Ασκήσεις στη Θεωρία της Ειδικής Σχετικότητας

Άσκηση 1: Έστω παρατηρητής Σ ως προς τον οποίο ένας πύραυλος απομακρύνεται με ταχύτητα V. Ο παρατηρητής Σ προκειμένου να μετρήσει την ταχύτητα του πυραύλου στέλνει ένα φωτεινό παλμό προς τον πύραυλο. Ο φωτεινός παλμός χτυπά εν μέρει στο οπίσθιο μέρος του πυραύλου και ανακλάται και εν μέρει στο πρόσθιο μέρος του πυραύλου και ανακλάται. Τα δύο ανακλώμενα σήματα επιστρέφουν στον παρατηρητή με χρονική διαφορά ΔT. Ποιο το μήκος του πυραύλου; Αν ο παρατηρητής δεν γνώριζε την ταχύτητα του πυραύλου αλλά γνώριζε τη συχνότητα του εκπεμπόμενου φωτεινού παλμού (μονοχρωματική ακτινοβολία) τι άλλο θα χρειαζόταν να μετρήσει ώστε να συμπεράνει την ταχύτητα του πυραύλου και έτσι να εκτιμήσει το μήκος του πυραύλου;

Άσκηση 2: Ολυμπιακή φλόγα.

Άσκηση 3: (από το βιβλίο του Rindler) Έχουμε κατασκευάσει ένα πρόγραμμα σε υπολογιστή το οποίο εκτελεί τυποποιημένους μετασχηματισμούς Lorentz. Για την ακρίβεια στην οθόνη εμφανίζονται 2 χωροχρονικά συστήματα $ct-x$ και $ct'-x'$. Ο χρήστης μπορεί να τοποθετήσει ένα οποιοδήποτε σημείο (γεγονός) στο πρώτο διάγραμμα και στη συνέχεια να απεικονίσει το σημείο αυτό στο τονούμενο διάγραμμα μετασχηματίζοντας τις συντεταγμένες του σύμφωνα με ένα μετασχηματισμό Lorentz η ταχύτητα του οποίου μπορεί να ρυθμιστεί. (α) Καθώς αλλάζουμε την ταχύτητα του μετασχηματισμού πώς κινείται η εικόνα του αρχικού σημείου στο τονούμενο διάγραμμα; (β) Δείξτε ότι η απεικόνιση 3 συγγραμικών σημείων είναι και πάλι 3 συγγραμικά σημεία. (γ) Δείξτε ότι γραμμές που σχηματίζουν γωνία $45°$ με τον άξονα των x σχηματίζουν την ίδια γωνία και με τον άξονα των x'.

Άσκηση 4: Θέλουμε να υπολογίσουμε το συνολικό μετασχηματισμό προώθησης ως αποτέλεσμα N διαδοχικών μετασχηματισμών προώθησης κατά μήκος του άξονα x με ταχύτητα u ο καθένας. (α) Περιγράψτε πώς το τελικό σύστημα συντεταγμένων (ύστερα από όλους τους μετασχηματισμούς) κινείται σε σχέση με το αρχικό. (β) Δείξτε γιατί μπορούμε να γράψουμε τον πίνακα του κάθε μετασχηματισμού προώθησης ως

$$L_{ij} = \begin{pmatrix} \cosh\phi & -\sinh\phi & 0 & 0 \\ -\sinh\phi & \cosh\phi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Πώς συνδέεται η γωνία ϕ με την ταχύτητα u; (γ) Εκμεταλλευόμενοι τις ταυτότητες $\cosh a \cosh b + \sinh a \sinh b = \cosh(a+b)$ και $\sinh a \cosh b + \sinh b \cosh a = \sinh(a+b)$ υπολογίστε το αποτέλεσμα των N μετασχηματισμών. (δ) Πώς συνδέεται η ταχύτητα που αντιστοιχεί στο συνολικό μετασχηματισμό με την ταχύτητα του κάθε μετασχηματισμού u; (ε) Δείξτε ότι στο όριο που $u << c$, και $Nu << c$ ο συνολικός μετασχηματισμός αντιστοιχεί σε ταχύτητα Nu (Γαλιλαϊκή πρόσθεση ταχυτήτων).

