ΙΔΙΟΤΙΜΕΣ

1. Σημείωση. Προς το παρόν, κινούμεθα στο σώμα $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών.

Ένα ***ιδιοδιάνυσμα*** ή ***χαρακτηριστικό διάνυσμα*** ενός πίνακα Α, που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ, είναι εκείνο το μη μηδενικό διάνυσμα **x** το οποίο πληροί την εξίσωση $A\,\mathbf{x} = \lambda\,\mathbf{x}$ (1), για κάποιο μονόμετρο λ. Η εξίσωση (1) οδηγεί στο ομογενές σύστημα $(A - \lambda I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ (2), το οποίο έχει λύση διάφορο της μηδενικής, αν και μόνον αν οι κολώνες του πίνακα $A - \lambda I$ είναι γραμμικά εξαρτημένες (βλέπε §15).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. 1) Η τιμή $\lambda = 2$ είναι ιδιοτιμή του πίνακα $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}$;

Λύση. Σχηματίζουμε την εξίσωση (2): $\begin{bmatrix} 3-2 & 2 \\ 3 & 8-2 \end{bmatrix}\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Οι κολώνες του πίνακα $A - 2I$ είναι τα διανύσματα $\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ και $\begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix}$, που είναι γραμμικά εξαρτημένα. Το 2 είναι, λοιπόν, ιδιοτιμή του πίνακα Α.

2) Το διάνυσμα $\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$ είναι ιδιοδυάνυσμα του πίνακα $A = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -3 & 8 \end{bmatrix}$;

Λύση. Σχηματίζουμε την εξίσωση (2): $\begin{bmatrix} -3-\lambda & 1 \\ -3 & 8-\lambda \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} = \mathbf{0}$, η οποία μας οδηγεί στο σύστημα $\begin{matrix} -3- \lambda + 4 = 0 \\ -3 + 32 - 4\lambda = 0 \end{matrix}$ ή $\begin{matrix} \lambda = 1 \\ 4\lambda = 29 \end{matrix}$ το οποίο είναι αδύνατο. Άρα το $\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$ δεν είναι χαρακτηριστικό διάνυσμα του πίνακα Α.

Μία συνθήκη ικανή και αναγκαία για να είναι οι κολώνες του πίνακα (2) γραμμικά εξαρτημένες, είναι η $\det(A - \lambda I) = 0$. Το ανάπτυγμα της $\det(A - \lambda I)$ είναι ένα πολυώνυμο $p(\lambda)$, n – βαθμού, καλούμενο ***χαρακτηριστικό πολυώνυμο*** του οποίου οι ρίζες (***ιδιοτιμές-χαρακτηριστικές ρίζες***) είναι αυτές που καθιστούν την προηγούμενη συνθήκη αληθή.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. 1) Έστω ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} -1 & 6 & -12 \\ 0 & -13 & 30 \\ 0 & -9 & 20 \end{bmatrix}$. Οι ιδιοτιμές του Α δίδονται από τις ρίζες του πολυωνύμου $p(\lambda) =$

$$\det(A - \lambda I) = \det\begin{pmatrix} -1-\lambda & 6 & -12 \\ 0 & -13-\lambda & 30 \\ 0 & -9 & 20-\lambda \end{pmatrix} = (\lambda + 1)(\lambda - 2)(\lambda - 5).$$

Στην ρίζα $\lambda_1 = -1$, αντιστοιχεί το χαρακτηριστικό διάνυσμα $\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$, όπου

$$\begin{bmatrix} 0 & 6 & -12 \\ 0 & -12 & 30 \\ 0 & -9 & 18 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \mathbf{0}. \text{ Είναι, } \mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Στην ρίζα $\lambda_2 = 2$, αντιστοιχεί το χαρακτηριστικό διάνυσμα $\mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$, όπου

$$\begin{bmatrix} -3 & 6 & -12 \\ 0 & -15 & 30 \\ 0 & -9 & 18 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \mathbf{0}. \text{ Είναι, } \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Στην ρίζα $\lambda_3 = 5$, αντιστοιχεί το χαρακτηριστικό διάνυσμα $\mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$, όπου

$$\begin{bmatrix} -6 & 6 & -12 \\ 0 & -18 & 30 \\ 0 & -9 & 15 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \mathbf{0}. \text{ Είναι, } \mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -5 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

Παρατηρούμε ότι: 1) Το σύνολο $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο, και συνεπώς είναι δυνατόν να χρησιμοποιηθεί ως βάση του $\mathbb{R}^3$.

