpha \Psi^\alpha(X) \qquad (5.2.2\beta)$$

Γ) Συναλλοίωτα διανύσματα – Συναλλοίωτα διανυσματικά πεδία

Μια τετράδα αριθμών Ψ_μ αποτελεί ένα **συναλλοίωτο διάνυσμα** αν κάτω από μετασχηματισμό Lorentz μετασχηματίζεται σύμφωνα με την σχέση

$$\Psi'_\mu = L_\mu{}^\alpha \Psi_\alpha \tag{5.2.3α}$$

<u>Παράδειγμα 2</u>

Έστω Ψ^μ ένα ανταλλοίωτο διάνυσμα. Ορίζουμε τις ποσότητες Ψ_μ μέσω της σχέσης

$$\Psi_\mu = \eta_{\mu\nu}\Psi^\nu$$

Οι τέσσερις ποσότητες Ψ_μ αποτελούν τις συνιστώσες ενός συναλλοίωτου διανύσματος.
Πράγματι έχουμε:

$$\Psi'_\mu = \eta_{\mu\nu}\Psi'^\nu = \eta_{\mu\nu}L^\nu{}_\alpha\Psi^\alpha = \eta_{\mu\nu}\eta^{\nu\rho}\eta_{\alpha\sigma}L_\rho{}^\sigma\Psi^\alpha = \delta^\rho_\nu L_\rho{}^\sigma\eta_{\alpha\sigma}\Psi^\alpha = L_\nu{}^\sigma\eta_{\alpha\sigma}\Psi^\alpha = L_\nu{}^\sigma\Psi_\sigma$$

Μια τετράδα συναρτήσεων $\Psi^\mu(X)$ αποτελεί ένα **συναλλοίωτο διάνυσματικό πεδίο** αν ορίζει ένα συναλλοίωτο διάνυσμα. σε κάθε σημείο του χωροχρόνου.
Επομένως κάτω από μετασχηματισμό Lorentz σε κάθε σημείο του χωροχρόνου έχουμε:

$$\Psi'_\mu(X') = L_\mu{}^\alpha\Psi_\alpha(X) \tag{5.2.3β}$$

<u>Παράδειγμα 3</u>

Θεωρούμε τις συναρτήσεις $\Psi_\mu(X) = \eta_{\mu\nu}x^\nu$

$$\Psi'_\mu(X') = \eta_{\mu\nu}x'^\nu = \eta_{\mu\nu}L^\nu{}_\alpha x^\alpha = \eta_{\mu\nu}\eta^{\nu\rho}\eta_{\alpha\sigma}L_\rho{}^\sigma x^\alpha = \delta^\rho_\nu L_\rho{}^\sigma\eta_{\alpha\sigma}x^\alpha = L_\nu{}^\sigma\eta_{\alpha\sigma}x^\alpha = L_\nu{}^\sigma\Psi_\sigma(X)$$

<u>Παράδειγμα 4</u>

Έστω ένα βαθμωτό πεδίο $\Psi(X)$. Ορίζουμε την βαθμίδα (gradient) του πεδίου μέσω των παραγώγων του βαθμωτού πεδίου ως προς τις συντεταγμένες δηλ $\dfrac{\partial\Psi}{\partial x^\mu}$.

Τότε οι συναρτήσεις $V_\mu(X) = \dfrac{\partial\Psi(X)}{\partial x^\mu}$ αποτελούν τις συνιστώσες ενός συναλλοίωτου διανυσματικού πεδίου.

<u>Απόδειξη</u>

$$V_\mu(X') = \frac{\partial\Psi'(X')}{\partial x'^\mu} = \frac{\partial\Psi(X)}{\partial x'^\mu}$$

Εφαρμόζοντας τον κανόνα για την παράγωγο σύνθετης συνάρτησης έχουμε:

$$\frac{\partial\Psi(X)}{\partial x'^\mu} = \frac{\partial\Psi(X)}{\partial x^\nu}\frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} = V_\nu(X)\frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu}$$

Επειδή $x^\nu = L_\alpha{}^\nu x'^\alpha \Rightarrow \dfrac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} = L_\alpha{}^\nu\dfrac{\partial x'^\alpha}{\partial x'^\mu} = L_\alpha{}^\nu\delta^\alpha_\mu = L_\mu{}^\nu$

Επομένως: $V_\mu(X') = L_\mu{}^\nu V_\nu(X)$

Σχόλιο:
Χρησιμοποιώντας τις πρώτες παραγώγους ενός βαθμωτού πεδίου κατασκευάσαμε ένα συναλλοίωτο διανυσματικό πεδίο. Ανυψώνοντας τον δείκτη μπορούμε να ορίσουμε και ένα ανταλλοίωτο διανυσματικό πεδίο ως εξής: $V^{\mu}(X) = \eta^{\mu\nu}V_{\nu}(X) = \eta^{\mu\nu}\dfrac{\partial\Psi(X)}{\partial x^{\nu}}$

Παράδειγμα 5

Θεωρούμε τον διαφορικό τελεστή $\square = \eta^{\mu\nu}\dfrac{\partial}{\partial x^{\mu}}\dfrac{\partial}{\partial x^{\nu}} \Rightarrow \square = -\dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2}{\partial t^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial \vec{x}^2}$

Ο τελεστής αυτός είναι βαθμωτός τελεστής:

Απόδειξη

Εφαρμόζοντας τον κανόνα για την παράγωγο σύνθετης συνάρτησης έχουμε:

$$\frac{\partial}{\partial x'^{\mu}} = \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\mu}}\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}} = L_{\mu}{}^{\alpha}\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}$$

Για τον τελεστή στο νέο σύστημα συντεταγμένων έχουμε:

$$\square' = \eta^{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x'^{\mu}}\frac{\partial}{\partial x'^{\nu}} = \eta^{\mu\nu}L_{\mu}{}^{\alpha}\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}L_{\nu}{}^{\beta}\frac{\partial}{\partial x^{\beta}} = \eta^{\mu\nu}L_{\mu}{}^{\alpha}L_{\nu}{}^{\beta}\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}\frac{\partial}{\partial x^{\beta}} = \eta^{\alpha\beta}\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}\frac{\partial}{\partial x^{\beta}} = \square$$

Β) Ανταλλοίωτοι τανυστές – ανταλλοίωτα τανυστικά πεδία

Θεωρούμε ένα πίνακα (16 αριθμούς) $\Psi^{\mu\nu}$. Τα στοιχεία του πίνακα αποτελούν τις συνιστώσες ενός **ανταλλοίωτου τανυστή** δευτέρας τάξης (2 είναι οι δείκτες) αν κάτω από μετασχηματισμό Lorentz μετασχηματίζονται σύμφωνα με την σχέση

$$\Psi'^{\mu\nu} = L^{\mu}{}_{\alpha}L^{\nu}{}_{\beta}\Psi^{\alpha\beta} \qquad (5.2.4\alpha)$$

Παράδειγμα 6

Θεωρούμε δύο σωματίδια με τετραταχύτητες u^{μ} και v^{μ}. Ορίζουμε τον πίνακα Ψ μέσω της σχέσης: $\Psi^{\mu\nu} = u^{\mu}v^{\nu}$. Τα στοιχεία του πίνακα αποτελούν συνιστώσες ενός ανταλλοίωτου τανυστή δευτέρας τάξης.

Απόδειξη

$$\Psi'^{\mu\nu} = u'^{\mu}v'^{\nu} = L^{\mu}{}_{\alpha}u^{\alpha}L^{\nu}{}_{\beta}v^{\beta} = L^{\mu}{}_{\alpha}L^{\nu}{}_{\beta}\Psi^{\alpha\beta} \blacksquare$$

Ένας πίνακας με στοιχεία συναρτήσεις $\Psi^{\mu\nu}(X)$ αποτελεί ένα **ανταλλοίωτο τανυστικό πεδίο** δευτέρας τάξης αν ορίζει ένα ανταλλοίωτο τανυστή δευτέρας τάξης σε κάθε σημείο του χωροχρόνου.
Επομένως κάτω από μετασχηματισμό Lorentz σε κάθε σημείο του χωροχρόνου έχουμε:

$$\Psi'^{\mu\nu}(X') = L^{\mu}{}_{\alpha}L^{\nu}{}_{\beta}\Psi^{\alpha\beta}(X) \qquad (5.2.4\beta)$$

Παράδειγμα 7

Έστω $A^{\mu}(X)$ και $B^{\mu}(X)$ δύο ανταλοίωτα διανυσματικά πεδία.
Μπορούμε να ορίσουμε ένα ανταλλοίωτο τανυστή δευτέρας τάξης T μέσω της σχέσης:

$$T^{\mu\nu}(X) = A^{\mu}(X)B^{\nu}(X)$$

<u>Σχόλια</u>

Σ1) Κατ' αναλογία μπορούμε να ορίσουμε ανταλλοίωτους τανυστές τρίτης τάξης.
Ένα σύνολο από 4x4x4=64 ποσότητες $\Psi^{\alpha\beta\gamma}$ αποτελεί τις συνιστώσες ενός τανυστή τρίτης τάξης αν μετασχηματίζεται σύμφωνα με την σχέση $\Psi'^{\alpha\beta\gamma} = L^{\alpha}{}_{\mu}L^{\beta}{}_{\nu}L^{\gamma}{}_{\rho}\Psi^{\mu\nu\rho}$

Σ2) Μπορούμε επίσης να ορίσουμε μικτούς τανυστές οποιασδήποτε τάξης. Ενδεικτικά αναφέρουμε τους μικτούς τανυστές δευτέρας τάξης..
Οι 16 ποσότητες $\Psi^{\alpha}{}_{\beta}$ αποτελούν τις συνιστώσες ενός μικτού τανυστή δευτέρας τάξης αν μετασχηματίζονται σύμφωνα με την σχέση: $\Psi'^{\alpha}{}_{\beta} = L^{\alpha}{}_{\mu}L_{\beta}{}^{\nu}\,\Psi^{\mu}{}_{\nu}$

Σ3) <u>Παράδειγμα 8</u>
Έστω $A^{\mu}(X)$ ένα ανταλλοίωτο διανυσματικό πεδίο. Οι παράγωγοι του ως προς τα συντεταγμένες αποτελούν τις συνιστώσες ενός μικτού τανυστικού πεδίου.
<u>Απόδειξη</u>
Θέτουμε $T^{\mu}{}_{\nu}(X) = \dfrac{\partial A^{\mu}(X)}{\partial x^{\nu}}$
Στο άλλο σύστημα συντεταγμένων έχουμε:
$$T'^{\mu}{}_{\nu}(X') = \frac{\partial A'^{\mu}(X')}{\partial x'^{\nu}} = \frac{\partial (L^{\mu}{}_{\alpha}A^{\alpha}(X))}{\partial x'^{\nu}} = L^{\mu}{}_{\alpha}\frac{\partial A^{\alpha}(X)}{\partial x'^{\nu}} = L^{\mu}{}_{\alpha}\frac{\partial A^{\alpha}(X)}{\partial x^{\beta}}\frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\nu}} = L^{\mu}{}_{\alpha}L_{\nu}{}^{\beta}T^{\alpha}{}_{\beta}(X)$$

Σ4) Ένα βαθμωτό είναι ένας τανυστής μηδενικής τάξης και ένα διάνυσμα είναι ένας τανυστής πρώτης τάξης.

5.3. Σταθεροί Τανυστές

Α) Ο μετρικός τανυστής είναι ένας τανυστής που έχει την ίδια τιμή σε όλα τα συστήματα συντεταγμένων.

<u>Απόδειξη</u>

Ο συναλλοίωτος μετρικός τανυστής ορίζεται από την σχέση: $\eta_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Σε κάθε άλλο σύστημα συντεταγμένων ορίζουμε $\eta'_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$

Όμως από την βασική ιδιότητα του έχουμε $L_{\mu}{}^{\alpha}L_{\nu}{}^{\beta}\eta_{\alpha\beta} = \eta_{\mu\nu} \Rightarrow$

$$\eta'_{\mu\nu} = L_{\mu}{}^{\alpha}L_{\nu}{}^{\beta}\eta_{\alpha\beta} \tag{5.3.1}$$

Επομένως ο συναλλοίωτος μετρικός τανυστής είναι ένας συναλλοίωτος τανυστής δευτέρας τάξης.
Παρόμοια απόδειξη μπορούμε να κάνουμε και για τον ανταλλοίωτο μετρικό τανυστή.
$$\eta'^{\mu\nu} = L^{\mu}{}_{\alpha}L^{\nu}{}_{\beta}\eta^{\alpha\beta} \tag{5.3.2}$$

Β) Θεωρούμε τους 4^4 αριθμούς $\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$, οι οποίοι ορίζονται με τις εξής συμβάσεις:

Σ1) Αν δύο δείκτες είναι ίσοι τότε $\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} = 0$ (πχ $\varepsilon^{0102} = \varepsilon^{1123} = \varepsilon^{1122} = 0$)

Σ2) $\varepsilon^{0123} = 1$

Σ3) Σε οποιαδήποτε αντιμετάθεση δεικτών το σύμβολο ε αλλάζει πρόσημο $\varepsilon^{\beta\alpha\gamma\delta} = -\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$
(πχ $\varepsilon^{3201} = -\varepsilon^{0231} = \varepsilon^{0132} = -\varepsilon^{0123} = -1$)

Για το σύμβολο ε ισχύει η εξής πρόταση:

Έστω T τυχαίος πίνακας και |T| η ορίζουσα του. Τότε ισχύει η σχέση

$$\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}T^{\mu}{}_{\alpha}T^{\nu}{}_{\beta}T^{\rho}{}_{\gamma}T^{\sigma}{}_{\delta} = |T|\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \tag{5.3.3}$$

Απόδειξη

Θεωρούμε την παράσταση $\sigma^{\mu\nu\rho\sigma} = \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}T^{\mu}{}_{\alpha}T^{\nu}{}_{\beta}T^{\rho}{}_{\gamma}T^{\sigma}{}_{\delta}$.
Εύκολα μπορούμε να δείξουμε ότι η παράσταση αυτή αλλάζει πρόσημο όταν δύο δείκτες αντιμετατεθούν:
$\sigma^{\lambda\kappa\chi\psi} = \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}T^{\lambda}{}_{\alpha}T^{\kappa}{}_{\beta}T^{\chi}{}_{\gamma}T^{\psi}{}_{\delta} = -\varepsilon^{\beta\alpha\gamma\delta}T^{\kappa}{}_{\beta}T^{\lambda}{}_{\alpha}T^{\chi}{}_{\gamma}T^{\psi}{}_{\delta} = -\sigma^{\kappa\lambda\chi\psi}$
Επομένως είναι ανάλογη με το $\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$. Δηλαδή έχουμε $\sigma^{\alpha\beta\gamma\delta} = x\,\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$. Για να προσδιορίσουμε την τιμή του x θέτουμε στην παραπάνω σχέση μνρσ=0123 και έχουμε:
$\sigma^{0123} = x\,\varepsilon^{0123} \Rightarrow \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}T^{0}{}_{\alpha}T^{1}{}_{\beta}T^{2}{}_{\gamma}T^{3}{}_{\delta} = x$
Με απευθείας υπολογισμό μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι $\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}T^{0}{}_{\alpha}T^{1}{}_{\beta}T^{2}{}_{\gamma}T^{3}{}_{\delta} = |T|$. Επομένως x=|T|
Αν περιοριστούμε σε ορθόχρονους κανονικούς μετασχηματισμούς Lorentz (|L|=1) τότε η σχέση (5.3.3) γίνεται: $\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}L^{\mu}{}_{\alpha}L^{\nu}{}_{\beta}L^{\rho}{}_{\gamma}L^{\sigma}{}_{\delta} = \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \Rightarrow$

$$\varepsilon'^{\mu\nu\rho\sigma} = \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}L^{\mu}{}_{\alpha}L^{\nu}{}_{\beta}L^{\rho}{}_{\gamma}L^{\sigma}{}_{\delta} \tag{5.3.4}$$

Σύμφωνα με την τελευταία σχέση το σύμβολο ε είναι ένας ανταλλοίωτος τανυστής τετάρτης τάξης

Ομοίως μπορούμε να ορίσουμε το συναλλοίωτο πλήρες αντισυμμετρικό τανυστή μέσω της σχέσης:

$$\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} = \eta_{\alpha\mu}\eta_{\beta\nu}\eta_{\gamma\rho}\eta_{\delta\sigma}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \tag{5.3.5}$$

Είναι προφανές ότι η (5.3.5) ορίζει έναν τανυστή τετάρτης τάξης.

Σχόλιο

Επειδή ο $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}$ είναι πλήρως αντισυμμετρικός αρκεί να γνωρίζουμε την 0123 συνιστώσα του:

$$\varepsilon_{0123} = \eta_{0\mu}\eta_{1\nu}\eta_{2\rho}\eta_{3\sigma}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} = \eta_{00}\eta_{11}\eta_{22}\eta_{33}\varepsilon^{0123} = -1 \Rightarrow$$

$$\varepsilon_{0123} = -1 \tag{5.3.6}$$

5.4. Πράξεις μεταξύ Τανυστών

1) Πρόσθεση

Έστω $T=(T^{\alpha\beta})$ και $S=(S^{\alpha\beta})$ δύο **ομοειδείς** τανυστές. Ορίζουμε το άθροισμα τους Ψ=T+S μέσω της σχέσης:
$\Psi^{\alpha\beta} = T^{\alpha\beta} + S^{\alpha\beta}$
Είναι προφανές ότι το άθροισμα δύο ομοειδών τανυστών είναι τανυστής ομοειδής με τους τανυστές από τους οποίους συντίθεται.

2) Πολλαπλασιασμός βαθμωτού με τανυστή

Έστω λ βαθμωτό και $T=(T^{\alpha\beta})$ τανυστής.
Ορίζουμε το γινόμενο S=λT του βαθμωτού με τον τανυστή μέσω της σχέσης:
$S^{\alpha\beta} = \lambda T^{\alpha\beta}$

3) Ευθύ γινόμενο τανυστών

Έστω $T=(T^{\alpha\beta})$ και $S=(S^{\alpha}{}_{\beta})$ δύο τανυστές δευτέρας τάξης.
Μπορούμε να ορίσουμε το ευθύ γινόμενο $\Psi = T \otimes S$ των δύο τανυστών μέσω της σχέσης:
$\Psi^{\alpha\beta\gamma}{}_{\delta} = T^{\alpha\beta}S^{\gamma}{}_{\delta}$

Το ευθύ γινόμενο των δύο τανυστών είναι τανυστής με τάξη ίση με το άθροισμα των τάξεων των δύο τανυστών και τανυστικό χαρακτήρα αυτόν που δηλώνει η θέση των δεικτών.

<u>Απόδειξη</u>

Είναι $T'^{\alpha\beta} = L^{\alpha}{}_{\mu}L^{\beta}{}_{\nu}T^{\mu\nu}$ και $S'^{\gamma}{}_{\delta} = L^{\gamma}{}_{\rho}L_{\delta}{}^{\sigma}S^{\rho}{}_{\sigma}$

Επομένως

$\Psi'^{\alpha\beta\gamma}{}_{\delta} = T'^{\alpha\beta}S'^{\gamma}{}_{\delta} = L^{\alpha}{}_{\mu}L^{\beta}{}_{\nu}L^{\gamma}{}_{\rho}L_{\delta}{}^{\sigma}T^{\mu\nu}S^{\rho}{}_{\sigma} = L^{\alpha}{}_{\mu}L^{\beta}{}_{\nu}L^{\gamma}{}_{\rho}L_{\delta}{}^{\sigma}\Psi^{\mu\nu\rho}{}_{\sigma}$

<u>4) Συναίρεση τανυστή</u>

Έστω ένας μικτός τανυστής.. Ονομάζουμε συναίρεση του τανυστή έναν νέο τανυστή που προκύπτει αθροίζοντας έναν συναλλοίωτο και έναν ανταλλοίωτο δείκτη.
Για παράδειγμα θεωρούμε τον μικτό τανυστή $5^{ης}$ τάξης $T^{\alpha\beta}{}_{\gamma\delta\varepsilon}$.
Το αποτέλεσμα της συναίρεσης των δεικτών α και ε είναι ο τανυστής $S^{\beta}{}_{\gamma\delta} = T^{\rho\beta}{}_{\gamma\delta\rho}$
Το αποτέλεσμα της συναίρεσης, είναι τανυστής με τάξη κατά 2 μικρότερη από την τάξη του αρχικού τανυστή και τανυστικό χαρακτήρα αυτόν που δηλώνει η θέση των δεικτών.

<u>Απόδειξη</u>

$S'^{\beta\gamma}{}_{\delta} = T'^{\rho\beta\gamma}{}_{\delta\rho} = L^{\rho}{}_{\kappa}L^{\beta}{}_{\lambda}L^{\gamma}{}_{\mu}L_{\delta}{}^{\sigma}L_{\rho}{}^{\tau}T^{\kappa\lambda\mu}{}_{\sigma\tau}$

Όμως $L^{\rho}{}_{\kappa}L_{\rho}{}^{\tau} = \delta^{\tau}_{\kappa}$. Επομένως ~

$S'^{\beta\gamma}{}_{\delta} = \delta^{\tau}_{\kappa}L^{\beta}{}_{\lambda}L^{\gamma}{}_{\mu}L_{\delta}{}^{\sigma}T^{\kappa\lambda\mu}{}_{\sigma\tau} = L^{\beta}{}_{\lambda}L^{\gamma}{}_{\mu}L_{\delta}{}^{\sigma}T^{\kappa\lambda\mu}{}_{\sigma\kappa} \Rightarrow S'^{\beta\gamma}{}_{\delta} = L^{\beta}{}_{\lambda}L^{\gamma}{}_{\mu}L_{\delta}{}^{\sigma}S^{\lambda\mu}{}_{\sigma}$

<u>5) Εσωτερικό γινόμενο τανυστών</u>

Το εσωτερικό γινόμενο δύο τανυστών προκύπτει από τους δύο αρχικούς τανυστές ως εξής: .
Κατασκευάζουμε το ευθύ γινόμενο των δύο τανυστών , υποβιβάζουμε η ανυψώνουμε (αν χρειάζεται) τον δείκτη που θέλουμε και εκτελούμε συναίρεση στον τανυστή που έχει προκύψει.

<u>Παραδείγματα</u>

1)Έστω $T^{\alpha\beta}$ και $S_{\alpha\beta}$ δύο τανυστές δευτέρας τάξης.
Ορίζουμε το εσωτερικό τους γινόμενο Ψ=TS μέσω της σχέσης:

$\Psi^{\alpha}{}_{\beta} = T^{\alpha\mu}S_{\mu\beta}$

2) Έστω $T^{\alpha\beta}$ και $S^{\alpha\beta}$ δύο τανυστές.
Μπορούμε να ορίσουμε το εσωτερικό τους γινόμενο Ψ ως εξής:

$\Psi^{\alpha\beta} = T^{\alpha\mu}S_{\mu}{}^{\beta} = \eta_{\mu\nu}T^{\alpha\mu}S^{\nu\beta}$

<u>Σχόλια</u>

1) Το εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων είναι ένα αναλλοίωτο

   Έστω $A = \begin{bmatrix} A^0 \\ \vec{A} \end{bmatrix}$ και $B = \begin{bmatrix} B^0 \\ \vec{B} \end{bmatrix}$ δύο ανταλλοίωτα διανύσματα.

