Τμήμα Φυσικής

Εξετάσεις στη Θεωρία της Ειδικής Σχετικότητας

31 Αυγούστου 2007

Θέμα 1: Διαστημικό όχημα εκκινεί από διαστημική πλατφόρμα και ακολουθεί την κοσμική γραμμή που περιγράφεται από την παραμετρική εξίσωση (σε μονάδες όπου $c = 1$):

$$
\begin{array}{lll}
t = a\sinh(\tau/a), & x = a\left[\cosh(\tau/a) - 1\right], & \text{για } 0 \le \tau < a\kappa \\
t = a\left[\sinh(\tau/a - 2\kappa) + 2\sinh(\kappa)\right], & x = a\left[-1 - \cosh(\tau/a - 2\kappa) + 2\cosh(k)\right], & \text{για } a\kappa \le \tau < 3a\kappa \\
t = a\left[\sinh(\tau/a - 4\kappa) + 4\sinh(\kappa)\right], & x = a\left[\cosh(\tau/a - 4\kappa) - 1\right], & \text{για } 3a\kappa \le \tau \le 4a\kappa
\end{array}
$$

όπου τ είναι κάποια μεταβλητή και a, κ κάποιες σταθερές παράμετροι. Δείξτε ότι:
(α) Οι 3 κλάδοι της παραπάνω παραμετρικής εξίσωσης αποτελούν μια συνεχή κοσμική γραμμή ελέγχοντας τη συνέχεια των συναρτήσεων $t(\tau)$ και $x(\tau)$ στα σημεία $\tau = a\kappa$ και $\tau = 3a\kappa$.
(β) Αποδείξτε ότι η παράμετρος τ είναι ο ιδιόχρονος του οχήματος.
(γ) Υπολογίστε την τετραταχύτητα και την τετραεπιτάχυνση του οχήματος σε κάθε χρονική στιγμή.
(δ) Περιγράψτε την κίνηση του οχήματος και υπολογίστε το απώτερο σημείο στο οποίο θα φθάσει το όχημα (ως προς την πλατφόρμα) κατά τη διάρκεια του ταξιδιού του.
(ε) Υπολογίστε τη διάρκεια του ταξιδιού για τον παρατηρητή στην πλατφόρμα και συγκρίνετέ την με τη διάρκεια στο διαστημόπλοιο.

Θέμα 2: Δύο φωτόνια, το ένα με ενέργεια E_1 και το άλλο με ενέργεια E_2 κινούνται επί του επιπέδου $x - y$ ενός αδρανειακού συστήματος Σ σχηματίζοντας ίσες γωνίες ϕ εκατέρωθεν του άξονα x. (α) Υπολογίστε την ταχύτητα του κέντρου ορμής του συστήματος. (β) Υπολογίστε την ενέργεια του κάθε φωτονίου στο σύστημα του κέντρου ορμής του συστήματος των φωτονίων. Υπάρχει τιμή της γωνίας φ για την οποία η ενέργεια των φωτονίων στο σύστημα αυτό να γίνεται μέγιστη;

Θέμα 3: (α) Σε ένα αδρανειακό σύστημα Σ με συντεταγμένες (l, x, y, z) ο τελεστής του D′ Alembert ορίζεται ως: $\Box^2 = -\frac{\partial^2}{\partial l^2} + \nabla^2$, όπου $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$. Θεωρήστε ένα άλλο αδρανειακό σύστημα Σ' το οποίο συνδέεται με το Σ με ένα μετασχηματισμό προώθησης κατά μήκος του κοινού άξονα x, x' με παράγοντα β και αποδείξτε ότι ο τελεστής του D′ Alembert είναι συναλοίωτος, δηλαδή ισχύει: $\Box'^2 = \Box^2$. (β) Θεωρήστε το μετασχηματισμό συντεταγμένων στο Σ:$(l, x, y, z) \to (u, v, y, z)$ όπου $u = \frac{1}{\sqrt{2}}(l + x), v = \frac{1}{\sqrt{2}}(l - x)$. (i) Εκφράστε τη μετρική του Lorentz $ds^2 = -dl^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$ στις νέες συντεταγμένες (u, v, y, z). (ii) Γράψτε τον τελεστή του D′ Alembert στις νέες συντεταγμένες. (iii) Δείξτε ότι ο μετασχηματισμός των συντεταγμένων $(l, x, y, z) \to (u, v, y, z)$ δεν είναι μετασχηματισμός Lorentz. Πού οφείλεται αυτό;

