

# Νεο-λογικισμός: Προβλήματα και Προοπτικές

των Δημήτρας Χριστοπούλου και Στάθη Ψύλλου \*

This paper offers an overall appraisal of the neo-logicist programme in the philosophy of arithmetic. After a brief introduction to the basic theses of neologicism (sections 1 and 2), the paper examines in detail two charges against the view that numbers are objects. The first comes from reductionism (section 3) and the second from fictionalism (section 4). It is argued that reductionist approaches are compatible with realism with respect to numbers, provided that numbers are not taken to be *sui generis* entities. It is also argued that if the basic principle  $N=$  is taken to be an implicit definition it is a priori true. Section 5 argues that Dummett's critique of  $N=$  is consistent with the view that numbers are real but not *sui generis*. Section 5 examines the issue of the impredicativity of  $N=$ . Finally, section 7 discusses the Caesar Problem and claims that the solution to it offered by Wright and Hale is problematic.

## 1. Το πρόγραμμα του νεο-λογικισμού.

Ο νεολογικισμός αποτελεί την ανασυγκρότηση δύο βασικών θέσεων της φιλοσοφίας των μαθηματικών του Frege, α) της θέσης ότι οι αριθμοί<sup>1</sup> είναι αντικείμενα και β) της θέσης ότι οι γενικοί νόμοι της θεωρίας αριθμών είναι δυνατό να αποδειχθούν στη βάση λογικών νόμων και ορισμών.

Αφετηρία του νεολογικισμού είναι η θέση του Frege, η οποία εκφράζεται στην παρ.62 των Grundlagen ότι αυτό που χρειάζεται για να κατανοηθούν οι αριθμοί ως αναγνωρίσιμα αντικείμενα είναι προτάσεις ταυτότητας. Όπως θα έλεγε και ο Quine, δεν υπάρχει οντότητα χωρίς ταυτότητα. Απαιτείται δηλαδή να προσδιοριστεί το νόημα της πρότασης: «ο αριθμός που ανήκει στην έννοια F είναι ο ίδιος με τον αριθμό που ανήκει στην έννοια G»<sup>2</sup>. Για τον λόγο αυτό, οι νεολογικιστές υιοθετούν

---

\* Η Δημήτρα Χριστοπούλου είναι μαθηματικός και ολοκληρώνει την διδακτορική της διατριβή στη Φιλοσοφία των Μαθηματικών στο τμήμα ΜΙΘΕ του Πανεπιστημίου Αθηνών. Ο Στάθης Ψύλλος είναι αναπληρωτής καθηγητής του Πανεπιστημίου Αθηνών. Το πιο πρόσφατο βιβλίο του (*Causation and Explanation*, Acumen & McGill-Queens U.P., 2002) βραβεύτηκε με το *Past President's Award* της *British Society for the Philosophy of Science*.

<sup>1</sup> Σε όλη την έκταση του παρόντος άρθρου, αναφερόμαστε ιδιαίτερα σε *φυσικούς* αριθμούς οι οποίοι αποτελούν και το αντικείμενο μελέτης της θεωρίας αριθμών.

<sup>2</sup> Στη φιλοσοφία του Frege, ο αριθμός νοείται πάντοτε ως αριθμός μιας έννοιας F. Για παράδειγμα, ο αριθμός 9 είναι ο αριθμός της έννοιας *πλανήτης του ηλιακού συστήματος*, ο αριθμός 1 είναι ο αριθμός

την ισοδυναμία που εισήγαγε ο Frege ως πλαίσιακό ορισμό της έννοιας του πληθυκού αριθμού και την αναδεικνύουν ως θεμελιώδη αρχή του προγράμματός τους:

$$(N=) \quad (\forall F)(\forall G) [(Nx : Fx = Nx : Gx) \leftrightarrow (F \text{ 1-1 } G)]$$

Σε απλούστερα ελληνικά: «Ο αριθμός της έννοιας  $F$  ταυτίζεται με τον αριθμό της έννοιας  $G$  αν και μόνο αν οι έννοιες  $F$  και  $G$  βρίσκονται σε μία 1-1 αντιστοιχία»<sup>3</sup>.

Η ισοδυναμία  $N=$  αποκαλείται επίσης και «Αρχή του Hume» (Hume's Principle, σύντ. HP) επειδή, όπως ο ίδιος ο Frege αναφέρει στην παρ.63 των Grundlagen, συλλαμβάνει τη σκέψη του Hume σύμφωνα με την οποία δύο αριθμοί ταυτίζονται όταν καθένας απ' αυτούς έχει πάντοτε μια μονάδα που να αντιστοιχεί σε κάθε μονάδα του άλλου. Στη σκέψη του Hume, όπως και στη σκέψη του Frege, η έννοια της ταυτότητας των αριθμών συνδεόταν στενά με την έννοια μιας 1-1 αντιστοιχίας. Για να διερευνήσει την  $N=$ , ο Frege εισήγαγε επίσης την ισοδυναμία  $D=$  ως ένα ακόμα παράδειγμα πλαίσιακού ορισμού, με τη βοήθεια του οποίου εξηγείται η έννοια της διεύθυνσης μιας ευθείας. Σύμφωνα με αυτή την ισοδυναμία ισχύει:

---

της έννοιας *δορυφόρος της γης*, κλπ. Τότε λέμε ότι ο αριθμός 9 ανήκει στην έννοια *πλανήτη του ηλιακού συστήματος* και ότι ο αριθμός 1 ανήκει στην έννοια *δορυφόρος της γης*. Εδώ πρέπει να θυμηθούμε ότι στη φιλοσοφία του Frege, η σχέση μεταξύ αντικειμένου και έννοιας είναι η σχέση μεταξύ ορίσματος και συνάρτησης. Οι έννοιες όπως και οι συναρτήσεις έχουν κενά, γι αυτό παριστάνονται με ακόρεστες ή μη πλήρεις εκφράσεις της μορφής  $F( )$ . Αντιθέτως, τα αντικείμενα είναι πλήρεις οντότητες, οι οποίες αποτελούν την αναφορά ενικών όρων (ονομάτων). Εάν το όνομα ενός αντικειμένου καλύψει το κενό σε μια τέτοια ακόρεστη έκφραση (έννοια ή συνάρτηση) τότε προκύπτει μια πρόταση με συγκεκριμένη αληθοτιμή. Για παράδειγμα, η συνάρτηση-έννοια: *\_\_\_ είναι πλανήτη του ηλιακού συστήματος*. Αν τη θέση του κενού, πάρει το όνομα του αντικειμένου Δίας, τότε προκύπτει η αληθής πρόταση «ο Δίας είναι πλανήτη του ηλιακού συστήματος». Ας θεωρήσουμε επίσης τη συνάρτηση-έννοια *\_\_\_ είναι άρτιος*. Τότε τη θέση του κενού μπορεί να πάρει πχ. το αντικείμενο 8 ώστε να προκύψει η αληθής πρόταση «ο 8 είναι άρτιος».

<sup>3</sup>Σύμφωνα με την  $N=$ , ο αριθμός της έννοιας  $F$  ταυτίζεται με τον αριθμό της έννοιας  $G$  εάν και μόνο εάν οι έννοιες  $F$  και  $G$  είναι δυνατό να τεθούν σε 1-1 αντιστοιχία. Ας σημειωθεί ότι η έννοια της 1-1 αντιστοιχίας είναι λογική έννοια. Ο Frege επιχείρησε έναν ακριβέστερο ορισμό θεωρώντας τους αριθμούς ως κλάσεις κλάσεων: σύμφωνα με αυτόν τον ορισμό, ο αριθμός της έννοιας  $G$  είναι η κλάση όλων των κλάσεων που είναι ισάριθμες με την  $G$ . Στην περίπτωση αυτή προυποθέτουμε ότι δύο έννοιες  $F$  και  $G$  είναι ισάριθμες εάν και μόνο εάν οι εκτάσεις τους μπορούν να τεθούν σε 1-1 αντιστοιχία.

$(D=) \quad (\forall a)(\forall b) [D(a) = D(b) \text{ αν και μόνο αν } a/b]$

Σε απλούστερα ελληνικά: «Η διεύθυνση της ευθείας  $a$  ταυτίζεται με τη διεύθυνση της ευθείας  $b$  αν και μόνο αν οι ευθείες  $a, b$  είναι παράλληλες».

Οι δύο ισοδυναμίες παρουσιάζουν κατ' αρχήν μια αναλογία, δεδομένου ότι και στις δύο περιπτώσεις μια ταυτοτική πρόταση που περιλαμβάνει ένα νέο είδος όρου (αριθμός έννοιας, διεύθυνση), προσδιορίζεται με βάση μια σχέση ισοδυναμίας μεταξύ ενός διαφορετικού είδους πραγμάτων (1-1 αντιστοιχία, παραλληλία). Ομως, παρά την προφανή αναλογία μεταξύ των δύο ισοδυναμιών, μία σημαντική διαφορά έγκειται στο γεγονός ότι ο αριθμητικός τελεστής  $N( )$  στην πρώτη ισοδυναμία εφαρμόζεται σε έννοιες (ο αριθμός της έννοιας ...) ενώ ο τελεστής διεύθυνσης  $D( )$  στη δεύτερη ισοδυναμία, εφαρμόζεται σε αντικείμενα (η διεύθυνση της ευθείας ...). Επίσης, ενώ το δεύτερο μέλος της ισοδυναμίας  $N=$  αφορά σε μια 1-1 αντιστοιχία μεταξύ δύο εννοιών, το δεύτερο μέλος της ισοδυναμίας  $D=$  αφορά στην παραλληλία δύο ευθειών. Επομένως οφείλουμε να παρατηρήσουμε ότι στην περίπτωση της  $N=$ , το δεύτερο μέλος εκφράζει μια σχέση μεταξύ δύο εννοιών και όχι μεταξύ δύο αντικειμένων, αποτελεί δηλαδή μια πρόταση 2ης τάξεως. Κατά συνέπεια, η ισοδυναμία  $N=$  ή (όπως διαφορετικά συνηθίζεται να καλείται) η  $HP$ , είναι μια καθολικά ποσοδεικτούμενη ισοδυναμία 2ης τάξης.

Η σπουδαιότητα της  $N=$  είναι πολύ μεγάλη, αφού ο Crispin Wright στο έργο του *Frege's Conception of Numbers as Objects* απέδειξε ότι η συγκεκριμένη αρχή μαζί με τη λογική 2ης τάξης αποτελούν τη βάση ενός συνεπούς συστήματος από το οποίο μπορούν να παραχθούν τα αξιώματα Peano της αριθμητικής (μεταξύ των οποίων και το αξίωμα ότι για κάθε φυσικό αριθμό υπάρχει πάντοτε ο διάδοχός του) (1983, 158-169). Το συμπέρασμα αυτό, το οποίο αποτελεί ένα είδος δικαίωσης του λογικισμού, αναφέρεται συχνά στη βιβλιογραφία ως *Θεώρημα Frege* ενώ κάποιες ιδέες για την παραγωγή του ίδιου συμπεράσματος είχαν παλαιότερα αναφερθεί από τους Parsons (1964, 194) και Smiley (1981, 54).

Η θεώρηση των φυσικών αριθμών ως υπαρκτών αντικειμένων είναι η βάση για την ανάπτυξη μιας συγκεκριμένης άποψης για τον μαθηματικό ρεαλισμό. Σύμφωνα με τον Wright:

Η θεωρία του Frege ότι οι αριθμοί είναι αντικείμενα δεν πρέπει να υποβαθμίζεται ως τέχνασμα. Πρόκειται για την αντίληψη ότι οι αριθμοί είναι αντικείμενα σύμφωνα με το τι είναι (ή θα έπρεπε να είναι) ο κανονικός τρόπος κατανόησης του όρου... (2001, 153).