2) Το πολυώνυμο $\det(A - \lambda I)$ έχει τρεις απλές ρίζες.

3) Κάθε χαρακτηριστικό διάνυσμα παράγει μία ευθεία που διέρχεται από την αρχή του συστήματος αναφοράς.

4) $\mathbb{R}^3 = <\mathbf{x}_1> \oplus <\mathbf{x}_2> \oplus <\mathbf{x}_3>$.

5) $\mathrm{rank}(A - \lambda I) = 3$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. 2) Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 17 & -10 & -5 \\ 45 & -28 & -15 \\ -30 & 20 & 12 \end{bmatrix}$$

είναι το $p(\lambda) = (\lambda + 3)(\lambda - 2)^2$. Οι ιδιοτιμές του A είναι οι $\lambda_1 = -3$ και $\lambda_2 = 2$. Η εξίσωση $(A + 3I)\mathbf{x}_1 = \mathbf{0}$, που αντιστοιχεί στην απλή ρίζα λ_1, δίδει το χαρακτηριστικό διάνυσμα $\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}$. Για την διπλή ρίζα λ_2 έχουμε:

$$(A - 2I)\mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 15 & -10 & -5 \\ 45 & -30 & -15 \\ -30 & 20 & 15 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \mathbf{0}. \text{ Το σύστημα } \begin{matrix} 15x_1 - 10x_2 - 5x_3 = 0 \\ 45x_1 - 30x_2 - 15x_3 = 0 \\ -30x_1 + 20x_2 + 15x_3 = 0 \end{matrix}$$

δίδει $\begin{bmatrix} 15 & -10 & -5 & 0 \\ 45 & -30 & -15 & 0 \\ -30 & 20 & 10 & 0 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 15 & -10 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ απ' όπου $3x_1 = 2x_2 + x_3$,

$x_2 = x_2$, $x_3 = x_3$. Είναι, λοιπόν, $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{2x_2 + x_3}{3} \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} 2/3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 1/3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Στην διπλή ρίζα λ_2 αντιστοιχούν τα ιδιοδιανύσματα $\mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$ και $\mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$.

Παρατηρούμε ότι: 1) Το σύνολο $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο, και συνεπώς είναι δυνατόν να χρησιμοποιηθεί ως βάση του $\mathbb{R}^3$.

2) Το πολυώνυμο $\det(A - \lambda I)$ έχει μία απλή ρίζα και μία διπλή ρίζα.

3) Τα χαρακτηριστικά διανύσματα παράγουν μία ευθεία και ένα επίπεδο, που διέρχονται από την αρχή του συστήματος αναφοράς.

4) $\mathbb{R}^3 = < \mathbf{x}_1 > \oplus < \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3 >$.

5) $\operatorname{rank}(A - \lambda I) = 1$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. 3) Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

είναι το $p(\lambda) = (\lambda - 3)(\lambda - 1)^2$. Οι ιδιοτιμές του A είναι οι $\lambda_1 = 3$ και $\lambda_2 = 1$. Η εξίσωση $(A - 3I)\mathbf{x}_1 = \mathbf{0}$, που αντιστοιχεί στην απλή ρίζα λ_1, δίδει το χαρακτηριστικό διάνυσμα $\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}$. Για την διπλή ρίζα λ_2 έχουμε: $(A - I)\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$

απ' όπου, $\mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Παρατηρούμε ότι: 1) Το σύνολο $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο, και συνεπώς δεν είναι δυνατόν να χρησιμοποιηθεί ως βάση του $\mathbb{R}^3$.

2) Το πολυώνυμο $\det(A - \lambda I)$ έχει μία απλή ρίζα και μία διπλή ρίζα.