   Το εσωτερικό τους γινόμενο A.B είναι το αναλλοίωτο

   $A.B = A^{\mu}B_{\mu} = A_{\mu}B^{\mu} = \eta_{\mu\nu}A^{\mu}B^{\nu} = -A^0B^0 + \vec{A}\vec{B}$

2) Το εσωτερικό γινόμενο δύο τανυστών δεν είναι εν γένει μοναδικό αλλά εξαρτάται από τους δείκτες στους οποίους κάνουμε συναίρεση: Ενδεικτικά αναφέρουμε τους τανυστές του παραδείγματος 1 για τους οποίους μπορούμε να ορίσουμε τα εξής 4 εσωτερικά γινόμενα:

   $T^{\rho\beta}S_{\rho\delta}$, $T^{\alpha\rho}S_{\gamma\rho}$, $T^{\rho\beta}S_{\gamma\rho}$, $T^{\alpha\rho}S_{\rho\delta}$

Για τους τανυστές οποιασδήποτε τάξης μπορούμε να αποδείξουμε το εξής

Θεώρημα 5.4.1.
Αν μία εξίσωση τανυστών είναι αληθής σε ένα αδρανειακό σύστημα συντεταγμένων είναι αληθής και σε κάθε άλλο.

<u>Απόδειξη</u>

Έστω σαν παράδειγμα η εξίσωση $F^{\alpha\beta}S_\beta = T^\alpha$ στην οποία τα F,S,T είναι τανυστές με χαρακτήρα αυτόν που δηλώνουν οι δείκτες τους.
Θεωρούμε ένα μετασχηματισμό Lorentz. Θα δείξουμε ότι η ίδια εξίσωση ισχύει και στο νέο σύστημα συντεταγμένων.
Πράγματι έχουμε διαδοχικά

$$F'^{\alpha\beta}S'_\beta - T'^\alpha = L^\alpha{}_\mu L^\beta{}_\nu L_\beta{}^\rho F^{\mu\nu}S_\rho - L^\alpha{}_\mu T^\mu = L^\alpha{}_\mu \delta^\rho_\nu F^{\mu\nu}S_\rho - L^\alpha{}_\mu T^\mu =$$

$$L^\alpha{}_\mu F^{\mu\nu}S_\nu - L^\alpha{}_\mu T^\mu = L^\alpha{}_\mu (F^{\mu\nu}S_\nu - T^\mu)$$

Όμως από την ισχύ της εξίσωσης στο αρχικό σύστημα συντεταγμένων η παράσταση μέσα στην παρένθεση είναι μηδέν. Επομένως $F'^{\alpha\beta}S'_\beta - T'^\alpha = 0 \Rightarrow F'^{\alpha\beta}S'_\beta = T'^\alpha$

<u>Σχόλιο</u>

Είναι λογικό να αναρωτηθεί κανείς για την χρησιμότητα του παραπάνω φορμαλισμού.
Η απάντηση βρίσκεται στην απαίτηση οι νόμοι της Φυσικής να είναι ίδιοι σε όλα τα ΑΣΑ.
Η παραπάνω απαίτηση σε συνδυασμό με το Θεώρημα (5.4.1) σημαίνει ότι *οι νόμοι της φυσικής θα πρέπει να είναι τανυστικές εξισώσεις.*
Παρόμοια ήταν και η κατάσταση στην κλασσική μηχανική. Τα διάφορα μεγέθη της είναι τανυστές ως προς μετασχηματισμούς Γαλιλαίου και επομένως οι νόμοι της κλασσικής μηχανικής είναι εξισώσεις τανυστών.
Για παράδειγμα αναφέρουμε τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$
Στην εξίσωση αυτή η ορμή και η δύναμη είναι διανύσματα (ως προς μετασχηματισμούς Γαλιλαίου), και ο χρόνος αναλλοίωτο μέγεθος. Επομένως η ισχύς του νόμου σε ένα ΑΣΑ συνεπάγεται αυτόματα την ισχύ του σε οποιοδήποτε άλλο που συνδέεται με αυτό με Γαλιλαϊκό μετασχηματισμό.

5.5. Σύνοψη και τυπολόγιο

- Οι τανυστές ως προς μια ομάδα μετασχηματισμών είναι μαθηματικά αντικείμενα τα οποία έχουν προκαθορισμένο νόμο μετασχηματισμού.
  Αν θεωρήσουμε έναν μετασχηματισμό Lorentz
  $x'^{\mu} = L^{\mu}{}_{\nu} x^{\nu} \Leftrightarrow x^{\mu} = L_{\alpha}{}^{\mu} x'^{\alpha}$
- Ο νόμος μετασχηματισμού των τανυστών διαφόρων τάξεων είναι:
  Τανυστές μηδενικής τάξης (αναλλοίωτα) :
  $\Psi' = \Psi$
  Οι ανταλλοίωτοι τανυστές πρώτης τάξης (ανταλλοίωτα διανύσματα)
  $\Psi'^{\mu} = L^{\mu}{}_{\alpha} \Psi^{\alpha}$
  Οι συναλλοίωτοι τανυστές πρώτης τάξης (συναλλοίωτα διανύσματα)
  $\Psi'_{\mu} = L_{\mu}{}^{\alpha} \Psi_{\alpha}$
  Οι ανταλλοίωτοι τανυστές δευτέρας τάξης
  $\Psi'^{\mu\nu} = L^{\mu}{}_{\alpha} L^{\nu}{}_{\beta} \Psi^{\alpha\beta}$
- Υπάρχουν τανυστές που έχουν την ίδια τιμή σε όλα τα συστήματα συντεταγμένων (σταθεροί τανυστές)
  Παραδείγματα τέτοιων τανυστών είναι:
  Ο ανταλλοίωτος μετρικός τανυστής
  $\eta'^{\mu\nu} = L^{\mu}{}_{\alpha} L^{\nu}{}_{\beta} \eta^{\alpha\beta} = \eta^{\mu\nu}$
  Ο συναλλοίωτος μετρικός τανυστής
  $\eta'_{\mu\nu} = L_{\mu}{}^{\alpha} L_{\nu}{}^{\beta} \eta_{\alpha\beta} = \eta_{\mu\nu}$
  Ο πλήρως αντισυμμετρικός τανυστής
  $\varepsilon'^{\mu\nu\rho\sigma} = \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} L^{\mu}{}_{\alpha} L^{\nu}{}_{\beta} L^{\rho}{}_{\gamma} L^{\sigma}{}_{\delta} = \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$
- Μεταξύ τανυστών ορίζονται διάφορες πράξεις όπως πρόσθεση , πολλαπλασιασμός τανυστή με αναλλοίωτο, ευθύ γινόμενο , συναίρεση, παράγωγος. Σε κάθε μια από τις παραπάνω πράξεις το αποτέλεσμα που προκύπτει είναι τανυστής τάξης και χαρακτήρα αυτό που δηλώνει το πλήθος και η θέση των ελεύθερων δεικτών του.
  Ειδικά για την παραγώγιση ενός τανυστή, ο δείκτης που αντιστοιχεί στην παράγωγο είναι συναλλοίωτος

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6.
ΗΛΕΚΤΡΟΜΑΓΝΗΤΙΣΜΟΣ

6.1.Εισαγωγή

Όπως γνωρίζουμε το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο περιγράφεται από τις 4 εξισώσεις του Maxwell.
Με τις εξισώσεις αυτές συσχετίζονται η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου και η ένταση του μαγνητικού πεδίου (αποτέλεσμα) με την πυκνότητα φορτίου και ρεύματος (αίτιο).
Τα ερωτήματα που συνδέονται με την σχετικιστική μελέτη του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου είναι:

Ερ 1) Οι εξισώσεις του Maxwell είναι ίδιες σε όλα τα ΑΣΑ;
Ερ 2) Αν ναι ποιες εξισώσεις τανυστών είναι ισοδύναμες με αυτές;
Ερ 3) Αν θεωρήσουμε ένα μετασχηματισμό Lorentz πως μετασχηματίζονται το ηλεκτρικό και το μαγνητικό πεδίο;
Ερ 4) Υπάρχουν μεγέθη (συναρτήσεις των πεδίων) τα οποία να είναι αναλλοίωτα κάτω από μετασχηματισμούς Lorentz;

Ειδικά για το τρίτο ερώτημα μπορούμε να κάνουμε την εξής παρατήρηση: Ας θεωρήσουμε ένα σημειακό ηλεκτρικό φορτίο που κινείται με σταθερή ταχύτητα ως προς το σύστημα εργαστηρίου. Στο σύστημα εργαστηρίου το φορτίο αυτό είναι κινούμενο και επομένως δημιουργεί και ηλεκτρικό και μαγνητικό πεδίο. Στο σύστημα ηρεμίας του σωματιδίου όμως είναι ακίνητο και επομένως δημιουργεί μόνο ηλεκτρικό.
Η παραπάνω παρατήρηση μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι οι συνιστώσες του ηλεκτρικού και του μαγνητικού πεδίου δεν μπορεί να είναι συνιστώσες δυο διαφορετικών τανυστών.
Επειδή δε οι συνιστώσες είναι έξι δεν μπορούν να είναι συνιστώσες ενός τετρανύσματος.
Αναζητούμε λοιπόν έναν τανυστή δευτέρας τάξης (πίνακας 4x4) που να έχει σαν στοιχεία τις συνιστώσες της έντασης του Ηλεκτρικού και του Μαγνητικού πεδίου . Όμως ένας 4x4 πίνακας έχει εν γένει 16 στοιχεία. Ένας καλός υποψήφιος 4x4 πίνακας που έχει μόνο 6 ανεξάρτητα μη μηδενικά στοιχεία είναι ένας αντισυμμετρικός πίνακας..
Αναζητούμε λοιπόν έναν αντισυμμετρικό τανυστή δευτέρας τάξης που να έχει σαν στοιχεία τις έξι εντάσεις και το πρώτο μέλος των εξισώσεων Maxewll να είναι τανυστές που παράγονται από αυτόν.
Με το δεύτερο μέλος των εξισώσεων (πυκνότητα ρεύματος και πυκνότητα φορτίου) τα πράγματα είναι πιο απλά. Οι τέσσερις αυτές ποσότητες μπορούν να αποτελέσουν τις συνιστώσες ενός τετρανύσματος

6.2.Οι πηγές

Θεωρούμε μια τυχαία κατανομή κινουμένων φορτίων.

Σε ένα τυχαίο χωροχρονικό σημείο $x=\begin{bmatrix} x^0 \\ \vec{x} \end{bmatrix}$, η πυκνότητα φορτίου και ρεύματος αντίστοιχα είναι ι

$\rho(x)$ και $\vec{J}(x)$

Ονομάζουμε **τετραπυκνότητα** την τετράδα $J^\alpha(x)=\begin{bmatrix} c\,\rho(x) \\ \vec{J}(x) \end{bmatrix}$

Θα δείξουμε ότι **η τετραπυκνότητα είναι ανταλλοίωτο τετράνυσμα.**

Απόδειξη

Για λόγους απλότητας ας θεωρήσουμε κατ αρχήν ένα μόνο υλικό σημείο φορτίου e το οποίο κινείται στο χώρο διαγράφοντας μια κοσμική γραμμή στον χωρόχρονο.
Αν χρησιμοποιήσουμε σαν παράμετρο της κοσμικής γραμμής την χρονική συντεταγμένη ξ τότε οι χωροχρονικές συντεταγμένες της θέσης του είναι:

$\begin{bmatrix} \xi^0 \\ \vec{\xi} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \xi \\ \vec{\xi}(\xi) \end{bmatrix}$ (την χρονική στιγμή ξ βρίσκεται στην θέση $\vec{\xi}(\xi)$)

Την στιγμή x^0 το φορτίο βρίσκεται στη θέση $\vec{\xi}(x^0)$ και έχει ταχύτητα $\vec{\upsilon}(x^0)$.
Επομένως η πυκνότητα φορτίου και η πυκνότητα ρεύματος την χρονική στιγμή x^0 στην θέση $\vec{x}$ είναι

$$\rho(x) = e\,\delta^3\left(\vec{x} - \vec{\xi}(x^0)\right)$$

$$\vec{J}(x) = e\,\vec{\upsilon}(x^0)\,\delta^3\left(\vec{x} - \vec{\xi}(x^0)\right)$$

Επειδή $f(\alpha) = \int f(\beta)\delta(\alpha-\beta)d\beta$ και $\delta(\alpha-\beta) = \delta(\beta-\alpha)$ έχουμε:

$$\rho(x) = e\,\delta^3\left(\vec{x} - \vec{\xi}(x^0)\right) = e\int \delta^3\left(\vec{x} - \vec{\xi}(\xi)\right)\delta(\xi - x^0)d\xi = e\int \delta^3\left(\vec{x} - \vec{\xi}(\xi)\right)\delta(x^0 - \xi)d\xi$$

Θεωρούμε μια επαναπαραμετροποίηση της κοσμικής γραμμής του σωματιδίου με νέα παράμετρο τον ιδιόχρονο τ του σωματιδίου.
Έστω ξ=φ(τ) η σχέση χρονικής συντεταγμένης και ιδιόχρονου.
Επομένως το χωροχρονικό διάνυσμα θέσης του φορτίου γίνεται

$$q_{(e)} = \begin{bmatrix} \xi^0 \\ \vec{\xi}(\xi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi(\tau) \\ \vec{\xi}(\phi(\tau)) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q^0(\tau) \\ \vec{q}(\tau) \end{bmatrix}$$

(οι συναρτήσεις $q^\alpha(\tau)$ προκύπτουν από τις $\xi^\alpha(\xi)$ αντικαθιστώντας την σχέση ξ και τ.)
Για το διαφορικό dξ έχουμε:

$$\xi = \phi(\tau) \Rightarrow d\xi = \frac{d\phi}{d\tau}d\tau = \frac{d\xi^0}{d\tau}d\tau \Rightarrow d\xi = u^0(\tau)d\tau$$

με $u^0(\tau)$ την 0 συνιστώσα της τετραταχύτητας του υλικού σημείου.
Αντικαθιστούμε στην πυκνότητα φορτίου:

$$\rho(x) = e\int \delta^3\left(\vec{x} - \vec{q}(\tau)\right)\delta\left(x^0 - q^0(\tau)\right)u^0(\tau)d\tau$$

Όμως $\delta^3\left(\vec{x} - \vec{q}(\tau)\right)\delta\left(x^0 - q^0(\tau)\right) = \delta^4\left(x - q(\tau)\right)$

Τελικά για την πυκνότητα φορτίου έχουμε:

$$\rho(x) = e\int \delta^4\left(x - q(\tau)\right)u^0(\tau)d\tau \qquad (6.2.1)$$

Ομοίως για την i συνιστώσα της πυκνότητας ρεύματος ισχύουν τα εξής:

$$J^i(x) = e\upsilon^i(x^0)\,\delta^3\left(\vec{x} - \vec{\xi}(x^0)\right) = e\int \upsilon^i(\xi)\delta^3\left(\vec{x} - \vec{\xi}(\xi)\right)\delta(\xi - x^0)d\xi = e\int \upsilon^i(\xi)\delta^3\left(\vec{x} - \vec{\xi}(\xi)\right)\delta(x^0 - \xi)d\xi$$

Όμως $\upsilon^i(\xi) = c\dfrac{d\xi^i}{d\xi} = c\dfrac{d\xi^i}{d\tau}\dfrac{d\tau}{d\xi} = cu^i(\tau)\dfrac{d\tau}{d\xi}$ και $d\xi = \dfrac{d\xi}{d\tau}d\tau$

Αντικαθιστούμε στην πυκνότητα ρεύματος και έχουμε ότι:

$$J^i(x) = c\,e\int u^i(\tau)\,\delta^4\left(x - q(\tau)\right)d\tau \qquad (6.2.2)$$

Χρησιμοποιώντας τις (6.2.1) και (6.2.2) και τον ορισμό της τετραπυκνότητας έχουμε:

$$J^\alpha(x) = c\,e\int u^\alpha(\tau)\,\delta^4\left(x - q(\tau)\right)d\tau \qquad (6.2.3)$$

Θεωρούμε τώρα ένα ορθόχρονο κανονικό μετασχηματισμό Lorentz $L^\alpha{}_\beta$.

Επειδή |L| =1 η συνάρτηση του Dirac είναι αναλλοίωτο. Η τετραταχύτητα u^α είναι τετράνυσμα και επομένως η τετραπυκνότητα είναι τετράνυσμα.

Τέλος θεωρούμε μια τυχαία κατανομή N φορτισμένων υλικών σημείων.
Επειδή η πυκνότητα φορτίου και ρεύματος σε κάθε σημείο του χώρου είναι το άθροισμα των πυκνοτήτων που δημιουργεί κάθε φορτίο χωριστά θα έχουμε:

$J^{\alpha}(x) = \sum_{n=1}^{N} J^{\alpha}_{(n)}(x)$ και επομένως είναι τετράνυσμα (πιο σωστά ανταλλοίωτο διανυσματικό πεδίο) σαν άθροισμα τετρανυσμάτων.

6.3.Οι εξισώσεις του Maxwell

Γνωρίζουμε ότι οι 4 εξισώσεις του Maxwell (στο κενό) γράφονται σε διαφορική μορφή:

$$\vec{\nabla}\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \tag{6.3.1}$$

$$\vec{\nabla} x \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \tag{6.3.2}$$

$$\vec{\nabla}\vec{B} = 0 \tag{6.3.3}$$

$$\vec{\nabla} x \vec{B} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu_0 \vec{J} \tag{6.3.4}$$

Μεταξύ σταθερών ε_0 , μ_0 και c ισχύει η σχέση $\mu_0\varepsilon_0 = \frac{1}{c^2} \Rightarrow c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}$ (6.3.5)

Θεωρούμε τον αντισυμμετρικό πίνακα

$$F^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & E_1 & E_2 & E_3 \\ -E_1 & 0 & cB_3 & -cB_2 \\ -E_2 & -cB_3 & 0 & cB_1 \\ -E_3 & cB_2 & -cB_1 & 0 \end{bmatrix} \tag{6.3.6}$$

Θα δείξουμε ότι η 4 εξισώσεις του Maxwell μπορούν να εκφραστούν συναρτήσει των παραγώγων του $F^{\mu\nu}$.
Συγκεκριμένα θα αποδείξουμε ότι:
A) οι μη ομογενείς εξισώσεις (6.3.1) και (6.3.4) μπορούν να γραφούν με την τανυστική μορφή:

$$\frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x^{\nu}} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\, J^{\mu} \tag{6.3.7}$$

B) οι ομογενείς εξισώσεις (6.3.2) και (6.3.3) μπορούν να γραφούν με την μορφή:

$$\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} \frac{\partial F_{\beta\gamma}}{\partial x^{\delta}} = 0 \tag{6.3.8}$$

<u>Απόδειξη</u>

A) Θεωρούμε την μηδενική συνιστώσα του πρώτου μέλους της (6.3.7):

$$\frac{\partial F^{0\nu}}{\partial x^{\nu}} = \frac{\partial F^{01}}{\partial x^1} + \frac{\partial F^{02}}{\partial x^2} + \frac{\partial F^{03}}{\partial x^3} = \frac{\partial E_1}{\partial x^1} + \frac{\partial E_2}{\partial x^2} + \frac{\partial E_3}{\partial x^3} = \vec{\nabla}\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\, J^0$$

Θεωρούμε την 1 συνιστώσα του πρώτου μέλους της (6.3.7):

$$\frac{\partial F^{1\nu}}{\partial x^{\nu}} = \frac{\partial F^{10}}{\partial x^0} + \frac{\partial F^{12}}{\partial x^2} + \frac{\partial F^{13}}{\partial x^3} = -\frac{1}{c}\frac{\partial E_1}{\partial t} + c\frac{\partial B_3}{\partial x^2} - c\frac{\partial B_2}{\partial x^3} = c(-\frac{1}{c^2}\frac{\partial E_1}{\partial t} + \frac{\partial B_3}{\partial x^2} - \frac{\partial B_2}{\partial x^3})$$

όμως η 1 συνιστώσα της (6.3.4) είναι:

$$\frac{\partial B_3}{\partial x^2}-\frac{\partial B_2}{\partial x^3}-\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial E_1}{\partial t}=\mu_0 J^1 \Rightarrow \frac{\partial B_3}{\partial x^2}-\frac{\partial B_2}{\partial x^3}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial E_1}{\partial t}=\mu_0 J^1$$

Αντικαθιστώντας στην παραπάνω έχουμε

$$\frac{\partial F^{1\nu}}{\partial x^\nu}=\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\,J^1.$$

Ομοίως για τις 2 και 3 συνιστώσες της (6.3.7)

B) Θα υπολογίσουμε κατ αρχήν την συναλλοίωτη μορφή του $F^{\mu\nu}$.

Ας συμβολίσουμε την συναλλοίωτη μορφή του πίνακα με τον πίνακα $\tilde{F}$

Είναι $F_{\mu\nu}=\eta_{\mu\alpha}\eta_{\nu\beta}F^{\alpha\beta}\Rightarrow \tilde{F}=\eta F\eta$

Γράφουμε τον πίνακα F στην μορφή $F=\begin{bmatrix}0 & E^T\\ -E & F_B\end{bmatrix}$

Όπου E ο 3x1 πίνακας στήλη με στοιχεία τις συνιστώσες του ηλεκτρικού πεδίου και F_B το 3x3 μέρος του F που περιέχει τις συνιστώσες του μαγνητικού πεδίου.

Έτσι έχουμε:

$$\tilde{F}=\eta F\eta=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & I\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & E^T\\ -E & F_B\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & I\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & -E^T\\ -E & F_B\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & I\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & -E^T\\ E & F_B\end{bmatrix}\Rightarrow$$

$$F_{\mu\nu}=\begin{bmatrix}0 & -E_1 & -E_2 & -E_3\\ E_1 & 0 & cB_3 & -cB_2\\ E_2 & -cB_3 & 0 & cB_1\\ E_3 & cB_2 & -cB_1 & 0\end{bmatrix} \qquad (6.3.9)$$

Υπολογίζουμε τώρα το πρώτο μέλος της 0 συνιστώσας της (6.3.8) : $\varepsilon^{0\beta\gamma\delta}\frac{\partial F_{\beta\gamma}}{\partial x^\delta}$

Τυπικά η παράσταση αποτελείται από 4^3=64 όρους. Όμως αν κάποιος από τους δείκτες β,γ,δ πάρει την τιμή 0 το αντίστοιχο $\varepsilon^{0\beta\gamma\delta}$ μηδενίζεται. Επίσης αν δύο τιμές των δεικτών είναι ίσες τότε πάλι το $\varepsilon^{0\beta\gamma\delta}$ μηδενίζεται. Επομένως οι μη μηδενικοί όροι είναι οι όροι εκείνοι στους οποίους οι δείκτες παίρνουν διαφορετικές μεταξύ τους τιμές και διάφορες από το 0 (π.χ βγδ=123 ή 132 ή 213 ή 231 ή 312 ή 321). Επομένως οι μη μηδενικοί όροι είναι 3!=6 . Τέλος επειδή και οι $\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$ και $F_{\alpha\beta}$ είναι αντισυμμετρικοί θα εμφανιστούν 3 ζεύγη όμοίων όρων (πχ $\varepsilon^{0123}\frac{\partial F_{12}}{\partial x^3}=\varepsilon^{0213}\frac{\partial F_{21}}{\partial x^3}$) .