## **2. Η συντακτική συμπεριφορά των αριθμητικών όρων.**

Αποτελεί γενική διαπίστωση, ήδη από τον Frege, ότι οι αριθμητικοί όροι συμπεριφέρονται στις προτάσεις τους με τον ίδιο τρόπο περίπου που συμπεριφέρονται τα ονόματα. Στις προτάσεις μάλιστα όπου οι αριθμητικές εκφράσεις εμφανίζονται με τη μορφή επιθετικών προσδιορισμών, υπάρχει δυνατότητα μιας διαφορετικής παρουσίασης των προτάσεων αυτών, όπου οι ίδιες αριθμητικές εκφράσεις έχουν τη θέση ενικών όρων. Η πρόταση «Ο πλανήτης Δίας έχει τέσσερις δορυφόρους» μπορεί να μετασχηματισθεί στην πρόταση: «Ο αριθμός των δορυφόρων του Δία είναι ο (ίδιος με τον) 4», όπου ο αριθμός 4 δεν εμφανίζεται πια με μορφή επιθετικού προσδιορισμού. Ένα άλλο χαρακτηριστικό των αριθμητικών εκφράσεων, το οποίο επισημαίνει ο Frege, είναι ότι οι αριθμητικές εκφράσεις εμφανίζονται, τόσο στη θεωρία αριθμών όσο και στην εφαρμοσμένη αριθμητική, σε πλήθος ταυτοτικών προτάσεων (εξισώσεων). Η ικανοποίηση ενός κριτηρίου ταυτότητας για τις αριθμητικές εκφράσεις είναι σημαντική για τον Frege διότι δεν είναι δυνατό να αποκτήσουμε κάποιου είδους εποπτεία ή παράσταση για τους αριθμούς, συνεπώς χρειαζόμαστε έναν τρόπο για να αναγνωρίζουμε έναν αριθμό ως τον ίδιο, κάθε φορά που χρησιμοποιούμε έναν συγκεκριμένο αριθμητικό όρο<sup>4</sup>. Αποτελεί βασική θέση του νεολογικισμού ότι η συντακτική συμπεριφορά των αριθμητικών όρων μέσα στις αντίστοιχες προτάσεις είναι τέτοια ώστε να τους κατατάσσει στην κατηγορία των ενικών όρων. Το χαρακτηριστικό αυτό κάνει τους αριθμητικούς όρους να συμπεριφέρονται ως δυνάμει ονόματα: φαίνεται ότι η αναφορά τους είναι οι αριθμοί. Είναι λοιπόν σημαντικό να δούμε το κατά πόσον αυτοί οι αριθμητικοί όροι είναι ενικοί όροι. Μια πρώτη προσπάθεια έγινε από τον Wright.

Ο Wright δοκίμασε αρχικά να ελέγξει την συγκεκριμένη συντακτική συμπεριφορά με βάση τα κριτήρια Frege για τους ενικούς όρους (χρήση του οριστικού άρθρου πριν

---

<sup>4</sup>Με αυτόν τον τρόπο, ο Frege διαχωρίζει τη θέση του τόσο από τον Mill όσο και από τον Kant, διότι σε αντίθεση με τους προηγούμενους, ο ίδιος δεν προυποθέτει την εποπτεία σε οποιαδήποτε μορφή (είτε εμπειρική είτε καντιανή) όταν πρόκειται για την αναγνώριση αντικειμένων. Αντίθετα, στη φιλοσοφία του Frege, η παρουσία αντικειμένων αναγνωρίζεται μέσα από τη συντακτική συμπεριφορά συγκεκριμένων όρων μέσα σε κατάλληλες προτάσεις.

από μία έκφραση, θέση υποκειμένου μέσα στην πρόταση, κριτήριο ταυτότητας). Σ' αυτά πρόσθεσε ένα επιπλέον κριτήριο, το οποίο αποδίδει στον Αριστοτέλη και το οποίο αποκαλεί «τεστ της ασυμμετρίας της άρνησης»: Ας θεωρήσουμε ότι η μεταβλητή A αντιστοιχεί σε κατηγορημα, ενώ η μεταβλητή C σε κάποιον ενικό όρο. Τότε, για κάθε κατηγορημα A υπάρχει ένα άλλο κατηγορημα B τέτοιο ώστε, οποτεδήποτε η συνάφεια του A με τον ενικό όρο C είναι αληθής, η συνάφεια του B με τον ενικό όρο C είναι ψευδής. Αυτό σημαίνει ότι το κατηγορημα B διαψεύδεται από όλα (και μόνο) τα αντικείμενα που επαληθεύουν το κατηγορημα A. Αρα το B είναι η άρνηση του A. Για παράδειγμα η άρνηση του κατηγορήματος 'είναι περιττός' είναι το κατηγορημα 'είναι άρτιος'. Ομως, ενώ για τα κατηγορήματα, ισχύει η αρχή της άρνησης, δεν ισχύει το ίδιο και για τους ενικούς όρους, δηλαδή για οποιονδήποτε ενικό όρο C, δεν υπάρχει ενικός όρος ο οποίος να αποτελεί την άρνηση του C. Για παράδειγμα, για τον ενικό όρο 'Gottlob Frege' δεν υπάρχει η άρνησή του. Σύμφωνα λοιπόν με το εν λόγω κριτήριο, για να κατατάξουμε μια έκφραση στην κατηγορία των ενικών όρων θα πρέπει να εξετάσουμε εάν ισχύει ή όχι η αρχή της άρνησης. Πράγματι, για τους αριθμητικούς όρους, όπως και για τα ονόματα, δεν υπάρχει άρνηση. Για παράδειγμα, δεν υπάρχει η άρνηση του '5' ούτε η άρνηση του αριθμού των πλανητών του ηλιακού μας συστήματος.

Οι Wright και Hale διαπίστωσαν ότι τα προαναφερθέντα κριτήρια δεν είναι ικανά από μόνα τους να διαχωρίσουν τους ενικούς όρους από άλλους τύπους εκφράσεων, δεδομένου ότι αόριστες ονοματικές περιγραφές (π.χ. 'τίγρης'), ποσοδεικτικές ('κάτι', 'καθετί', 'κανένας') και άλλες εκφράσεις ικανοποιούσαν ορισμένα ή όλα τα κριτήρια ελέγχου<sup>5</sup>, χωρίς όμως να αποτελούν ενικούς όρους. Νέα κριτήρια, όπως πχ. τα κριτήρια που είχαν προταθεί από τον Dummett<sup>6</sup> βοήθησαν πολύ σ' αυτό το σημείο,

---

<sup>5</sup>Για παράδειγμα, η αόριστη ονοματική περιγραφή «τίγρης» συνοδεύεται από το οριστικό άρθρο πχ. «η τίγρης είναι αιλουροειδής» και έχει θέση υποκειμένου, ενώ δεν υπάρχει η άρνησή της. Παρά το γεγονός ότι ικανοποιεί κάποια από τα κριτήρια που αναφέρθηκαν, δεν αποτελεί όμως ενικό όρο στην πρόταση που προηγήθηκε. Αντίθετα, σε άλλες περιπτώσεις, όπως πχ. στην πρόταση «η τίγρης βρυχάται αυτή τη στιγμή στο κλουβί της», η «τίγρης» είναι ενικός όρος που αναφέρεται σε μια συγκεκριμένη εκπρόσωπο του είδους.

<sup>6</sup>Σύμφωνα με τα κριτήρια του Dummett (1973, 59-60), για να αποτελεί η έκφραση t 'ενικό όρο' είναι αναγκαίο

I. Για κάθε πρόταση 'A(t)' (που περιέχει τον όρο t), να μπορούμε να συμπεράνουμε με εγκυρότητα ότι 'υπάρχει κάτι, τέτοιο ώστε A(αυτό)'

δεδομένου ότι μπορούσαν να αποκλείσουν από την κατηγορία των ενικών όρων, μια σειρά από ποσοδεικτικές εκφράσεις. Δεν ήταν κατάλληλα όμως για να αποκλείσουν τα κατηγορήματα. Ο Hale (1987, 15-44), αφού δοκίμασε διάφορους συνδυασμούς κριτηρίων και μετά από πολύ προσεκτική ανάλυση, κατέληξε (cf. 2001, 31-71) στο συμπέρασμα ότι ένας κατάλληλος συνδυασμός των κριτηρίων του Dummett και του αριστοτελικού κριτηρίου, μπορεί να θεωρηθεί επαρκής για τον διαχωρισμό των ενικών όρων από άλλους τύπους εκφράσεων. Ας θεωρήσουμε ότι οι αριθμητικοί όροι είναι όντως ενικοί όροι.

Πώς όμως, από τους ενικούς όρους οδηγούμαστε στα αντικείμενα; Ο Wright επισημαίνει ότι αν θέλουμε να ακολουθήσουμε την αρχή της συντακτικής προτεραιότητας του Frege, πρέπει να θέσουμε το συντακτικό επίπεδο ως πρότερο του οντολογικού: «είναι η συντακτική κατηγορία που είναι πρωταρχική, ενώ η οντολογική αποτελεί παράγωγο» (1983, 13, 51-52). Τι είναι αντικείμενα; Αντικείμενα είναι αυτά στα οποία αναφέρονται οι ενικοί όροι. Θα αποτελούσε όμως, αντιστροφή της σειράς προτεραιοτήτων που θέτει ο Frege, εάν ορίζαμε τους ενικούς όρους με βάση το γεγονός ότι αναφέρονται σε αντικείμενα. Πρώτα χρειάζεται να ελεγχθεί με καθαρά συντακτικά κριτήρια ότι συγκεκριμένες εκφράσεις συμπεριφέρονται ως ενικοί όροι και έπειτα να καταλήξουμε στο συμπέρασμα ότι όντως εκπληρώνοντας τον ρόλο τους ως ενικοί όροι, αναφέρονται σε αντικείμενα. Εδώ ωστόσο απαιτείται κάτι περισσότερο: η αλήθεια των αντίστοιχων προτάσεων. Δηλαδή, δύο συνθήκες πρέπει να ικανοποιούνται για να εξασφαλιστεί η αναφορά σε αντικείμενα: α) η συντακτική συμπεριφορά των αριθμητικών όρων ως ενικών όρων και β) η αλήθεια των αριθμητικών προτάσεων.

Με αυτό τον τρόπο μια οντολογική θέση εδράζεται αφενός σε καθαρά γλωσσικές-συντακτικές προϋποθέσεις και αφετέρου στο αληθές των αριθμητικών προτάσεων. Οπως αναφέρει ο Wright:

... όταν έχει θεμελιωθεί, με βάση το είδος των κριτηρίων που έχουν σχεδιασθεί, ότι μια δεδομένη κλάση όρων λειτουργούν ως ενικοί όροι και όταν έχει επιβεβαιωθεί ότι συγκεκριμένες προτάσεις

---

II. Από δύο προτάσεις 'A(t)' και 'B(t)' (που περιέχουν τον όρο t), να μπορούμε να συμπεράνουμε με εγκυρότητα ότι 'υπάρχει κάτι, τέτοιο ώστε A(αυτό) και B(αυτό)'

III. Να μπορούμε να συμπεράνουμε έγκυρα μία διάζευξη της μορφής 'A(t) ή B(t)' από την πρόταση 'είναι αληθές για το t ότι A(αυτό) ή B(αυτό)'

Είναι φανερό ότι οι αριθμητικοί όροι ικανοποιούν αυτά τα κριτήρια.

που τους περιέχουν είναι, σύμφωνα με κανονικά κριτήρια, αληθείς, τότε έπεται ότι αυτοί οι όροι πραγματικά αναφέρονται γνήσια. Και αφού είναι ενικοί όροι, η αναφορά τους θα είναι σε αντικείμενα. Δεν υπάρχει περαιτέρω ενδιαφέρουσα ερώτηση για το εάν τέτοιοι όροι πράγματι έχουν αναφορά, για το εάν υπάρχουν πραγματικά τέτοια αντικείμενα. ... Δεδομένων των σχετικών γεγονότων της συντακτικής δομής και της αλήθειας, δεν υπάρχει απλά, καμιά περαιτέρω συνεπής αμφισβήτηση για το θέμα. Δεν τίθεται κανένα ανεξάρτητο φιλοσοφικό ζήτημα για το εάν υπάρχει πραγματικά ένα τέτοιο αντικείμενο όπως ο αριθμός 7 ... (1983, 14).

Είναι χαρακτηριστική η βεβαιότητα του Wright όταν αναφέρεται στην πραγματικότητα των αριθμών-αντικειμένων:

...το γεγονός ότι η αριθμητική γλώσσα έχει τα συγκεκριμένα χαρακτηριστικά είναι αρκετό για να θεμελιώσει τον φυσικό αριθμό ως μια ειδική έννοια, του οποίου οι πραγματώσεις θα είναι αντικείμενα ... τόσο πραγματικά όσο και τα βουνά, τα ποτάμια και τα δέντρα. Και το ότι η έννοια (του αριθμού) έχει πραγματώσεις θεμελιώνεται στην αλήθεια των κατάλληλων αριθμητικών προτάσεων... (op.cit, 13).

Παρά, ωστόσο, τη βεβαιότητα του Wright, εξαιρετικό ενδιαφέρον παρουσιάζει η κριτική απέναντι στο οντολογικό επιχείρημα των νεολογικιστών για την ύπαρξη των αριθμών. Υπάρχουν τουλάχιστον δύο τρόποι με τους οποίους μπορεί κανείς να πλήξει το επιχείρημα: ο ένας είναι να αμφισβητήσει την ικανότητα των αριθμητικών όρων να αναφέρονται και ο δεύτερος είναι να αμφισβητήσει την αλήθεια των αριθμητικών προτάσεων. Και οι δύο μορφές αντίδρασης έχουν διατυπωθεί. Θα τις εξετάσουμε διαδοχικά.