Θέμα 4: Φορτίο q κινείται κατά μήκος του άξονα x με ταχύτητα v σε κάποιο αδρανειακό σύστημα Σ. Στο ιδιοσύστημα Σ' του φορτίου το ηλεκτρικό πεδίο στο χώρο είναι $\vec{E} = q\vec{r}\,'/(4\pi\epsilon_0 r'^3)$, όπου $r' = (x'^2 + y'^2 + z'^2)^{1/2}$. (α) Υπολογίστε το ηλεκτρικό και το μαγνητικό πεδίο στο σύστημα Σ. (β) Ελέγξτε αν διατηρούνται τα αναλλοίωτα του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου. (γ) Μετράμε την ένταση του ηλεκτρικού πεδίου στο σύστημα Σ στη θέση $\vec{r} = (x, y, z)$ τη χρονική στιγμή $t = 0$. Δείξτε ότι το ηλεκτρικό πεδίο είναι ακτινικό με κέντρο την αρχή των αξόνων. (δ) Έστω ότι μετράμε το ηλεκτρικό πεδίο τη χρονική στιγμή $t = 0$ στις θέσεις $(x = 1, y = z = 0)$ και $x = z = 0, y = 1$. Πού είναι το πεδίο πιο ισχυρό; Με βάση τις απαντήσεις σας στα 2 τελευταία ερωτήματα σχεδιάστε ποιοτικά τις δυναμικές γραμμές του ηλεκτρικού πεδίου στο Σ τη στιγμή $t = 0$.

Δίδονται οι τύποι μετασχηματισμού των πεδίων.

$$
\vec{E}'_{\parallel} = \vec{E}_{\parallel}, \qquad \vec{E}'_{\perp} = \gamma(\vec{E}_{\perp} + \vec{u} \times \vec{B})
$$

$$
\vec{B}'_{\parallel} = \vec{B}_{\parallel}, \qquad \vec{B}'_{\perp} = \gamma(\vec{B}_{\perp} - \frac{1}{c^2}\vec{u} \times \vec{E})
$$

Καλή σας επιτυχία

Θέμα 1: (α) Πράγματι για $\tau = a\kappa$ οι 2 πρώτοι κλάδοι δίνουν $t = a\sinh(\kappa), x = a(\cosh(\kappa) - 1)$, ενώ για $\tau = 3a\kappa$ οι 2 τελευταίοι κλάδοι δίνουν $t = 3a\sinh(\kappa), x = a(\cosh(\kappa) - 1)$.

(β) Για κάθε κλάδο εύκολα διαπιστώνεται ότι

$$dt^2 - dx^2 = d\tau^2$$

επομένως η παράμετρος τ είναι ο ιδιόχρονοσ του οχήματος.

(γ)

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} = \begin{pmatrix} \cosh(\tau/a) \\ \sinh(\tau/a) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ για } 0 \le \tau < a\kappa$$

και αντίστοιχα

$$u^\mu = \begin{pmatrix} \cosh(\tau/a - 2\kappa) \\ -\sinh(\tau/a - 2\kappa) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ για } a\kappa \le \tau < 3a\kappa$$

και

$$u^\mu = \begin{pmatrix} \cosh(\tau/a - 4\kappa) \\ \sinh(\tau/a - 4\kappa) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ για } 3a\kappa \le \tau \le 4a\kappa$$

Εύκολα παρατηρεί κανείς ότι και η τετραταχύτητα είναι συνεχής στους 3 κλάδους. Τέλος η τετραεπιτάχυνση είναι

$$a^\mu = \frac{du^\mu}{d\tau} = \begin{pmatrix} (1/a)\sinh(\tau/a) \\ (1/a)\cosh(\tau/a) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ για } 0 \le \tau < a\kappa$$

και

$$a^\mu = \begin{pmatrix} (1/a)\sinh(\tau/a - 2\kappa) \\ -(1/a)\cosh(\tau/a - 2\kappa) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ για } a\kappa \le \tau < 3a\kappa$$

$$a^\mu = \begin{pmatrix} (1/a)\sinh(\tau/a - 4\kappa) \\ (1/a)\cosh(\tau/a - 4\kappa) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ για } 3a\kappa \le \tau \le 4a\kappa$$

(δ) Το μέτρο της τετραεπιτάχυνσης $\sqrt{-a^\mu a_\mu}$ είναι $1/a$ και αλλάζει πρόσημο παιρνώντας από τον ένα κλάδο στον άλλο. Αρχικά έχουμε επιτάχυνση προς τα εμπρός, μετά προς τα πίσω και τέλος πάλι προς τα εμπρός. Το απώτερο σημείο θα βρίσκεται όταν ενδιάμεσα η ταχύτητα μηδενίζεται και αρχίζει η επιστροφή, δηλαδή για $\tau = 2a\kappa$.

$$x_{\max} = 2a(\cosh(\kappa) - 1)$$

(ε)

$$\frac{t_{\text{ολ}}}{\tau_{\text{ολ}}} = \frac{4a\sinh(\kappa)}{4a\kappa} = \frac{\sinh(\kappa)}{\kappa}$$

Ο αριθμός αυτός είναι μεγαλύτερος από τη μονάδα και αυξάνεται εκθετικά όσο μεγαλώνει ο αριθμός κ. Επομένως για ένα ταξίδι που θα διαρκέσει πολλές μονάδες χρόνου (1/επιτάχυνση) ο χρόνος του ταξιδιού για τον ταξιδιώτη θα είναι πολύ μικρότερος από το χρόνο για την πλατφόρμα.