3) Τα χαρακτηριστικά διανύσματα παράγουν δύο ευθείες, που διέρχονται από την αρχή του συστήματος αναφοράς.

4) $W = < \mathbf{x}_1 > \oplus < \mathbf{x}_2 > \subset \mathbb{R}^3$, υπόχωρος που παράγεται από τα χαρακτηριστικά διανύσματα.

5) $\operatorname{rank}(A - \lambda I) = 2$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. 4) Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & 4 \end{bmatrix}$$

είναι το $p(\lambda) = (\lambda - 2)^3$. Ο Α έχει μία ιδιοτιμή $\lambda = 2$. Για την μοναδική τριπλή ρίζα λ έχουμε: $(A - I)\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 1 & -3 & 2 \\ 1 & -3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ απ' όπου, $\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ και $\mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Παρατηρούμε ότι: 1) Το σύνολο $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο, και συνεπώς δεν είναι δυνατόν να χρησιμοποιηθεί ως βάση του $\mathbb{R}^3$.

2) Το πολυώνυμο $\det(A - \lambda I)$ έχει μία τριπλή ρίζα.

3) Τα δύο χαρακτηριστικά διανύσματα που προκύπτουν, παράγουν δύο ευθείες, που διέρχονται από την αρχή του συστήματος αναφοράς.

4) $W = < \mathbf{x}_1 > \oplus < \mathbf{x}_2 > \subset \mathbb{R}^3$, υπόχωρος που παράγεται από τα χαρακτηριστικά διανύσματα.

5) $\operatorname{rank}(A - \lambda I) = 1$

2. Ορισμός. Οι ***ιδιόχωροι*** του πίνακα Α, είναι εκείνοι οι υπόχωροι, οι οποίοι παράγονται από τα χαρακτηριστικά μη μηδενικά διανύσματα του Α.
Στην περίπτωση, που ο Α έχει το 0 ως ιδιοτιμή, η εξίσωση $(A - \lambda I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ μετατρέπεται στην $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, η οποία έχει λύση διαφορετική της μηδενικής, αν και μόνον αν $\det A = 0$ οπότε πίνακας Α δεν αντιστρέφεται. Ισχύει συνεπώς η πρόταση,

ΠΡΟΤΑΣΗ. Ο $n \times n$ πίνακας Α είναι αντιστρέψιμος, αν και μόνον αν δεν έχει ιδιοτιμή την $\lambda = 0$.

ΠΡΟΤΑΣΗ. Τα χαρακτηριστικά διανύσματα $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots \mathbf{x}_\rho\}$ του Α, που αντιστοιχούν σε διαφορετικές ιδιοτιμές, αποτελούν σύνολο γραμμικά ανεξάρτητο.
Απόδειξη. Έστω το $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots \mathbf{x}_\rho\}$ γραμμικά εξαρτημένο. Μπορούμε τότε να υποθέτουμε ότι $\mathbf{x}_\kappa = \gamma_1\mathbf{x}_1 + \gamma_2\mathbf{x}_2 + \ldots + \gamma_{\kappa-1}\mathbf{x}_{\kappa-1}$ με $\gamma_i \neq 0,\ 1 \leq i \leq \kappa - 1$ και το σύνολο $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots \mathbf{x}_{\kappa-1}\}$ γραμμικά ανεξάρτητο. Η δράση του πίνακα Α πάνω στο $\mathbf{x}_\kappa$ δίδει την $A\mathbf{x}_\kappa = \gamma_1 A\mathbf{x}_1 + \gamma_2 A\mathbf{x}_2 + \ldots + \gamma_{\kappa-1} A\mathbf{x}_{\kappa-1}$ ή και
$\lambda_\kappa\mathbf{x}_\kappa = \gamma_1\lambda_1\mathbf{x}_1 + \gamma_2\lambda_2\mathbf{x}_2 + \ldots + \gamma_{\kappa-1}\lambda_{\kappa-1}\mathbf{x}_{\kappa-1}$. Έχουμε και τις
$\lambda_i\mathbf{x}_\kappa = \gamma_1\lambda_i\mathbf{x}_1 + \gamma_2\lambda_i\mathbf{x}_2 + \ldots + \gamma_{\kappa-1}\lambda_i\mathbf{x}_{\kappa-1}$, $1 \leq i \leq \kappa$. Άρα και τις
$(\lambda_\kappa - \lambda_i)\mathbf{x}_\kappa = \gamma_1(\lambda_1 - \lambda_i)\mathbf{x}_1 + \gamma_2(\lambda_2 - \lambda_i)\mathbf{x}_2 + \ldots + \gamma_{\kappa-1}(\lambda_{\kappa-1} - \lambda_i)\mathbf{x}_{\kappa-1}$. Για $\lambda_i = \lambda_\kappa$ προκύπτει η $\gamma_1(\lambda_1 - \lambda_\kappa)\mathbf{x}_1 + \gamma_2(\lambda_2 - \lambda_\kappa)\mathbf{x}_2 + \ldots + \gamma_{\kappa-1}(\lambda_{\kappa-1} - \lambda_\kappa)\mathbf{x}_{\kappa-1} = \mathbf{0}$. Το σύνολο $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots \mathbf{x}_{\kappa-1}\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο. Άρα $\gamma_i(\lambda_i - \lambda_\kappa) = \mathbf{0}$ για $1 \leq i \leq \kappa - 1$. Όμως από υπόθεση $\lambda_i - \lambda_\kappa \neq \mathbf{0}$. Άρα για $1 \leq i \leq \kappa - 1$, $\gamma_i = 0$, άτοπο.