Έχουμε λοιπόν: $\varepsilon^{0\beta\gamma\delta}\frac{\partial F_{\beta\gamma}}{\partial x^\delta}=2(\varepsilon^{0123}\frac{\partial F_{12}}{\partial x^3}+\varepsilon^{0231}\frac{\partial F_{23}}{\partial x^1}+\varepsilon^{0132}\frac{\partial F_{13}}{\partial x^2})=2c(\frac{\partial B_3}{\partial x^3}+\frac{\partial B_1}{\partial x^1}+\frac{\partial B_2}{\partial x^2})=2c\vec{\nabla}\vec{B}=0$

Ομοίως για την 1 συνιστώσα της (6.3.8):

$$\varepsilon^{1\beta\gamma\delta}\frac{\partial F_{\beta\gamma}}{\partial x^\delta}=2(\varepsilon^{1023}\frac{\partial F_{02}}{\partial x^3}+\varepsilon^{1032}\frac{\partial F_{03}}{\partial x^2}+\varepsilon^{1320}\frac{\partial F_{32}}{\partial x^0})=2(\frac{\partial E_2}{\partial x^3}-\frac{\partial E_3}{\partial x^2}-\frac{\partial B_1}{\partial t})=0$$

Η τελευταία ισότητα είναι αποτέλεσμα της 1 συνιστώσας της (6.3.2)

Ομοίως αποδεικνύονται και οι 2 και 3 συνιστώσες της (6.3.8)

6.4. Ο νόμος μετασχηματισμού των πεδίων

Όπως είδαμε οι εξισώσεις του Maxwell μπορούν να πάρουν την μορφή

$$\frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x^{\nu}} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\, J^{\mu} \quad \text{και} \quad \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}\frac{\partial F_{\beta\gamma}}{\partial x^{\delta}} = 0$$

Γνωρίζουμε ότι ο $\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$ είναι τανυστής , η τετραπυκνότητα J^{μ} είναι ανταλλοίωτο διάνυσμα και ο διαφορικός τελεστής $\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}$ είναι συναλλοίωτος διαφορικός τελεστής.

Επομένως για να ικανοποιεί ο $F^{\mu\nu}$ τις εξισώσεις Maxwell θα πρέπει να είναι τανυστής δευτέρας τάξης.
Αποδείξαμε λοιπόν ότι:

Τα στοιχεία του πίνακα $F^{\mu\nu}$ αποτελούν τις συνιστώσες ενός ανταλλοίωτου τανυστή δευτέρας τάξης (Ηλεκτρομαγνητικός Τανυστής).

Ας θεωρήσουμε τώρα ένα μετασχηματισμό Lorentz. Ο νόμος μετασχηματισμού του $F^{\mu\nu}$ είναι:

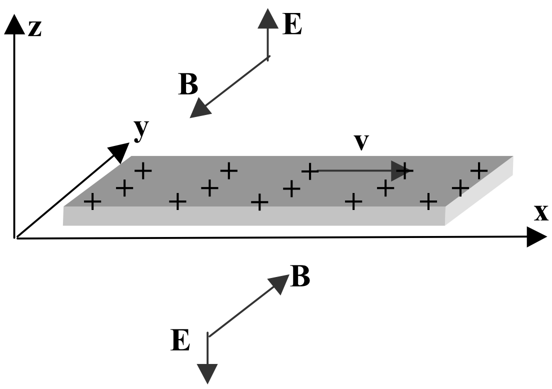
$$F'^{\mu\nu} = L^{\mu}{}_{\alpha} L^{\nu}{}_{\beta} F^{\alpha\beta}.$$

Από την εξάρτηση του F από τα E και B θα προκύψει ο νόμος μετασχηματισμού των E και B.

<u>Παράδειγμα 1</u>

Θεωρούμε μια ακίνητη (στο σύστημα εργαστηρίου) άπειρη μονωτική πλάκα ομοιόμορφα θετικά φορτισμένη με επιφανειακή πυκνότητα φορτίου σ_0, η οποία εκτείνεται στο επίπεδο xy. Υποθέτουμε ότι η πλάκα αρχίζει να κινείται σταθερή ταχύτητα v. Ζητάμε να υπολογίσουμε το ηλεκτρικό και το μαγνητικό πεδίο (στο σύστημα εργαστηρίου) που δημιουργεί η πλάκα αν η κίνησή της γίνεται
α) Κατά την διεύθυνση του άξονα x (παράλληλα στην πλάκα)
β) Κατά την διεύθυνση του άξονα z (κάθετα στην πλάκα)

<u>Λύση</u>



α)
Στο σύστημα ηρεμίας της πλάκας O΄ η επιφανειακή πυκνότητα φορτίου είναι $\sigma'=\sigma_0$ και το πεδίο που δημιουργεί είναι μόνο ηλεκτρικό. Γνωρίζουμε ότι το ηλεκτρικό πεδίο σε κάθε ημίχωρο είναι ομογενές και το μέτρο της έντασης δίνεται από την σχέση $E' = \frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0}$.

Στο σύστημα ηρεμίας της πλάκας διάφορη του μηδενός είναι μόνο η z συνιστώσα της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου. Επομένως ο ηλεκτρομαγνητικός τανυστής είναι:

$$F'^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & E' \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -E' & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ο πίνακας του μετασχηματισμού Lorentz που συνδέει τα δύο συστήματα συντεταγμένων είναι

$$\Lambda(-v)=(\Lambda^{\mu}{}_{\nu})=\begin{bmatrix}\gamma & \gamma\beta & 0 & 0\\ \gamma\beta & \gamma & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

Επειδή ο ηλεκτρομαγνητικός τανυστής είναι τανυστής τα στοιχεία του στο σύστημα εργαστηρίου θα δίνονται από την σχέση:

$$F^{\mu\nu}=\Lambda^{\mu}{}_{\alpha}\Lambda^{\nu}{}_{\beta}F'^{\mu\nu}\Rightarrow F=\Lambda F'\Lambda^{T}\Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix}0 & E_1 & E_2 & E_3\\ -E_1 & 0 & cB_3 & -cB_2\\ -E_2 & -cB_3 & 0 & cB_1\\ -E_3 & cB_2 & -cB_1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\gamma & \gamma\beta & 0 & 0\\ \gamma\beta & \gamma & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & E'\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ -E' & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\gamma & \gamma\beta & 0 & 0\\ \gamma\beta & \gamma & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix}0 & E_1 & E_2 & E_3\\ -E_1 & 0 & cB_3 & -cB_2\\ -E_2 & -cB_3 & 0 & cB_1\\ -E_3 & cB_2 & -cB_1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & \gamma E'\\ 0 & 0 & 0 & \gamma\beta E'\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ -\gamma E' & -\gamma\beta E' & 0 & 0\end{bmatrix}$$

Επομένως $E_1=E_2=0$ και $E_3=\gamma E'\Rightarrow E_3=\gamma\dfrac{\sigma_0}{2\varepsilon_0}$

$B_1=B_3=0$ και $cB_2=-\gamma\beta E'\Rightarrow B_2=-\dfrac{\gamma\beta\sigma_0}{2c\varepsilon_0}\Rightarrow B_2=-\mu_0\gamma\dfrac{\sigma_0 v}{2}$

<u>Παρατήρηση:</u>

Η επιφανειακή πυκνότητα φορτίου είναι σ_0 στο σύστημα ηρεμίας της πλάκας δηλαδή στο O΄.
Για να υπολογίσουμε την επιφανειακή πυκνότητα στο σύστημα εργαστηρίου, θεωρούμε ένα μικρό ορθογώνιο της πλάκας με διαστάσεις Δx΄ και Δy΄ (στο σύστημα ηρεμίας της πλάκας) ,στο οποίο περιέχεται φορτίο Δq. Για να υπολογίσουμε τις διαστάσεις του στο σύστημα εργαστηρίου θα πρέπει να κάνουμε ταυτόχρονη μέτρηση των συντεταγμένων των κορυφών του ορθογωνίου (Δt=0).

Από τον μετασχηματισμό Lorentz έχουμε: $\Delta x'=\gamma(\Delta x-v\Delta t)\Rightarrow \Delta x'=\gamma\Delta x\Rightarrow \Delta x=\dfrac{\Delta x'}{\gamma}$ (συστολή μήκους) και Δy΄=Δy.

Επομένως η επιφανειακή πυκνότητα στο σύστημα εργαστηρίου είναι:

$\sigma=\dfrac{\Delta q}{\Delta x\Delta y}=\dfrac{\gamma\Delta q}{\Delta x'\Delta y'}\Rightarrow\sigma=\gamma\sigma'\Rightarrow\sigma=\gamma\sigma_0$. Άρα $E=\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}$

β) Στο σύστημα ηρεμίας της πλάκας το πεδίο είναι όπως και στο ερώτημα α. Ο πίνακας μετασχηματισμού είναι διαφορετικός:

$$\Lambda(-v)=(\Lambda^{\mu}{}_{\nu})=\begin{bmatrix}\gamma & 0 & 0 & \gamma\beta\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ \gamma\beta & 0 & 0 & \gamma\end{bmatrix}$$

$$F^{\mu\nu}=\Lambda^{\mu}{}_{\alpha}\Lambda^{\nu}{}_{\beta}F'^{\mu\nu}\Rightarrow F=\Lambda F'\Lambda^{T}\Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 0 & E_1 & E_2 & E_3 \\ -E_1 & 0 & cB_3 & -cB_2 \\ -E_2 & -cB_3 & 0 & cB_1 \\ -E_3 & cB_2 & -cB_1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & 0 & 0 & \gamma\beta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \gamma\beta & 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & E' \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -E' & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma & 0 & 0 & \gamma\beta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \gamma\beta & 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 0 & E_1 & E_2 & E_3 \\ -E_1 & 0 & cB_3 & -cB_2 \\ -E_2 & -cB_3 & 0 & cB_1 \\ -E_3 & cB_2 & -cB_1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & E' \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -E' & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Επομένως η πλάκα δεν δημιουργεί μαγνητικό πεδίο και το ηλεκτρικό πεδίο είναι ίδιο με εκείνο του συστήματος ηρεμίας της πλάκας.

Παράδειγμα 2

Θεωρούμε ένα υλικό σημείο φορτίου q που κινείται (στο σύστημα εργαστηρίου) με σταθερή ταχύτητα v. Ζητάμε την ένταση του ηλεκτρικού και του μαγνητικού πεδίου που δημιουργεί.

Λύση

Δίχως βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι το φορτίο κινείται κατά την θετική κατεύθυνση του άξονα x.
Στο σύστημα ηρεμίας του φορτίου O΄ υπάρχει μόνο ηλεκτρικό πεδίο (πεδίο Coulomb).
Στο O΄ η ένταση του πεδίου δίνεται από την σχέση:

$$E' = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r'^2} \Rightarrow \vec{E}' = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{r}'}{r'^3} \Rightarrow E' = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r'^3}\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}$$

Επομένως ο ηλεκτρομαγνητικός τανυστής στο O΄ είναι:

$$F'^{\mu\nu} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r'^3}\begin{bmatrix} 0 & x' & y' & z' \\ -x' & 0 & 0 & 0 \\ -y' & 0 & 0 & 0 \\ -z' & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ο πίνακας μετασχηματισμού είναι :

$$\Lambda(-v) = (\Lambda^{\mu}{}_{\nu}) = \begin{bmatrix} \gamma & \gamma\beta & 0 & 0 \\ \gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$F = \Lambda F' \Lambda^{T} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 0 & E_1 & E_2 & E_3 \\ -E_1 & 0 & cB_3 & -cB_2 \\ -E_2 & -cB_3 & 0 & cB_1 \\ -E_3 & cB_2 & -cB_1 & 0 \end{bmatrix} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r'^3} \begin{bmatrix} 0 & x' & \gamma y' & \gamma z' \\ -x' & 0 & \gamma\beta y' & \gamma\beta z' \\ -\gamma y' & -\gamma\beta y' & 0 & 0 \\ -\gamma z' & -\gamma\beta z' & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Για να βρούμε πλήρως τον ηλεκτρομαγνητικό τανυστή στο O θα πρέπει να αντικαταστήσουμε και τα x΄,y΄,z΄

$$x' = \gamma(x - vt)$$
$$y' = y$$
$$z' = z$$
$$r'^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 = \gamma^2(x - vt)^2 + y^2 + z^2$$

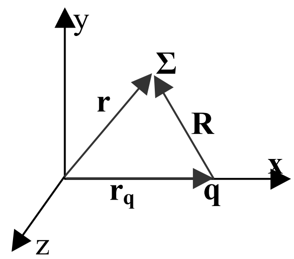
Αντικαθιστώντας στον ηλεκτρομαγνητικό τανυστή έχουμε:

$$\begin{bmatrix} 0 & E_1 & E_2 & E_3 \\ -E_1 & 0 & cB_3 & -cB_2 \\ -E_2 & -cB_3 & 0 & cB_1 \\ -E_3 & cB_2 & -cB_1 & 0 \end{bmatrix} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 \left(\gamma^2(x-vt)^2 + y^2 + z^2\right)^{3/2}} \begin{bmatrix} 0 & \gamma(x-vt) & \gamma y & \gamma z \\ -\gamma(x-vt) & 0 & \gamma\beta y & \gamma\beta z \\ -\gamma y & -\gamma\beta y & 0 & 0 \\ -\gamma z & -\gamma\beta z & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Από την παραπάνω εξίσωση υπολογίζουμε τις συνιστώσες των πεδίων.

<u>Παρατήρηση</u>

Θέτουμε $\vec{r}$ το διάνυσμα θέσης του σημείου Σ στο οποίο υπολογίζουμε τις εντάσεις των δύο πεδίων, $\vec{r}_q$ το διάνυσμα θέσης του φορτίου την χρονική στιγμή t και $\vec{R}$ το διάνυσμα με αρχή το σημείο που βρίσκεται το φορτίο την στιγμή t και πέρας το σημείο Σ.



Προφανώς είναι : $\vec{r} = x\hat{e}_1 + y\hat{e}_2 + z\hat{e}_3$, $\vec{r}_q = vt\hat{e}_1$ και

$$\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}_q = (x - vt)\hat{e}_1 + y\hat{e}_2 + z\hat{e}_3$$

Θέτουμε $w = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 \left(\gamma^2(x-vt)^2 + y^2 + z^2\right)^{3/2}}$

Το διάνυσμα της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου είναι:

$$\vec{E} = E_1\hat{e}_1 + E_2\hat{e}_2 + E_3\hat{e}_3 = w\gamma\left((x - vt)\hat{e}_1 + y\hat{e}_2 + z\hat{e}_3\right) \Rightarrow \vec{E} = \gamma w\vec{R}$$

Για το μαγνητικό πεδίο έχουμε ότι

$$c\vec{B} = cB_1\hat{e}_1 + cB_2\hat{e}_2 + cB_3\hat{e}_1 = w\gamma\beta(-z\hat{e}_2 + y\hat{e}_3)$$

Για το εξωτερικό γινόμενο $\vec{\beta}x\vec{R}$ έχουμε: $\vec{\beta}x\vec{R} = \begin{vmatrix} \hat{e}_1 & \hat{e}_2 & \hat{e}_3 \\ \beta & 0 & 0 \\ x - vt & y & z \end{vmatrix} = \beta(-z\hat{e}_2 + y\hat{e}_3)$

Επομένως: $c\vec{B} = \gamma w\vec{\beta}x\vec{R}$

Για τον παρονομαστή του w έχουμε:

$$\gamma^2(x - vt)^2 + y^2 + z^2 = \gamma^2(x - vt)^2 - (x - vt)^2 + (x - vt)^2 + y^2 + z^2 = (\gamma^2 - 1)(x - vt)^2 + R^2 \Rightarrow$$

$$\gamma^2(x-vt)^2+y^2+z^2=\frac{\gamma^2 v^2(x-vt)^2}{c^2}+R^2=\frac{\gamma^2}{c^2}(\vec{R}.\vec{v})^2+R^2$$

Επομένως

$$w=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0\left(\frac{\gamma^2}{c^2}(\vec{R}.\vec{v})^2+R^2\right)^{3/2}}$$

Τέλικά έχουμε για τα πεδία

$$\vec{E}=\frac{\gamma q\vec{R}}{4\pi\varepsilon_0\left(\frac{\gamma^2}{c^2}(\vec{R}.\vec{v})^2+R^2\right)^{3/2}}$$

$$\vec{B}=\frac{\gamma}{c^2}w\vec{v}x\vec{R}\Rightarrow\vec{B}=\frac{\gamma q}{4\pi\varepsilon_0 c^2\left(\frac{\gamma^2}{c^2}(\vec{R}.\vec{v})^2+R^2\right)^{3/2}}\vec{v}x\vec{R}\Rightarrow\vec{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\gamma q\,\vec{v}x\vec{R}}{\left(\frac{\gamma^2}{c^2}(\vec{R}.\vec{v})^2+R^2\right)^{3/2}}$$

Στο όριο των μικρών ταχυτήτων ($\frac{v}{c}<<1$) είναι $\gamma\simeq 1$ και $\frac{\gamma^2}{c^2}(\vec{R}.\vec{v})^2+R^2\simeq R^2$

Επομένως $\vec{E}\simeq\frac{q\vec{R}}{4\pi\varepsilon_0 R^3}$ και $\vec{B}\simeq\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q\,\vec{v}x\vec{R}}{R^3}$

Ο γενικός νόμος μετασχηματισμού των πεδίων είναι το αντικείμενο της επόμενης:

<u>Πρόταση</u>

Θεωρούμε ένα χωροχρονικό σημείο στο οποίο υπάρχει ένα ηλεκτρομαγνητικού πεδίου.
Θεωρούμε επίσης ένα τυχαίο ΑΣΑ Ο.
Έστω ότι την στιγμή x^0 στην θέση $\vec{x}$ οι εντάσεις του Ηλεκτρικού και του Μαγνητικού πεδίου είναι $\vec{E}$, $\vec{B}$.
Θεωρούμε έναν παρατηρητή Ο΄ που κινείται με ταχύτητα $\vec{v}$ ως προς τον Ο. Θα δείξουμε ότι το ηλεκτρικό και το μαγνητικό πεδίο που μετρά ο Ο΄ δίνονται από τις σχέσεις:

$\vec{E}'_{//}=\vec{E}_{//}$	$\vec{B}'_{//}=\vec{B}_{//}$
$\vec{E}'_{\perp}=\gamma(\vec{E}_{\perp}+\vec{v}\,x\,\vec{B}_{\perp})$	$\vec{B}'_{\perp}=\gamma(\vec{B}_{\perp}-\frac{1}{c^2}\vec{v}\,x\vec{E}_{\perp})$

Όπου $\vec{E}_{//}$, $\vec{B}_{//}$ οι συνιστώσες των δύο πεδίων που είναι παράλληλες στην ταχύτητα του μετασχηματισμού και $\vec{E}_{\perp},\vec{B}_{\perp}$ οι συνιστώσες των δύο πεδίων που είναι κάθετες στην ταχύτητα του μετασχηματισμού.

<u>Απόδειξη</u>

Δίχως βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι η κίνηση του παρατηρητή γίνεται κατά τον άξονα x.
Έτσι η αντίστοιχη προώθηση Lorentz είναι

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Επειδή ο $F^{\mu\nu}$ είναι τανυστής έχουμε:

$$F'^{\mu\nu} = L^{\mu}{}_{\alpha} L^{\nu}{}_{\beta} F^{\alpha\beta} \Rightarrow F' = \Lambda F \Lambda^{T} \Rightarrow$$

$$F' = \begin{bmatrix} 0 & E_1 & \gamma(E_2 - \beta c B_3) & \gamma(E_3 + \beta c B_2) \\ -E_1 & 0 & -\gamma(\beta E_2 - c B_3) & -\gamma(\beta E_3 + c B_2) \\ -\gamma(E_2 - \beta c B_3) & \gamma(\beta E_2 - c B_3) & 0 & c B_1 \\ -\gamma(E_3 + \beta c B_2) & \gamma(\beta E_3 + c B_2) & -c B_1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$E'_1 = E_1 \qquad (\text{ΜΠ } 1)$$

$$E'_2 = \gamma(E_2 - \beta c B_3) \qquad (\text{ΜΠ } 2)$$

$$E'_3 = \gamma(E_3 + \beta c B_2) \qquad (\text{ΜΠ } 3)$$

$$cB'_1 = cB_1 \qquad (\text{ΜΠ } 4)$$

$$cB'_2 = \gamma(\beta E_3 + c B_2) \qquad (\text{ΜΠ } 5)$$

$$cB'_3 = \gamma(c B_3 - \beta E_2) \qquad (\text{ΜΠ } 6)$$

Οι παραπάνω νόμοι μετασχηματισμού των πεδίων μπορούν να πάρουν πιο γενική μορφή αν παρατηρήσουμε τα εξής :

Α) Οι 1 συνιστώσες των πεδίων είναι οι συνιστώσες των πεδίων που είναι παράλληλες στην ταχύτητα του μετασχηματισμού. Επομένως οι σχέσεις (ΜΠ 1) και (ΜΠ 4) μπορούν να γραφούν ως:

$$\vec{E}'_{//} = \vec{E}_{//} \text{ και } \vec{B}'_{//} = \vec{B}_{//}$$

Β) Αν $\hat{e}_1$, $\hat{e}_2$, $\hat{e}_3$ είναι τα μοναδιαία διανύσματα στους τρεις άξονες τότε:

$$\vec{\beta} \, x \, \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \beta & 0 & 0 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix} = -\beta B_3 \vec{e}_2 + \beta B_2 \vec{e}_3 \qquad \text{και} \qquad \vec{\beta} \, x \, \vec{E} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \beta & 0 & 0 \\ E_1 & E_2 & E_3 \end{vmatrix} = -\beta E_3 \vec{e}_2 + \beta E_2 \vec{e}_3$$

Για τις κάθετες στην ταχύτητα του μετασχηματισμού συνιστώσες των δύο πεδίων έχουμε:

$$\vec{E}'_{\perp} = E'_2 \vec{e}_2 + E'_3 \vec{e}_3 = \gamma(E_2 \vec{e}_2 - \beta c B_3 \vec{e}_2 + E_3 \vec{e}_3 + \beta c B_2 \vec{e}_3) = \gamma(\vec{E}_{\perp} + c\vec{\beta} \, x \, \vec{B}) \Rightarrow \vec{E}'_{\perp} = \gamma(\vec{E}_{\perp} + \vec{v} \, x \, \vec{B})$$

$$c\vec{B}'_{\perp} = cB'_2 \vec{e}_2 + cB'\vec{e}_3 = \gamma(\beta E_3 \vec{e}_2 + c B_2 \vec{e}_2 - \beta E_2 \vec{e}_3 + c B_3 \vec{e}_3) = \gamma(c\vec{B}_{\perp} - \vec{\beta} \, x \, \vec{E}) \Rightarrow \vec{B}'_{\perp} = \gamma(\vec{B}_{\perp} - \frac{1}{c^2} \vec{v} \, x \vec{E})$$

Επειδή $\vec{E} = \vec{E}_{//} + \vec{E}_{\perp}$ και $\vec{v} \, x \, \vec{E}_{//} = 0$ θα είναι $\vec{v} \, x \, \vec{E} = \vec{v} \, x \, \vec{E}_{\perp}$.