### 3. Είναι οι αριθμοί *sui generis* οντότητες;

Είναι δυνατή μια ανάγνωση της  $N=$ , η οποία, σε αντίθεση με την ανάγνωση του νεολογικισμού, θεωρεί φαινομενική και τελικά παραπλανητική την συμπεριφορά των αριθμητικών εκφράσεων ως ενικών όρων που 'αναφέρονται' σε αντικείμενα. Ας συνοψίσουμε το επιχείρημα των νεολογικιστών. Οι νεολογικιστές υποστηρίζουν ότι η

$$N= (\forall F)(\forall G) [(Nx : Fx = Nx : Gx) \leftrightarrow (F \text{ I } - \text{ I } G)]$$

μας δίνει τη δυνατότητα να προσδιορίσουμε την τιμή αληθείας της αριστερής πρότασης, με βάση την τιμή αληθείας της δεξιάς πρότασης. Η αλήθεια της δεξιάς

πρότασης είναι ζήτημα της λογικής 2ης τάξης. Εάν η δεξιά πρόταση είναι αληθής τότε είναι και η αριστερή αληθής. Επειδή, επιπλέον, οι αριθμητικοί όροι που εμφανίζονται στην αριστερή αληθή πρόταση έχουν θέση ενικών όρων, έπεται ότι υπάρχουν αντικείμενα στα οποία οι αριθμητικοί όροι αναφέρονται. Μια πρώτη ένσταση σε αυτό το επιχειρήμα προέρχεται από μια ευρεία αναγωγιστική προσέγγιση. Μπορεί κανείς να αναγνώσει την  $N=$  ως εξής: η αριστερή πρόταση στην οποία εμφανίζονται οι υποτιθέμενοι ενικοί όροι είναι, μέσω της ίδιας ισοδυναμίας, μετατρέψιμη σε μια ισοδύναμη πρόταση (δεξιά), όπου οι όροι αυτοί έχουν πια εξαλειφθεί. Αλλά, εάν οι αριθμητικές εκφράσεις ήταν γνήσιοι ενικοί όροι, δεν θα υπήρχε δυνατότητα εξάλειψής τους. Το επιχειρήμα του αναγωγισμού είναι επομένως ότι η αναφορά των αριθμητικών όρων της αριστερής πρότασης σε αριθμούς είναι φαινομενική: αποτελεί απλώς ένα παραπλανητικό γραμματικό φαινόμενο. Εάν οι όροι της αριστερής πρότασης αναφέρονταν πραγματικά στους αριθμούς, τότε το ίδιο έπρεπε να συμβαίνει και με την ισοδύναμη δεξιά πρόταση, όπου όμως δεν υπάρχει η παραμικρή ένδειξη για κάτι τέτοιο. (Ομοίως, σε ότι αφορά τις διευθύνσεις, αποτελεί παραπλανητικό γραμματικό φαινόμενο ότι κάποιοι ενικοί όροι στην αριστερή πρόταση της ισοδυναμίας  $D=$  αναφέρονται σε διευθύνσεις-αντικείμενα, διότι εάν αυτό συνέβαινε πραγματικά, τότε το ίδιο θα έπρεπε να συμβαίνει και με την ισοδύναμή της δεξιά πρόταση).

Η αρχική απάντηση που δόθηκε στον αναγωγισμό είχε το χαρακτήρα αντιστροφής του ίδιου του επιχειρήματός του. Ο Wright, αντιστρέφοντας το αναγωγιστικό επιχειρήμα, απάντησε ότι θα μπορούσε κανείς να ισχυριστεί πως δεν είναι παραπλανητική η φαινομενική αναφορά σε διευθύνσεις (αντίστοιχα σε αριθμούς) των όρων της αριστερής πρότασης αλλά αντίθετα, είναι παραπλανητικό γραμματικό φαινόμενο η *απουσία* αναφοράς τους στη δεξιά πρόταση (1983, 31-2). Με την συγκεκριμένη τακτική, ο Wright προσπάθησε να στρέψει το ίδιο το επιχειρήμα των αναγωγιστών εναντίον τους. Στη συνέχεια όμως ακολουθήθηκε άλλη τακτική αντιμετώπισης του αναγωγιστικού επιχειρήματος, με βάση μια πληρέστερη κατανόηση των αντίστοιχων ισοδυναμιών. Σύμφωνα με το νέο τύπο απάντησης που προτάθηκε από τους Hale και Wright (2001, 165-7, 192-6), το γεγονός ότι η αριστερή και η δεξιά πρόταση είναι ισοδύναμες δεν σημαίνει υποχρεωτικά ότι περιλαμβάνουν αναφορές στα *ίδια* αντικείμενα. Αυτό που ορίζει η  $N=$  είναι απλώς ότι οι καταστάσεις αλήθειας των δύο προτάσεων δηλ. των  $[(Nx:Fx = Nx:Gx)]$  και  $[(F 1 -$



1 G)] είναι οι ίδιες. Θα πρέπει ωστόσο να δοθεί ιδιαίτερη προσοχή στη διάκριση μεταξύ της αναφοράς και της οντολογικής δέσμευσης. Δύο προτάσεις με τις ίδιες καταστάσεις αλήθειας, έχουν τις ίδιες οντολογικές δεσμεύσεις αλλά το γεγονός ότι η μία από αυτές περιλαμβάνει όρους με συγκεκριμένη αναφορά σε κάποια αντικείμενα δεν σημαίνει υποχρεωτικά ότι η ισοδύναμη (ως προς τις καταστάσεις αλήθειας) πρόταση περιλαμβάνει και αυτή ένα είδος αναφοράς προς τα *ίδια* αντικείμενα. Επομένως, ισχυρίζονται οι νεολογικιστές, το γεγονός ότι η δεξιά πρόταση δεν περιλαμβάνει αναφορά σε διευθύνσεις (αντίστ. σε αριθμούς) δεν σημαίνει και ότι δεν δεσμεύεται οντολογικά σε διευθύνσεις (αντίστ. αριθμούς).

Ας δούμε όμως πιο προσεκτικά την υποτιθέμενη κρίση που δημιουργείται στο συγκεκριμένο σημείο μεταξύ ρεαλισμού και αναγωγισμού. Η αλήθεια της αριστερής πρότασης  $[(Nx:Fx = Nx:Gx)]$  ακολουθεί την αλήθεια της δεξιάς  $[(F 1 - 1 G)]$ , δεδομένου ότι οι δύο προτάσεις έχουν τις ίδιες καταστάσεις αλήθειας. Ο Wright θεωρεί ότι οι ενικοί όροι της αληθούς αριστερής πρότασης αναφέρονται σε πραγματικά αντικείμενα, εκπληρώνοντας τον σημασιολογικό τους ρόλο. Εάν δεν υπήρχαν αντικείμενα τα οποία να αποτελούν τις αναφορές των ενικών όρων, τότε η αριστερή πρόταση της  $N=$  για τον Wright, δεν θα μπορούσε να είναι αληθής. Ο αναγωγισμός όμως υποδεικνύει στον Wright το πρόβλημα ότι οι όροι της ισοδύναμης δεξιάς πρότασης δεν αναφέρονται στα ίδια αντικείμενα (πχ. διευθύνσεις) στα οποία αναφέρονται οι όροι της αριστερής πρότασης. Τότε ο Wright, για να αποφύγει την κρίση, αναγνωρίζει ότι η δεξιά πρόταση της  $N=$ , παρ' όλο που δεν περιλαμβάνει *αναφορά* στα ίδια αντικείμενα, δεσμεύεται οντολογικά στα ίδια αντικείμενα στα οποία δεσμεύεται και η αριστερή πρόταση. Εχουμε επομένως, ίδια οντολογική δέσμευση και στις δύο περιπτώσεις αλλά όχι ταυτόχρονα και αναφορά στα ίδια αντικείμενα. Θα μπορούσε κανείς να παρατηρήσει δύο σημεία τα οποία δεν έχουν ληφθεί υπόψη από τον Wright σ' αυτή την περίπτωση: α. ότι ο αναγωγισμός δεν οδηγεί υποχρεωτικά στον αντιρεαλισμό β. ότι τα αντικείμενα που προκύπτουν από μία κυριολεκτική ανάγνωση της αριστερής πρότασης δεν είναι ανάγκη να θεωρηθούν ως *sui generis* αντικείμενα (όπως φαίνεται να τα αντιλαμβάνεται ο Wright).

Για να κατανοηθούν τα δύο παραπάνω σημεία, αρκεί να διευκρινισθεί ότι ο αναγωγισμός δεν ταυτίζεται με τον εξαλειπτισμό. Θα ταυτιζόταν, εάν τα αναγώγιμα γεγονότα έπαυαν να θεωρούνται πραγματικά, κάτι τέτοιο ωστόσο δεν είναι υποχρεωτικό. Σύμφωνα με μια κυριολεκτική ανάγνωση της αριστερής πρότασης της

$N=$ , η πρόταση αναπαριστά κάποια γεγονότα τα οποία είναι δυνατό να ανάγονται σε κάποια άλλα περισσότερο θεμελιώδη. Η διαφορά μεταξύ ενός εξαλειπτιστή και ενός αναγωγιστή έγκειται στο ότι ο πρώτος θεωρεί τα αναγώγιμα γεγονότα ως μη πραγματικά ενώ ο δεύτερος δεν εμποδίζεται από τίποτα στο να τα δεχθεί ως πραγματικά, απλώς αρνείται τον *sui generis* χαρακτήρα τους. Κατά συνέπεια, τα αντικείμενα αναφοράς (αριθμοί) των ενικών όρων της αριστερής πρότασης της  $N=$  μπορούν να θεωρούνται πραγματικά, παρά το ότι ανάγονται σε κάποια λογικά αντικείμενα ή γεγονότα (πχ. στην ύπαρξη μιας 1-1 αντιστοιχίας μεταξύ δύο εννοιών). Η ένταση δημιουργείται μόνον όταν θεωρήσουμε, όπως ο Wright, τους αριθμούς (αντίστοιχα: τις διευθύνσεις) ως *sui generis*, δηλαδή ως μη περαιτέρω αναγώγιμα αντικείμενα.

Επομένως, μία συμφιλίωση του ρεαλισμού με τον αναγωγισμό φαίνεται να είναι στο σημείο αυτό δυνατή: από τη στιγμή που τα γεγονότα που αναπαριστούν οι αληθείς προτάσεις μας και τα οποία έπονται από μια κυριολεκτική ανάγνωση των προτάσεων αυτών δεν είναι *sui generis*, τότε είμαστε υποχρεωμένοι να δεχθούμε ότι υπάρχουν κάποια άλλα περισσότερο θεμελιώδη γεγονότα τα οποία καθιστούν τις προτάσεις μας αληθείς. Αυτό όμως δεν σημαίνει ότι η στάση μας παύει να είναι ρεαλιστική σε ότι αφορά τα γεγονότα που υπονοούνται από την κυριολεκτική ανάγνωση των προτάσεων αυτών (cf. Psillos, υπό έκδοση). Αν πχ. τα βιολογικά γεγονότα που αναπαριστούν κάποιες αληθείς προτάσεις ανάγονται σε κάποια φυσικά γεγονότα τότε αυτό δεν σημαίνει ότι τα ίδια τα βιολογικά γεγονότα παύουν να είναι πραγματικά. Ένας ρεαλιστής, σε αντίθεση με έναν εξαλειπτιστή, εξακολουθεί να υποστηρίζει ότι τα βιολογικά γεγονότα είναι πραγματικά παρά το γεγονός της αναγωγής τους. Από την άλλη πλευρά όμως, η ίδια η αναγωγή αποδεικνύει ότι τα βιολογικά γεγονότα δεν είναι *sui generis*<sup>7</sup>. Ας εξετάσουμε από την ίδια οπτική γωνία,

---

<sup>7</sup>Η άποψη αυτή προϋποθέτει τη διάκριση μεταξύ δύο τρόπων θεώρησης της πραγματικότητας. Ο πρώτος αφορά την γεγονοτική πραγματικότητα (factual reality) και ο δεύτερος την θεμελιώδη πραγματικότητα (fundamental reality). Η πρώτη έννοια θεωρεί την πραγματικότητα ως ένα σύνολο γεγονότων. Η δεύτερη έννοια της πραγματικότητας αφορά εκείνα τα γεγονότα που είναι θεμελιώδη, βασικά και μη περαιτέρω αναγώγιμα. Τα γεγονότα, τα οποία φαίνεται εκ πρώτης όψεως να αναπαριστάνει μια αληθής πρόταση δεν είναι απαραίτητο να είναι θεμελιώδη. Υπάρχει μάλιστα η δυνατότητα τα γεγονότα αυτά να ανάγονται σε κάποια θεμελιώδη γεγονότα. Για παράδειγμα, τα αριθμητικά γεγονότα τα οποία αναπαριστάνουν οι αληθείς αριθμητικές προτάσεις μπορεί να μην είναι τα ίδια θεμελιώδη αλλά να ανάγονται σε κάποια λογικά γεγονότα (λογικισμός) ή σε κάποια φυσικά

ένα άλλο παράδειγμα του Wright, το ότι η Ελένη και ο Κώστας είναι δεύτερα εξαδέρφια ανάγεται στο θεμελιώδες γεγονός ότι οι πλησιέστεροι κοινοί τους πρόγονοι είναι οι προπαππούδες τους. Η αναγωγή του ενός γεγονότος στο άλλο δεν στερεί σε κανένα από αυτά την ιδιότητα του πραγματικού. Και τα δύο γεγονότα είναι υπαρκτά αλλά το ένα από αυτά είναι το θεμελιώδες γεγονός.