Άσκηση 5: Υπολογίστε το αποτέλεσμα τεσσάρων διαδοχικών μετασχηματισμών Lorentz κατά μήκος των αξόνων x,y,-x,-y αντίστοιχα, όλοι με ταχύτητα $u << c$. Κρατήστε μόνο όρους τάξης u^2/c^2 στις εκφράσεις σας. Ποιο είναι το συμπέρασμά σας σχετικά με το πώς είναι στραμμένοι οι χωρικοί άξονες του συστήματος που κινείται σε σχέση με το αρχικό ως αποτέλεσμα των τεσσάρων διαδοχικών μετασχηματισμών;

Άσκηση 6: Το παράδοξο του γκαράζ. Έστω ένα αυτοκίνητο με μήκος L το οποίο κατευθύνεται προς ένα γκαράζ το οποίο έχει μήκος ακριβώς L με σχετικιστική ταχύτητα. Σύμφωνα με το σύστημα του γκαράζ το αυτοκίνητο θα συσταλθεί και όταν το μπροστινό του σημείο ακουμπήσει στον εσωτερικό τοίχο κλείνει η πίσω πόρτα του γκαράζ και όλο το αυτοκίνητο βρίσκεται μέσα χωρίς να του προξενήσει καμία ζημιά η πόρτα καθώς κλείνει. Στο σύστημα του αυτοκινήτου το γκαράζ συστέλλεται και όταν θα κλείσει η πόρτα το αυτοκίνητο δεν θα έχει μπει ολόκληρο μέσα στο γκαράζ. Επομένως η πόρτα θα προξενήσει ζημιές στο αμάξι. Είναι πράγματι έτσι τα πράγματα; Τι τελικά θα συμβεί; Κατασκευάστε ένα χωροχρονικό διάγραμμα όπου να σημειώνονται όλα τα γεγονότα.

Άσκηση 7: Το παράδοξο των διδύμων. Δύο δίδυμα αδέλφια όταν φθάνουν σε ηλικία 20 ετών χωρίζουν. Ο ένας παραμένει πάνω στη Γη, που για ευκολία θα θεωρήσουμε ότι αποτελεί αδρανειακό σύστημα αναφοράς, ενώ ο άλλος φεύγει σε διαστημική αποστολή με ένα πύραυλο που κινείται ευθύγραμμα με ταχύτητα

0.8c. Είκοσι χρόνια αργότερα σύμφωνα με τον εναπομείνοντα αδελφό ο ταξιδιώτης αντιστρέφει τη φορά της κίνησης του και επιστρέφει και πάλι στη Γη με την ίδια ταχύτητα. Θα έχουν τα δύο αδέλφια όταν ξανασυναντηθούν την ίδια ηλικία; Γιατί όχι; Αποδείξτε ότι ο ιδιόχρονος ενός παρατηρητή που "ζει" δύο συγκεκριμένα γεγονότα είναι μέγιστος όταν αυτός δεν απομακρύνεται καθόλου χωρικά από τη θέση που συμβαίνουν αυτά τα γεγονότα.

Άσκηση 8: Το χωροχρονικό μήκος στις συντεταγμένες x, t έχει τη μορφή $ds^2 = -dt^2 + dx^2$. Αν αλλάξουμε συντεταγμένες και χρησιμοποιήσουμε τις $u = t-x, v = t+x$, τι μορφή έχει το χωροχρονικό μήκος; Η μετρική του Minkowski μένει ίδια στις νέες συντεταγμένες; Ένα διάνυσμα στο χώρο των $t-x$ έχει συντεταγμένες $A_t = 1, A_x = 1$. Ποιες οι συντεταγμένες του διανύσματος στο χώρο $u-v$; Υπολογίστε το μέτρο αυτού του διανύσματος στα δύο συστήματα συντεταγμένων.

Άσκηση 9: Βρείτε την (υπερ)επιφάνεια η οποία είναι κάθετη στο χρονοειδές τετράνυσμα $A^\mu = (2, 1, 0, 0)$.