Επομένως μπορούμε να γράψουμε για τον νόμο μετασχηματισμού των πεδίων:

$$\vec{E}'_{//} = \vec{E}_{//} \qquad \vec{B}'_{//} = \vec{B}_{//}$$

$$\vec{E}'_{\perp} = \gamma(\vec{E}_{\perp} + \vec{v} \, x \, \vec{B}_{\perp}) \qquad \vec{B}'_{\perp} = \gamma(\vec{B}_{\perp} - \frac{1}{c^2} \vec{v} \, x \vec{E}_{\perp})$$

Εφαρμογή

Θεωρούμε ένα χωροχρονικό σημείο στο οποίο υπάρχει ένα Ηλεκτρομαγνητικού πεδίου. Θα δείξουμε ότι υπάρχει πάντα μετασχηματισμός Lorentz έτσι ώστε στο σύστημα συντεταγμένων που ορίζει, η ένταση του ηλεκτρικού και του μαγνητικού πεδίου στο σημείο αυτό να είναι παράλληλες..
(Υποθέτουμε ότι δεν μελετάμε την περίπτωση που E=0 (πχ μαγνητοστατική) ή B=0 (πχ ηλεκτροστατική) ή $\vec{B} \perp \vec{E}$ και ταυτόχρονα E=cB (πχ επίπεδα κύματα)

Απόδειξη

Έστω $\vec{v}$ η ταχύτητα του μετασχηματισμού. Θα δείξουμε ότι υπάρχει διάνυσμα $\vec{v}$ κάθετο και στην ένταση του ηλεκτρικού πεδίου και στην ένταση του μαγνητικού πεδίου με την ιδιότητα που θέλουμε.
Για να είναι η ταχύτητα κάθετη και στα δύο πεδία θα πρέπει να είναι ανάλογη με το εξωτερικό τους γινόμενο. Αναζητούμε λοιπόν αριθμό λ έτσι ώστε $\vec{v} = \lambda \vec{E} \times \vec{B}$

Επειδή $\vec{v} \perp \vec{E} \Rightarrow \vec{E}_{//} = 0 \Rightarrow \vec{E}_{\perp} = \vec{E}$. Ομοίως $\vec{B}_{//} = 0$ και $\vec{B}_{\perp} = \vec{B}$

Για τις εντάσεις στο νέο σύστημα συντεταγμένων έχουμε:
$$\vec{E}' = \vec{E}'_{//} + \vec{E}'_{\perp} = \vec{E}_{//} + \gamma(\vec{E}_{\perp} + \vec{v} \times \vec{B}_{\perp}) \Rightarrow \vec{E}' = \gamma(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$
ομοίως $\vec{B}' = \gamma(\vec{B} - \frac{1}{c^2} \vec{v} \times \vec{E})$

Για να είναι τα πεδία στο νέο σύστημα συντεταγμένων παράλληλα μεταξύ τους θα πρέπει:
$$\vec{E}' \times \vec{B}' = 0 \Rightarrow (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \times (c^2\vec{B} - \vec{v} \times \vec{E}) = 0 \qquad (1)$$
Κάνοντας χρήση της ταυτότητας $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = (\vec{a}.\vec{c})\vec{b} - (\vec{b}.\vec{c})\vec{a}$ μπορούμε να υπολογίσουμε τα γινόμενα $\vec{v} \times \vec{E}$ και $\vec{v} \times \vec{B}$
$$\vec{v} \times \vec{E} = \lambda(\vec{E} \times \vec{B}) \times \vec{E} = \lambda E^2\vec{B} - \lambda(\vec{E}.\vec{B})\vec{E}$$
$$\vec{v} \times \vec{B} = \lambda(\vec{E} \times \vec{B}) \times \vec{B} = \lambda(\vec{E}.\vec{B})\vec{B} - \lambda B^2\vec{E}$$
Αντικαθιστούμε στην (1) :
$$(\vec{E} + \lambda(\vec{E}.\vec{B})\vec{B} - \lambda B^2\vec{E}) \times (c^2\vec{B} - \lambda E^2\vec{B} + \lambda(\vec{E}.\vec{B})\vec{E}) = 0 \Rightarrow$$
$$\left(c^2 - \lambda E^2 - \lambda^2(\vec{E}.\vec{B})^2 - \lambda c^2B^2 + \lambda^2E^2B^2\right)\vec{E} \times \vec{B} = 0 \Rightarrow$$
$$\left(E^2B^2 - (\vec{E}.\vec{B})^2\right)\lambda^2 - (E^2 + c^2B^2)\lambda + c^2 = 0 \qquad (2)$$
Έστω φ η γωνία των $\vec{E}$ και $\vec{B}$. Τότε $E^2B^2 - (\vec{E}.\vec{B})^2 = E^2B^2 - E^2B^2\cos^2\phi = E^2B^2\sin^2\phi$

Η (2) γίνεται: $E^2B^2\sin^2\phi\,\lambda^2 - (E^2 + c^2B^2)\lambda + c^2 = 0$ (3)

Η διακρίνουσα της (3) είναι:
$$\Delta = (E^2 + c^2B^2)^2 - 4c^2E^2B^2\sin^2\phi \geq (E^2 + c^2B^2)^2 - 4c^2E^2B^2 = (E^2 - c^2B^2)^2 \geq 0$$
Το γινόμενο των ριζών είναι $P = \dfrac{c^2}{E^2B^2\sin^2\phi} > 0$

Και το άθροισμά τους $S = \dfrac{(E^2 + c^2B^2)}{E^2B^2\sin^2\phi} > 0$

Επομένως εκτός από την περίπτωση που $\vec{E} \perp \vec{B}$ $(\sin\phi = 1)$ και $E = cB$ η εξίσωση (3) έχει δύο ρίζες θετικές διάφορες μεταξύ τους.

Επειδή $\vec{v} = \lambda \vec{E} \times \vec{B} \Rightarrow |\vec{v}| = |\lambda| |\vec{E} \times \vec{B}| = \lambda EB \sin\phi$

Για να δείξουμε ότι $|\vec{v}| < c \Rightarrow \lambda < \dfrac{c}{EB\sin\phi}$

Θέτουμε $\phi(z) = E^2 B^2 \sin^2\phi\, z^2 - (E^2 + c^2 B^2) z + c^2$ και έχουμε:

$$\phi\left(\frac{c}{EB\sin\phi}\right) = 2c^2 - \frac{c(E^2 + c^2B^2)}{EB\sin\phi} = \frac{c}{EB\sin\phi}(2cBE\sin\phi - E^2 - c^2B^2) < 0$$

Επομένως η ποσότητα $\dfrac{c}{EB\sin\phi}$ είναι μεταξύ των ριζών άρα μόνο για την μία ρίζα ισχύει:

$$\lambda < \frac{c}{EB\sin\phi} \Rightarrow |\vec{v}| < c$$

6.5. Τα αναλλοίωτα του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου

Για να είναι μια παράσταση αναλλοίωτο του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου θα πρέπει να είναι τανυστής μηδενικής τάξης. Επομένως θα πρέπει να είναι μια παράσταση του $F^{\mu\nu}$ και των σταθερών τανυστών $\eta^{\mu\nu}$ και $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ «χωρίς δείκτες».
Επομένως αναλλοίωτα του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου είναι οι ποσότητες

$$F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}\,,\ \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}F_{\alpha\beta}F_{\gamma\delta}\,,\ F^{\alpha\beta}F_{\beta\gamma}F^{\gamma}{}_{\alpha}\,, F^{\alpha\beta}F_{\beta\gamma}F^{\gamma\delta}F_{\delta\alpha} \ \text{κλπ}$$

Θα υπολογίσουμε τα δύο πρώτα από αυτά.
Για το πρώτο έχουμε:

$$F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} = F^{0i}F_{0i} + F^{i0}F_{i0} + F^{ij}F_{ij} = 2(F^{01}F_{01} + F^{02}F_{02} + F^{03}F_{03} + F^{12}F_{12} + F^{13}F_{13} + F^{23}F_{23}) = 2(c^2B^2 - E^2)$$

Για τον υπολογισμό του δεύτερου έχουμε να παρατηρήσουμε το εξής: Αν κάποιος από τους δείκτες α,β,γ,δ πάρει την τιμή 0 τότε οι υπόλοιποι πρέπει να πάρουν τιμές διάφορες του μηδέν. Επομένως

$$\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}F_{\alpha\beta}F_{\gamma\delta} = \varepsilon^{0ijk}F_{0i}F_{jk} + \varepsilon^{i0jk}F_{i0}F_{jk} + \varepsilon^{ij0k}F_{ij}F_{0k} + \varepsilon^{ijk0}F_{ij}F_{k0}$$

Όμως χρησιμοποιώντας την αντισυμμτρική ιδιότητα των ε και F και αλλάζοντας τα ονόματα των δεικτών έχουμε:

$$\varepsilon^{i0jk}F_{i0}F_{jk} = \varepsilon^{0ijk}F_{0i}F_{jk}$$

$$\varepsilon^{ij0k}F_{ij}F_{0k} = \varepsilon^{kj0i}F_{kj}F_{0i} = \varepsilon^{jk0i}F_{jk}F_{0i} = \varepsilon^{0ijk}F_{0i}F_{jk}$$

$$\varepsilon^{ijk0}F_{ij}F_{k0} = \varepsilon^{kji0}F_{kj}F_{i0} = \varepsilon^{jki0}F_{jk}F_{i0} = \varepsilon^{0ijk}F_{0i}F_{jk}$$

Επομένως

$$\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}F_{\alpha\beta}F_{\gamma\delta} = 4\varepsilon^{0ijk}F_{0i}F_{jk} = 4(\varepsilon^{0123}F_{01}F_{23} + \varepsilon^{0213}F_{02}F_{13} + \varepsilon^{0312}F_{03}F_{12}) = 4c(E_1B_1 + E_2B_2 + E_3B_3) = 4c\vec{E}.\vec{B}$$

Προφανώς τα δύο παραπάνω αναλλοίωτα είναι (εν γένει) συναρτησιακώς ανεξάρτητα.
Τίθεται όμως το εξής ερώτημα: Ποιο είναι το μέγιστο πλήθος των (συναρτησιακώς) ανεξαρτήτων αναλλοιώτων;
Η απάντηση στο ερώτημα αυτό είναι:

Τα συναρτησιακώς ανεξάρτητα αναλλοίωτα του ηλεκτρομανητικού πεδίου είναι το πολύ δύο.

<u>Απόδειξη</u>

Θεωρούμε τον μετασχηματισμό Lorentz της προηγούμενης εφαρμογής. Στο σύστημα συντεταγμένων που ορίζει τα Ε και Β είναι παράλληλα. Με κατάλληλη στροφή του συστήματος συντεταγμένων το προσαρμόζουμε έτσι ώστε τα Ε και Β να έχουν την διεύθυνση του άξονα x.
Στο νέο σύστημα συντεταγμένων είναι:

$$F^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & E & 0 & 0 \\ -E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & cB \\ 0 & 0 & -cB & 0 \end{bmatrix}$$

Τα δύο αναλλοίωτα ας τα ονομάσουμε ξ και θ θα είναι :

$$\xi = F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} = 2(c^2B^2 - E^2)$$

$$\theta = \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}F_{\alpha\beta}F_{\gamma\delta} = 4cEB$$

Λύνοντας το σύστημα των 2 παραπάνω εξισώσεων μπορούμε (στο σύστημα συντεταγμένων που εργαζόμαστε) να εκφράσουμε τα Ε και Β συναρτήσει των ξ και θ.
Αν υπολογίσουμε οποιοδήποτε άλλο αναλλοίωτο θα είναι συνάρτηση των Ε και Β και επομένως και των ξ και θ.
Σαν παράδειγμα αναφέρουμε το αναλλοίωτο

$$\rho = F^{\alpha\beta}F_{\beta\gamma}F^{\gamma\delta}F_{\delta\alpha}$$

Στο ειδικό σύστημα που εργαζόμαστε μπορεί εύκολα να υπολογιστεί:

$$\rho = 2(E^4 + B^4c^4) = 2\left((E^2 - c^2B^2)^2 + 2(cEB)^2\right) = \frac{2\xi^2 + \theta^2}{4}$$

Όμως τα αναλλοίωτα είναι αμετάβλητα κάτω από μετασχηματισμούς Lorentz.

Επομένως η σχέση $\rho = \dfrac{2\xi^2 + \theta^2}{4}$ αφού ισχύει σε ένα σύστημα συντεταγμένων ισχύει σε όλα.

6.6. Σύνοψη και τυπολόγιο

- Οι εξισώσεις του ηλεκτρομαγνητισμού (εξισώσεις του Maxwell) είναι εξισώσεις τανυστών ως προς μετασχηματισμούς Lorentz. Οι εξισώσεις του Maxwell μπορούν να γραφούν στην ισοδύναμη μορφή

  $$\frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x^{\nu}} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\, J^{\mu}$$

  και

  $$\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}\frac{\partial F_{\beta\gamma}}{\partial x^{\delta}} = 0$$

- Το πρώτο μέλος των εξισώσεων είναι ο ηλεκτρομαγνητικός τανυστής , ο οποίος είναι ένας αντισυμμετρικός τανυστής δευτέρας τάξης που κατασκευάζεται από τα πεδία (ηλεκτρικό και μαγνητικό):

  $$F^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & E_1 & E_2 & E_3 \\ -E_1 & 0 & cB_3 & -cB_2 \\ -E_2 & -cB_3 & 0 & cB_1 \\ -E_3 & cB_2 & -cB_1 & 0 \end{bmatrix}$$

- Το δεύτερο μέλος των εξισώσεων είναι ένα ανταλλοίωτο τετράνυσμα που κατασκευάζεται από την πυκνότητα φορτίου και ρεύματος:

  $$J^{\alpha}(x) = \begin{bmatrix} c\,\rho(x) \\ \vec{J}(x) \end{bmatrix}$$

- Χρησιμοποιώντας τον νόμο μετασχηματισμού του τανυστή F μπορούμε να βρούμε τον νόμο μετασχηματισμού των πεδίων κάτω από προώθηση Lorentz.

  $$\vec{E}'_{//} = \vec{E}_{//} \qquad \vec{B}'_{//} = \vec{B}_{//}$$

  $$\vec{E}'_{\perp} = \gamma(\vec{E}_{\perp} + \vec{v}\,x\,\vec{B}_{\perp}) \qquad \vec{B}'_{\perp} = \gamma(\vec{B}_{\perp} - \frac{1}{c^2}\vec{v}\,x\vec{E}_{\perp})$$

  Όπου $\vec{E}_{//}$, $\vec{B}_{//}$ οι συνιστώσες των δύο πεδίων που είναι παράλληλες στην ταχύτητα του μετασχηματισμού και $\vec{E}_{\perp}, \vec{B}_{\perp}$ οι συνιστώσες των δύο πεδίων που είναι κάθετες στην ταχύτητα του μετασχηματισμού.

- Τα ανεξάρτητα αναλλοίωτα του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου είναι το πολύ 2. Σαν ανεξάρτητα αναλλοίωτα μπορούν να ληφθούν τα

  $$F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} = 2(c^2B^2 - E^2)$$

  $$\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}F_{\alpha\beta}F_{\gamma\delta} = 4cEB$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7.
ΣΧΕΤΙΚΙΣΤΙΚΗ ΔΥΝΑΜΙΚΗ

7.1. Γενικά

Μέχρι τώρα μελετήσαμε την κίνηση ενός σώματος μόνο «κινηματικά».
Λείπει η εξίσωση που θα προσδιορίζει την κίνηση ενός σώματος αν είναι γνωστό το αίτιο που την προκάλεσε. Ποια είναι η εξίσωση που θα αντικαταστήσει τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα;
Στην κλασσική μηχανική ο ρυθμός μεταβολής της ορμής ενός σώματος και η δύναμη που δέχονται συνδέονται με την σχέση $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \Rightarrow F^i = \frac{dp^i}{dt}$

Στην ειδική θεωρία της σχετικότητας ορίζουμε την έννοια της **τετραδύναμης $\mathbf{f^{\mu}}$** μέσω της σχέσης

$$f^{\mu} = \frac{dp^{\mu}}{d\tau} \tag{7.1.1.}$$

Η σχέση (7.1.1) μπορεί να πάρει ισοδύναμη μορφή στην οποία να υπεισέρχονται χρονικές παραγωγίσεις ως εξής:

$$\frac{dp^{\mu}}{d\tau} = \frac{dp^{\mu}}{dt}\frac{dt}{d\tau} = \gamma\frac{dp^{\mu}}{dt} = \gamma\begin{bmatrix} \frac{dp^0}{dt} \\ \frac{d\vec{p}}{dt} \end{bmatrix} = \gamma\begin{bmatrix} mc\frac{d\gamma}{dt} \\ m\frac{d(\gamma\vec{v})}{dt} \end{bmatrix} = m\gamma\begin{bmatrix} c\frac{d\gamma}{dt} \\ \frac{d(\gamma\vec{v})}{dt} \end{bmatrix} = m\gamma\begin{bmatrix} c\frac{d\gamma}{dt} \\ \frac{d\gamma}{dt}\vec{v} + \gamma\frac{d\vec{v}}{dt} \end{bmatrix}$$

Η χρονική παράγωγος του γ έχει υπολογιστεί στην παράγραφο 4.4 για την τετραεπιτάχυνση:

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{\gamma^3}{c^2}\vec{\upsilon}.\vec{a}$$

Επομένως η σχετικιστική εξίσωση κίνησης γίνεται:

$$f^{\mu} = m\gamma\begin{bmatrix} \frac{\gamma^3}{c}(\vec{v}.\vec{a}) \\ \frac{\gamma^3}{c^2}(\vec{v}.\vec{a})\vec{v} + \gamma\vec{a} \end{bmatrix} \tag{7.1.2.}$$

Πως όμως μπορούμε να υπολογίσουμε την τετραδύναμη που δέχεται ένα σωματίδιο;
Ας υποθέσουμε ότι σε ένα ΑΣΑ Ο, κάποια χρονική στιγμή t_0 το σωματίδιο έχει ταχύτητα $\vec{\upsilon}_0$.
Θεωρούμε ένα νέο σύστημα συντεταγμένων Ο΄, το οποίο ορίζεται μέσω της σχέσης

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu}(\vec{\upsilon}_0)x^{\nu} \tag{7.1.3.}$$

Στο σύστημα αυτό (στιγμιαίο σύστημα ηρεμίας) θεωρούμε την τετράδα

$$f'^{\mu} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vec{F} \end{bmatrix} \tag{7.1.4.}$$

όπου $\vec{F}$ η *μη σχετικιστική* δύναμη που δέχεται το σωματίδιο. Ανακηρύσσουμε την τετράδα f'^{μ} σε τετράνυσμα και επομένως στο σύστημα Ο έχουμε:

$$f^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu}(-\vec{\upsilon})f'^{\nu} \tag{7.1.5.}$$

Μπορούμε να εκφράσουμε την τετραδύναμη f συναρτήσει της δύναμης F που δέχεται στο τοπικό σύστημα ηρεμίας και της στιγμιαίας ταχύτητας υ ως εξής:

Είναι $\Lambda(-\vec{\upsilon}) = \begin{bmatrix} \gamma & \gamma\beta^T \\ \gamma\beta & I + \dfrac{\gamma-1}{|\vec{\beta}|^2}\beta\beta^T \end{bmatrix}$

Επομένως:

$$f = \begin{bmatrix} \gamma & \gamma\beta^T \\ \gamma\beta & I + \dfrac{\gamma-1}{|\vec{\beta}|^2}\beta\beta^T \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma\beta^T F \\ F + \dfrac{\gamma-1}{|\vec{\beta}|^2}\beta\beta^T F \end{bmatrix} \Rightarrow f = \begin{bmatrix} \dfrac{\gamma(\vec{\upsilon}\vec{F})}{c} \\ \vec{F} + \dfrac{\gamma-1}{|\vec{\upsilon}|^2}(\vec{\upsilon}\vec{F})\vec{\upsilon} \end{bmatrix} \qquad (7.1.6.)$$

Ο συνδυασμός των (7.1.2) και (7.1.6) είναι η διαφορική εξίσωση που θα προσδιορίσει την κίνηση του σωματιδίου.

<u>Παράδειγμα :</u>

Θεωρούμε ένα ομογενές πεδίο βαρύτητας έντασης g κατά την θετική κατεύθυνση του άξονα x . Ένα υλικό σημείο μάζας m αφήνεται την χρονική στιγμή t=0 να κινηθεί χωρίς αρχική ταχύτητα. Να βρείτε την ταχύτητά του συναρτήσει του χρόνου.

<u>Λύση</u>

Έστω τυχαία χρονική στιγμή στην οποία το σωματίδιο έχει ταχύτητα υ. Στο τοπικό σύτημα ηρεμίας Ο΄ του σωματιδίου η μη σχετικιστική δύναμη που δέχεται είναι F=mg.
Επομένως στο Ο΄ η τετραδύναμη που δέχεται είναι:

$$f'^{\mu} = \begin{bmatrix} 0 \\ mg \end{bmatrix}$$

Στο σύστημα εργαστηρίου έχουμε:

$$f^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu}(-\vec{\upsilon})f'^{\nu} \Rightarrow f = \Lambda(-\upsilon)f' \Rightarrow f = \begin{bmatrix} \gamma & \gamma\dfrac{\upsilon}{c} \\ \gamma\dfrac{\upsilon}{c} & \gamma \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ mg \end{bmatrix} = \gamma m\begin{bmatrix} \dfrac{\upsilon}{c}g \\ g \end{bmatrix}$$

Η διαφορική εξίσωση της κίνησης γίνεται:

$$\gamma m\begin{bmatrix} \dfrac{\upsilon}{c}g \\ g \end{bmatrix} = m\gamma\begin{bmatrix} \dfrac{\gamma^3}{c}(\vec{\upsilon}.\vec{a}) \\ \dfrac{\gamma^3}{c^2}(\vec{\upsilon}.\vec{a})\vec{\upsilon} + \gamma\vec{a} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} g = \gamma^3 a \\ g = \dfrac{\gamma^3}{c^2}\upsilon^2 a + \gamma a \end{matrix}$$

Εύκολα φαίνεται ότι η δεύτερη εξίσωση είναι ισοδύναμη με την πρώτη και επομένως μοναδική εξίσωση κίνησης είναι η:

$$g = \gamma^3 a \Leftrightarrow g = (1-\frac{\upsilon^2}{c^2})^{-3/2}\frac{d\upsilon}{dt} \Leftrightarrow (1-\frac{\upsilon^2}{c^2})^{-3/2}d\upsilon = gdt \Leftrightarrow \int_0^{\upsilon}(1-\frac{\upsilon^2}{c^2})^{-3/2}d\upsilon = \int_0^t gdt \Rightarrow$$

$$(1-\frac{\upsilon^2}{c^2})^{-1/2}\upsilon = gt \Rightarrow \upsilon(t) = \frac{cgt}{\sqrt{c^2+g^2t^2}}$$

Παρατήρηση

Παρατηρούμε ότι $\lim\limits_{t\to\infty} \upsilon(t) = c$. Επομένως η κίνηση είναι (όχι ομαλά) επιταχυνόμενη με οριακή τιμή την ταχύτητα του φωτός. Η αντίστοιχη κλασσική εξίσωση της ταχύτητας θα ήταν υ=gt και επομένως σε πεπερασμένο χρόνο η ταχύτητα του σωματιδίου θα μπορούσε να ξεπεράσει την ταχύτητα του φωτός.