Σε αυτή λοιπόν τη βάση μπορούμε να θεωρήσουμε ότι τα αντικείμενα που αποτελούν την αναφορά των αριθμητικών όρων της αριστερής πρότασης της  $N=$ , δηλαδή οι αριθμοί, δεν αποτελούν αυθύπαρκτα αντικείμενα αφού ανάγονται σε λογικά αντικείμενα (όπως υποδεικνύει η δεξιά πρόταση της ισοδυναμίας). Δεν παύουν όμως να είναι πραγματικά, επομένως το γεγονός της αναγωγής τους δεν μας εμποδίζει να διατηρήσουμε τη θέση του μαθηματικού ρεαλισμού για τους αριθμούς. Κατά συνέπεια, η ερμηνεία που προηγήθηκε μας δίνει τη δυνατότητα να καταλήξουμε στο συμπέρασμα ότι ο μαθηματικός ρεαλισμός των Hale & Wright σχετικά με τους αριθμούς δεν θίγεται, ακόμα και αν δεχθούμε μια εκδοχή οντολογικού αναγωγισμού, σύμφωνα με την οποία οι αριθμοί ανάγονται τελικά σε μια θεμελιώδη λογική πραγματικότητα.

#### **4. Είναι οι αριθμητικές προτάσεις αληθείς;**

Όπως προαναφέραμε, η οντολογική θέση του νεολογικισμού για τους αριθμούς, βασίζεται σε δύο προϋποθέσεις: α) στη συντακτική λειτουργία των αριθμητικών εκφράσεων μέσα στις προτάσεις και β) στην αλήθεια των αριθμητικών προτάσεων. Είδαμε ήδη την πρώτη ένσταση: αποδοχή της αλήθειας των αριθμητικών προτάσεων αλλά άρνηση της θέσης ότι οι αριθμοί είναι *sui generis* αντικείμενα. Η δεύτερη βασική ένσταση προς την αντίληψη του νεολογικισμού για τους αριθμούς ως αντικείμενα είναι αυτή που απορρίπτει την αλήθεια των αριθμητικών προτάσεων. Εκφραστής αυτής της ένστασης είναι ο Hartry Field (1984, 637-62).

---

γεγονότα (νατουραλισμός). Από εκεί και πέρα, μπορεί κανείς να πάρει μια συγκεκριμένη μεταφυσική θέση απέναντι στα γεγονότα του πρώτου είδους. Αν είναι εξαλειπτιστής, μπορεί να θεωρήσει ότι η αναγωγή των πρώτων γεγονότων στα δεύτερα, έχει ως συνέπεια το να χάνουν τα αναγώγιμα γεγονότα το πραγματικό τους status. Αρα ένας εξαλειπτιστής δεν μπορεί να είναι ρεαλιστής. Ένας αναγωγιστής μπορεί ωστόσο να υποστηρίξει ότι τα αναγώγιμα γεγονότα δεν χάνουν (εξαιτίας της αναγωγής) το status της γεγονοτικής πραγματικότητας την οποία διαθέτουν, κατά συνέπεια αυτός μπορεί να είναι ταυτόχρονα αναγωγιστής και ρεαλιστής. Cf. Psillos, «Scientific Realism and Metaphysics», (υπό έκδοση).

Το πρόγραμμα του Field είναι νομιναλιστικό με την έννοια ότι απορρίπτει την ύπαρξη των μαθηματικών οντοτήτων. Γι αυτό το λόγο υποστηρίζει ότι οι υπαρκτικές μαθηματικές προτάσεις δεν είναι αληθείς. Για τον Field, δεν είναι η αλήθεια το χαρακτηριστικό που κάνει τις μαθηματικές θεωρίες χρήσιμες στη συγκρότηση των φυσικών επιστημονικών θεωριών αλλά η ‘συντηρητικότητα’ (conservativeness)<sup>8</sup>. Χάρη σ’ αυτή την ιδιότητα, είναι δυνατή η παραγωγή νομιναλιστικά διατυπωμένων συμπερασμάτων από νομιναλιστικά διατυπωμένες υποθέσεις στις φυσικές επιστήμες.

Η αμφισβήτηση της μαθηματικής αλήθειας από τον Field αφορά άμεσα το επιχείρημα των νεολογικιστών, διότι πλήττει τον αληθή χαρακτήρα της αριστερής πρότασης της  $N=$  δηλ. της  $[(Nx:Fx = Nx:Gx)]$ . Αλλά η αλήθεια της αριστερής πρότασης είναι αναγκαία προϋπόθεση για το ότι οι ενικοί όροι αυτής της πρότασης αναφέρονται γνήσια. Επομένως οι νεολογικιστές οφείλουν να εξασφαλίσουν την αλήθεια της αριστερής πρότασης των ισοδυναμιών τους. Αυτό μπορεί πράγματι να επιτευχθεί, δεδομένου ότι κάθε αριστερή πρόταση της ισοδυναμίας  $N=$  είναι αληθής όταν στην δεξιά πλευρά της ίδιας ισοδυναμίας τοποθετηθεί μια επιβεβαιωμένα αληθής πρόταση. Ας μην ξεχνάμε ότι η ισοδυναμία είναι αυτή η οποία ταυτίζει τις καταστάσεις αλήθειας των δύο προτάσεων. Κατά συνέπεια, τα οντολογικά συμπεράσματα του νεολογικισμού για την ύπαρξη των αριθμών εξάγονται όχι από την  $N=$  από μόνη της αλλά σε συνδυασμό με μια επιβεβαιωμένα αληθή πρόταση ως ελάχιστη προϋπόθεση. Τον ρόλο αυτής της αληθούς προτάσεως παίζει μια λογική αλήθεια στη λογική 2ης τάξης. Η πρόταση

$$x \neq x \text{ } 1-1 \text{ } x \neq x \quad (1)$$

που εκφράζει μία 1-1 αντιστοιχία της έννοιας ‘ $x \neq x$ ’ με τον εαυτό της, είναι επιβεβαιωμένα αληθής αφού η αλήθεια της θεμελιώνεται στη λογική 2ης τάξης και μπορεί να τοποθετηθεί στη δεξιά πλευρά της  $N=$ . Τότε η  $N=$  παίρνει τη μορφή:

$$Nx: x \neq x = Nx: x \neq x \leftrightarrow x \neq x \text{ } 1-1 \text{ } x \neq x \quad (2)$$

<sup>8</sup>Μία μαθηματική θεωρία  $S$  είναι *συντηρητική*, όταν για κάθε νομιναλιστικά διατυπωμένο ισχυρισμό  $A$  και μια οποιαδήποτε συλλογή  $N$  από προτάσεις νομιναλιστικά διατυπωμένες, ο ισχυρισμός  $A$  δεν είναι ένα επακόλουθο της  $N+S$ , αν δεν είναι ήδη ένα επακόλουθο της  $N$  μόνης.

Επειδή οι καταστάσεις αλήθειας των δύο προτάσεων ταυτίζονται, έπεται ότι και η αριστερή πρόταση είναι επίσης αληθής. Το γεγονός όμως ότι η αριστερή πρόταση είναι αληθής και περιέχει ενικούς όρους συνεπάγεται ότι υπάρχει το κοινό αντικείμενο αναφοράς των όρων αυτών, δηλαδή ο αριθμός  $Nx: x \neq x$ . Όπως εξηγούν οι Hale & Wright (2001, 309), στη συγκεκριμένη περίπτωση, η  $N=$  μαζί με την λογική αλήθεια (1) ως ελάχιστη προϋπόθεση, μας δίνουν τον αριθμό 0. Μπορούμε βέβαια να προχωρήσουμε, οπότε η  $N=$  μαζί με την αληθή πρόταση  $[x = 0 \text{ } 1-1 \text{ } x = 0]$  (3) (ως ελάχιστη προϋπόθεση), μας δίνουν τον αριθμό 1 κ.ο.κ. Κάθε φορά, τοποθετείται στη δεξιά πλευρά της  $N=$  μια αληθής πρόταση τέτοια ώστε, μέσω της ισοδυναμίας, να προκύπτει με βεβαιότητα η αλήθεια της αντίστοιχης αριστερής πρότασης.

Όμως, το γεγονός ότι η αλήθεια της αριστερής πρότασης της ισοδυναμίας  $N=$  εξασφαλίζεται χάρη στην αλήθεια της δεξιάς πρότασης δεν είναι αρκετό, διότι οι αντιρρήσεις του Field πλήττουν επιπλέον την ίδια την αλήθεια της *ισοδυναμίας*. Το αν η ισοδυναμία  $N=$  είναι αληθής είναι λοιπόν ένα επίσης σημαντικό πρόβλημα. Ο Field αποδέχεται τον ρόλο της ισοδυναμίας  $N=$ , όπως και της  $D=$ , ως κατάλληλο για την εισαγωγή ενός τρόπου χρήσης των αντίστοιχων εννοιών του αριθμού και της διεύθυνσης αλλά συγχρόνως πιστεύει ότι κάθε τέτοια ισοδυναμία στοιχειοθετεί μια θεωρία για την αντίστοιχη έννοια, η οποία δεν είναι κατ' ανάγκην αληθής. Αυτό το οποίο ενοχλεί τον Field είναι η διατύπωση οντολογικών αξιώσεων για τους αριθμούς στο πλαίσιο του προγράμματος του νεολογικισμού. Αυτό ακριβώς το στοιχείο τον κάνει να εγείρει ερωτήματα σχετικά με την  $N=$ . Πώς είναι δυνατό από την αρχή αυτή να προκύπτουν τόσο πλούσια οντολογικά συμπεράσματα; Αντίθετα, η πλησιέστερη προς την  $N=$  διατύπωση που θα μπορούσε ο ίδιος να αποδεχθεί ως αληθή, θα είχε τη μορφή:

*n\**: Εάν υπάρχουν ο αριθμός της έννοιας F και ο αριθμός της έννοιας G, τότε ισχύει ότι ο αριθμός της έννοιας F ταυτίζεται με τον αριθμό της έννοιας G αν και μόνο αν υπάρχει μια 1-1 αντιστοιχία μεταξύ των F και G.

Ο Field θέτει κατά κάποιον τρόπο μια οντολογική προϋπόθεση για την  $N=$ : η ισοδυναμία  $N=$  ισχύει υπό την προϋπόθεση ότι υπάρχουν τα αντικείμενα αναφοράς των αριθμητικών όρων  $Nx:Fx$ ,  $Nx:Gx$ . Το πρόβλημα, ωστόσο, το οποίο προκύπτει

από μία διατύπωση όπως η  $n^*$  είναι ότι με κανένα τρόπο δεν ορίζεται το νόημα της έκφρασης «ο αριθμός της έννοιας ...», δηλαδή το νόημα του αριθμητικού τελεστή  $N()$ . Κατά συνέπεια, η υποθετική πρόταση της  $n^*$  δεν μπορεί να γίνει κατανοητή αφού περιλαμβάνει εκφράσεις των οποίων το νόημα δεν ορίζεται. Αντίθετα στην περίπτωση του νεολογικισμού, η ίδια η διατύπωση της  $N=$  είναι τέτοια, ώστε να παρέχει ένα κριτήριο ταυτότητας δύο αριθμητικών όρων, κατά συνέπεια λειτουργεί ως μια εξήγηση της ειδικής<sup>9</sup> έννοιας του αριθμού. Μέσω της  $N=$ , εισάγεται και ορίζεται η έννοια του αριθμού και γίνεται οικεία σε οιονδήποτε ο οποίος ήταν πριν ανυποψίαστος σχετικά με αυτή.

Πράγματι, οι ισοδυναμίες, όπως αρχικά τις εισήγαγε ο Frege, είχαν τον χαρακτήρα πλαισιακού ορισμού. Το status της  $N=$  ειδικότερα, είναι ένα κρίσιμο θέμα. Έχει συζητηθεί αρκετά το πρόβλημα εάν η  $N=$  είναι αναλυτική αλήθεια, με μόνη προφανή απάντηση ότι δεν είναι αναλυτική τουλάχιστον με βάση τον ορισμό του Frege για την αναλυτικότητα<sup>10</sup>. Φυσικά δεν αποκλείεται στο μέλλον η οποιαδήποτε διεύρυνση της έννοιας της αναλυτικότητας, έτσι ώστε να συμπεριλαμβάνει και άλλες προτάσεις. Πάντως η  $N=$  δεν αποτελεί λογική αλήθεια αλλά ούτε και ορισμό με την αυστηρή σημασία. Είναι γεγονός ότι δεν στάθηκε δυνατό για τους νεολογικιστές να στηρίξουν πάνω στην  $N=$  μία τόσο φιλόδοξη μορφή λογικισμού, σύμφωνα με την οποία, κάθε πρόταση της θεωρίας αριθμών θα ήταν μεταφράσιμη σε μια λογική αλήθεια (στη λογική 2ης τάξης). Αυτό είναι κάτι το οποίο διαπίστωσε ο Wright, όταν κατέληξε στο συμπέρασμα πως η  $N=$  δεν είναι 'ορισμός' με την αυστηρή έννοια.