Έστω Α τριγωνικός πίνακας. Τα διαγώνια στοιχεία του, είναι και οι ιδιοτιμές του, μια και η ορίζουσα τριγωνικού πίνακα, ισούται με το γινόμενο των διαγωνίων στοιχείων του (βλέπε ενότητα ΟΡΙΖΟΥΣΕΣ)

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. Περίπτωση πίνακα 3×3. Έστω $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix}$. Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο είναι το

$$p(\lambda) = \det\begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} - \lambda & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} - \lambda \end{pmatrix} = (a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda)(a_{33} - \lambda)$$

3. Διαγωνοποίηση πίνακος. Ένας $n \times n$ πίνακας A είναι διαγωνοποιήσιμος, ανν είναι όμοιος προς διαγώνιο πίνακα D. Αν, δηλαδή, υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας P, τέτοιος ώστε $A = PDP^{-1}$.

ΠΡΟΤΑΣΗ. Ο πίνακας A είναι διαγωνοποιήσιμος, ανν έχει n γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα.

Απόδειξη. Κατ' αρχήν υπενθυμίζουμε ότι, (βλέπε ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ §11), αν ο P είναι ο $n \times n$ πίνακας $P = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots \mathbf{u}_n]$, τότε, $AP = [A\mathbf{u}_1, A\mathbf{u}_2, \ldots A\mathbf{u}_n]$ (1).

Επίσης, αν $D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$, τότε, $PD = [\lambda_1\mathbf{u}_1, \lambda_2\mathbf{u}_2, \ldots \lambda_n\mathbf{u}_n]$ (2)

α) Ο A είναι διαγωνοποιήσιμος. Άρα $A = PDP^{-1}$, ή $AP = PD$, ή

$$[A\mathbf{u}_1, A\mathbf{u}_2, \ldots A\mathbf{u}_n] = [\lambda_1\mathbf{u}_1, \lambda_2\mathbf{u}_2, \ldots \lambda_n\mathbf{u}_n]$$

άρα και $A\mathbf{u}_1 = \lambda_1\mathbf{u}_1, A\mathbf{u}_2 = \lambda_2\mathbf{u}_2, \ldots A\mathbf{u}_n = \lambda_n\mathbf{u}_n$. Επειδή ο P αντιστρέψιμος, τα ιδιοδιανύσματα $\mathbf{0} \neq \mathbf{u}_i, 1 \leq i \leq n$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

β) Αν δίδονται τα n γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots \mathbf{u}_n$, μπορούμε να κατασκευάσουμε τον αντιστρέψιμο πίνακα $P = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots \mathbf{u}_n]$ και με τις ιδιοτιμές λ_i τον πίνακα D. Λόγω των (1) και (2) έχουμε την $AP = PD$, δηλαδή, την $A = PDP^{-1}$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. Να διαγωνοποιήσετε τον πίνακα A, αν γίνεται, όπου