7.2. Εφαρμογή (τετραδύναμη Lorentz)

Θεωρούμε ένα φορτισμένο σωματίδιο που κινείται (ως προς κάποιο σύστημα αναφοράς O) σε κάποιο ηλεκτρομαγνητικό πεδίο. Ζητάμε να υπολογίσουμε την τετραδύναμη Lorentz που δέχεται.
Αν θυμηθούμε την κλασσική σχέση που δίνει την δύναμη Lorentz $\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v}x\vec{B})$, η τετραδύναμη θα πρέπει να είναι ανάλογη με τις εντάσεις των πεδίων και επομένως ανάλογη με τον ηλεκτρομαγνητικό τανυστή. Επίσης θα πρέπει να είναι ανάλογη με την ταχύτητα του σωματιδίου. Τέλος θα πρέπει να είναι τετράνυσμα.. Το μόνο τετράνυσμα που μπορούμε να γράψουμε με τις παραπάνω ιδιότητες είναι ο συνδυασμός $F^{\alpha\beta}u_\beta$.
Θα αποδείξουμε την εξής

Πρόταση

Η τετραδύναμη Lorentz που δέχεται ένα φορτισμένο σωματίδιο δίνεται από την σχέση:

$$f^\alpha = \frac{q}{c} F^{\alpha\beta} u_\beta \tag{7.2.1.}$$

Απόδειξη

Θεωρούμε το τοπικό σύστημα ηρεμίας O΄ του σωματιδίου. Στο σύστημα αυτό η μη σχετικιστική δύναμη που δέχεται το σωματίδιο είναι η δύναμη του ηλεκτρικού πεδίου $\vec{F} = \vec{E}q$
Επομένως η τετραδύναμη στο O΄ είναι:

$$f' = \begin{bmatrix} 0 \\ E'q \end{bmatrix}$$

Το ανταλλοίωτο τετράνυσμα της τετραταχύτητας είναι $U' = \begin{bmatrix} \gamma' c \\ \gamma' \vec{v}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c \\ 0 \end{bmatrix}$

Το αντίστοιχο συναλλοίωτο $U'_{\sigma\upsilon\nu}$ δίνεται από την σχέση

$$u'_\mu = \eta_{\mu\nu} u'^\nu \Rightarrow U'_{\sigma\upsilon\nu} = \eta U' \Rightarrow U'_{\sigma\upsilon\nu} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -c \\ 0 \end{bmatrix}$$

Επομένως ο συνδυασμός $\frac{q}{c} F^{\alpha\beta} u_\beta$ είναι το (ανταλλοίωτο) τετράνυσμα:

$$\frac{q}{c} \begin{bmatrix} 0 & E'^T \\ -E' & F_B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -c \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ qE' \end{bmatrix} = f'$$

Επομένως $f'^\mu = \frac{q}{c} F'^{\alpha\beta} u'_\beta$. Και επειδή η εξίσωση αυτή είναι εξίσωση τανυστών που ισχύσει σε ένα σύστημα συντεταγμένων, ισχύει σε κάθε σύστημα συντεταγμένων. ■

Γνωρίζοντας την τετραδύναμη Lorentz που δέχεται το σωματίδιο μπορούμε να γράψουμε την εξίσωση κίνησής του:

$$\frac{dp^{\mu}}{d\tau}=f^{\mu}\Rightarrow\frac{dp^{\mu}}{d\tau}=\frac{q}{c}F^{\mu\nu}u_{\nu}\qquad(7.2.2.)$$

Η (7.2.2) μπορεί να πάρει μια πιο εύχρηστη μορφή στην οποία να υπεισέρχονται χρονικές παράγωγοι

Συγκεκριμένα θα αποδείξουμε την εξής

<u>Πρόταση</u>

Η εξίσωση κίνησης ενός φορτισμένου σωματιδίου σε ηλεκτρομαγνητικό πεδίο είναι:

$$\frac{d\vec{p}}{dt}=q(\vec{E}+\vec{v}x\vec{B})\qquad(7.2.3.)$$

<u>Απόδειξη</u>

$\frac{d\vec{p}}{dt}=\frac{d\vec{p}}{d\tau}\frac{d\tau}{dt}=\frac{1}{\gamma}\vec{f}$ όπου γ=γ(v) και $\vec{f}$ η χωρική συνιστώσα της τετραδύναμης.

Υπολογίζουμε την τετραδύναμη f

$$f^{\mu}=\frac{q}{c}F^{\mu\nu}u_{\nu}\Rightarrow\begin{bmatrix}f^0\\f^1\\f^2\\f^3\end{bmatrix}=\frac{q}{c}\begin{bmatrix}0 & E_1 & E_2 & E_3\\-E_1 & 0 & cB_3 & -cB_2\\-E_2 & -cB_3 & 0 & cB_1\\-E_3 & cB_2 & -cB_1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-\gamma c\\\gamma v_1\\\gamma v_2\\\gamma v_3\end{bmatrix}=\frac{\gamma q}{c}\begin{bmatrix}E_1v_1+E_2v_2+E_3v_3\\c(E_1+B_3v_2-B_2v_3)\\c(E_2+B_1v_3-B_3v_1)\\c(E_1+B_2v_1-B_1v_2)\end{bmatrix}\Rightarrow$$

Επομένως η χωρική συνιστώσα της τετραδύναμης είναι

$$\vec{f}=q(\vec{E}+\vec{v}x\vec{B})$$

Αντικαθιστώντας στην εξίσωση κίνησης $\frac{d\vec{p}}{dt}=\frac{1}{\gamma}\vec{f}$ έχουμε $\frac{d\vec{p}}{dt}=q(\vec{E}+\vec{v}x\vec{B})$ ■

7.3. Σύνοψη και τυπολόγιο

- Η δυναμική εξίσωση που περιγράφει σχετικιστικά την κίνηση ενός υλικού σημείου είναι η σχέση

$$m\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} = f^\mu$$

όπου $\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2}$ η τετραεπιτάχυνση του υλικού σημείου και f^μ η τετραδύναμη που δέχεται.

- Η τετραεπιτάχυνση συνδέεται με την επιτάχυνση και την ταχύτητα και την επιτάχυνση του υλικού σημείου μέσω της σχέσης

$$a^\mu = \begin{bmatrix} \frac{\gamma^4}{c}\vec{\upsilon}.\vec{a} \\ \gamma^2\vec{a} + \frac{\gamma^4}{c^2}(\vec{\upsilon}.\vec{a})\vec{\upsilon} \end{bmatrix}$$

- Η τετραδύναμη συμπίπτει με την μη σχετικιστική δύναμη $\vec{F}$ που δέχεται στο τοπικό σύστημα ηρεμίας του. Κάνοντας χρήση του μετασχηματισμού Lorentz που συνδέει το τοπικό σύστημα ηρεμίας με το δοθέν μπορούμε να υπολογίσουμε την τετραδύναμη f.

$$f = \begin{bmatrix} \frac{\gamma(\vec{\upsilon}\vec{F})}{c} \\ \vec{F} + \frac{\gamma - 1}{|\vec{\upsilon}|^2}(\vec{\upsilon}\vec{F})\vec{\upsilon} \end{bmatrix}$$

- Ειδικά για την ηλεκτρομαγνητική τετραδύναμη που δέχεται ένα φορτισμένο υλικό σημείο έχουμε την σχέση:

$$f^\mu = \frac{q}{c}F^{\mu\nu}u_\nu$$

όπου F ο ηλεκτρομαγνητικός τανυστής και u η τετραταχύτητα του υλικού σημείου.
Το χωρικό μέρος της τετραδύναμης Lorentz δίνεται από την κλασσική σχέση:

$$\vec{f} = q(\vec{E} + \vec{v}x\vec{B})$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 8. ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

Εφαρμογή 8.1. Διαστολή του χρόνου

Θεωρούμε δύο ΑΣΑ Ο και Ο΄, τα οποία κινούνται κατά τον τυποποιημένο τρόπο.
Θεωρούμε δύο γεγονότα Α και Β τα οποία συμβαίνουν στην ίδια θέση του Ο΄ και διαφέρουν χρονικά κατά Δt΄ κατά τον Ο΄. Να βρεθεί η χρονική τους διαφορά κατά το Ο.

Λύση

Έστω ότι η ταχύτητα του Ο΄ ως προς Ο είναι υ. Σύμφωνα με τον μετασχηματισμό Lorentz έχουμε

$$t_A = \gamma(t'_A + \frac{\upsilon}{c^2}x'_A) \qquad \text{και} \quad t_B = \gamma(t'_B + \frac{\upsilon}{c^2}x'_B)$$

Αφαιρώντας κατά μέλη έχουμε:

$$\Delta t = \gamma(\Delta t' + \frac{\upsilon}{c^2}\Delta x')$$

Όμως $\Delta x'=0$. Επομένως $\Delta t=\gamma\Delta t'$

Εφαρμογή 8.2. Συστολή του μήκους

Θεωρούμε δύο ΑΣΑ Ο και Ο΄, τα οποία κινούνται κατά τον τυποποιημένο τρόπο.
Μια ράβδος έχει την διεύθυνση του άξονα x και ηρεμεί ως προς το Ο΄. Αν το μήκος της στο Ο΄ είναι L_0 (μήκος ηρεμίας), να βρεθεί το μήκος της στο Ο.

Λύση

Έστω ότι η ταχύτητα του Ο΄ ως προς Ο είναι υ.
Για να μπορέσει ένας παρατηρητής στο Ο να μετρήσει το μήκος της ράβδου θα πρέπει να κάνει δυο ταυτόχρονες (στο σύστημά του) μετρήσεις των τετμημένων των άκρων της ράβδου. Το μήκος της ράβδου θα είναι προφανώς η διαφορά των δύο τετμημένων.
Σύμφωνα με τον μετασχηματισμό Lorentz έχουμε
Αφαιρώντας κατά μέλη έχουμε:

$$\Delta x' = \gamma(\Delta x - \upsilon\Delta t)$$

Όμως $\Delta t=0$. Επομένως $\Delta x' = \gamma\Delta x \Rightarrow \Delta x = \frac{\Delta x'}{\gamma} \Rightarrow \Delta x = \frac{L_0}{\gamma}$

Εφαρμογή 8.3. Φαινόμενο Doppler (ειδική περίπτωση)

Θεωρούμε μια φωτεινή πηγή ακίνητη ως προς ένα ΑΣΑ Ο. Έστω ότι η συχνότητα του φωτός που εκπέμπει στο Ο είναι f. Θεωρούμε ένα δεύτερο σύστημα αναφοράς Ο΄ που κινείται κατά τον άξονα των x του πρώτου με ταχύτητα υ ως προς αυτό. Να βρεθεί η συχνότητα του φωτός που αντιλαμβάνεται ένας παρατηρητής που βρίσκεται στην αρχή Ο΄.

Λύση

Α Τρόπος:
Έστω Τ η περίοδος του φωτεινού σήματος κατά τον Ο και Τ΄ η περίοδος του κατά τον Ο΄.
Για να βρούμε την περίοδο Τ΄ θα πρέπει να βρούμε την χρονική διαφορά με την οποία ο παρατηρητής λαμβάνει δύο διαδοχικά φωτόνια που εκπέμπει η πηγή.
Υποθέτουμε ότι την στιγμή t=0 που οι αρχές των δύο συστημάτων συμπίπτουν η πηγή που βρίσκεται στο Ο εκπέμπει ένα φωτόνιο. Επειδή εκείνη την στιγμή το Ο συμπίπτει με το Ο΄ το φωτόνιο αυτό λαμβάνεται αμέσως από τον παρατηρητή που βρίσκεται στο Ο΄.
Το δεύτερο φωτόνιο εκπέμπεται από την πηγή την στιγμή $t_2=T$ στην θέση $x_2=0$. Επομένως η εξίσωση κίνησης του 2ου φωτονίου είναι $x_\varphi=c(t-T)$.
Η εξίσωση κίνησης του παρατηρητή είναι $x_\pi=\upsilon t$.

Το φωτόνιο θα φτάσει στον παρατηρητή όταν $x_\varphi = x_\pi$.

$$x_\phi = x_\pi \Rightarrow c(t-T) = \upsilon t \Rightarrow t = \frac{cT}{c-\upsilon}$$

Η θέση του παρατηρητή εκείνη την στιγμή (κατά τον Ο) είναι $x = \upsilon t \Rightarrow x = \dfrac{\upsilon cT}{c-\upsilon}$

Η χρονική στιγμή (ως προς Ο΄) κατά την οποία το δεύτερο φωτόνιο έφτασε στον παρατηρητή δίνεται από τον μετασχηματισμό Lorentz.

$$t' = \gamma\left(t - \frac{\upsilon}{c^2}x\right)$$

Αντικαθιστώντας τα x και t έχουμε τελικά.

$$t' = \frac{\gamma cT}{c-\upsilon}\left(1-\frac{\upsilon^2}{c^2}\right) = \frac{\gamma cT}{c-\upsilon}\frac{1}{\gamma^2} = \frac{cT}{\gamma(c-\upsilon)} = T\sqrt{\frac{c+\upsilon}{c-\upsilon}}$$

Όμως η χρονική στιγμή t΄ είναι η περίοδος του φωτεινού σήματος κατά τον Ο΄. Επομένως

$$T' = T\sqrt{\frac{c+\upsilon}{c-\upsilon}} \Rightarrow f' = f\sqrt{\frac{c-\upsilon}{c+\upsilon}}$$

με υ την αλγεβρική τιμή της ταχύτητας του παρατηρητή ως προς την πηγή.

Β τρόπος: Το ανταλλοίωτο διάνυσμα της τετραορμής του φωτονίου στα Ο και Ο΄ είναι:

$$P = \frac{1}{c}\begin{bmatrix} E \\ E \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{c}\begin{bmatrix} hf \\ hf \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad P' = \frac{1}{c}\begin{bmatrix} E' \\ E' \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{c}\begin{bmatrix} hf' \\ hf' \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ο πίνακας του μετασχηματισμού Lorentz ως γνωστόν είναι ο

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

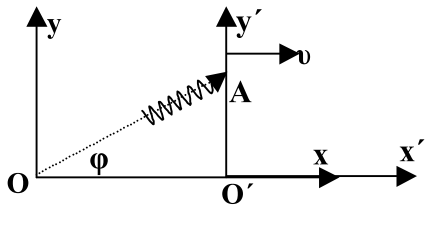
Από τον νόμο μετασχηματισμού της τετραορμής έχουμε:

$$P' = \Lambda P \Rightarrow \begin{bmatrix} hf' \\ hf' \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} hf \\ hf \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow f' = \gamma(1-\beta)f \Rightarrow f' = \frac{1-\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}f \Rightarrow$$

$$f' = f\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}$$

Πρέπει να σημειώσουμε ότι η παραπάνω σχέση ισχύει με την προϋπόθεση ότι η διεύθυνση παρατηρητής-πηγή συμπίπτει με την διεύθυνση της σχετικής ταχύτητας του παρατηρητή ως προς την πηγή.

Εφαρμογή 8.4. Φαινόμενο Doppler (γενική περίπτωση)



Θεωρούμε μια φωτεινή πηγή ακίνητη ως προς ένα ΑΣΑ Ο. Έστω ότι η συχνότητα του φωτός που εκπέμπει στο Ο είναι f. Θεωρούμε ένα δεύτερο σύστημα αναφοράς Ο΄ που κινείται κατά τον άξονα των x του πρώτου με ταχύτητα υ ως προς αυτό. Να βρεθεί η συχνότητα του φωτός που αντιλαμβάνεται ένας παρατηρητής που βρίσκεται σε μια θέση Α έτσι ώστε η ΟΑ να σχηματίζει γωνία φ με την διεύθυνση της ταχύτητας υ.

Λύση

Στον παρατηρητή φτάνουν φωτόνια που εξέπεμψε η πηγή υπό γωνία φ.
Έστω Ε η ενέργεια των φωτονίων και p η ορμή τους .

Από την σχέση ενέργειας ορμής έχουμε ότι $p = \dfrac{E}{c}$

Η τετραορμή των φωτονίων στα συστήματα Ο και Ο΄ είναι:

$$P = \begin{bmatrix} \dfrac{E}{c} \\ p\cos\phi \\ p\sin\phi \\ \end{bmatrix} = \frac{1}{c}\begin{bmatrix} E \\ E\cos\phi \\ E\sin\phi \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad P' = \frac{1}{c}\begin{bmatrix} E' \\ E'\cos\phi' \\ E'\sin\phi' \end{bmatrix}$$

Από τον νόμο μετασχηματισμού της τετραορμής είναι

$$P' = \Lambda P \Rightarrow \begin{bmatrix} E' \\ E'\cos\phi' \\ E'\sin\phi' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} E \\ E\cos\phi \\ E\sin\phi \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$E' = \gamma E(1-\beta\cos\phi) \Rightarrow f' = f\frac{1-\beta\cos\phi}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

Εφαρμογή 8.5. Μη κεντρική ελαστική κρούση

Ένα σωματίδιο με ενέργεια ηρεμίας Ε και κινητική ενέργεια Κ ως προς ένα ΑΣΑ συγκρούεται μη κεντρικά και ελαστικά με δεύτερο όμοιο σωματίδιο το οποίο είναι ακίνητο.

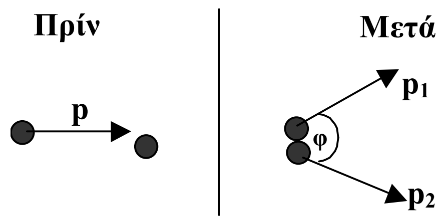
1) Να βρεθεί η γωνία που σχηματίζουν οι διευθύνσεις κίνησης των δύο σωματιδίων μετά την κρούση συναρτήσει των ενεργειών των δύο σωματιδίων μετά την κρούση και της ενέργειας ηρεμίας τους.
2) Να αποδείξετε ότι μετά την κρούση η γωνία που σχηματίζουν οι διευθύνσεις κίνησης των δύο σωματιδίων είναι οξεία
3) Στην ειδική περίπτωση που οι ορμές των δύο σωματιδίων μετά την κρούση έχουν το ίδιο μέτρο, να βρεθεί η γωνία που σχηματίζουν οι διευθύνσεις κίνησης των δύο σωματιδίων μετά την κρούση συναρτήσει των Ε και Κ.
4) Να συγκρίνετε το αποτέλεσμα του ερωτήματος 2) με το αντίστοιχο της κλασσικής μηχανικής.

Λύση

1)

Α Τρόπος (Χωρίς ανάλυση σε συνιστώσες)

Πριν την κρούση



Η ενέργεια του κινούμενου σωματιδίου πριν την κρούση είναι το άθροισμα της ενέργειας ηρεμίας και της κινητικής του ενέργειας. Επομένως η αρχική ενέργεια του πρώτου σωματιδίου είναι Ε+Κ.
Επειδή το δεύτερο σωματίδιο είναι ακίνητο η ενέργεια του είναι Ε. Επομένως η τετραορμή του συστήματος είναι:

$$p_{\pi\rho\iota\nu} = \begin{bmatrix} \frac{K+E}{c} \\ \vec{p} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{E}{c} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{K+2E}{c} \\ \vec{p} \end{bmatrix}$$

Μετά την κρούση
Οι ορμές των δύο σωματίων είναι p_1 και p_2 σχηματίζοντας γωνία φ μεταξύ τους.
Αν E_1 και E_2 οι ενέργειές τους τότε η τετραορμή του συστήματος μετά την κρούση θα είναι:

$$P_{\mu\varepsilon\tau\alpha} = \begin{bmatrix} \frac{E_1}{c} \\ \vec{p}_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{E_1}{c} \\ \vec{p}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E_1+E_2}{c} \\ \vec{p}_1+\vec{p}_2 \end{bmatrix}$$

Από την διατήρηση της τετραορμής έχουμε:

$$K+2E = E_1+E_2 \qquad (1)$$

$$\vec{p} = \vec{p}_1+\vec{p}_2 \Rightarrow \vec{p}^2 = \vec{p}_1^2+\vec{p}_2^2+2\vec{p}_1.\vec{p}_2 \Rightarrow p^2 = p_1^2+p_2^2+2p_1p_2\cos\phi \qquad (2)$$

Από την σχέση ενέργειας ορμής έχουμε για το αρχικό σωματίδιο:

$$(K+E)^2 = p^2c^2+E^2$$

Με χρήση της (1) η παραπάνω σχέση γίνεται:

$$(E_1+E_2-E)^2 = p^2c^2+E^2 \qquad (3)$$

Ομοίως για τις ενέργειες και ορμές μετά την κρούση έχουμε:

$$E_1{}^2 = p_1^2c^2+E^2 \qquad (4)$$

$$E_2{}^2 = p_2^2c^2+E^2 \qquad (5)$$

Λύνοντας τις (3) , (4) , (5) ως προς τις ορμές και αντικαθιστώντας στην (2) έχουμε:

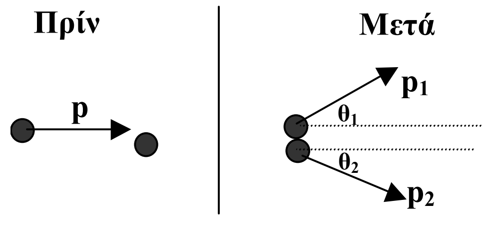
$$E_1E_2-E_1E-E_2E+E^2 = \sqrt{E_1^2-E^2}\sqrt{E_2^2-E^2}\cos\phi \Rightarrow$$

$$(E_1-E)(E_2-E) = \sqrt{(E_1-E)(E_1+E)}\sqrt{(E_2-E)(E_2+E)}\cos\phi \Rightarrow$$

$$\cos\phi = \sqrt{\frac{(E_1-E)(E_2-E)}{(E_1+E)(E_2+E)}} \qquad (6)$$

<u>Β Τρόπος (Με ανάλυση σε συνιστώσες)</u>
Πριν την κρούση

$$p_{\pi\rho\iota\nu} = \begin{bmatrix} \frac{K+E}{c} \\ p \\ 0 \\ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{E}{c} \\ 0 \\ 0 \\ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{K+2E}{c} \\ p \\ 0 \\ \end{bmatrix}$$



Μετά την κρούση
Οι ορμές των δύο σωματίων είναι p_1 και p_2 σχηματίζοντας γωνίες θ_1 και θ_2 με την αρχική διεύθυνση κίνησης. Αν E_1 και E_2 οι ενέργειές τους τότε η τετραορμή του συστήματος μετά την κρούση θα είναι:

$$P_{\mu\varepsilon\tau\alpha} = \begin{bmatrix} \frac{E_1}{c} \\ p_1\cos\theta_1 \\ p_1\sin\theta_1 \\ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{E_2}{c} \\ p_2\cos\theta_2 \\ -p_2\sin\theta_2 \\ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E_1+E_2}{c} \\ p_1\cos\theta_1 + p_2\cos\theta_2 \\ p_1\sin\theta_1 - p_2\sin\theta_2 \\ \end{bmatrix}$$

Από την διατήρηση της τετραορμής έχουμε:

$$K + 2E = E_1 + E_2 \qquad (1΄)$$

$$p = p_1\cos\theta_1 + p_2\cos\theta_2 \qquad (2΄)$$

$$0 = p_1\sin\theta_1 - p_2\sin\theta_2 \qquad (3΄)$$

$$0 = p_1\sin\theta_1 - p_2\sin\theta_2$$

Υψώνουμε στο τετράγωνο τις (2΄) και (3΄) και προσθέτουμε κατά μέλη:

$$p^2 = p_1^2 + p_2^2 + 2p_1p_2(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2) \Rightarrow p^2 = p_1^2 + p_2^2 + 2p_1p_2\cos\phi \qquad (4΄)$$

όπου $\varphi=\theta_1+\theta_2$ η γωνία των p_1 και p_2.
Η συνέχεια είναι ίδια όπως και στον α τρόπο

2) Από την (6) είναι $\cos\varphi>0 \Rightarrow \varphi<\pi/2$
3) Αν $|\vec{p}_1| = |\vec{p}_2|$ τότε από τις (4) και (5) θα είναι και $E_1=E_2$.