Ο Wright (1983, 135) παρατήρησε ότι υπάρχει μια δυσκολία για να θεωρηθεί η  $N=$  ως ρητός ορισμός, η οποία έγκειται στην αδυναμία απαλοιφής του αριθμητικού τελεστή σε πολλές περιπτώσεις. Πράγματι, είναι δυνατόν ο τελεστής «ο αριθμός της (έννοιας) ...» που εμφανίζεται στην αριστερή πλευρά της ισοδυναμίας  $N=$ , να εφαρμόζεται σε μια έννοια  $G$ , η περιγραφή της οποίας και πάλι περιλαμβάνει τον ίδιο τελεστή «ο αριθμός της έννοιας ...». Για παράδειγμα, ο αριθμητικός τελεστής είναι

---

<sup>9</sup>Μία έννοια λέγεται ειδική (sortal) όταν παρουσιάζει ένα είδος αντικειμένων του κόσμου πχ. άνθρωπος, λεμονιά, τίγρης. Για την κατανόηση μιας ειδικής έννοιας απαιτείται ο καθορισμός της ταυτότητας των πραγμάτων που εμπίπτουν σ' αυτήν, γι αυτό μια ειδική έννοια συνδέεται πάντοτε με ένα κριτήριο ταυτότητας.

<sup>10</sup>Σύμφωνα με τον Frege αναλυτικές θεωρούνται οι προτάσεις που προκύπτουν από λογικές αλήθειες μέσω λογικών νόμων και ορισμών.

δυνατό να εφαρμοστεί στην έννοια «μήλο πάνω στο τραπέζι» («ο αριθμός των μήλων πάνω στο τραπέζι») αλλά είναι δυνατό να εφαρμοστεί και σε έννοιες όπως «πρώτος αριθμός μεταξύ 15 και 37» (δηλ. «ο αριθμός των πρώτων αριθμών μεταξύ 15 και 37»). Στη δεύτερη περίπτωση έχουμε να κάνουμε με αριθμούς αριθμών. Συμβαίνει λοιπόν, αντί της απλής μορφής  $Nx:Fx = Nx:Gx$ , να έχουμε εμφανίσεις της μορφής  $Nx:Fx = Nx:(x = Ny:Gy)$ , όπου κάθε προσπάθεια μετάφρασης προσκρούει στο ότι ο αριθμητικός τελεστής δεν είναι δυνατό τελικά να εξαλειφθεί. Αυτή η αδυναμία της  $N=$ , η οποία ισοδυναμεί με αποτυχία της να παρέχει μετάφραση κάθε αριθμητικής ταυτότητας σε μία λογική αλήθεια 2ης τάξης, οδήγησε τον Wright σε διάφορες σκέψεις (op. cit., 137-53), αποτέλεσμα των οποίων είναι αφενός η αντιμετώπισή της  $N=$  όχι πλέον ως (ρητού) ορισμού αλλά ως ενός είδους 'εξήγησης' της έννοιας του αριθμού (op. cit., 153) και αφετέρου στην υιοθέτηση μιας πιο μετριοπαθούς μορφής λογικισμού, απ' ότι αρχικά μπορούσε να φανταστεί.

Σε πρόσφατο άρθρο τους, οι Hale και Wright (2001, 117-50) χαρακτηρίζουν την  $N=$  ως «υπόρρητο ή έμμεσο ορισμό» (implicit definition) της έννοιας του πληθυκού αριθμού. Το ενδιαφέρον για τους έμμεσους ορισμούς συνδέθηκε παραδοσιακά με τη δυνατότητα a priori γνώσης, ιδιαίτερα στα μαθηματικά και στη λογική. Για τους Wright και Hale, ένας έμμεσος ορισμός δημιουργεί ένα κατάλληλο μοντέλο χρήσης για το οριζόμενο, πράγμα που αποτελεί και το κύριο χαρακτηριστικό του έμμεσου ορισμού, σε αντίθεση με τη μεταφρασσιμότητα που αποτελεί το κύριο χαρακτηριστικό ενός ρητού ορισμού. Ένας έμμεσος ορισμός, 'επινοεί' ένα νόημα μέσω της ανάδειξης ενός κατάλληλου μοντέλου χρήσης μιας έκφρασης (op. cit., 131), έτσι ώστε η πρόταση που την περιέχει ορίζεται ως a priori αληθής. Συγκεκριμένα η  $N=$  επινοεί το νόημα των αριθμητικών όρων μέσω της ανάδειξης ενός μοντέλου χρήσης της έκφρασης «ο αριθμός της έννοιας...». Μέσω της εξοικείωσης με τη χρήση της συγκεκριμένης έκφρασης, οποιοσδήποτε δεν διέθετε στο ήδη γνωστό του λεξιλόγιο την έννοια του αριθμού, αποκτά πλέον τη δυνατότητα να την κατανοεί. Επομένως, ένα κατάλληλο μοντέλο χρήσης μιας έκφρασης παρέχει μια εξήγηση για το νόημα του οριζομένου, έτσι ώστε αυτό να γίνεται κατανοητό σε οιονδήποτε ο οποίος δεν διέθετε τη νέα έννοια που εκφράζεται από το οριζόμενο. Η  $N=$  είναι ένας έμμεσος ορισμός που καθορίζει ποιες αληθείς προτάσεις οι οποίες εκφράζουν 1-1 αντιστοιχίες μεταξύ δύο εννοιών (και στις οποίες δεν περιέχεται το οριζόμενο) αποτελούν αναγκαία και ικανή συνθήκη για να είναι αληθείς κάποιες ταυτότητες που περιέχουν

το οριζόμενο. Ορίζει δηλαδή την αναγκαία και ικανή συνθήκη για να είναι αληθής μια αριθμητική ταυτότητα. Επίσης, λόγω της υποθετικής της μορφής (διπλής κατεύθυνσης), η  $N=$  αποφεύγει την ‘αλαζονεία’ («arrogance»)<sup>11</sup> δηλαδή η αλήθειά της δεν χρειάζεται κάποια a posteriori επικύρωση.

Επομένως η απάντηση των νεολογικιστών στον Field σχετικά με την αλήθεια της  $N=$ , είναι ότι η ισοδυναμία αυτή είναι a priori αληθής επειδή έχει το status ενός έμμεσου ορισμού.

## **5. Είναι οι αριθμοί ανεξάρτητοι από τη γλώσσα;**

Η κριτική προς το επιχείρημα των νεολογικιστών για την ύπαρξη των αριθμών είτε εμφανίζει την παρουσία ενικών όρων στην αριστερή πρόταση ως ένα παραπλανητικό φαινόμενο (αναγωγισμός) είτε αμφισβητεί την αλήθεια των αριθμητικών προτάσεων (Field). Εάν υποτεθεί ότι οι νεολογικιστές καταφέρουν να αντιπαρέλθουν τον οντολογικό αναγωγισμό αλλά και την κριτική του Field, θα πρέπει περαιτέρω, να αντιμετωπίσουν μια πιο λεπτή αλλά αιχμηρή κριτική, που επιχειρεί να καταφέρει καίριο πλήγμα στη ρεαλιστική ανάγνωση της  $N=$ . Πρόκειται για μία ‘ενδιάμεση’ θέση ανάμεσα στον οντολογικό αναγωγισμό και στον μαθηματικό ρεαλισμό του Wright, την οποία διατείνεται ότι εκπροσωπεί ο Dummett (1991, 191). Σύμφωνα με αυτή, οι αριθμητικοί ενικοί όροι στην αριστερή πλευρά της ισοδυναμίας διαθέτουν βέβαια ένα είδος αναφοράς αλλά η ‘αναφορά’ αυτή δεν είναι ρεαλιστικά ερμηνεύσιμη. Ο Dummett δεν αρνείται την ύπαρξη αναφοράς στους αφηρημένους ενικούς όρους της αριστερής πρότασης αλλά θεωρεί ότι πρόκειται για μια ιδιαίτερα ισχνή έννοια αναφοράς, η οποία δεν πρέπει να ερμηνεύεται ως σχέση του όρου προς ένα ‘εξωτερικό’ (εκτός της γλώσσας) αντικείμενο<sup>12</sup> και είναι διαφορετική από την αναφορά των ονομάτων. Η άποψη αυτή του Dummett καλείται επίσης και ανεκτικός

---

<sup>11</sup> Αλαζονικός (arrogant) είναι ένας έμμεσος ορισμός όταν η αλήθειά του χρήζει επιβεβαίωσης με a posteriori διαδικασίες. Για να συμβιβάζεται επομένως ένας έμμεσος ορισμός με την a priori γνώση, απαιτείται να αποφεύγει την «αλαζονεία»

<sup>12</sup> Ο Dummett δεν αρνείται τον σημασιολογικό ρόλο των αριθμητικών όρων να αναφέρονται. Εκείνο το οποίο αρνείται είναι η έννοια της αναφοράς ως σχέση αυτών των όρων με πραγματικές οντότητες. Κάτι παρόμοιο είχε υποστηρίξει στο κεφ.7 του βιβλίου του: *Frege: Philosophy of Language*, London, Duckworth, 1973 (2nd edn 1981) όταν αντέδρασε στην απόδοση αναφοράς στις «ατελείς εκφράσεις». Τότε είχε διευκρινίσει ότι η απόδοση αναφοράς πχ. στα κατηγορήματα έχει απλώς το νόημα του σημασιολογικού ρόλου της έκφρασης και δεν επιδέχεται καμιά ρεαλιστική ερμηνεία.



αναγωγισμός (tolerant reductionism). Παρ' όλα αυτά ο Dummett πιστεύει ότι η 'ενδιάμεση' θέση του, ίσως τελικά είναι περισσότερο αυστηρή από εκείνη την οποία ο Wright είχε κατά νου, όταν χαρακτήριζε ως αυστηρή την ολοκληρωτική απόρριψη της αναφοράς των ενικών όρων της αριστερής πρότασης. Την άποψη του Dummett προσπαθούν να αντιμετωπίσουν οι Wright και Hale με μία τακτική εξάλειψης της 'ενδιάμεσης' θέσης, με μία προσπάθεια δηλαδή να αποδείξουν ότι δεν υφίσταται πραγματικά ενδιάμεση θέση ανάμεσα στον οντολογικό αναγωγισμό και στον μαθηματικό ρεαλισμό που οι ίδιοι υποστηρίζουν.

Ωστόσο, η άποψη Dummett δεν μπορεί εύκολα να παραβλεφθεί, διότι θέτει το πολύ σοβαρό ζήτημα, κατά πόσον τα αντικείμενα στα οποία αναφέρονται οι δεδομένοι ενικοί όροι είναι «ανεξάρτητα από τη σκέψη και τη γλώσσα». Ο Dummett (1973, 498-9) θεωρεί ότι οι όροι που 'αναφέρονται' σε καθαρά αφηρημένα αντικείμενα δεν έχουν ρεαλιστική αναφορά. Η αναφορά τους είναι ένα θέμα «εσωτερικό της γλώσσας» και διαφέρει από την αναφορά των ονομάτων σε αντικείμενα. Υπενθυμίζουμε εδώ ότι το επιχείρημα των νεολογικιστών για την ύπαρξη των αριθμών στηρίζεται, όχι μόνο στο ότι οι αριθμητικοί όροι είναι ενικοί όροι με βάση συντακτικά κριτήρια αλλά εξίσου και στο ότι εμπλέκονται σε αληθείς προτάσεις. Το πρώτο από τα δύο σημεία μπορεί να θεωρηθεί υπεύθυνο για τον χαρακτηρισμό της αναφοράς των αριθμητικών όρων ως εσωτερικού στη γλώσσα ζητήματος, με την έννοια ότι τα κριτήρια που κατατάσσουν τους αριθμητικούς όρους στην κατηγορία των ενικών όρων είναι συντακτικά και φέρουν πράγματι τα χαρακτηριστικά της γλώσσας. Το ερώτημα είναι εάν το δεύτερο σημείο, δηλαδή η αλήθεια των προτάσεων που περιέχουν τους ενικούς όρους, είναι θέμα εσωτερικό της γλώσσας. Εάν δεχθούμε τον τύπο του λογικισμού που μας κληροδότησε ο Frege, οι αριθμητικές προτάσεις που περιέχουν τους δεδομένους αριθμητικούς ενικούς όρους είναι αναλυτικές. Καθιστά το γεγονός αυτό από μόνο του, την αναφορά των ενικών αυτών όρων ως «εσωτερική της γλώσσας»; Ο Hale (1987, 154) απαντά ότι κάτι τέτοιο δεν είναι απαραίτητο: η αναλυτικότητα των αριθμητικών προτάσεων δεν μας υποχρεώνει να εγκαταλείψουμε την «ρεαλιστική» ερμηνεία της αναφοράς των αριθμητικών όρων, εκτός βέβαια εάν εννοήσουμε την αναλυτική αλήθεια των αντίστοιχων προτάσεων ως αποτέλεσμα σύμβασης (πράγμα το οποίο θα αποφεύγαμε για να μην οδηγηθούμε στα γνωστά προβλήματα της συμβασιοκρατικής ερμηνείας της αλήθειας, τα οποία ο Quine τόσο καλά έχει περιγράψει). Δεν πρέπει βέβαια να

ξεχνάμε ότι η αναφορά των αριθμητικών όρων γίνεται κατανοητή με βάση την αρχή της συντακτικής προτεραιότητας του Frege, σύμφωνα με την οποία, οντολογικές κατηγορίες όπως πχ. *αντικείμενο*, είναι προσδιορίσιμες περισσότερο μέσω της γλώσσας (ιδιαίτερα μέσω της χρήσης των προτάσεων) και λιγότερο μέσω αιτιακών ή χωροχρονικών εννοιών ή διαδικασιών όπως είναι η κατάδειξη (*ostension*). Επομένως το ενδιαφέρον αυτό πρόβλημα της αναφοράς των αριθμητικών όρων πρέπει να εξετασθεί με κριτήριο το αν η αρχή συντακτικής προτεραιότητας του Frege είναι δυνατό να βρίσκεται σε αντίθεση με τον μαθηματικό ρεαλισμό του. Ας σημειωθεί ότι και για τον ίδιο τον Frege, η αναλυτικότητα των μαθηματικών αληθειών δεν απέκλειε ότι οι αλήθειες αυτές μας δεσμεύουν στην ύπαρξη οντοτήτων όπως οι αριθμοί.