Θέμα 2: (α) Σε μονάδες $c = 1$,

$$\vec{V}_{KO} = \frac{\sum \vec{p_i}}{\sum E_i} = \frac{E_1(\cos\phi\hat{x} + \sin\phi\hat{y}) + E_1(\cos\phi\hat{x} - \sin\phi\hat{y})}{E_1 * E_2} = \cos\phi\hat{x} * \sin\phi\hat{y}\frac{E_1 - E_2}{E_1 + E_2}$$

(β) Η συνολική τετραορμή του συστήματος έχει μέτρο ανεξάρτητο του συστήματος αναφοράς. Στο σύστημα ΚΟ όμως η τετραορμή έχει τη μορφή

$$P^{\mu}_{\text{ολ}} = \begin{pmatrix} 2E\prime \\ 0 \end{pmatrix}$$

αφού η ολική ορμή είναι 0 και επομένως τα 2 φωτόνια έχουν ίσες και αντίθετες ορμές άρα και ενέργειες. Συνεπώς

$$\begin{pmatrix} E_1 + E_2 \\ E_1\hat{n}_1 + E_2\hat{n}_2 \end{pmatrix}^2 = -4E\prime^2$$

Εκτελώντας τις πράξεις

$$E = \sqrt{\frac{E_1E_2}{2}}\sqrt{1 - \hat{n}_1\cdot\hat{n}_2} = \sqrt{E_1E_2}\sin\phi$$

Το μέγιστο εμφανίζεται για $\phi = 0$ αφού τότε τα φωτόνια κινούνται αντίθετα στο αρχικό σύστημα και επομένως δεν παρουσιάζεται καμία μείωση της ενέργειας των φωτονίων εξαιτίας της x κοινής κίνησης των φωτονίων την οποία ακολουθεί το σύστημα κέντρου ορμής.

Θέμα 3: (α)

$$\frac{\partial}{\partial x'} = \frac{\partial x}{\partial x'}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial l}{\partial x'}\frac{\partial}{\partial l} = \gamma(\frac{\partial}{\partial x} + \beta\frac{\partial}{\partial l})$$

$$\frac{\partial}{\partial l'} = \frac{\partial l}{\partial l'}\frac{\partial}{\partial l} + \frac{\partial x}{\partial l'}\frac{\partial}{\partial x} = \gamma(\frac{\partial}{\partial l} + \beta\frac{\partial}{\partial x})$$

Έτσι

$$\Box'^2 = -\gamma^2(\frac{\partial}{\partial l} + \beta\frac{\partial}{\partial x})^2 + \gamma^2(\frac{\partial}{\partial x} + \beta\frac{\partial}{\partial l})^2 + (\frac{\partial}{\partial y})^2 + (\frac{\partial}{\partial z})^2 = \Box^2$$

(β)

$$dl = \sqrt{1/2}(du + dv), dx = \sqrt{1/2}(du - dv)$$

Έτσι (i) $ds^2 = -2du\ dv + dy^2 + dz^2$.

(ii)

$$\frac{\partial}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial l}\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial v}{\partial l}\frac{\partial}{\partial v} = \sqrt{1/2}(\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial v})$$

Αντίστοιχα

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial}{\partial v} = \sqrt{1/2}(\frac{\partial}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial v})$$

Έτσι

$$\Box^2 = (1/2)[-(\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial v})^2 + (\frac{\partial}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial v})^2] + (\frac{\partial}{\partial y})^2 + (\frac{\partial}{\partial z})^2 = -2\frac{\partial^2}{\partial u\partial v} + (\frac{\partial}{\partial y})^2 + (\frac{\partial}{\partial z})^2$$

(iii) Προφανώς δεν είναι μετασχηματισμός Lorentz γιατί η D$'$ Alembertian δεν κρατά τη μορφή της ως όφειλε σε ένα μετασχηματισμό Lorentz (ερώτημα α). Οι νέες συντεταγμένες δεν μπορούν να είναι ταυτόχρονα συντεταγμένες χρόνου και χώρου σε κάποιο σύστημα συντεταγμένων. Προσέξτε ότι η μετρική έχει αλλάξει μορφή στις νέες συντεταγμένες.