Τότε η (6) γίνεται $\cos\phi = \dfrac{E_1 - E}{E_1 + E}$

Από την (1) $E_1 = E + \dfrac{K}{2} \Rightarrow \cos\phi = \dfrac{K}{4K + E}$

4) Στην κλασσική μηχανική η σχέση κινητικής ενέργειας και ορμής είναι $K = \dfrac{p^2}{2m}$

Από την διατήρηση της ενέργειας έχουμε $K = K_1 + K_2 \Rightarrow p^2 = p_1^2 + p_2^2$

Από την διατήρηση της ορμής έχουμε : $p^2 = p_1^2 + p_2^2 + 2p_1p_2\cos\phi$

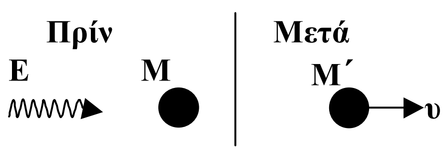
Συνδυάζοντας τις παραπάνω προκύπτει ότι $\cos\varphi=\pi/2$

Εφαρμογή 8.6. Απορρόφηση φωτονίου από ακίνητο σωματίδιο

Θεωρούμε ένα σωματίδιο με μάζα ηρεμίας Μ ακίνητο ως προς ένα ΑΣΑ.
Ένα φωτόνιο με ενέργεια Ε ως προς το Ο απορροφάται από το σωματίδιο.
Να βρεθούν μετά την κρούση:
α) Η μάζα ηρεμίας του σωματιδίου
β) Η ορμή του σωματιδίου
γ) Η κινητική ενέργεια του σωματιδίου

<u>Λύση</u>

α) Τα τετρανύσματα του φωτονίου και του σωματιδίου πριν την κρούση είναι:



$$P_{\phi(A)} = \frac{1}{c}\begin{bmatrix} E \\ E \end{bmatrix} \qquad \text{και} \qquad P_{\Sigma(A)} = \begin{bmatrix} Mc \\ 0 \end{bmatrix}$$

(Για λόγους απλότητας στην γραφή γράφουμε μόνο τις δύο πρώτες συνιστώσες των τετρανυσμάτων)

Το διάνυσμα της τετραορμής του σωματιδίου μετά την κρούση θα είναι:

$$P_{\Sigma(T)} = \begin{bmatrix} M'\gamma c \\ M'\gamma \upsilon \end{bmatrix}$$

Από την διατήρηση της τετραορμής έχουμε :

$$P_{\Phi(A)} + P_{\Sigma(A)} = P_{\Sigma(T)} \Rightarrow \frac{1}{c}\begin{bmatrix} E \\ E \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Mc \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M'\gamma c \\ M'\gamma\upsilon \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} E + Mc^2 \\ E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M'\gamma c^2 \\ M'\gamma\upsilon c \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$E + Mc^2 = M'\gamma c^2 \qquad (1)$$

$$E = M'\gamma\upsilon c \qquad (2)$$

Λύνοντας το σύστημα έχουμε $\upsilon = \dfrac{cE}{E+Mc^2} \Rightarrow \gamma = \dfrac{E+Mc^2}{\sqrt{Mc^2(Mc^2+2E)}}$

$$M' = \frac{\sqrt{Mc^2(Mc^2+2E)}}{c^2}$$

β) Η ορμή του σωματιδίου μετά την κρούση θα είναι $p^1 = M'\gamma\upsilon = \dfrac{E}{c}$

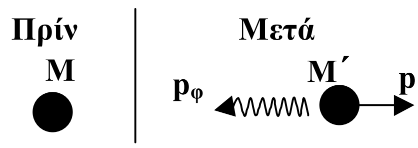
γ) Η κινητική ενέργεια του σωματιδίου μετά την κρούση θα είναι:

$$K = M'\gamma c^2 - M'c^2 = M'(\gamma-1)c^2$$

Εφαρμογή 8.7. Εκπομπή φωτονίου από ακίνητο σωματίδιο

Θεωρούμε ένα σωματίδιο με ενέργεια ηρεμίας E_0 ακίνητο ως προς ένα ΑΣΑ.
Το σωματίδιο εκπέμπει ένα φωτόνιο ενέργειας E_φ. Να υπολογίσετε την ενέργεια E_φ του φωτονίου συναρτήσει της μείωσης στην ενέργεια ηρεμίας του σωματιδίου.

Λύση



Έστω E_0' η νέα ενέργεια ηρεμίας και $\Delta E_0 = E_0 - E_0'$ η μείωση στην ενέργεια ηρεμίας του σωματιδίου. Έστω δε p_φ η ορμή φωτονίου που παράγεται και Ε η ενέργεια του σωματιδίου μετά την κρούση .
Οι τετραορμές του συστήματος σωμάτιο-φωτόνιο πριν και μετά την εκπομπή είναι

$$P_{\pi\rho\iota\nu} = \begin{bmatrix} \dfrac{E_0}{c} \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad P_{\mu\varepsilon\tau\alpha} = \begin{bmatrix} \dfrac{E_\phi}{c} \\ -p_\phi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dfrac{E}{c} \\ p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{E_\phi + E}{c} \\ -p_\phi + p \end{bmatrix}$$

Από την διατήρηση της τετραορμής έχουμε:

$$E_0 = E_\phi + E \Rightarrow E = E_0 - E_\phi \qquad (1)$$

$$p = p_\phi \qquad (2)$$

Από την σχέση ενέργειας –ορμής για το φωτόνιο και το σωματίδιο προκύπτει ότι:

$$p_\phi = \frac{E_\phi}{c} \qquad (3)$$

$$E^2 = p^2c^2 + E_0'^2 \qquad (4)$$

Αντικαθιστώντας τις (1) , (2) , (3) στην (4) έχουμε:

$$(E_0 - E_\phi)^2 = E_\phi^2 + E_0'^2 \Rightarrow E_0^2 - 2E_0E_\phi = E_0'^2 \Rightarrow$$

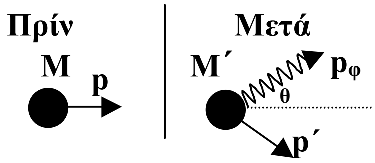
$$E_\phi = \frac{(E_0 - E'_0)(E_0 + E'_0)}{2E_0} = \frac{\Delta E_0(2E_0 - \Delta E_0)}{2E_0} \Rightarrow E_\phi = \Delta E_0(1 - \frac{\Delta E_0}{2E_0})$$

Εφαρμογή 8.8. Εκπομπή φωτονίου από κινούμενο σωματίδιο

Ένα σωματίδιο με ενέργεια ηρεμίας E_0 και ταχύτητα υ (στο σύστημα εργαστηρίου) εκπέμπει ένα φωτόνιο, του οποίου η διεύθυνση κίνησης σχηματίζει γωνία θ με την αρχική διεύθυνση κίνησης του σωματιδίου. ,
Α) Να βρεθεί η ενέργεια του εκπεμπόμενου φωτονίου συναρτήσει της ταχύτητας υ , της γωνίας θ, της αρχικής ενέργειας ηρεμίας και της ελάττωσης της ενέργειας ηρεμίας του σωματιδίου.
Β) Να συγκριθεί η ενέργεια αυτή με την ενέργεια που θα είχε το φωτόνιο αν το σωματίδιο ήταν αρχικά ακίνητο.

<u>Λύση</u>

Α)



Έστω E_0 και E'_0 η αρχική και τελική ενέργεια ηρεμίας του σωματιδίου
$\Delta E_0 = E_0 - E'_0$ η ελάττωση στην ενέργεια ηρεμίας του σωματιδίου, Ε και Ε΄ η ενέργεια του σωματιδίου πριν και μετά την εκπομπή και E_φ η ενέργεια του εκπεμπόμενου σωματιδίου.

Έστω δε $\vec{p}, \vec{p}'$ η αρχική και η τελική ορμή του σωματιδίου και $\vec{p}_\phi$ η ορμή του εκπεμπόμενου φωτονίου (στο σύστημα εργαστηρίου).

Οι τετραορμές του συστήματος σωματίδιο - φωτόνιο στο σύστημα εργαστηρίου πριν και μετά την εκπομπή είναι:

$$P_{\pi\rho\iota\nu} = \begin{bmatrix} \frac{E}{c} \\ \vec{p} \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad P_{\mu\varepsilon\tau\alpha} = \begin{bmatrix} \frac{E_\phi}{c} \\ \vec{p}_\phi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{E'}{c} \\ \vec{p}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E_\phi + E'}{c} \\ \vec{p}_\phi + \vec{p}' \end{bmatrix}$$

Από την διατήρηση της τετραορμής έχουμε:

$$E = E_\phi + E' \Rightarrow E' = E - E_\phi \qquad (1)$$

$$\vec{p} = \vec{p}_\phi + \vec{p}' \Rightarrow \vec{p}' = \vec{p} - \vec{p}_\phi \Rightarrow p'^2 = p^2 + p_\phi^2 - 2pp_\phi \cos\theta \qquad (2)$$

Από την σχέση ενέργειας –ορμής για το φωτόνιο και το σωματίδιο προκύπτει ότι:

$$E^2 = E_0^2 + p^2c^2 \qquad (3)$$

$$E'^2 = E_0'^2 + p'^2c^2 \qquad (4)$$

$$p_\phi = \frac{E_\phi}{c} \qquad (5)$$

Αντικαθιστούμε στην (2) την p_φ από την (5) και τα τετράγωνα των ορμών από τις (3) και (4) και έχουμε ότι:

$$E'^2 - E_0'^2 = E^2 - E_0^2 + E_\phi^2 - 2pcE_\phi \cos\theta \qquad (6)$$

Αντικαθιστώντας την Ε΄ από την (1) στην (6) προκύπτει ότι:

$$2E_\phi(E - pc\cos\theta) = E_0^2 - E_0'^2 \qquad (7)$$

Όμως $E = M\gamma c^2 = \gamma E_0$ και $pc = M\gamma\upsilon c = M\gamma\beta c^2 = \gamma\beta E_0$

Αντικαθιστώντας στην (7) έχουμε:

$$2E_\phi\gamma E_0(1 - \beta\cos\theta) = E_0^2 - E_0'^2 \Rightarrow 2E_\phi\gamma E_0(1 - \beta\cos\theta) = (E_0 - E'_0)(E_0 + E'_0) \Rightarrow$$

$$2E_\phi\gamma E_0(1 - \beta\cos\theta) = \Delta E_0(2E_0 - \Delta E_0) \Rightarrow E_\phi = \frac{\Delta E_0(2E_0 - \Delta E_0)(1-\beta^2)^{1/2}}{2E_0(1 - \beta\cos\theta)} \qquad (8)$$

Β) Αν το σωματίδιο ήταν αρχικά ακίνητο τότε β=0 και επομένως η ενέργεια του εκπεμπόμενου φωτονίου θα ήταν

$$E_{\phi 0} = \frac{\Delta E_0(2E_0 - \Delta E_0)}{2E_0} \qquad (9)$$

Διαιρώντας τις (8) και (9) κατά μέλη έχουμε:

$$E_\phi = E_{\phi 0}\,\frac{(1-\beta^2)^{1/2}}{(1-\beta\,\cos\theta)}$$

Εφαρμογή 8.9. Ενέργεια κατωφλίου

Θεωρούμε την πυρηνική αντίδραση: ${}^{2}_{1}H + \gamma \to {}^{0}_{1}p + {}^{1}_{0}n$ στην οποία ο πυρήνας του δευτερίου είναι αρχικά ακίνητος (στο σύστημα εργαστηρίου).

i) Να βρεθεί η ελάχιστη ενέργεια που πρέπει να έχει το φωτόνιο ώστε να προκαλέσει την διάσπαση του πυρήνα

ii) Να δείξετε ότι στην περίπτωση της ελάχιστης ενέργειας του φωτονίου το πρωτόνιο και το νετρόνιο έχουν ορμές συγγραμμικές και ομόρροπες με την ορμή του φωτονίου οι οποίες είναι ανάλογες με την μάζα ηρεμίας τους .

Δίνονται οι ενέργειες ηρεμίας του πυρήνα του δευτερίου E_{10}=1875,12 Mev ,του πρωτονίου E_{20}=938,72 Mev και του νετρονίου αντίστοιχα ίσες με E_{30}=939 Mev.

Λύση

Δίχως βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι η κίνηση του φωτονίου γίνεται κατά την θετική κατεύθυνση του άξονα x.

Η ενέργεια του συστήματος φωτόνιο – δευτέριο στο σύστημα εργαστηρίου είναι $E=E_\phi+E_{10}$ και η αρχική ορμή είναι ίση με την ορμή του φωτονίου.

Θα επιλύσουμε το πρόβλημα στο σύστημα κέντρου μάζας (ΣΚΜ) και στην συνέχεια θα μεταφέρουμε την λύση στο σύστημα εργαστηρίου.

Η ταχύτητα του συστήματος κέντρου μάζας είναι ως γνωστόν $\beta = \dfrac{cp}{E} = \dfrac{E_\phi}{E_\phi + E_{10}}$

Από την ταχύτητα του ΣΚΜ μπορούμε να υπολογίσουμε το αντίστοιχο γ:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{E_\phi^2}{E^2}}} = \frac{E}{\sqrt{E_{10}^2 + 2E_\phi E_{10}}}$$

Η αρχική τετραορμή του συστήματος δευτέριο – φωτόνιο στο ΣΚΜ είναι:

$$\begin{bmatrix} \dfrac{E'}{c} \\ p' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & -\gamma\beta \\ -\gamma\beta & \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{E}{c} \\ \dfrac{E_\phi}{c} \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$E' = \gamma(E - \frac{E_\phi}{E}E_\phi) = \gamma E(1-\frac{E_\phi^2}{E^2}) = \gamma E\frac{1}{\gamma^2} \Rightarrow E' = \frac{E}{\gamma} \Rightarrow E' = \sqrt{E_{10}^2 + 2E_\phi E_{10}} \qquad (1)$$

και όπως είναι αναμενόμενο p΄=0.

Παρατηρούμε ότι η ελάχιστη τιμή της E_φ αντιστοιχεί στην ελάχιστη τιμή της Ε΄.

Μετά την διάσπαση οι τετραορμές του πρωτονίου και του νετρονίου στο ΣΚΜ είναι:

$$P_2' = \begin{bmatrix} \dfrac{E_2'}{c} \\ \vec{p}_2' \end{bmatrix} \text{ και } P_3' = \begin{bmatrix} \dfrac{E_3'}{c} \\ \vec{p}_3' \end{bmatrix}$$

Από την διατήρηση της τετραορμής στο ΣΚΜ έχουμε

$$\begin{bmatrix} \frac{E'}{c} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E'_2}{c} \\ \vec{p}'_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{E'_3}{c} \\ \vec{p}'_3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} E' = E'_2 + E'_3 \\ \vec{p}'_3 = -\vec{p}'_2 \end{matrix}$$

Χρησιμοποιώντας την σχέση ενέργειας ορμής η αρχή διατήρησης της ενέργειας γίνεται:

$$E' = \sqrt{E_{20}^2 + p_2'^2} + \sqrt{E_{30}^2 + p_2'^2}$$

Από την τελευταία σχέση παρατηρούμε ότι η ελάχιστη τιμή της Ε΄ αντιστοιχεί στην ελάχιστη τιμή της p'_2 και επομένως $p'_3 = p'_2 = 0 \Rightarrow E' = E_{20} + E_{30}$

Επιλύοντας την (1) ως προς E_φ βρίσκουμε ότι: $E_\phi = \dfrac{(E_{20} + E_{30} - E_{10})(E_{20} + E_{30} + E_{10})}{2E_{10}}$

Η τετραορμή του πρωτονίου στο σύστημα εργαστηρίου είναι

$$\begin{bmatrix} \frac{E_2}{c} \\ p_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & \gamma\beta \\ \gamma\beta & \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{E'_2}{c} \\ p'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & \gamma\beta \\ \gamma\beta & \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{E_{20}}{c} \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow p_2 = \frac{\gamma\beta E_{20}}{c}$$

Ομοίως για το νετρόνιο έχουμε

$$\begin{bmatrix} \frac{E_2}{c} \\ p_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & \gamma\beta \\ \gamma\beta & \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{E'_3}{c} \\ p'_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & \gamma\beta \\ \gamma\beta & \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{E_{30}}{c} \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow p_3 = \frac{\gamma\beta E_{30}}{c}$$

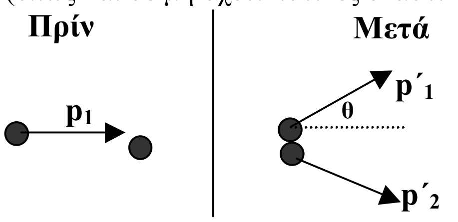
Από τις δύο τελευταίες σχέσεις συμπεραίνουμε ότι οι ορμές του πρωτονίου και του νετρονίου είναι ομόρροπες. Διαιρώντας τις δύο σχέσεις κατά μέλη έχουμε ότι : $\dfrac{p_2}{p_3} = \dfrac{E_{20}}{E_{30}}$

Εφαρμογή 8.10. Ελαστική σκέδαση

Σωμάτιο ενέργειας E_1 και μάζας m_1 σκεδάζεται ελαστικά με ακίνητο σωμάτιο μάζας m_2 με (m_2<m_1) .
α) Να υπολογισθεί το συνημίτονο της γωνίας σκέδασης θ ,του σωματίου 1 ως προς την αρχική του διεύθυνση συναρτήσει της ενέργειας του E'_1 μετά από τη σκέδαση

β) Να αποδειχθεί ότι ισχύει η σχέση $\sin\theta_{max} = \dfrac{m_2}{m_1}$

(όπως και σε μη σχετικιστικές ελαστικές σκεδάσεις).



Λύση

Α) Θα μελετήσουμε πρώτα την σκέδαση μη σχετικιστικά
Από την αρχή διατήρησης της ορμής έχουμε:

$$\vec{p}_1 = \vec{p}'_1 + \vec{p}'_2 \Rightarrow \vec{p}_1 - \vec{p}'_1 = \vec{p}'_2 \Rightarrow p_1^2 + p_1'^2 - 2p_1p'_1\cos\theta = p_2'^2$$

Επειδή η κρούση είναι ελαστική η κινητική ενέργεια του συστήματος παραμένει σταθερή:

$$K_1 = K'_1 + K'_2 \Rightarrow \frac{p_1^2}{2m_1} = \frac{p_1'^2}{2m_1} + \frac{p_2'^2}{2m_2}$$

Λύνοντας την δεύτερη ως προς p΄$_2$ και αντικαθιστώντας στην πρώτη έχουμε για το cosθ

$$\cos\theta = \frac{(m_1 - m_2)p_1^2 + (m_1 + m_2)p_1'^2}{2m_1 p_1 p_1'}$$

Η παραπάνω παράσταση μπορεί να θεωρηθεί σαν συνάρτηση της p'_1. Επομένως λαμβάνει ακρότατη τιμή όταν η παράγωγος ως προς p'_1 γίνει μηδέν. Επομένως όταν

$$\frac{d\cos\theta}{dp_1'} = \frac{(m_1 + m_2)p_1'^2 - (m_1 - m_2)p_1^2}{2m_1 p_1 p_1'^2} = 0 \Rightarrow p_1' = p_1\sqrt{\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}}$$

Αντικαθιστώντας το p'_1 στο $\cos\theta$ έχουμε:

$$\cos\theta = \frac{\sqrt{m_1^2 - m_2^2}}{m_1} \Rightarrow \sin\theta = \frac{m_2}{m_1}$$

Αν θέσουμε p_0 την τιμή που μηδενίζει την $\dfrac{d\cos\theta}{dp_1'}$ μπορούμε εύκολα να δούμε ότι:

όταν $p_1' > p_0 \Rightarrow \dfrac{d\cos\theta}{dp_1'} > 0$ και όταν $p_1' < p_0 \Rightarrow \dfrac{d\cos\theta}{dp_1'} < 0$. Επομένως για $p_1' = p_0$ έχουμε ελάχιστη τιμή του $\cos\theta$ και επομένως μέγιστη τιμή της γωνίας θ. Άρα $\sin\theta_{max} = \dfrac{m_2}{m_1}$.

Β) Θα μελετήσουμε τώρα το ίδιο φαινόμενο σχετικιστικά
Έστω E_{10} και E_{20} οι ενέργειες ηρεμίας των δύο σωματιδίων.
Η τετραορμή του συστήματος πριν και μετά την κρούση είναι.(θεωρούμε ότι c=1):

$$P_{\pi\rho\iota\nu} = P_1 + P_2 = \begin{bmatrix} E_1 \\ \vec{p}_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} E_{20} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_1 + E_{20} \\ \vec{p}_1 \end{bmatrix}$$

$$P_{\mu\varepsilon\tau\alpha} = P_1' + P_2' = \begin{bmatrix} E_1' \\ \vec{p}_1' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} E_2' \\ \vec{p}_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_1' + E_2' \\ \vec{p}_1' + \vec{p}_2' \end{bmatrix}$$

Επειδή η τετραορμή παραμένει σταθερή έχουμε:

$$\vec{p}_1 = \vec{p}_1' + \vec{p}_2' \Rightarrow \vec{p}_1 - \vec{p}_1' = \vec{p}_2' \Rightarrow p_1^2 + p_1'^2 - 2p_1 p_1' \cos\theta = p_2'^2 \qquad (1)$$

$$E_1 + E_{20} = E_1' + E_2' \Rightarrow E_1 + E_{20} - E_1' = E_2' \qquad (2)$$

Από την σχέση ενέργειας ορμής για κάθε σωμάτιο:

$$p_1^2 = E_1^2 - E_{10}^2 \qquad (3)$$

$$p_1'^2 = E_1'^2 - E_{10}^2 \qquad (4)$$

$$p_2'^2 = E_2'^2 - E_{20}^2 \qquad (5)$$

Από την (1) έχουμε:

$$\cos\theta = \frac{p_1^2 + p_1'^2 - p_2'^2}{2p_1 p_1'} \qquad (6)$$

Αντικαθιστώντας τις ορμές από τις (3) , (4), (5) και την E_2' από την (2) έχουμε τελικά:

$$\cos\theta = \frac{E_1'(E_1 + E_{20}) - (E_1 E_{20} + E_{10}^2)}{\sqrt{E_1^2 - E_{10}^2}\sqrt{E_1'^2 - E_{10}^2}}$$

Η γωνία θ παίρνει ακρότατη τιμή όταν $\dfrac{d\cos\theta}{dE_1'} = 0$

Παραγωγίζοντας την (6) ως προς E_1' έχουμε:

$$\frac{d\cos\theta}{dE_1'} = \frac{E_1'(E_1E_{20} + E_{10}^2) - E_{10}^2(E_1 + E_{20})}{\Pi > 0}$$

Θέτουμε $\varepsilon = \dfrac{E_{10}^2(E_1 + E_{20})}{E_1E_{20} + E_{10}^2}$ την τιμή της E_1' που μηδενίζει την παράγωγο και παρατηρούμε ότι

για $E_1' > \varepsilon \Rightarrow \dfrac{d\cos\theta}{dE_1'} > 0$ και για $E_1' < \varepsilon \Rightarrow \dfrac{d\cos\theta}{dE_1'} < 0$.