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -3 & -5 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Λύση. Το χαρα/κό πολυώνυμο του A είναι το $p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = -\lambda^3 - 3\lambda^2 + 4$ με ρίζες $(\lambda = 1)$ (απλή) και $(\lambda = -2)$ (διπλή). Θα πρέπει στις ιδιοτιμές αυτές να αντιστοιχούν τρία διαφορετικά γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα, που να παράγουν τον $\mathbb{R}^3$. Αν αυτό δεν συμβαίνει, τότε ο A δεν διαγωνοποιήται.

Για $\lambda_1 = 1$, $\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ και για $\lambda_2 = -2$, $\mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{u}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Είναι, λοιπόν,

$\mathbb{R}^3 = <\mathbf{u}_1> \oplus <\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3>$. $P = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ και $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. Να διαγωνοποιήσετε τον πίνακα A, αν γίνεται, όπου

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 \\ -4 & -6 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Λύση. Το χαρα/κό πολυώνυμο του A είναι το $p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = -\lambda^3 - 3\lambda^2 + 4$ με ρίζες $(\lambda = 1)$ (απλή) και $(\lambda = -2)$ (διπλή). Θα πρέπει στις ιδιοτιμές αυτές να αντιστοιχούν τρία διαφορετικά γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα, που να παράγουν τον $\mathbb{R}^3$. Για $\lambda = 1$ λαβαίνουμε το χαρα/κό διάνυσμα $\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Για $\lambda = -2$ λαβαίνουμε το χαρα/κό διάνυσμα $\mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. Τα διανύσματα αυτά δεν αποτελούν βάση για τον $\mathbb{R}^3$. Ο πίνακας A δεν διαγωνοποιήται.

ΠΡΟΤΑΣΗ. Όμοιοι πίνακες έχουν το ίδιο χαρακτηριστικό πολυώνυμο.
Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι οι πίνακες A και B είναι όμοιοι. Τότε, $B = PAP^{-1}$ με $PP^{-1} = I$. Ισχύει ότι $\det(B - \lambda I) = \det(PAP^{-1} - \lambda I) = \det(P(A - \lambda I)P^{-1}) = \det(A - I\lambda)$.

ΠΡΟΤΑΣΗ. Κάθε $n \times n$ πίνακας A, είναι όμοιος προς ένα (άνω) τριγωνικό πίνακα.
Απόδειξη. 1) Για $n = 2$, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$. Έστω λ ιδιοτιμή του A και $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ το ιδιοδιάνυσμα, που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ. Είναι $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \end{bmatrix}$ ή αναλυτικά,

$A\mathbf{x} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \end{bmatrix}$. Θεωρούμε τον πίνακα $Q = [\mathbf{x}, \mathbf{a}]$, που έχει ως κολώνες τα διανύσματα $\mathbf{x}$ και $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix}$, με $\det Q \neq 0$.

Είναι, $Q = \begin{pmatrix} x_1 & \alpha_1 \\ x_2 & \alpha_2 \end{pmatrix}$, $Q^{-1} = \delta^{-1}\begin{pmatrix} \alpha_2 & -\alpha_1 \\ -x_2 & x_1 \end{pmatrix}$, με $\delta = \det Q$. Υπολογίζουμε το γινόμενο

$$AQ = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 & \alpha_1 \\ x_2 & \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 & a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 & a_{21}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 & a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 \\ \lambda x_2 & a_{21}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 \end{pmatrix}$$

ή $AQ=\begin{pmatrix}\lambda x_1 & \beta_1\\ \lambda x_2 & \beta_2\end{pmatrix}$, όπου $\beta_1=a_{11}\alpha_1+a_{12}\alpha_2$, $\beta_2=a_{21}\alpha_1+a_{22}\alpha_2$.