Άσκηση 10: Αποπλάνηση φωτός (light aberration) Σε ένα σύστημα αναφοράς ακίνητο ως προς τα αστέρια παρατηρούμε ένα αστέρι στη θέση $\theta = \theta_0$ από την κατακόρυφο z. Αν ένα δεύτερο σύστημα κινείται οριζόντια σε σχέση με το πρώτο (στο επίπεδο $x-y$) με ταχύτητα $\vec{\beta} = (a, b, 0)$, υπολογίστε σε τι γωνία ως προς την κατακόρυφο του νέου συστήματος θα φαίνεται το αστέρι. Πόσο θα αλλάζει η κλίση ενός τηλεσκοπίου που παρατηρεί έναν συγκεκριμένο αστέρα κατά τη διάρκεια του χρόνου;

Άσκηση 11: Μια κυλινδρική ράβδος τοποθετημένη κατά τον x-άξονα στρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα. Τι σχήμα θα φαίνεται να έχει μια χρωματιστή ρίγα κατά μήκος της ράβδου σε ένα σύστημα που κινείται ως προς το σύστημα της ράβδου με ταχύτητα u κατά μήκος του x άξονα. [Υπόδ: Θεωρήστε τις διατομές της ράβδου ως ρολόγια των οποίων ο δείκτης καταλήγει στη ρίγα.]

Άσκηση 12: Στο σύστημα που μια λάμπα ακινητεί στο κέντρο των αξόνων το χωρικό σχήμα του μετώπου κύματος σε μια δεδομένη χρονική στιγμή είναι μια σφαίρα. Τι σχήμα έχει σε κινούμενο σύστημα το σύνολο αυτών των γεγονότων;

Άσκηση 13: Θέλουμε να υπολογίσουμε τη μέγιστη απόσταση στην οποία μπορεί να φθάσει μια διαστημική αποστολή σε διάστημα μια ανθρώπινης ζωής αν επιταχύνεται συνεχώς με σταθερή επιτάχυνση ίση με 1 g. (α) Δείξτε ότι μια παραμετρική κοσμική γραμμή της μορφής

$$x = \frac{1}{a}\cosh(a\phi)\ ,\ ct = \frac{1}{a}\sinh(a\phi)$$

αντιπροσωπεύει μια κίνηση με ταχύτητα μεταβαλλόμενη αλλά συνεχώς μικρότερη του c. (β) Γνωρίζοντας ότι το χωροχρονικό μήκος σχετίζεται με τον ιδιόχρονο μέσω της σχέσης $-dx^2 + c^2dt^2 = c^2d\tau^2$, βρείτε το φυσικό νόημα της παραμέτρου ϕ στις παραπάνω παραμετρικές εξισώσεις κίνησης. (γ) Δείξτε ότι αυτές οι εξισώσεις κίνησης αντιπροσωπεύουν τετραεπιτάχυνση σταθερού μέτρου. (δ) Προσδιορίστε την παράμετρο a ώστε η νευτώνεια επιτάχυνση (d^2x/dt^2) για $t \simeq 0$ να είναι ίση με g. (Χρησιμοποιήστε τα αναπτύγματα $\sinh\epsilon \cong \epsilon,\ \cosh\epsilon \cong 1 + \epsilon^2/2$, ώστε να καταλήξετε στο γνωστό νευτώνειο νόμο για την επιταχυνόμενη κίνηση.) (ε) Υποθέτωντας ότι μια ανθρώπινη ζωή έχει διάρκεια 100 χρόνια, υπολογίστε τη συνολική διαδρομή που θα εκτελέσει η αποστολή. [Δίδονται 1 χρόνος $= 3 \times 10^7\ s,\ g = 10\ m/s^2,\ c = 3 \times 10^8\ m/s,\ \cosh 100 \simeq 1.3 \times 10^{43}$.] (στ) Θεωρείτε ότι υπάρχει κανένα εμπόδιο κατ' αρχάς στον αποικισμό του Σύμπαντος;

Άσκηση 14: Δεδομένων των τετραταχυτήτων δύο παρατηρητών υπολογίστε τη σχετική ταχύτητα αυτών.