Σύμφωνα με την κυριολεκτική ανάγνωση μιας αληθούς πρότασης της αριστερής πλευράς της  $N=$ , δηλ. της  $[(Nx:Fx = Nx:Gx)]$ , κάποια αντικείμενα (αριθμοί) αποτελούν την αναφορά των ενικών όρων αυτής της πρότασης. Έχουμε επισημάνει στην ενότητα 3 ότι είναι λάθος να θεωρούνται τα αντικείμενα αυτά ως *sui generis* δηλ. αυθύπαρκτα αντικείμενα. Στο πνεύμα αυτό, μπορούμε να ερμηνεύσουμε και την άποψη του Dummett. Όταν ο Dummett αρνείται ότι οι αναφορές των αριθμητικών όρων συνιστούν ανεξάρτητα από τη γλώσσα αντικείμενα, μπορεί να θεωρηθεί ότι αρνείται ουσιαστικά τον *sui generis* χαρακτήρα των αριθμών, αρνείται δηλαδή ότι οι αριθμοί είναι αυθύπαρκτες οντότητες. Από την άλλη πλευρά, είναι δυνατή μια ανάγνωση της  $N=$  σύμφωνα με την οποία τα αριθμητικά γεγονότα ανάγονται σε κάποια πιο θεμελιώδη πχ. λογικά γεγονότα. Μπορεί να θεωρηθεί δηλαδή ότι λογικά γεγονότα είναι οι αληθοποιητές των αριθμητικών προτάσεων. Το λογικό γεγονός, δηλαδή η ύπαρξη μιας 1-1 αντιστοιχίας μεταξύ δύο εννοιών F και G, είναι το θεμελιώδες γεγονός το οποίο καθιστά αληθή την αριστερή πρόταση της ισοδυναμίας, δηλαδή είναι ο αληθοποιητής της. Όπως επίσης έχουμε ήδη επισημάνει, η αναγωγή των αριθμητικών γεγονότων σε λογικά γεγονότα, δεν σημαίνει υποχρεωτικά ότι οι αριθμοί δεν είναι πραγματικοί ούτε θίγει την άποψη του μαθηματικού ρεαλισμού σχετικά με τους αριθμούς. Κατά συνέπεια μπορούμε να υποστηρίξουμε ότι η  $N=$  δεν προσβάλλεται από τον Dummett. Η κριτική του Dummett έχει ως αποτέλεσμα τον τονισμό του σημείου ότι από την κυριολεκτική ανάγνωση της  $N=$  δεν έπεται οποιαδήποτε δέσμευση σε αυθύπαρκτες μαθηματικές οντότητες.

## 6. Μη Κατηγορηματικότητα

Και άλλα ζητήματα σχετικά με το status της ισοδυναμίας  $N=$  χρήζουν κατάλληλης διευθέτησης προκειμένου οι θέσεις του νεολογικισμού να χαρακτηρισθούν βάσιμες. Η μη κατηγορηματικότητα (impredicativity) της ισοδυναμίας αποτελεί ένα ‘αγκάθι’ για το πρόγραμμα του νεολογικισμού. Σχετικά με αυτό το θέμα έχει ασκήσει κριτική ο Dummett (1991, 234-6). Το πρόβλημα έγκειται στο ότι απουσιάζει ένας εκ των προτέρων χαρακτηρισμός ενός πεδίου ποσόδειξης στην  $N=$ , δηλαδή δεν γνωρίζουμε ποιο πεδίο διατρέχουν οι μεταβλητές. Μία απάντηση που έχει δοθεί από τους Hale και Wright (2001, 242) σ’ αυτή την παρατήρηση, είναι ότι οποιαδήποτε προσπάθεια προσδιορισμού του πεδίου των ποσοδεικτών (τι είδους πράγματα διατρέχουν οι μεταβλητές) θα βασιζόταν αναγκαστικά στην περαιτέρω χρήση και άλλων ποσοδεικτών, των οποίων τα πεδία θα έπρεπε με τη σειρά τους κι αυτά να προσδιοριστούν κ.ο.κ. Έτσι ο προσδιορισμός μιας ποσοδεικτούμενης πρότασης εξαρτάται από μια άπειρη σειρά προηγούμενων προσδιορισμών. Εξακολουθεί όμως να παραμένει ένα πρόβλημα: ενώ υποτίθεται ότι κάθε ανυποψίαστος για τους αριθμητικούς όρους  $Nx$ , μαθαίνει γι αυτούς χάρη στην αριστερή πρόταση της  $N=$  όπου πρωτοεισάγεται η έννοια του αριθμού, συμβαίνει συγχρόνως οι αριθμοί να λαμβάνουν μέρος στο πεδίο ποσόδειξης της δεξιάς πρότασης της  $N=$ . Είναι πχ. δυνατό για τις έννοιες της δεξιάς πλευράς της ισοδυναμίας, να έχουμε F: «μήλο πάνω στο τραπέζι» και G: «βιβλίο στο ράφι» αλλά θα μπορούσαμε επίσης να έχουμε F: «πρώτος αριθμός μεταξύ 4 και 8» και G: «άρτιος αριθμός μεταξύ 3 και 7». Δεν αποκλείεται λοιπόν, η ποσόδειξη των F και G της δεξιάς πλευράς της ισοδυναμίας να περιλαμβάνει αριθμούς, κατά συνέπεια δεν αποκλείεται η εφαρμογή του αριθμητικού τελεστή να γίνεται σε κατηγορήματα που περιλαμβάνουν ήδη εμφανίσεις του αριθμητικού τελεστή πχ.  $Ny:[y = Nx:x \neq x]$ .

Το ερώτημα που τίθεται είναι αν αυτό το χαρακτηριστικό σημαίνει κυκλικότητα σε ότι αφορά την εξήγηση της έννοιας του αριθμού που η  $N=$  υπόσχεται ότι παρέχει. Η ισοδυναμία έχει ως σκοπό την εισαγωγή της έννοιας του αριθμού με τον προσδιορισμό των καταστάσεων αλήθειας μιας πρότασης ταυτότητας μεταξύ αριθμών. Αλλά η αλήθεια αυτής της ταυτότητας εξαρτάται από τη σχέση μεταξύ δύο εννοιών, οι οποίες διατρέχουν ένα πεδίο που περιλαμβάνει (μεταξύ των άλλων) και αριθμούς. Οι Hale & Wright πιστεύουν (2001, 247-53) ότι η μη κατηγορηματικότητα της ισοδυναμίας δεν εμποδίζει τη λειτουργία της ως καλής εξήγησης της έννοιας του αριθμού και γι αυτό το λόγο μπορεί να χαρακτηρισθεί

«αβλαβής». Ο Hale θεωρεί ότι κάτι τέτοιο μπορεί να εξασφαλιστεί με κατάλληλη ιεράρχηση των κατηγορημάτων στα οποία ο αριθμητικός τελεστής εφαρμόζεται για να σχηματίσει τους όρους  $Nx:Fx$ . Η ιεράρχηση ξεκινά από ζεύγη κατηγορημάτων για τα οποία δεν είναι προβληματική η κατανόηση της ταυτότητας  $Nx:Fx = Nx:Gx$ <sup>13</sup> και προχωρά σε διαδοχικούς βαθμούς συνθετότητας του αριθμητικού τελεστή. Τότε, η εφαρμογή του αριθμητικού τελεστή περιορίζεται κάθε φορά σε κατηγορήματα τα οποία έχουν γίνει ήδη κατανοητά στα προηγούμενα επίπεδα της ιεράρχησης. Για παράδειγμα, η έννοια « $x \neq x$ » είναι κατανοητή χωρίς να απαιτείται κάποια πρότερη γνώση περί αριθμών και επομένως η εφαρμογή του αριθμητικού τελεστή σ' αυτή την έννοια δεν δημιουργεί κανένα πρόβλημα. Άρα μπορεί να γίνει κατανοητός αφενός ο όρος  $Nx: x \neq x$  που αντιπροσωπεύει τον αριθμό 0 και αφετέρου το κατηγορήμα  $[y = Nx: x \neq x]$ . Εάν στη συνέχεια εφαρμοστεί σ' αυτό το κατηγορήμα ο αριθμητικός τελεστής, τότε μπορεί να γίνει κατανοητός και ο όρος  $Ny: [y = Nx: x \neq x]$  που αντιπροσωπεύει τον αριθμό 1 κ.ο.κ. Επειδή όμως ο βαθμός συνθετότητας του αριθμητικού τελεστή συνεχώς αυξάνεται, η επιτυχία του επιχειρήματος των νεολογικιστών εξαρτάται από το αν μπορεί να εξηγηθεί επαρκώς πώς η κατανόηση των επιπέδων 1... k εγγυάται την κατανόηση του επιπέδου k+1, ένα θέμα για το οποίο έχουν επιχειρηθεί λεπτομερείς διευκρινίσεις από τον Wright (2001, 263-71).

## 7. Το πρόβλημα του Καίσαρος

Ένα θέμα το οποίο πρέπει επίσης να επισημανθεί είναι ότι ο νεολογικισμός διαφοροποιείται σε ότι αφορά συγκεκριμένες επιλογές του Frege που οδήγησαν το πρόγραμμά του σε αδιέξοδο. Ο Frege εντόπισε ένα πρόβλημα στους παισιακούς ορισμούς του για την διεύθυνση και τον αριθμό. Συγκεκριμένα, απέρριψε τους ορισμούς αυτούς διότι δεν μπορούσαν να προσδιορίσουν *ποια* αντικείμενα είναι οι διευθύνσεις και *ποια* αντικείμενα είναι οι αριθμοί. Εάν πχ. ο ρόλος της ισοδυναμίας  $N=$  είναι να εισαγάγει επιτυχώς την έννοια του αριθμού, τότε θα πρέπει η ισοδυναμία να κάνει σαφές πότε δύο αριθμοί είναι ταυτόσημοι και πότε όχι αλλά *επιπλέον* θα πρέπει να κάνει σαφές πότε ένα αντικείμενο εμπίπτει στην έννοια του αριθμού (δηλ.

<sup>13</sup>Μη προβληματικές θεωρούνται οι περιπτώσεις που η διαπίστωση της 1-1 αντιστοιχίας μεταξύ των F και G είναι απλό γεγονός το οποίο δεν προϋποθέτει κάποια γνώση περί αριθμών. Πχ. μπορεί να τεθεί μια 1-1 αντιστοιχία μεταξύ των εννοιών 'παίκτης σε ομάδα κρίκετ' και 'παίκτης σε ομάδα ποδοσφαίρου'. Αυτό μπορεί να διαπιστωθεί και από κάποιον που δεν γνωρίζει οτιδήποτε για αριθμούς.