Επομένως για $E_1' = \varepsilon$ έχουμε ελάχιστη τιμή του cosθ συνεπώς μέγιστη τιμή της γωνίας θ.

Αντικαθιστώντας $E_1' = \varepsilon$ υπολογίζουμε το $\cos\theta_{max}$.

$$\cos\theta_{max} = \frac{\varepsilon(E_1 + E_{20}) - (E_1E_{20} + E_{10}^2)}{\sqrt{E_1^2 - E_{10}^2}\sqrt{\varepsilon^2 - E_{10}^2}} \qquad (7)$$

Ο αριθμητής της (7) γίνεται

$$\varepsilon(E_1 + E_{20}) - (E_1E_{20} + E_{10}^2) = \frac{(E_{10}^2 - E_{20}^2)(E_1^2 - E_{10}^2)}{E_1E_{20} + E_{10}^2}$$

Ομοίως η ποσότητα $\varepsilon^2 - E_{10}^2$ γίνεται

$$\varepsilon^2 - E_{10}^2 = \frac{E_{10}^2(E_{10}^2 - E_{20}^2)(E_1^2 - E_{10}^2)}{(E_1E_{20} + E_{10}^2)^2}$$

Αντικαθιστώνντας τα παραπάνω στην (7) έχουμε τελικά

$$\cos\theta_{max} = \frac{\sqrt{E_{10}^2 - E_{20}^2}}{E_{10}} \Rightarrow \sin\theta_{max} = \frac{E_{20}}{E_{10}} = \frac{m_2}{m_1}$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 9. ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Ομάδα 9.1. Μετασχηματισμός Lorentz

Άσκηση 9.1.1.

Ένα σωμάτιο με χρόνο ζωής $10x10^{-6}$ sec κινείται με σταθερή ταχύτητα v και διασπάται σε απόσταση 20km από το σημείο δημιουργίας του. Να βρεθεί το v.

Λύση

Στο σύστημα ηρεμίας Σ΄ του σωματιδίου για τα γεγονότα δημιουργία και διάσπαση του σωματιδίου ισχύει ότι: $\Delta t'=10x10^{-6}$ sec και $\Delta x'=0$. Στο σύστημα εργαστηρίου $\Delta x=2x10^{4}$ m.
Από τον μετασχηματισμό Lorentz έχουμε:

$$\Delta x = \gamma(\Delta x' + v\Delta t') \Rightarrow \Delta x = \gamma v \Delta t' \Rightarrow \gamma v = \frac{\Delta x}{\Delta t'} \Rightarrow v = \frac{\frac{\Delta x}{\Delta t'}c}{\sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\Delta t'}\right)^2 + c^2}} = 0.98889c$$

Άσκηση 9.1.2.

Στο σύστημα Σ δύο ταυτόχρονα γεγονότα απέχουν 4km κατά μήκος του άξονα x . Ποιά χρονική διαφορά μετρά παρατηρητής που κινείται με σχετική ταχύτητα ως προς την διεύθυνση x , όταν η απόσταση γι' αυτόν είναι 5km ;

Λύση

Για τα γεγονότα αυτά στο σύστημα Σ ισχύει ότι: $\Delta x=4Km$ και $\Delta t=0$. Σύστημα ηρεμίας του παρατηρητή ισχύει ότι $\Delta x'=5Km$.
Από τον μετασχηματισμό Lorentz έχουμε:

$$\Delta x' = \gamma(\Delta x - v\Delta t) \Rightarrow \Delta x' = \gamma \Delta x \Rightarrow \gamma = \frac{\Delta x'}{\Delta x} = \frac{5}{4} \Rightarrow v = 0.6\,c$$

$$\Delta t' = \gamma(\Delta t - \frac{v\Delta x}{c^2}) \Rightarrow \Delta t' = -\gamma \frac{v\Delta x}{c^2} = -10^{-5}\ \text{sec}$$

Άσκηση 9.1.3.

Ένας κύκλος ακίνητος πάνω στο επίπεδο xy ενός συστήματος αναφοράς Σ έχει εμβαδόν $12\,cm^2$. Για κινούμενο ως προς τον άξονα x σύστημα αναφοράς Σ΄ ο κύκλος φαίνεται με εμβαδό $7.2\,cm^2$.
α) Να δείξετε ότι ο κύκλος στο σύστημα Σ΄ φαίνεται σαν έλλειψη
β) Να βρείτε τη σχετική ταχύτητα των συστημάτων ;
Δίνεται το εμβαδόν της έλλειψης Ε=πab όπου a και b τα μήκη των ημιαξόνων της.

Λύση

α) Δίχως βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι ο κύκλος έχει σαν κέντρο την αρχή των αξόνων του Σ.
Για να μπορέσει ο παρατηρητής που βρίσκεται στο Σ΄ να βρεί το σχήμα της γραμμής που αντιστοιχεί στον κύκλο θα πρέπει να κάνει ταυτόχρονη (στο σύστημά του) μέτρηση των συντεταγμένων των σημείων της γραμμής και στη συνέχεια να βρει την εξίσωση που ικανοποιούν.

Έστω ότι ο παρατηρητής αυτός μετρά τις όλες τις συντεταγμένες των σημείων της γραμμής την στιγμή t'_0.
Ένα τυχαίο σημείο που την στιγμή t'_0 έχει συντεταγμένες (x΄,y΄) στο Σ΄, θα έχει συντεταγμένες (x,y) στο Σ.
Επειδή το σχήμα που βλέπει ο Σ είναι κύκλος ισχύει ότι: $x^2 + y^2 = R^2$ (1)
Από τον μετασχηματισμό Lorentz έχουμε:

$$x = \gamma(x' + vt'_0) \qquad (2)$$

$$y = y' \qquad (3)$$

Αντικαθιστώντας τις (2) και (3) στην (1) έχουμε:

$$\gamma^2(x' + vt'_0)^2 + y'^2 = R^2 \Rightarrow \frac{(x' + vt'_0)^2}{(\frac{R}{\gamma})^2} + \frac{y'^2}{R^2} = 1$$

Επομένως η γραμμή που βλέπει ο Σ΄ είναι (κινούμενη) έλλειψη με ημιάξονες a=R και $b = \frac{R}{\gamma}$

Συνεπώς το εμβαδόν του σχήματος που βλέπει είναι

$$E' = \pi R \frac{R}{\gamma} \Rightarrow E' = \frac{E}{\gamma} \Rightarrow \gamma = \frac{E}{E'} = \frac{5}{3} \Rightarrow v = 0.8\,c$$

<u>Άσκηση 9.1.4.</u>

Στο σημείο Α ενός συστήματος αναφοράς Σ συμβαίνουν δύο γεγονότα με διαφορά χρόνου 3 sec. Αν ως προς κινούμενο σύστημα Σ’ διαφέρουν κατά 5 sec , πόσο διαφέρουν χωρικά ;

<u>Λύση</u>

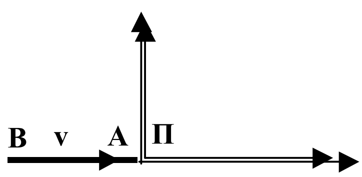
Επειδή τα δύο γεγονότα συμβαίνουν στο ίδιο σημείο Α είναι Δx=0 και Δt=4sec.
Από τα δεδομένα του προβλήματος Δt΄=6 sec
Από τον μετασχηματισμό Lorentz έχουμε:

$$\Delta t' = \gamma(\Delta t - \frac{v}{c^2}\Delta x) \Rightarrow \Delta t' = \gamma \Delta t \Rightarrow \gamma = \frac{5}{3} \Rightarrow v = 0.8\,c$$

$$\Delta x' = \gamma(\Delta x - v\Delta t) \Rightarrow \Delta x' = -\gamma v \Delta t = -1.2\,x10^9 \text{ m}$$

<u>Άσκηση 9.1.5.</u>

Ένα διαστημόπλοιο σε ηρεμία, στη Γη, έχει μήκος L=800 m. Ένας παρατηρητής στη Γη μετράει ότι όταν το διαστημόπλοιο κινείται χρειάζεται 2 μs για να περάσει από μπροστά του. Ποια η ταχύτητα του διαστημόπλοιου ως προς τη Γη;



<u>Λύση</u>

Θεωρούμε ότι η αρχή του συστήματος ηρεμίας του παρατηρητή Π ταυτίζεται με τον παρατηρητή και η αρχή του συστήματος ηρεμίας του διαστημοπλοίου ταυτίζεται με την άκρη Α αυτού.
Θεωρούμε επίσης ότι τα ρολόγια και των δύο συστημάτων αναφοράς είναι συγχρονισμένα να δείχνουν μηδέν την στιγμή που η άκρη Α φτάνει στον παρατηρητή.
Θεωρούμε τα εξής δύο γεγονότα
Γεγονός 1: Η άκρη Α φτάνει στον παρατηρητή. Οι χωροχρονικές συντεταγμένες του γεγονότος αυτού είναι: $x_1=0$, $t_1=0$, $x'_1=0$, $t'_1=0$
Γεγονός 2: Η άκρη Β φτάνει στον παρατηρητή. Για το γεγονός αυτό ισχύει ότι $x_2=0$, $x'_2=-L$

Από τον μετασχηματισμό Lorentz έχουμε:

$$x_2 = \gamma(x_2' + vt_2') \Rightarrow 0 = \gamma(-L + vt_2') \Rightarrow t_2' = \frac{L}{v}$$

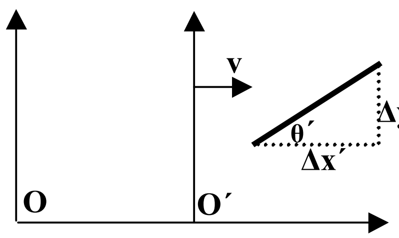
$$t_2 = \gamma(t_2' + \frac{vx_2'}{c^2}) = \gamma(\frac{L}{v} - \frac{vL}{c^2}) = \frac{\gamma L}{v}(1 - \frac{v^2}{c^2}) = \frac{L}{\gamma v} \qquad (1)$$

Από τα δεδομένα του προβλήματος είναι t_2=2x10^{-6} sec. Αντικαθιστώντας στην (1) έχουμε:

$$\gamma v = \frac{4}{3}c \Rightarrow v = 0.8c$$

<u>Άσκηση 9.1.6.</u>

Αδρανειακός παρατηρητής O΄ κινείται με ταχύτητα υ σχετικά με τον O. Μια ράβδος ακίνητη ως προς τον O΄ σχηματίζει γωνία θ΄ με την διεύθυνση της κίνησης. Δείξτε ότι για την γωνία θ που μετρά ο O ισχύει: $\tan\theta = \gamma \tan\theta'$



<u>Λύση</u>

Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι οι άξονες των δύο συστημάτων αναφοράς είναι παράλληλοι, η κίνηση του O΄ σε σχέση με τον O γίνεται κατά την θετική διεύθυνση του άξονα x και η ράβδος βρίσκεται στο επίπεδο xOy.

Από τον μετασχηματισμό Lorentz για την συγκεκριμένη διάταξη έχουμε:

$$\Delta t = \gamma(\Delta t' + \frac{\beta}{c}\Delta x') \qquad (1)$$

$$\Delta x = \gamma(\Delta x' + \beta c \Delta t') \qquad (2)$$

$$\Delta y = \Delta y' \qquad (3)$$

Για να μπορέσει να βρει ο O την γωνία θ θα πρέπει να κάνει ταυτόχρονη μέτρηση των συντεταγμένων των άκρων της (Δt=0) .Η γωνία θ δίνεται από την σχέση $\tan\theta = \frac{\Delta y}{\Delta x}$

Με Δt=0 έχουμε από την (1) : $\Delta t' = -\frac{\beta}{c}\Delta x'$

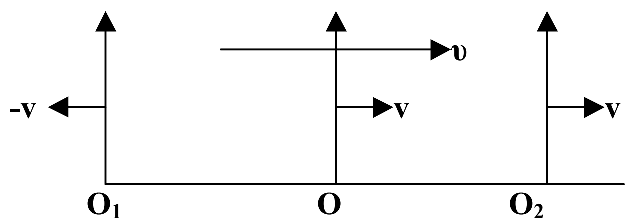
Αντικαθιστώντας στην (2) $\Delta x = \gamma(\Delta x' - \beta^2 \Delta x') \Rightarrow \Delta x = \frac{\Delta x'}{\gamma}$

$$\tan\theta = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \gamma \frac{\Delta y'}{\Delta x'} = \gamma \tan\theta'$$

Ομάδα 9.2. Σχετική Ταχύτητα

<u>Άσκηση 9.2.1.</u>

Θεωρούμε δύο αδρανειακούς παρατηρητές O_1 και O_2 ο πρώτος ακίνητος στο σύστημα εργαστηρίου και ο δεύτερος κινούμενος με ταχύτητα υ. Να βρεθεί η ταχύτητα v που πρέπει να έχει ένας τρίτος παρατηρητής O για να βλέπει και τους δύο παρατηρητές να απομακρύνονται από αυτόν με αντίθετες ταχύτητες.



Λύση

Η ταχύτητα του Ο ως προς O_1 είναι v.
Η ταχύτητα του O_1 ως προς Ο είναι -v.
Η ταχύτητα του O_2 ως προς Ο είναι v.
Η ταχύτητα του O_2 ως προς O_1 είναι υ.
Από το νόμο μετασχηματισμού της ταχύτητας έχουμε:

$$\upsilon_{O_2O_1} = \frac{\upsilon_{O_2O} + \upsilon_{OO_1}}{1 + \frac{\upsilon_{O_2O}\upsilon_{OO_1}}{c^2}} \Rightarrow \upsilon = \frac{v + v}{1 + \frac{vv}{c^2}}$$

την τελευταία σχέση επιλύουμε ως προς v.

Ομάδα 9.3. Τετραταχύτητα - Τετραορμή

Άσκηση 9.3.1.

Ένα σωματίδιο έχει ως προς κάποιο σύστημα συντεταγμένων τετραταχύτητα u και ταχύτητα $\vec{v}$. Να εκφράσετε:

i) Το u^0 συναρτήσει του $\beta = \frac{|\vec{v}|}{c}$

ii) Τα u^i συναρτήσει των $\beta^i = \frac{v^i}{c}$

iii) Το u^0 συναρτήσει των u^i.

iv) Τον διαφορικό τελεστή $\frac{d}{d\tau}$ συναρτήσει του $\frac{d}{dt}$ και του $\vec{v}$

v) Το v^i συναρτήσει των u^i

vi) Το v συναρτήσει του u^0

Λύση

i) και ii)
Α Τρόπος

Ισχύει ότι $u^0 = \frac{dx^0}{d\tau}$

$$dS^2 = -(dx^0)^2 + d\vec{x}^2 \Rightarrow -c^2 d\tau^2 = -(dx^0)^2 + v^2 dt^2 \Rightarrow -c^2 d\tau^2 = -(dx^0)^2 + (dx^0)^2 \frac{v^2}{c^2} \Rightarrow$$

$$\frac{dx^0}{d\tau} = \frac{c}{\sqrt{1-\beta^2}} \Rightarrow u^0 = \gamma c$$

$$u^i = \frac{dx^i}{d\tau} = \frac{dx^i}{dt}\frac{dt}{d\tau} = v^i \frac{1}{c}\frac{dx^0}{d\tau} = \beta^i u^0 = \gamma c \beta^i \Rightarrow u^i = \gamma c \beta^i$$

Β Τρόπος
Στο σύστημα ηρεμίας Ο΄ του σωματιδίου είναι:

$$dS^2 = -(dx'^0)^2 + d\vec{x}'^2 \Rightarrow -c^2 d\tau^2 = -(dx'^0)^2 + 0 \Rightarrow \frac{dx'^0}{d\tau} = c \Rightarrow u'^0 = c$$

Από τον νόμο μετασχηματισμού της τετραταχύτητας έχουμε

$$U = \Lambda U' \Rightarrow U = \begin{bmatrix} \gamma & \gamma\beta^T \\ \gamma\beta & \Delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma c \\ \gamma\beta c \end{bmatrix} \Rightarrow u^0 = \gamma c \text{ και } u^i = \gamma c \beta^i$$

iii) $u^\alpha u_\alpha = -c^2 \Rightarrow u^0 u_0 + u^i u_i = -c^2 \Rightarrow -(u^0)^2 + u^i u_i = -c^2 \Rightarrow u^0 = \sqrt{c^2 + u^i u_i}$

iv) $\frac{d}{d\tau} = \frac{dt}{d\tau}\frac{d}{dt} = \frac{1}{c}\frac{dx^0}{d\tau}\frac{d}{dt} = \frac{u^0}{c}\frac{d}{dt} = \gamma\frac{d}{dt} \Rightarrow \frac{d}{d\tau} = \gamma\frac{d}{dt}$

v) $u^i = \gamma c \beta^i \Rightarrow u^i = u^0 v^i \Rightarrow v^i = \frac{u^i}{u^0} \Rightarrow v^i = \frac{u^i}{\sqrt{c^2 + u^i u_i}}$

vi) $u^0 = \gamma c \Rightarrow (u^0)^2 = \gamma^2 c^2 \Rightarrow (u^0)^2 = \frac{c^2}{1-\beta^2} \Rightarrow \beta = \frac{\sqrt{(u^0)^2 - c^2}}{u^0} \Rightarrow v = c\frac{\sqrt{(u^0)^2 - c^2}}{u^0}$

<u>Άσκηση 9.3.2.</u>

Αν δύο ΑΣΑ Σ_1 και Σ_2 κινούνται με ταχύτητες $\vec{v}_1$ και $\vec{v}_2$ ως προς ένα ΑΣΑ Σ ,δείξτε ότι η σχετική τους ταχύτητα $\vec{v}$ ικανοποιεί την σχέση:

$$\beta^2 = \frac{(\vec{\beta}_1 - \vec{\beta}_2)^2 - (\vec{\beta}_1 \times \vec{\beta}_2)^2}{(1 - \vec{\beta}_1.\vec{\beta}_2)^2}$$

<u>Λύση</u>

Στο Σ_1 η τετραταχύτητα της αρχής O_1 είναι $u_1 = \begin{bmatrix} c \\ 0 \end{bmatrix}$ και της αρχής O_2 είναι $u_2 = \begin{bmatrix} \gamma c \\ \gamma c \vec{\beta} \end{bmatrix}$

Επομένως το εσωτερικό τους γινόμενο είναι $u_1 u_2 = -\gamma c^2$

Στο Σ η τετραταχύτητα της αρχής O_1 είναι $u_1' = \begin{bmatrix} c\gamma_1 \\ \gamma_1 \vec{v}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c\gamma_1 \\ \gamma_1 c \vec{\beta}_1 \end{bmatrix}$ και της αρχής O_2 είναι $u_2' = \begin{bmatrix} c\gamma_2 \\ \gamma_2 c \vec{\beta}_2 \end{bmatrix}$

Επομένως το εσωτερικό τους γινόμενο είναι $u_1' u_2' = -\gamma_1\gamma_2 c^2 + c^2 \gamma_1\gamma_2 \vec{\beta}_1 \vec{\beta}_2$

Όμως το εσωτερικό γινόμενο είναι βαθμωτό μέγεθος και επομένως

$u_1' u_2' = u_1 u_2 \Rightarrow -\gamma_1\gamma_2 + \gamma_1\gamma_2 \vec{\beta}_1\vec{\beta}_2 = -\gamma \Rightarrow \gamma = \gamma_1\gamma_2(1 - \vec{\beta}_1\vec{\beta}_2)$

Όμως

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \Rightarrow \beta^2 = \frac{\gamma^2 - 1}{\gamma^2} = \frac{\gamma_1^2\gamma_2^2(1-\vec{\beta}_1\vec{\beta}_2)^2 - 1}{\gamma_1^2\gamma_2^2(1-\vec{\beta}_1\vec{\beta}_2)^2} = \frac{(1-\vec{\beta}_1\vec{\beta}_2)^2 - \gamma_1^{-2}\gamma_2^{-2}}{(1-\vec{\beta}_1\vec{\beta}_2)^2} \Rightarrow$$

$$\beta^2 = \frac{(1-\vec{\beta}_1\vec{\beta}_2)^2 - (1-\vec{\beta}_1^2)(1-\vec{\beta}_2^2)}{(1-\vec{\beta}_1\vec{\beta}_2)^2} = \frac{\vec{\beta}_1^2 + \vec{\beta}_2^2 - 2\vec{\beta}_1\vec{\beta}_2 + (\vec{\beta}_1\vec{\beta}_2)^2 - \vec{\beta}_1^2\vec{\beta}_2^2}{(1-\vec{\beta}_1\vec{\beta}_2)^2} \Rightarrow$$

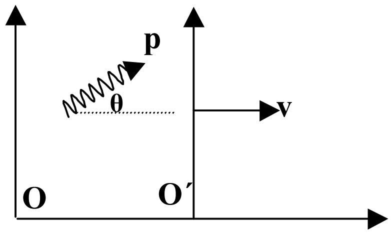
$$\beta^2 = \frac{(\vec{\beta}_1 - \vec{\beta}_2)^2 + (\vec{\beta}_1\vec{\beta}_2)^2 - \vec{\beta}_1^2\vec{\beta}_2^2}{(1-\vec{\beta}_1\vec{\beta}_2)^2}$$

Ισχύει η ταυτότητα

$$(\vec{a} \times \vec{b}).(\vec{c} \times \vec{d}) = (\vec{a}.\vec{c})(\vec{b}.\vec{d}) - (\vec{a}.\vec{d})(\vec{b}.\vec{c}) \Rightarrow (\vec{a} \times \vec{b})^2 = (\vec{a}.\vec{a})(\vec{b}.\vec{b}) - (\vec{a}.\vec{b})(\vec{b}.\vec{a}) = \vec{a}^2\vec{b}^2 - (\vec{a}.\vec{b})^2$$

$$\beta^2=\frac{(\vec\beta_1-\vec\beta_2)^2+(\vec\beta_1\, x\,\vec\beta_2)^2}{(1-\vec\beta_1\vec\beta_2)^2}$$

Άσκηση 9.3.3.