Άσκηση 15: Έστω δύο παρατηρητές που κινούνται κατά μήκος δύο κοσμικών γραμμών με τετραταχύτητες u_1^μ και u_2^μ αντίστοιχα. Τη χρονική στιγμή $\tau_1 = 0$ ο πρώτος παρατηρητής στέλνει ένα φωτεινό παλμό τον οποίο λαμβάνει ο δεύτερος και θέτει στο ρολόι του χρόνο ίσο με μηδέν. Αυτό γίνεται σε περιοδικά χρονικά διαστήματα ως προς τον πρώτο. Να υπολογιστεί η σχέση $\tau_2(\tau_1)$ μέχρι δεύτερη τάξη ως προς τ_1.

Άσκηση 16: Αποδείξτε ότι δεν είναι δυνατόν ένα φωτόνιο να διασπαστεί αυθόρμητα σε ένα ηλεκτρόνιο και ένα ποζιτρόνιο. Είναι όμως δυνατόν να συμβεί η παραπάνω αντίδραση όταν το φωτόνιο προσπέσει επάνω σε σωματίδιο με μάζα.

Άσκηση 17: Υπολογίστε τη σχέση μεταξύ ενέργειας και γωνίας σκέδασης ενός από τα δύο φωτόνια που προκύπτουν αν ένα ενεργητικό ποζιτρόνιο πέσει επάνω σε ένα ακίνητο ηλεκτρόνιο και συμβεί εξαλωση.

Άσκηση 18: Ποια είναι η σχέση μεταξύ της κινητικής ενέργειας ενός σύυτήματος σωματιδίων στο εργαστήριο και στο σύστημα κέντρου μάζας.

Άσκηση 19: Ένα K-μεσόνιο προσπίπτει με κινητική ενέργεια 10GeV σε ένα ακίνητο πρωτόνιο, οπότε μετά την αντίδραση εκτός από τα αντιδρώντα εμφανίζονται ν π-μεσόνια. Υπολογίστε τον μέγιστο αριθμό των π-μεσονίων.

Άσκηση 20: Σωμάτιο με τετραορμή **P** παρατηρείται από παρατηρητή με τετραταχύτητα **U**. Υπολογίστε την ενέργεια του σωματιδίου που μετρά ο παρατηρητής, το μέτρο της 3-ορμής του, και το μέτρο της 3-ταχύτητάς του.

Άσκηση 21: Ένας αδρανειακός παρατηρητής Σ παρατηρεί ηλεκτρικό πεδίο $\vec{E} = (E, 0, 0)$ και μαγνητικό πεδίο $\vec{B} = (0, B, 0)$. Είναι δυνατόν ένας άλλος αδρανειακός παρατηρητής να βλέπει και τα δύο πεδία με ανεστραμένη φορά αλλά όχι κατ' ανάγκη ίδιο μέτρο, δηλαδή, $\vec{E}' = (-E', 0, 0)$ και $\vec{B}' = (0, -B', 0)$ (όπου E, B, E', B' θετικές ποσότητες); Με πόση ταχύτητα πρέπει να κινείται ο παρατηρητής ώστε ένα από τα δύο πεδία να αλλάξει φορά αλλά να έχει το ίδιο με το αρχικό μέτρο. Τι συμβαίνει με το άλλο πεδίο τότε; Δίδονται οι σχέσεις μετασχηματισμού των πεδίων

$$\mathbf{E'}_{\parallel} = \mathbf{E}_{\parallel}, \qquad \mathbf{E'}_{\perp} = \gamma(\mathbf{E}_{\perp} + \mathbf{u} \times \mathbf{B})$$
$$\mathbf{B'}_{\parallel} = \mathbf{B}_{\parallel}, \qquad \mathbf{B'}_{\perp} = \gamma(\mathbf{B}_{\perp} - \frac{1}{c^2}\mathbf{u} \times \mathbf{E})$$