Στην συνέχεια υπολογίζουμε το γινόμενο

$$Q^{-1}AQ=\frac{1}{\delta}\begin{pmatrix}\alpha_2 & -\alpha_1\\ -x_2 & x_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda x_1 & \beta_1\\ \lambda x_2 & \beta_2\end{pmatrix}=\frac{1}{\delta}\begin{pmatrix}\lambda\alpha_2 x_1-\lambda\alpha_1 x_2 & \alpha_2\beta_1-\alpha_1\beta_2\\ 0 & -x_2\beta_1+x_1\beta_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda & \gamma_1\\ 0 & \gamma_2\end{pmatrix}$$

2) Ερχόμαστε, τώρα, στην γενική περίπτωση.

Έστω $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n$ οι ιδιοτιμές του πίνακα A. Σχηματίζουμε έναν πίνακα Q_1, που έχει σαν πρώτη κολώνα το ιδιοδιάνυσμα $\mathbf{x}_1$, και έχει $\det Q_1\neq 0$. Εκτελούμε την πράξη $Q_1^{-1}AQ_1$ και καταλήγουμε σε ένα πίνακα που η πρώτη κολώνα του έχει την μορφή $\begin{bmatrix}\lambda_1\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{bmatrix}$. Είναι, λοιπόν $Q_1^{-1}AQ_1=\begin{pmatrix}\lambda_1 & \gamma_1\\ 0 & \Gamma_1\end{pmatrix}=A_1$. Οι πίνακες A και A_1 ως όμοιοι, έχουν τις ίδιες ιδιοτιμές. Θεωρούμε, τώρα, τον $(n-1)\times(n-1)$ πίνακα Γ_1 του οποίου οι ιδιοτιμές είναι φανερά οι $\lambda_2,\dots,\lambda_n$, και εφαρμόζουμε και σ' αυτόν την προηγούμενη διαδικασία. Μετά από n βήματα, ο A έχει μετατραπεί σε όμοιο άνω τριγωνικό πίνακα.

ΘΕΩΡΗΜΑ (Cayley Hamilton). Κάθε τετραγωνικός πίνακας πληροί την χαρακτηριστική του εξίσωση.

Απόδειξη. Όμοιοι πίνακες έχουν ίδιες ιδιοτιμές και συνεπώς ίδια χαρακτηριστική εξίσωση. Αρκεί συνεπώς το Θεώρημα να ισχύει για άνω τριγωνικό πίνακα A. Όπως όμως είδαμε προηγουμένως, τα διαγώνια στοιχεία ενός άνω τριγωνικού πίνακα, είναι οι ιδιοτιμές του. Είναι, λοιπόν, (ενδεχομένως μερικές ρίζες είναι πολλαπλές),

$$A=\begin{pmatrix}\lambda_1 & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ 0 & \lambda_2 & \dots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n\end{pmatrix}$$

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα A είναι $p(x)=(x-\lambda_1)(x-\lambda_2)\cdots(x-\lambda_n)$. Στο πολυώνυμο $p(x)$, αντιστοιχεί το $p(A)=(A-\lambda_1 I)(A-\lambda_2 I)\cdots(A-\lambda_n I)$. Όμως ο πίνακας $A-\lambda_i I$ έχει στην θέση $a_{ii}=\lambda_i-\lambda_i=0$.

Άρα ο πίνακας $p(A)=\prod_{1\le i\le n}(A-\lambda_i I)=0$. (Πράγματι, για δύο 2×2 πίνακες αυτής της μορφής, $\begin{pmatrix}0 & a_{21}\\ 0 & a_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_{11} & b_{12}\\ 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, για τρείς 3×3 πίνακες αυτής της μορφής είναι, $\begin{pmatrix}0 & a_{12} & a_{13}\\ 0 & a_{21} & a_{23}\\ 0 & 0 & a_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_{11} & b_{12} & b_{13}\\ 0 & 0 & b_{23}\\ 0 & 0 & b_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_{11} & c_{12} & c_{13}\\ 0 & c_{22} & c_{23}\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}=$

$$\begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{21} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11}c_{11} & b_{11}c_{12}+b_{12}c_{22} & b_{11}c_{13}+b_{12}c_{23} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ κ.ο.κ.)}$$

Ισχύει λοιπόν ότι, $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $p(A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$.