Αδρανειακός παρατηρητής O΄ κινείται με ταχύτητα υ σχετικά με τον O. Ένα φωτόνιο κινείται έτσι ώστε η ορμή του ως προς O να σχηματίζει γωνία θ με την διεύθυνση της κίνησης. Να βρεθεί η γωνία θ΄ στο O΄.
Η τετραορμή του φωτονίου στα O και O΄ αντίστοιχα είναι

$$P=\frac{1}{c}\begin{bmatrix}E\\ E\cos\theta\\ E\sin\theta\end{bmatrix}\quad\text{και}\quad P'=\frac{1}{c}\begin{bmatrix}E'\\ E'\cos\theta'\\ E'\sin\theta'\end{bmatrix}$$

Από τον νόμο μετασχηματισμού της τετραορμής έχουμε:

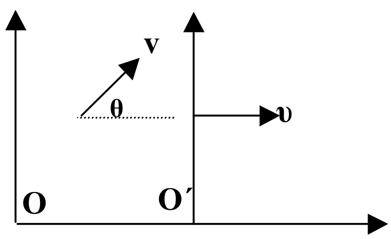
$$P'=\Lambda P\Rightarrow\begin{bmatrix}E'\\ E'\cos\theta'\\ E'\sin\theta'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\gamma & -\gamma\beta & 0\\ -\gamma\beta & \gamma & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}E\\ E\cos\theta\\ E\sin\theta\end{bmatrix}\Rightarrow$$

$$E'\sin\theta'=E\sin\theta$$
$$E'\cos\theta'=\gamma E(-\beta+\cos\theta)$$

Διαιρώντας τις παραπάνω σχέσεις κατά μέλη έχουμε:

$$\tan\theta'=\frac{\sin\theta}{\gamma(\cos\theta-\beta)}$$

Άσκηση 9.3.4.



Αδρανειακός παρατηρητής O΄ κινείται με ταχύτητα υ σχετικά με τον O. Ένα σωματίδιο A με μη μηδενική μάζα ηρεμίας κινείται έτσι ώστε η ταχύτητα του ως προς O να σχηματίζει γωνία θ με την διεύθυνση της κίνησης.
i) Να βρεθεί η γωνία θ΄ στο O΄.
ii) Να συγκρίνετε το αποτέλεσμα με το αντίστοιχο αποτέλεσμα στην περίπτωση που το σωματίδιο ήταν φωτόνιο

Λύση

i)
Έστω $\vec v$ η ταχύτητα του σωματιδίου ως προς O και $\vec v'$ η ταχύτητα του ως προς O΄. Από τον νόμο μετασχηματισμού της ταχύτητας έχουμε:

$$\vec\upsilon_{A(O')}=\frac{\vec\upsilon_{A(O)}+\gamma\vec\upsilon_{O(O')}+\dfrac{(\gamma-1)(\vec\upsilon_{A(O)}\vec\upsilon_{O(O')})}{\vec\upsilon^2_{O(O')}}\vec\upsilon_{O(O')}}{\gamma\left(1+\dfrac{\vec\upsilon_{A(O)}\vec\upsilon_{O(O')}}{c^2}\right)}\Rightarrow\vec v'=\frac{\vec v-\gamma\vec\upsilon+\dfrac{(\gamma-1)(\vec v\vec\upsilon)}{\upsilon^2}\vec\upsilon}{\gamma\left(1-\dfrac{\vec v\vec\upsilon}{c^2}\right)}$$

Το εσωτερικό γινόμενο $\vec v\vec\upsilon=v\upsilon\cos\theta$

Παίρνοντας την x συνιστώσα της $\vec{v}'$ έχουμε: $v'\cos\theta' = \dfrac{v\cos\theta - \gamma\upsilon + \dfrac{(\gamma-1)(v\upsilon\cos\theta)}{\upsilon^2}\upsilon}{\gamma(1-\dfrac{\vec{v}\vec{\upsilon}}{c^2})} = \dfrac{\gamma(v\cos\theta-\upsilon)}{\gamma(1-\dfrac{\vec{v}\vec{\upsilon}}{c^2})}$

Παίρνοντας την y συνιστώσα της $\vec{v}'$ έχουμε:

$$v'\sin\theta' = \frac{v\sin\theta}{\gamma(1-\dfrac{\vec{v}\vec{\upsilon}}{c^2})}$$

Διαιρώντας τις δύο παραπάνω σχέσεις κατά μέλη

$$\tan\theta' = \frac{v\sin\theta}{\gamma(v\cos\theta-\upsilon)}$$

ii)

Αντικαθιστώντας στην τελευταία σχέση v=c έχουμε:

$$\tan\theta' = \frac{c\sin\theta}{\gamma(c\cos\theta-\upsilon)} = \frac{\sin\theta}{\gamma(\cos\theta-\beta)}$$

Η παραπάνω σχέση είναι ίδια με την τελική σχέση της προηγούμενης άσκησης.

Άσκηση 9.3.5.

Θεωρούμε δύο φωτόνια συχνοτήτων f_1 και f_2 που κινούνται στο σύστημα εργαστηρίου σε διευθύνσεις κάθετες μεταξύ τους.

Να βρεθεί η ταχύτητα που πρέπει να έχει ένας παρατηρητής O΄ για να βλέπει τα φωτόνια «ίδιου χρώματος» και με αντίθετες κατευθύνσεις κίνησης.

Στην συνέχεια να βρείτε τις συχνότητες των φωτονίων στο O΄.

Λύση

Δίχως βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι στο σ΄σύτημα εργαστηρίου τα φωτόνια 1 και 2 κινούνται κατά την θετική κατεύθυνση των αξόνων x και y αντιστοίχως.

Επειδή στο σύστημα του O΄ τα φωτόνια θα έχουν το ίδιο χρώμα θα έχουν και την ίδια συχνότητα f΄, την ίδια ενέργεια E΄ και επομένως το ίδιο μέτρο ορμής. Επειδή δε κινούνται αντίθετα η χωρική ορμή του συστήματος στο O΄ θα είναι μηδέν. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι το σύστημα του O΄ θα είναι το σύστημα κέντρου ορμής των δύο φωτονίων.

Η τετραορμή του συστήματος των δύο φωτονίων στο σύστημα εργαστηρίου είναι:

$$P = P_1 + P_2 = \frac{1}{c}\begin{bmatrix} E_1+E_2 \\ E_1 \\ E_2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Γνωρίζουμε ότι η ταχύτητα του κέντρου ορμής δίνεται από την σχέση:

$\vec{v} = \dfrac{c^2}{E}\vec{p}$ όπου E η ενέργεια του συστήματος και $\vec{p}$ η χωρική ορμή του συστήματος. Επομένως στην περίπτωσή μας

$$\vec{v} = \frac{c}{E_1+E_2}\begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Το μέτρο της ταχύτητας του O΄ είναι $v = |\vec{v}| = c\dfrac{\sqrt{E_1^2 + E_2^2}}{E_1 + E_2} \Rightarrow v = c\dfrac{\sqrt{f_1^2 + f_2^2}}{f_1 + f_2} < c$

Από τον νόμο μετασχηματισμού της τετραορμής του πρώτου φωτονίου έχουμε:

$$P_1' = \Lambda(\vec{v})P_1 \Rightarrow \begin{bmatrix} E' \\ .. \\ .. \\ .. \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & -\gamma\beta_1 & -\gamma\beta_2 & .. \\ .. & .. & .. & .. \\ .. & .. & .. & .. \\ .. & .. & .. & .. \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 \\ E_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow E' = \gamma(1-\beta_1)E_1 \Rightarrow f' = \gamma(1-\beta_1)f_1$$

Επειδή

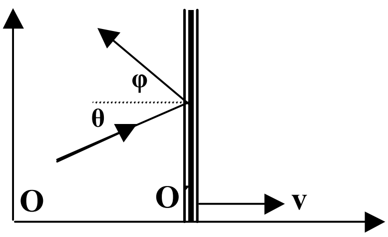
$$\beta = \frac{\sqrt{f_1^2 + f_2^2}}{f_1 + f_2} \Rightarrow 1 - \beta^2 = \frac{2f_1f_2}{(f_1 + f_2)^2} \Rightarrow \gamma = \frac{f_1 + f_2}{\sqrt{2f_1f_2}}$$

$$\beta_1 = \frac{f_1}{f_1 + f_2} \Rightarrow 1 - \beta_1 = \frac{f_2}{f_1 + f_2}$$

Επομένως $f' = \sqrt{\dfrac{f_1f_2}{2}}$

Ομάδα 9.4. Διατήρηση ορμής - ενέργειας

Άσκηση 9.4.1.



Ένας καθρέπτης κινείται με ταχύτητα v (στο σύστημα εργαστηρίου) κάθετη στο επίπεδό του. Μια μονοχρωματική δέσμη φωτονίων προσπίπτει στον καθρέπτη με γωνία πρόσπτωσης θ (στο σύστημα εργαστηρίου). Να βρεθούν

Α) Η γωνία ανάκλασης φ

Β) Η ενέργεια E΄ του φωτονίου μετά την ανάκλαση

Λύση

Η τετραορμή του φωτονίου στο σύστημα εργαστηρίου πριν την ανάκλαση είναι:

$$P_{\pi\rho\iota\nu} = \frac{1}{c}\begin{bmatrix} E \\ E\cos\theta \\ E\sin\theta \end{bmatrix}$$

Η τετραορμή του φωτονίου στο σύστημα ηρεμίας του καθρέπτη πριν την ανάκλαση είναι:

$$P_{\pi\rho\iota\nu}' = \Lambda(\upsilon)P_{\pi\rho\iota\nu} = \frac{1}{c}\begin{bmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} E \\ E\cos\theta \\ E\sin\theta \end{bmatrix} = \frac{1}{c}\begin{bmatrix} \gamma E(1-\beta\cos\theta) \\ \gamma E(\cos\theta - \beta) \\ E\sin\theta \end{bmatrix}$$

Κατά την ανάκλαση η ενέργεια του φωτονίου στο σύστημα ηρεμίας του καθρέπτη δεν μεταβάλλεται , η παράλληλη στον καθρέπτη συνιστώσα της ορμής δεν μεταβάλλεται και η κάθετη σε αυτόν συνιστώσα αντιστρέφεται.

Επομένως η τετραορμή του φωτονίου στο σύστημα ηρεμίας του καθρέπτη μετά την ανάκλαση είναι:

$$P'_{\mu\varepsilon\tau\alpha}=\frac{1}{c}\begin{bmatrix}\gamma E(1-\beta\cos\theta)\\ -\gamma E(\cos\theta-\beta)\\ E\sin\theta\end{bmatrix}$$

Επιστρέφοντας στο σύστημα εργαστηρίου

$$P_{\mu\varepsilon\tau\alpha}=\Lambda(-\upsilon)P'_{\mu\varepsilon\tau\alpha}=\frac{1}{c}\begin{bmatrix}\gamma & \gamma\beta & 0\\ \gamma\beta & \gamma & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\gamma E(1-\beta\cos\theta)\\ -\gamma E(\cos\theta-\beta)\\ E\sin\theta\end{bmatrix}=\frac{1}{c}\begin{bmatrix}\gamma^2 E(1+\beta^2-2\beta\cos\theta)\\ \gamma^2 E(2\beta-\beta^2\cos\theta-\cos\theta)\\ E\sin\theta\end{bmatrix}\Rightarrow$$

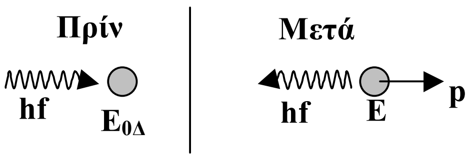
$$\frac{1}{c}\begin{bmatrix}E'\\ E'\cos\phi\\ E'\sin\phi\end{bmatrix}=\frac{1}{c}\begin{bmatrix}\gamma^2 E(1+\beta^2-2\beta\cos\theta)\\ \gamma^2 E(2\beta-\beta^2\cos\theta-\cos\theta)\\ E\sin\theta\end{bmatrix}\Rightarrow \tan\phi=\frac{\sin\theta}{\gamma^2(2\beta-\beta^2\cos\theta-\cos\theta)}$$

και $E'=\dfrac{E(1+\beta^2-2\beta\cos\theta)}{1-\beta^2}$

<u>Άσκηση 9.4.2.</u>

Ένα φωτόνιο με ενέργεια hf συγκρούεται με ένα διεγερμένο άτομο ακίνητο στο σύστημα εργαστηρίου . Μετά την κρούση το φωτόνιο έχει πάλι ενέργεια hf αλλά διεύθυνση αντίθετη προς την αρχική και το άτομο βρίσκεται στην βασική του κατάσταση. Να βρεθεί η ενέργεια διέγερσης του ατόμου στη διεγερμένη κατάσταση. Δίνεται η ενέργεια ηρεμίας στην βασική κατάσταση E_0 και η συχνότητα f.

<u>Λύση</u>



Έστω $E_{0\Delta}$ η ενέργεια ηρεμίας της διεγερμένης κατάστασης , E* η ενέργεια διέγερσης , p και E η ενέργεια και η ορμή του ατόμου μετά την κρούση

Προφανώς η ενέργεια διέγερσης είναι: $E^*=E_{0\Delta}-E_0$

Η αρχική και τελική τετραορμή του συστήματος φωτόνιο- άτομο είναι:

$$P_{\alpha\rho\chi}=\begin{bmatrix}\dfrac{E_{0\Delta}+hf}{c}\\ \dfrac{hf}{c}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{E_0+E^*+hf}{c}\\ \dfrac{hf}{c}\end{bmatrix}\qquad P_{\tau\varepsilon\lambda}=\begin{bmatrix}\dfrac{E+hf}{c}\\ \dfrac{-hf}{c}+p\end{bmatrix}$$

Από την αρχή διατήρησης της τετραορμής έχουμε:

$$E_0+E^*=E \qquad (1)$$

$$2hf=pc \qquad (2)$$

Από την σχέση ενέργειας ορμής για το άτομο μετά την κρούση προκύπτει ότι:

$$E^2=p^2c^2+E_0^2 \qquad (3)$$

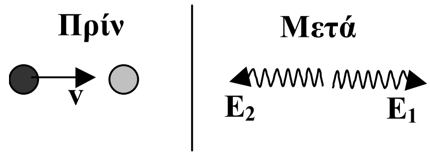
Αντικαθιστώντας τις (1) και (2) στην (3) βρίσκουμε την E*.

$$E^*=\sqrt{(2hf)^2+E_0^2}-E_0$$

Άσκηση 9.4.3.

Ποζιτρόνιο με ταχύτητα v = 0.8c συγκρούεται και εξαϋλώνεται με ακίνητο ηλεκτρόνιο και παράγονται δύο φωτόνια που κινούνται σε αντίθετες διευθύνσεις πάνω στην ευθεία του αρχικού ποζιτρονίου. Να βρεθούν οι ενέργειες των φωτονίων. Δίνεται η ενέργεια ηρεμίας του ηλεκτρονίου E_0.

Λύση



Το ποζιτρόνιο και το ηλεκτρόνιο έχουν την ίδια ενέργεια ηρεμίας E_0. Έστω E_1 και E_2 οι ενέργειες των δύο φωτονίων που παράγονται.

Υπολογίζουμε τον παράγοντα γ για το ποζιτρόνιο. $\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1-0.8^2}} = \dfrac{5}{3}$

Η αρχική και τελική τετραορμή του συστήματος είναι:

$$P_{\alpha\rho\chi} = \begin{bmatrix} \gamma mc + mc \\ \gamma mv \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{8}{3}mc \\ \frac{4}{3}mc \end{bmatrix} = \frac{1}{c}\begin{bmatrix} \frac{8}{3}E_0 \\ \frac{4}{3}E_0 \end{bmatrix} \qquad P_{\tau\varepsilon\lambda} = \frac{1}{c}\begin{bmatrix} E_1 + E_2 \\ E_1 - E_2 \end{bmatrix}$$

Επειδή η τετραορμή διατηρείται έχουμε

$$E_1 + E_2 = \frac{8}{3}E_0$$

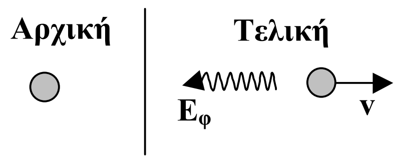
$$E_1 - E_2 = \frac{4}{3}E_0$$

Λύνοντας το σύστημα προκύπτει ότι: $E_1 = 2E_0$, $E_2 = \dfrac{2}{3}E_0$

Άσκηση 9.4.4.

Ένας «φωτονικός» πύραυλος χρησιμοποιεί ακτινοβολία σαν προωθητικό μέσο. Εάν η αρχική και η τελική μάζα ηρεμίας είναι m_i , m_f να δειχθεί ότι η τελική ταχύτητα v του πυραύλου ως προς το αρχικό αδρανειακό σύστημα δίδεται από την σχέση : $\dfrac{m_i}{m_f} = \left[\dfrac{c+v}{c-v}\right]^{1/2}$. Δίνεται αρχική ταχύτητα ίση με μηδέν

Λύση



Η αρχική και τελική τετραορμή του συστήματος είναι αντίστοιχα:

$$P_{\alpha\rho\chi} = \begin{bmatrix} m_i c \\ 0 \end{bmatrix} \qquad P_{\tau\varepsilon\lambda} = \begin{bmatrix} \gamma m_f c + p_\phi \\ \gamma m_f v - p_\phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma m_f c + p_\phi \\ \gamma m_f \beta c - p_\phi \end{bmatrix}$$

Επειδή η τετραορμή μένει σταθερή:

$$m_i c = \gamma m_f c + p_\phi$$

$$0 = \gamma m_f \beta c - p_\phi$$

Προσθέτοντας τις δύο εξισώσεις κατά μέλη έχουμε:

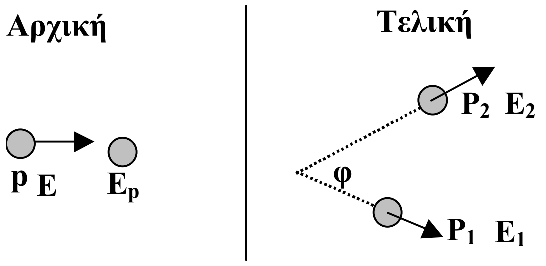
$$m_i = \gamma(1+\beta)m_f \Rightarrow \frac{m_i}{m_f} = \frac{\beta+1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{\beta+1}{\sqrt{(1-\beta)(1+\beta)}} = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} \Rightarrow \frac{m_i}{m_f} = \sqrt{\frac{c+v}{c-v}}$$

Άσκηση 9.4.5.

Ένα πρωτόνιο με κινητική ενέργεια K=437 MeV κρούεται ελαστικά με ακίνητο πρωτόνιο. Αν οι ενέργειες των δύο πρωτονίων μετά την κρούση είναι ίσες να βρεθεί η σχετική τους γωνία. Δίνεται η ενέργεια ηρεμίας του πρωτονίου $E_p = 938 \ \text{MeV}$.

Λύση

Έστω p και E η αρχική ορμή και ενέργεια του κινούμενου πρωτονίου, p_1 ,p_2 , E_1 , E_2 οι ορμές και οι ενέργειες των δύο πρωτονίων μετά την κροούση
Είναι $E=E_p+K$
Οι τετραορμή του συστήματος πριν και μετά την κρούση είναι αντίστοιχα:



$$P_{\pi\rho\iota\nu} = \begin{bmatrix} E+E_p \\ \vec{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K+2E_p \\ \vec{p} \end{bmatrix} \quad P_{\mu\varepsilon\tau\alpha} = \begin{bmatrix} E_1+E_2 \\ \vec{p}_1+\vec{p}_2 \end{bmatrix}$$

Από την σχέση ενέργειας ορμής για το αρχικά κινούμενο πρωτόνιο έχουμε:

$$p^2c^2 = E^2 - E_p^2 = (K+E_p)^2 - E_p^2 = K(K+2E_p) \qquad (1)$$

Από την αρχή διατήρησης της ενέργειας προκύπτει ότι:

$$E_1 = E_2 = E_p + \frac{K}{2}$$

Από την σχέση ενέργειας ορμής για τα πρωτόνια μετά την κρούση έχουμε:

$$p_1^2c^2 = p_2^2c^2 = E_1^2 - E_p^2 = (E_p + \frac{K}{2})^2 - E_p^2 = K(\frac{K}{2} + E_p) \qquad (2)$$

Από την αρχή διατήρησης της ορμής:

$$\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 \Rightarrow p^2 = p_1^2 + p_2^2 + 2p_1p_2\cos\phi \Rightarrow p^2c^2 = 2p_1^2c^2(1+\cos\phi) \qquad (3)$$

Αντικαθιστώντας τις (1) και (2) στην (3) έχουμε τελικά ότι:

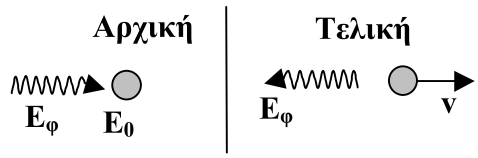
$$\cos\phi = \frac{K}{K+4E_p} = 0.104$$

Άσκηση 9.4.6.

Ένα φωτόνιο ενέργειας 100KeV σκεδάζεται από ακίνητο ελεύθερο ηλεκτρόνιο με γωνία 180^0. Να βρεθεί η ταχύτητα του ανακρούοντος ηλεκτρονίου. Δίνεται η ενέργεια ηρεμίας του ηλεκτρονίου $E_0 = 511\text{KeV}$.

Λύση

Έστω p και E η ορμή και η ενέργεια του ηλεκτρονίου μετά την κρούση , E_φ και E'_φ η ενέργεια του φωτονίου πριν και μετά την κρούση αντίστοιχα.
Η τετραορμή του συστήματος πριν και μετά την κρούση είναι αντίστοιχα:



$$P_{\alpha\rho\chi} = \begin{bmatrix} \dfrac{E_\phi+E_0}{c} \\ \dfrac{E_\phi}{c} \end{bmatrix} \qquad P_{\tau\varepsilon\lambda} = \begin{bmatrix} \dfrac{E+E'_\phi}{c} \\ p-\dfrac{E'_\phi}{c} \end{bmatrix}$$

Από την διατήρηση της τετραορμής έχουμε:

$$E_\phi + E_0 = E + E'_\phi$$
$$E_\phi = pc - E'_\phi$$

Με πρόσθεση κατά μέλη των παραπάνω εξισώσεων έχουμε:

$$2E_\phi + E_0 = E + pc \qquad (1)$$

Θέτουμε $E_1=2E_\varphi+E_0=711KeV$

Α τρόπος

Επομένως έχουμε το σύστημα: $\begin{array}{c} E_1 = E + pc \\ E^2 = (pc)^2 + E_0^2 \end{array}$

Η λύση του παραπάνω συστήματος είναι: $\begin{array}{c} E = \dfrac{E_1^2 + E_0^2}{2E_1} \\ pc = \dfrac{E_1^2 - E_0^2}{2E_1} \end{array}$

Όμως $\begin{array}{c} E = \gamma mc^2 \\ pc = \gamma mcv \end{array} \Rightarrow \dfrac{pc}{E} = \beta \Rightarrow \beta = \dfrac{E_1^2 - E_0^2}{E_1^2 + E_0^2} = 0.319$

Β Τρόπος

Επομένως η εξίσωση (1) γίνεται:

$$E_1 = \gamma mc^2 + \gamma mcv \Rightarrow E_1 = \gamma mc^2 + \gamma mc^2\beta = \gamma E_0(1+\beta) = E_0 \frac{1+\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \Rightarrow E_1 = E_0\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} \Rightarrow \beta = 0.319$$