Θέμα 4: Φορτίο q κινείται κατά μήκος του άξονα x με ταχύτητα v σε κάποιο αδρανειακό σύστημα Σ. Στο ιδιοσύστημα Σ' του φορτίου το ηλεκτρικό πεδίο στο χώρο είναι $\vec{E} = q/(4\pi\epsilon_0 r')$, όπου $r' = (x'^2 + y'^2 + z'^2)^{1/2}$. (α) Υπολογίστε το ηλεκτρικό και το μαγνητικό πεδίο στο σύστημα Σ. (β) Ελέγξτε αν διατηρούνται τα αναλλοίωτα του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου. (γ) Μετράμε την ένταση του ηλεκτρικού πεδίου στο σύστημα Σ στη θέση $\vec{r} = (x, y, z)$ τη χρονική στιγμή $t = 0$. Δείξτε ότι το ηλεκτρικό πεδίο είναι ακτινικό με κέντρο την αρχή των αξόνων. (δ) Έστω ότι μετράμε το ηλεκτρικό πεδίο τη χρονική στιγμή $t = 0$ στις θέσεις $(x = 1, y = z = 0)$ και $x = z = 0, y = 1$. Πού είναι το πεδίο πιο ισχυρό; Με βάση τις απαντήσεις σας στα 2 τελευταία ερωτήματα σχεδιάστε ποιοτικά τις δυναμικές γραμμές του ηλεκτρικού πεδίου στο Σ τη στιγμή $t = 0$.

Δίδονται οι τύποι μετασχηματισμού των πεδίων.

$$\vec{E'}_\parallel = \vec{E}_\parallel, \qquad \vec{E'}_\perp = \gamma(\vec{E}_\perp + \vec{u}\times\vec{B})$$
$$\vec{B'}_\parallel = \vec{B}_\parallel, \qquad \vec{B'}_\perp = \gamma(\vec{B}_\perp - \frac{1}{c^2}\vec{u}\times\vec{E})$$

(α)

$$E_x = E'_x = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{x'}{(x'^2+y'^2+z'^2)^{3/2}} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\gamma(x-ut)}{(\gamma^2(x-ut)^2+y^2+z^2)^{3/2}}$$

$$E_y\hat{y} + E_z\hat{z} = \gamma\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{y\hat{y}+z\hat{z}}{(\gamma^2(x-ut)^2+y^2+z^2)^{3/2}}$$

$$Bx = B'_x = 0$$

$$B_y\hat{y}+B_z\hat{z} = \gamma(\vec{u}/c^2)\times\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{y'\hat{y}+z'\hat{z}}{(x'^2+y'^2+z'^2)^{3/2}} = \frac{\gamma uq}{4\pi\epsilon_0 c^2}\frac{y'\hat{z}-z'\hat{y}}{(x'^2+y'^2+z'^2)^{3/2}} = \frac{\gamma uq}{4\pi\epsilon_0 c^2}\frac{y\hat{z}-z\hat{y}}{(\gamma^2(x-ut)^2+y^2+z^2)^{3/2}}$$

(β) Βλέπουμε ότι $\vec{E}\cdot\vec{B} = 0$ όπως συνέβαινε και στο Σ' που δεν υπήρχε μαγνητικό πεδίο. Επίσης εκτελώντας τις πράξεις βλέπουμε ότι

$$\vec{E}^2 - c^2\vec{B}^2 = \left(\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\right)^2\frac{\gamma^2(x-ut)^2+\gamma^2(1-\beta^2)(y^2+z^2)}{(\gamma^2(x-ut)^2+y^2+z^2)^3} = \left(\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\right)^2\frac{\gamma^2(x-ut)^2+y^2+z^2}{(\gamma^2(x-ut)^2+y^2+z^2)^3} =$$
$$\left(\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\right)^2\frac{1}{(\gamma^2(x-ut)^2+y^2+z^2)^2} = \vec{E'}^2 = \vec{E'}^2 - c^2\vec{B'}^2$$

(γ) Για $t = 0$ βλέπουμε ότι $\vec{E} \propto (x, y, z) = \vec{r}$, δηλαδή ακτινικό πεδίο. Εφαρμόζοντας βρίσκουμε

$$\vec{E}(t=0, x=1, y=z=0) = \hat{x}\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\gamma}{(\gamma^2)^{3/2}} = \hat{x}\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{\gamma^2}$$
$$\vec{E}(t=0, y=1, x=z=0) = \hat{y}\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\gamma}{1^{3/2}} = \hat{y}\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\gamma$$

Κάθετα στη διεύθυνση κίνησης το πεδίο είναι γ^3 μεγαλύτερο. Οι δυναμικές γραμμές είναι ακτινικές, ξεκινούν από τη θέση $(0, 0, 0)$ και είναι πιο αραιές γύρω από τον άξονα x και πιο πυκνές κοντά στο επίπεδο $y - z$.