πότε είναι αριθμός) και πότε δεν εμπίπτει. Ως προς το δεύτερο αυτό σημείο, διαπιστώνεται η ανεπάρκεια της  $N=$  η οποία, πράγματι, δεν παρέχει κανένα κριτήριο εφαρμογής της έννοιας του αριθμού, δηλαδή δεν προσδιορίζει ποια είναι εκείνα τα αντικείμενα στα οποία εφαρμόζεται η έννοια του αριθμού και ποια τα αντικείμενα στα οποία δεν εφαρμόζεται. Επίσης, η ισοδυναμία  $D=$  κάνει σαφές πότε δύο διευθύνσεις είναι ταυτόσημες και πότε διαφορετικές όμως παρουσιάζει κι αυτή το μειονέκτημα ότι δεν παρέχει κανένα κριτήριο εφαρμογής της έννοιας της διεύθυνσης. Αυτό θα το διατυπώναμε ως εξής: στην περίπτωση των διευθύνσεων, αδυνατούμε να αποφασίσουμε εάν μία πρόταση ταυτότητας  $D(a)=q$  είναι αληθής όταν η έκφραση  $q$  δεν είναι και αυτή της μορφής  $D(b)$ . Στην περίπτωση των αριθμών αδυνατούμε να αποφασίσουμε εάν η πρόταση  $Nx:Fx = q$  είναι αληθής, όταν η έκφραση  $q$  δεν είναι της μορφής  $Nx:Gx$ . Οπως αναφέρει ο Frege στην § 66 των Grundlagen, δεν μπορούμε να απαντήσουμε πχ. στο ερώτημα εάν η Αγγλία ταυτίζεται με την διεύθυνση του άξονα της γης. Κατά ανάλογο τρόπο, δεν μπορούμε να απαντήσουμε στο ερώτημα εάν ο Ιούλιος Καίσαρ ταυτίζεται με τον αριθμό των δορυφόρων του Δία. Γενικότερα, οι ισοδυναμίες δεν μας δίνουν τη δυνατότητα να διαχωρίσουμε τις διευθύνσεις και τους αριθμούς από άλλα είδη αντικειμένων.

Το πρόβλημα που μόλις περιγράφηκε, γνωστό ως *πρόβλημα του Καίσαρος*, έκανε τον Frege να επιλέξει μια διατύπωση των πλαισιακών του ορισμών η οποία βασιζόταν στις εκτάσεις των εννοιών. Σύμφωνα με αυτή την εκτασιακή αντίληψη, ο αριθμός της έννοιας  $G$  είναι η κλάση όλων των κλάσεων που είναι ισάριθμες με την  $G$ . Δύο έννοιες  $F$  και  $G$  θεωρούνται ισάριθμες εάν και μόνο εάν οι εκτάσεις τους μπορούν να τεθούν σε 1-1 αντιστοιχία. Μετά από αυτή την επιλογή του ο Frege, οδηγήθηκε στη διατύπωση μιας πρότασης

$$(\forall F)(\forall G) [\{x : Fx\} = \{x : Gx\} \leftrightarrow \forall x(Fx \leftrightarrow Gx)] \quad (\text{Βασικός νόμος V})$$

η οποία όμως αποδείχθηκε ασυνεπής και καταστροφική για το πρόγραμμά του αφού οδηγούσε στο παράδοξο του Russell.

Οι νεολογικιστές πιστεύουν ότι ο Frege δεν έπρεπε να στραφεί προς μια εκτασιακού τύπου διατύπωση. Οπως έχουμε ήδη δει, σύμφωνα με το νεολογικισμό, επαρκεί η  $N=$ , όχι ως ρητός ορισμός αλλά ως «εξήγηση» ή ακριβέστερα ως «έμμεσος ορισμός» της έννοιας του αριθμού, τέτοιος ώστε μαζί με τη λογική 2ης τάξης να

αποτελέσει την επαρκή βάση ενός συνεπούς συστήματος, από το οποίο αποδεικνύονται τα αξιώματα Peano. Αυτή είναι η κατά Wright εκδοχή του λογικισμού.

Το πρόβλημα του Καίσαρος ωστόσο, το οποίο ο Frege επιχείρησε να λύσει καταφεύγοντας σε εκτασιακού τύπου διατυπώσεις των ορισμών του, είναι ένα θέμα το οποίο παραμένει ανοιχτό. Όπως σημειώσαμε, ο Frege επέλεξε την εκτασιακή αντίληψη και έκανε χρήση κλάσεων για να διατυπώσει έναν ρητό ορισμό του αριθμού, με ένα πολύ μεγάλο τίμημα: κατέληξε στη διατύπωση μιας ασυνεπούς πρότασης από την οποία οδηγήθηκε στην κατάρρευση του λογικισμού. Οι νεολογικιστές από την άλλη πλευρά, επιμένουν στην διατύπωση της  $N=$  και αρκούνται σε έναν «έμμεσο» ορισμό για τον αριθμό, για να μην οδηγηθούν σε αντιφάσεις και να διασώσουν τον λογικισμό σε μια μετριοπαθέστερη εκδοχή. Το κατά πόσον βέβαια η  $N=$  είναι συνεπής είναι ένα πολύ σημαντικό θέμα. Δεν έχει προκύψει μέχρι τώρα κάποια αντίφαση από το σύστημα της  $N=$  και της λογικής 2ης τάξης. Από την άλλη πλευρά είναι γνωστό από το δεύτερο θεώρημα της μη πληρότητας του Goedel ότι η συνέπεια μιας θεωρίας δεν μπορεί να αποδειχθεί ποτέ μέσα από την ίδια τη θεωρία. Σε ότι αφορά την  $N=$ , υπάρχουν πάντως οι σχετικές εγγυήσεις αφού έχει αποδειχθεί ότι εάν η κλασσική ανάλυση είναι συνεπής τότε και το σύστημα που προκύπτει εάν προσθέσουμε την  $N=$  στη λογική 2ης τάξης είναι συνεπές<sup>14</sup>. Επομένως, επιλέγοντας οι νεολογικιστές την  $N=$  και χρησιμοποιώντας την ως ένα συμπληρωματικό αξίωμα στη λογική 2ης τάξης, αποφεύγουν τον κίνδυνο να καταλήξουν, όπως ο Frege, σε ασυνέπεια. Πώς όμως αντιμετωπίζουν το πρόβλημα του Καίσαρος; Όπως έχουμε ήδη δει, το πρόβλημα είναι γιατί οι οντότητες που ικανοποιούν την  $N=$  δεν είναι οντότητες διάφορες των αριθμών.

Θα μπορούσε να υποστηριχθεί ότι πχ. τα πρόσωπα, όπως ο Ιούλιος Καίσαρ, μπορούν να αποκλειστούν, με βάση το ότι δεν καθορίζονται από γεγονότα που αφορούν 1-1 σχέσεις μεταξύ εννοιών. Η  $N=$  μάλιστα επιβάλλει ότι η ταυτότητα των αριθμών θεμελιώνεται πάνω σε τέτοια γεγονότα. Με αυτόν τον τρόπο θα μπορούσαμε να δώσουμε μια πρώτη απάντηση στο πρόβλημα του Καίσαρος. Ωστόσο, άλλα αντικείμενα δεν μπορούν να αποκλειστούν με βάση την ίδια λογική. Εάν πχ. στη θέση του Καίσαρος τοποθετήσουμε μια κλάση, τα πράγματα αλλάζουν, διότι η ταυτότητα

---

<sup>14</sup>Την συνέπεια του συστήματος της λογικής 2ης τάξης + HP, έχει υποστηρίξει ο Boolos στο Boolos (1998)

των κλάσεων εξαρτάται από γεγονότα που αφορούν 1-1 σχέσεις μεταξύ εννοιών. Τι θα απαντήσουμε τότε; Είναι οι κλάσεις αριθμοί; Και πάλι, η  $N=$  αποδεικνύεται ακατάλληλη να προσδιορίσει ποια αντικείμενα είναι οι αριθμοί. Σύμφωνα με μια άλλη διατύπωση επίσης, η  $N=$  αδυνατεί να απαντήσει στο ερώτημα εάν οι αριθμοί ταυτίζονται με κάποιο ήδη γνωστό είδος αντικειμένων.

Οι Hale και Wright θεωρούν (2001, 389-93) ότι το πρόβλημα του Καίσαρος μεταφράζεται στο ερώτημα κατά πόσον αριθμοί και πρόσωπα ή άλλα αντικείμενα μπορούν να μοιράζονται κριτήρια ταυτότητας. Γι αυτούς, όλα τα αντικείμενα παίρνουν την ιδιαίτερη φύση τους με βάση την πλησιέστερη ειδική έννοια στην οποία υπάγονται. Όλες οι καθαρές ειδικές έννοιες έχουν τα δικά τους κριτήρια ταυτότητας, τα οποία προσειδιάζουν στο αντίστοιχο είδος. Συγχρόνως όμως, δύο ή περισσότερες ειδικές έννοιες μπορεί να μοιράζονται ένα κοινό κριτήριο ταυτότητας όπως πχ. 'τίγρης', 'αιλουροειδές', 'θηλαστικό' και όλες τελικά με την έννοια 'ζώο'. Σε αυτές τις περιπτώσεις, οι επί μέρους ειδικές έννοιες υπάγονται σε μια ευρύτερη κατηγορία. Οι κατηγορίες ορίζονται έτσι ώστε όλες οι υπο-ειδικές έννοιες πραγματικά να μοιράζονται ένα κριτήριο ταυτότητας. Τότε τα αντικείμενα που υπάγονται σε ειδικές έννοιες με διαφορετικά κριτήρια ταυτότητας δεν είναι δυνατό να ανήκουν στην ίδια κατηγορία. Η ειδική έννοια 'τίγρης' μοιράζεται το ίδιο κριτήριο ταυτότητας με την ειδική έννοια 'ζώο' και η ειδική έννοια 'φιλόσοφος' μοιράζεται το ίδιο κριτήριο ταυτότητας με την ειδική έννοια 'πρόσωπο'. Για να υπάγονται δύο ειδικές έννοιες F και G στην ίδια κατηγορία πρέπει τα κριτήρια ταυτότητάς τους είτε να συμπίπτουν είτε τουλάχιστον να υπάγονται σε ένα κοινό κριτήριο ταυτότητας. Κάτι τέτοιο όμως δεν συμβαίνει με τις έννοιες 'αριθμός', 'πρόσωπο', αφού το κριτήριο ταυτότητας αριθμών και το κριτήριο προσωπικής ταυτότητας δεν συμπίπτουν βέβαια αλλά και δεν υπάγονται σε ένα κοινό κριτήριο ταυτότητας. Γι' αυτό μπορεί να υποστηριχθεί ότι οι δύο αυτές ειδικές έννοιες δεν είναι δυνατό να υπαχθούν κάτω από την ίδια κατηγορία και κατά συνέπεια οι αριθμοί δεν μπορεί να είναι πρόσωπα. Μπορούμε όμως να δώσουμε μια οριστική απόδειξη στο ότι δεν μπορεί να υπάρξει κατηγορία που να συμπεριλαμβάνει και τις δύο έννοιες; Σίγουρα όχι αλλά, όπως οι Wright και Hale αναφέρουν χαρακτηριστικά (op.cit 393), δεν υπάρχει επίσης απόδειξη ούτε της αντίθετης άποψης, δεν υπάρχει δηλαδή κατασκευή μιας κατηγορίας που να συμπεριλαμβάνει και τις δύο έννοιες.

Η αντιμετώπιση του προβλήματος του Καίσαρος από τους νεολογικιστές με τον παραπάνω τρόπο αποτελεί μια προσπάθεια διαχωρισμού μεταξύ δύο διαφορετικών οντολογικών κατηγοριών η οποία όμως επιχειρείται ανεξάρτητα από τον έμμεσο ορισμό της έννοιας του αριθμού. Τότε λοιπόν τίθεται το ερώτημα: εάν υπήρχε μέσο προσδιορισμού της ιδιαίτερης οντολογικής κατηγορίας των αριθμών από άλλες οντολογικές κατηγορίες τότε σε τι χρειάζεται η ισοδυναμία  $N=$  ως ορισμός της έννοιας του αριθμού; Ας λάβουμε υπόψη τη βασική θέση των νεολογικιστών ότι η  $N=$  είναι το μέσο το οποίο κάνει γνωστή την ειδική έννοια του αριθμού στον οιονδήποτε ανυποψίαστο περί τους αριθμούς.

Ετσι, από το ένα μέρος οι Hale & Wright επιχειρούν να προσδιορίσουν ως διακριτές τις οντολογικές κατηγορίες του αριθμού και του προσώπου ενώ από το άλλο ισχυρίζονται ότι η  $N=$  είναι ο τρόπος με τον οποίο προσδιορίζεται η έννοια του αριθμού. Αν γνωρίζαμε κάποιον ανεξάρτητο από την  $N=$  τρόπο για να εισαγάγουμε, να ορίσουμε και να εξηγήσουμε τον αριθμό, θα μπορούσαμε ίσως να τον διακρίνουμε από το πρόσωπο. Αλλά, σύμφωνα με τους νεολογικιστές, τον ρόλο εισαγωγής και εξήγησης της έννοιας του αριθμού, τον παίζει η  $N=$ , η οποία, παρ' όλα αυτά, δεν μας πληροφορεί για τη διάκριση του αριθμού από το πρόσωπο. Επομένως, η οποιαδήποτε προσπάθεια διάκρισης μιας ιδιαίτερης κατηγορίας οντοτήτων που αποτελείται από τους αριθμούς από οποιαδήποτε άλλη κατηγορία οντοτήτων δημιουργεί ένα πρόβλημα κυκλικότητας, προσπαθώντας να παρακάμψει την  $N=$ .

Τα πράγματα δείχνουν ότι το πρόβλημα του Καίσαρος από την αρχή της διαπίστωσης του από τον Frege μέχρι σήμερα, αποτελεί ένα πρόβλημα ζωτικής σημασίας για τα προγράμματα του λογικισμού. Αυτό συμβαίνει επειδή αποτελεί ουσιαστικά ένα πρόβλημα ακριβούς προσδιορισμού της έννοιας και της φύσης των αριθμών. Όπως είδαμε, το πρόβλημα αυτό έπαιξε καθοριστικό ρόλο στην πορεία εξέλιξης του προγράμματος του Frege. Οι Hale & Wright επιλέγουν την  $N=$ , έναν έμμεσο (κατά την ερμηνεία τους) ορισμό, για να αποφύγουν τις αντιφάσεις στις οποίες οδηγήθηκε ο Frege με τον εκτασιακού τύπου ορισμό του. Με την επιλογή τους αυτή, ωστόσο, βρίσκονται αντιμέτωποι με ένα πρόβλημα που αφορά τη φύση του έμμεσου ορισμού και το οποίο δυσκολεύονται να επιλύσουν.

Στο σημείο αυτό πρέπει να λάβουμε υπόψη ένα χαρακτηριστικό των έμμεσων ορισμών, το οποίο δεν παρατηρείται στους ρητούς ορισμούς. Το χαρακτηριστικό αυτό περιγράφεται με έμφαση από τον Paul Horwich (1998, 134-5). Ένας έμμεσος



ορισμός θέτει γενικά τις συνθήκες χρήσης του νοήματος ενός νέου όρου για μια γλώσσα, δεν μπορεί όμως να εξασφαλίσει τη μοναδικότητα του νοήματος που αντιστοιχεί σ' αυτόν τον όρο. Εάν το νόημα είναι μοναδικό τότε τα πράγματα βαίνουν καλώς. Υπάρχει όμως περίπτωση να μην συμβαίνει αυτό, δηλαδή να μην προσδιορίζεται το νόημα του νέου όρου κατά μοναδικό τρόπο. Έτσι, ενώ κάποιος επιχειρεί να απομονώσει το μοναδικό νόημα του νέου όρου, τον οποίο ένας έμμεσος ορισμός εισάγει σε μια γλώσσα, είναι δυνατό να διαπιστώσει ότι το νόημα αυτό δεν ορίζεται μονοσήμαντα. Θα παρατηρήσουμε κάτι παρόμοιο το οποίο φαίνεται να ισχύει στην αξιωματικοποίηση της γεωμετρίας από τον Hilbert. Μέσω αυτής, ο Hilbert όρισε (έμμεσα) το 'σημείο', την 'ευθεία' και το 'επίπεδο' με βάση τις σχέσεις που έχουν αυτοί οι όροι, ο ένας προς τον άλλο. Όμως, ένας τέτοιος έμμεσος ορισμός δεν μας λέει για παράδειγμα τι είναι ένα σημείο. Ο Hilbert άφησε μάλιστα ελεύθερο το πεδίο ερμηνείας. Εάν κάποιος αντικαταστήσει πχ. τους όρους «σημείο», «ευθεία» και «επίπεδο» με τους όρους 'τραπέζι', 'καρέκλα' και 'ποτήρι' και υποθεθεί, έστω, ότι τα αξιώματα ισχύουν, τότε θα ισχύουν και τα θεωρήματα. Ακριβώς όμως για αυτόν τον λόγο ο Frege απέφευγε να χαρακτηρίσει ως ορισμό τα αξιώματα του Hilbert. Για τον Frege, ένας ορισμός πρέπει να καθορίζει με μοναδικό τρόπο το νόημα του οριζομένου. Για παράδειγμα, ο ρητός ορισμός «εργένης είναι ένας ανύπανδρος άνδρας» καθορίζει με μοναδικό τρόπο το νόημα του όρου 'εργένης'.

Αυτό λοιπόν το οποίο πρέπει να τονισθεί, είναι ότι το φαινόμενο που παρατηρείται στην περίπτωση της αξιωματικοποίησης της γεωμετρίας από τον Hilbert και άλλων έμμεσων ορισμών, δηλ. το πρόβλημα της μη εξασφάλισης της μοναδικότητας του νοήματος του οριζομένου, δεν διαφέρει πάρα πολύ από το πρόβλημα του Καίσαρος, διότι ούτε η  $N=$  (ο έμμεσος ορισμός της έννοιας του αριθμού) μπορεί να προσδιορίσει κατά μοναδικό τρόπο τι είναι ένας φυσικός αριθμός. Πράγματι, δεν μπορεί να απαντήσει στο ερώτημα αν ένας αριθμός είναι πχ. ο Ιούλιος Καίσαρ. Κατά συνέπεια, το πρόβλημα του Καίσαρος είναι ένα γενικότερο πρόβλημα των έμμεσων ορισμών. Γι αυτό τον λόγο και ο Frege διαπιστώνοντας το πρόβλημα του Καίσαρος, θεώρησε ότι η ισοδυναμία  $N=$  δεν ήταν ένας ικανοποιητικός ορισμός της έννοιας του αριθμού. Οι Hale & Wright, αν και γνωρίζουν βέβαια το πρόβλημα αυτό, δεν ακολούθησαν ωστόσο τον Frege στις περαιτέρω επιλογές του. Χάρη στην  $N=$ , εξασφαλίζουν τη συνέπεια του δικού τους συστήματος, σε αντίθεση με τον Frege ο οποίος έκανε χρήση κλάσεων και οδηγήθηκε σε αντιφάσεις. Από την άλλη όμως πλευρά, οι Hale &

Wright δεν παύουν να οφείλουν μια ικανοποιητική απάντηση στο πρόβλημα του Καίσαρος, το οποίο παραμένει ένα ανοιχτό ζήτημα.

## 8. Συμπεράσματα

Για να ανακεφαλαιώσουμε, ο νεολογικισμός αποτελεί μια δεύτερη προσπάθεια θεμελίωσης της θεωρίας αριθμών στη λογική, αυτή τη φορά στη λογική 2ης τάξης, ταυτόχρονα με την υπεράσπιση της θέσης του πλατωνισμού του Frege ότι οι αριθμοί συνιστούν πραγματικά αντικείμενα. Το πρόγραμμα των Hale & Wright χαρακτηρίζει την ισοδυναμία  $N=$  ως έναν έμμεσο ορισμό της έννοιας του αριθμού, ο οποίος σε συνδυασμό με τη λογική 2ης τάξης αποτελεί τη βάση ενός συνεπούς συστήματος από το οποίο προκύπτουν τα αξιώματα Peano.

Η ρεαλιστική θέση για την ύπαρξη των αριθμών-αντικειμένων αποτελεί συνέπεια της παρουσίας αριθμητικών ενικών όρων μέσα σε αληθείς αριθμητικές εκφράσεις. Γι αυτό το λόγο, τόσο η δικαιολόγηση της συντακτικής λειτουργίας των αριθμητικών όρων ως ενικών όρων όσο και η επιβεβαίωση της αλήθειας της πρότασης  $[Nx:Fx = Nx:Gx]$ , αποτελούν κύριο μέλημα των νεολογικιστών, δεδομένου μάλιστα ότι ως προς αυτά τα δύο σημεία, έχουν διατυπωθεί συγκεκριμένες ενστάσεις. Οι αναφορές των αριθμητικών όρων που εμφανίζονται σε αληθείς αριθμητικές προτάσεις αποτελούν τους αριθμούς-αντικείμενα, όμως τα αντικείμενα αυτά, σύμφωνα με την ερμηνεία του παρόντος άρθρου, δεν είναι αυθύπαρκτα (*sui generis*). Από την άλλη πλευρά, η δυνατότητα αναγωγής των εν λόγω αντικειμένων σε κάποια λογικά γεγονότα δεν ακυρώνει τη ρεαλιστική θέση των Hale & Wright για την πραγματική ύπαρξή τους.

Το θέμα του status της ισοδυναμίας  $N=$  αποτελεί ένα καίριο και ακανθώδες θέμα για το νεολογικισμό. Η  $N=$  συνιστά έμμεσο ορισμό της έννοιας του αριθμού. Ο Frege επέλεξε έναν εκτασιακού χαρακτήρα ορισμό της έννοιας του αριθμού, στον οποίο έκανε χρήση κλάσεων και οδηγήθηκε σε αντίφαση και τελικά σε κατάρρευση του λογικισμού του. Οι Hale & Wright επέλεξαν την ισοδυναμία  $N=$  και τη λογική 2ης τάξης για να στηρίξουν τη δική τους εκδοχή λογικισμού, χωρίς προβλήματα συνέπειας. Ενώ όμως απέφυγαν να εμπλακούν σε προβλήματα αντιφάσεων, βρέθηκαν ενώπιον ενός άλλου παλαιού προβλήματος το οποίο ήδη ο Frege είχε διαπιστώσει σε ότι αφορά τη συγκεκριμένη ισοδυναμία. Το πρόβλημα του Καίσαρος συνιστά την αδυναμία της  $N=$  να απαντήσει στο ερώτημα εάν ένα οποιοδήποτε πράγμα, πχ. ένα

πρόσωπο, είναι αριθμός και κατά συνέπεια αποκαλύπτει ένα έλλειμμα που χαρακτηρίζει την  $N=$  ως ορισμό της έννοιας του αριθμού. Είναι χαρακτηριστικό μάλιστα το ότι οποιαδήποτε προσπάθεια επίλυσης του προβλήματος με βάση τη διάκριση των αντίστοιχων οντολογικών κατηγοριών στις οποίες ένας αριθμός και ένα οποιοδήποτε πράγμα εμπίπτουν, επιστρέφει και πάλι στην  $N=$  με αναπόφευκτο τρόπο, αφού αυτή αποτελεί το μέσο εισαγωγής, εξήγησης και καθορισμού της έννοιας του αριθμού. Η  $N=$  όμως αδυνατεί να μας πληροφορήσει για το αν άλλες οντότητες εμπίπτουν σ' αυτή την έννοια. Πρόκειται ουσιαστικά για ένα πρόβλημα που εμφανίζεται με διάφορες μορφές στους έμμεσους ορισμούς, στην περίπτωση αυτή ωστόσο, συνιστά ένα θέμα ζωτικής σημασίας για την υπόθεση του νεολογικισμού. Δεδομένου ότι η ισοδυναμία  $N=$  συνιστά τον ακρογωνιαίο λίθο του προγράμματος του νεολογικισμού, η αντιμετώπιση του προβλήματος του Καίσαρος στο μέλλον φαίνεται ότι θα επηρεάσει έντονα την περαιτέρω ανάπτυξη και εξέλιξη του ιδιαίτερα φιλόδοξου και πολύ ενδιαφέροντος αυτού εγχειρήματος.

## Βιβλιογραφία

1. Boolos, George (1998), «The Consistency of Frege's Foundations of Arithmetic» στο *G. Boolos, Logic, Logic and Logic*, Cambridge, Mass.: Harvard University Press, 183-201
2. Dummett, Michael (1973), *Frege: Philosophy of Language*, (2nd edition: London: Duckworth, 1981)
3. Dummett, Michael (1991), *Frege: Philosophy of Mathematics*, London: Duckworth
4. Frege, Gottlob (1884), *The Foundations of Arithmetic* (μετ. Ρουσσόπουλου, Γ. (1990), *Τα θεμέλια της Αριθμητικής*, Αθήνα: Νεφέλη)
5. Field, Hartry (1980), *Science without Numbers*, Oxford: Blackwell
6. Field, Hartry (1989), *Realism, Mathematics and Modality*, New York: Blackwell
7. Field, Hartry (1984), «Platonism for Cheap? Crispin Wright on Frege's Context Principle», *Canadian Journal of Philosophy*, 14: 637-62
8. Hale, Bob (1987), *Abstract Objects*, N. York: Blackwell
9. Hale, Bob & Wright, Crispin (2001), *The Reason's Proper Study*, Oxford: Clarendon Press
10. Horwich, Paul (1998), *Meaning*, Oxford: Clarendon Press

11. Parsons, C. (1964), «Frege's Theory of Number», στο Black, M. (1964), *Philosophy in America*, London: Allen & Unwin, 180-203
12. Psillos, Stathis (2005), «Scientific Realism and Metaphysics», *Ratio*.
13. Smiley, T. J. (1981), «Frege and Russell», *Epistemologia*, IV, 53-8
14. Wright, Crispin (1983), *Frege's Conception of Numbers as Objects*, Aberdeen: Aberdeen U.P.